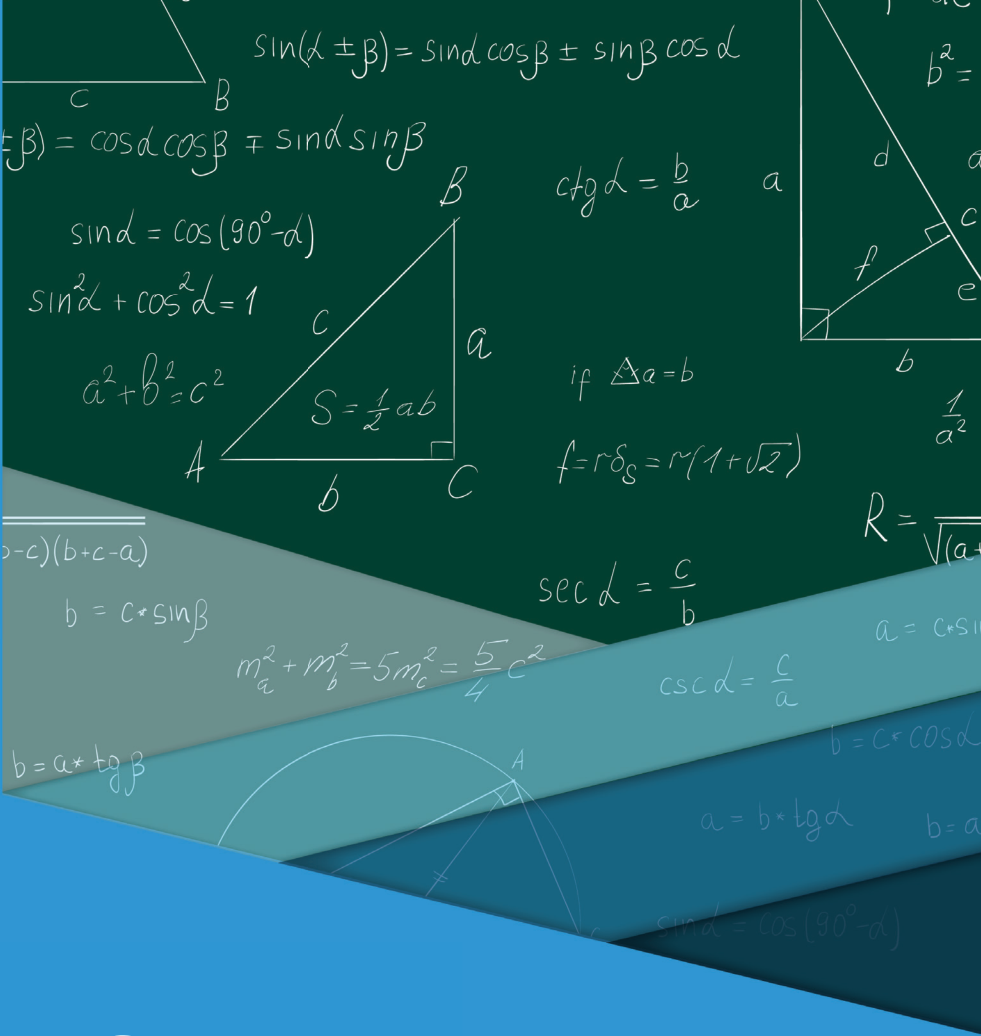


Geometria plana

Geometria plana

Ednaldo Alves Frezza
Junior Francisco Dias

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Frezza, Ednaldo Alves
F896g Geometria plana / Ednaldo Alves Frezza, Junior Francisco Dias. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2017.
224 p.

ISBN 978-85-8482-927-9

1. Geometria plana. I. Dias, Junior Francisco. II. Título.

CDD 513.1

2017
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Palavras do autor

Querido aluno, seja muito bem-vindo à disciplina *Geometria Plana*!

Convidamos você, neste momento, a observar tudo ao seu redor e vislumbrar as diversas formas geométricas presentes em nosso cotidiano. Em alguns casos, elas provêm da própria natureza e em outros foram idealizadas e produzidas pelo ser humano.

A denominação Geometria vem do Grego e significa medida da terra. Entretanto, civilizações mais antigas (egípcios e babilônios) já faziam uso dela, de forma empírica (sem formalismo), para marcar as suas terras e arrecadar impostos. Curiosamente, mesmo com os milhares de anos que nos separam dessas civilizações, essas ainda são duas importantes aplicações da geometria.

No decorrer do tempo, os estudiosos foram corrigindo equívocos cometidos pelo empirismo. Os egípcios, por exemplo, não calculavam corretamente as áreas de todas as formas geométricas. Somente com o formalismo, realizado principalmente pelos gregos, é que houve essas correções. Nos ocuparemos aqui em estudar a geometria de modo formal.

Salientamos a importância da sua autonomia nesta caminhada. Você deve fazer das suas horas de estudo momentos agradáveis, de descoberta, exercitando a criatividade e proporcionando uma aprendizagem significativa. Podendo, desta forma, apropriar-se dos conhecimentos da Geometria Plana para leitura e representação da realidade, associando formas reais a figuras geométricas planas, compreendendo suas propriedades e aplicabilidades, permitindo a construção das figuras geométricas e a realização de cálculos precisos para obter comprimentos, áreas e ângulos.

Na Unidade 1, você estudará as noções primitivas e segmentos de reta, ângulos e triângulos. Já na Unidade 2, os estudos serão sobre os conteúdos de retas, quadriláteros e pontos notáveis do triângulo e polígonos. Na Unidade 3, os conhecerá circunferência e círculo, ângulos na circunferência e os teoremas de Tales e Pitágoras. Por fim, na Unidade 4, você aprenderá sobre comprimento da circunferência e perímetro, além de áreas de polígonos, círculos e suas partes.

E, assim, convidamos você a protagonizar a construção da sua própria jornada, então desejamos muito sucesso nesta empreitada.

Conceitos básicos de Geometria Plana

Convite ao estudo

Os conceitos de Geometria Plana podem ser agregados à aprendizagem de diversas áreas do conhecimento. Especificamente nesta unidade, a sua aprendizagem se desenvolverá sobre os elementos primitivos (ponto, reta e plano), conceitos que podemos imaginar, entretanto não possuam uma definição formal. Assim, será possível entender os segmentos e as semirretas, os conceitos de colinearidade, adjacência, congruência e comparação e, além disso, a adição de segmentos, ponto médio, medidas e distâncias.

Dessa forma será desenvolvida a sua aprendizagem, que lhe proporcionará diversos conhecimentos. Entre eles, serão explanados os conceitos de regiões convexas e côncavas, semiplanos e ângulos consecutivos, adjacentes e opostos pelo vértice. Você também aprenderá o que são ângulos congruentes, a medir, adicionar e classificar ângulos e, também, o que é a bissetriz de um ângulo. Serão definidos triângulos, seus elementos e classificações. Poderá também saber o que são triângulos congruentes, mediana, bissetriz interna e desigualdades nos triângulos.

Quanto conteúdo, não é mesmo? Muitas vezes passamos despercebidos pelas suas existências e principalmente pelas suas aplicações no dia a dia. Entretanto, esses conceitos estão presentes em pequenos e grandes projetos e fazem parte de todas as ocupações profissionais e pessoais.

Em decorrência da sua aprendizagem, convidamos você a imaginar-se um funcionário público, aprovado em um concurso em uma pequena cidade graças a seus conhecimentos matemáticos. Na região onde mora e trabalha, você presta serviços para a população de agricultores, pescadores e comunidades tradicionais como parte de um projeto da prefeitura para aumentar a produtividade das famílias e melhorar a infraestrutura das comunidades rurais.

Você utilizará seus conhecimentos de Geometria Plana para determinar as distâncias ideais em linha reta entre três quebra-molas que serão construídos em uma estrada rural. Depois você precisa ajudar uma comunidade a desenvolver uma estratégia para aumentar o número de peixes pescados por meio de suas técnicas tradicionais. Por fim, você auxiliará uma família de agricultores a determinar um sistema eficiente de irrigação para uma horta ao redor de um poço. Logicamente, você também precisa confeccionar um relatório de suas atividades diárias para fins de registro.

Seção 1.1

Noções primitivas e segmentos de reta

Diálogo aberto

Nesta seção, você aprenderá noções primitivas e segmentos de reta e verá aplicações dos seus conceitos em situações matemáticas, como o cálculo de distâncias.

Lembre-se de que estudaremos esses conceitos nos colocando no lugar de um funcionário da prefeitura de uma pequena cidade. Na primeira tarefa, você acompanhará a construção de uma estrada rural, utilizada pelos moradores da região, principalmente agricultores, para transportar produtos das suas lavouras até as cooperativas e pontos de comercialização. Para garantir a segurança do tráfego, a estrada está sendo construída com base em um projeto desenvolvido por um engenheiro especialista no assunto, que realizou diversas análises sobre as medidas, considerando fatores de risco, velocidade do tráfego de veículos, entre outros aspectos.

Um dos itens destacados pelo engenheiro foi a construção de quebra-molas para atuarem como redutores de velocidade em um trecho de estrada reta, garantindo a segurança dos transeuntes. Nas anotações do projeto, estava especificado que:

- A distância de um dos quebra-molas, denominado *M*, até outro, denominado *R*, é três vezes a distância entre *R* e o quebra-molas *L*.
- A distância entre os quebra-molas *M* e *L* é de 640 m.

Como você utilizaria os seus conhecimentos a fim de resolver este problema e construir os quebra-molas em suas posições corretas? Qual é a distância entre eles?

Convidamos você a apreciar o material disponível para os seus estudos nesta seção, aproveitando-o ao máximo em favor de sua aprendizagem.

Não pode faltar

Ponto, reta e plano

Por volta do ano 300 a.C., Euclides de Alexandria formalizou a Geometria Plana e a organizou em definições $\rightarrow$ axiomas $\rightarrow$ teoremas.

Consequentemente, foram acrescentados a esta sequência os elementos primitivos, então a Geometria Plana formalizou-se da seguinte maneira: elementos primitivos → definições → axiomas → teoremas.

Os <u>elementos primitivos</u> são "objetos matemáticos" que não conseguimos definir, mas que são declarados existentes. Na Geometria Plana os chamamos de **ponto**, **reta** e **plano**, e os caracterizamos de acordo com os nossos conhecimentos adquiridos por meio da observação e de experiências de vida. Fazemos as representações desses elementos por letras do nosso alfabeto e do alfabeto grego.

Assimile

Figura 1.1 | Elementos primitivos

Elemento Primitivo	Notação	Representação
Ponto	$A, B, C, \ldots$	•A
Reta	$a, b, c, \ldots$	——— r
Plano	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	β

Fonte: elaborada pelo autor.

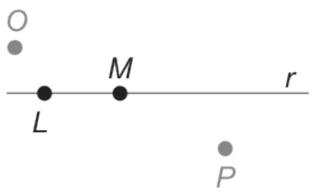
O ponto não tem largura, espessura ou comprimento. A reta possui comprimento, mas não tem largura, espessura (estende-se ao longo de uma dimensão espacial). Já o plano possui comprimento e largura, mas não tem espessura (estende-se ao longo de duas dimensões espaciais).

Quando Euclides formalizou a Geometria Plana, criou postulados, ou seja, leis que os elementos primitivos devem satisfazer e, em geral, elas são compreendidas de forma intuitiva e ajudam a caracterizar o ponto, a reta e o plano.

Postulado da existência

Afirma que em uma reta, e fora dela, existem infinitos pontos.

Figura 1.2 | Representação geométrica da reta e de pontos pertencentes e não pertencentes a ela



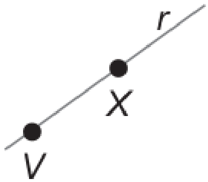
Fonte: elaborada pelo autor.

Este postulado contempla também que um plano contém infinitos pontos.

Postulado da determinação da reta

Em dois pontos diferentes, V e X, passa somente uma reta. A indicamos, por exemplo, por $\overleftrightarrow{VX}$. Vale lembrar-se de que uma única reta é equivalente a duas retas coincidentes.

Figura 1.3 | Representação geométrica da reta $\overleftrightarrow{VX}$

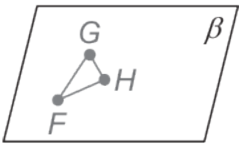


Fonte: elaborada pelo autor.

Postulado da determinação do plano

Para determinarmos um plano, ele precisa conter pelo menos três pontos não colineares, ou seja, não pertencentes à mesma reta. De acordo com a Figura 1.4, o plano β é o único que passa por F, G e H e esses pontos determinam o plano.

Figura 1.4 | Postulado de determinação do plano



Fonte: elaborada pelo autor.

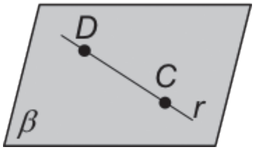
Postulado da inclusão

"Se uma reta tem dois pontos distintos em um plano, então a reta está contida nesse mesmo plano" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 4). Do postulado tem-se que os pontos C e D são diferentes e pertencem à reta r, que está contida no plano β, conforme observado na Figura 1.5. De acordo com o postulado da inclusão, a reta $r = \overleftrightarrow{CD}$ possui todos os seus pontos no plano β.

Em relação aos elementos primitivos, ponto e reta, queremos destacar algumas constatações:

- Na existência de dois pontos, ou eles são distintos ou são coincidentes.
- Dados um ponto e uma reta, ou o ponto pertence à reta ou ele não pertence à reta.
- Quando os pontos são colineares, isso quer dizer que eles pertencem à mesma reta.

Figura 1.5 | Representação geométrica do postulado da inclusão



Fonte: elaborada pelo autor.

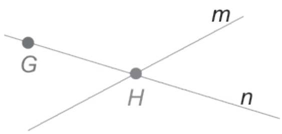
Reflita

Usando quatro pontos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?

Definimos **retas concorrentes** por duas retas com apenas um ponto comum.

No entanto, como é possível garantir a sua existência? Pelo postulado da existência, é possível garantir que exista a reta, um ponto pertencente a ela e ainda um ponto fora dela. Vamos supor, então, que exista uma reta *m*, um ponto *H* pertencente a esta reta e um ponto *G* fora dela. Esses três objetos são garantidos pelo postulado da existência. De acordo com Dolce e Pompeo (2013, p. 5), pelo postulado da existência, tomamos uma reta *m*, um ponto *H* em *m* $(H \in m)$ e um ponto *G* fora da reta *m* $(G \notin m)$. Os pontos *H* e *G* são distintos, pois um deles pertence à reta *m* e o outro não.

Figura 1.6 | Representação geométrica, retas concorrentes *m* e *n*



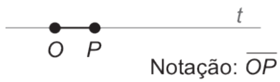
Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo postulado da determinação, é possível construir uma reta *n* passando pelos pontos *G* e *H*, determinando, assim, uma reta concorrente, que possui um ponto comum (ponto *H*) com a reta *m*. Entretanto, a reta *m* não é igual à reta *n*, uma vez que o ponto *G* pertence à reta *n*, mas não pertence à reta *m*, conforme pode-se observar na Figura 1.6. Dolce e Pompeo (2013) contemplam que, pelo postulado da determinação, considerando a reta *n*, determinada pelos pontos *H* e *G* ($n = \overleftrightarrow{HG}$), temos que *m* e *n* são distintas, pois, se coincidissem, o ponto *G* estaria em *m* (e ele foi construído fora de *m*) e o ponto *H* pertence a duas. Logo, elas são concorrentes.

Segmento de reta

Informalmente dizemos que segmento de reta é um pedaço de reta com começo e fim. Desta forma, dada uma reta *t* e dois pontos distintos (*O* e *P*) sobre a reta, o conjunto de pontos localizados entre *O* e *P*, inclusive os próprios, recebe o nome de **segmento de reta**.

Figura 1.7 | Segmento de reta



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

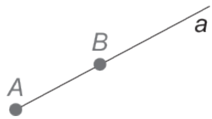
Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 8).

Semirreta

Dizemos informalmente que a semirreta é uma parte da reta limitada por apenas um ponto qualquer. De acordo com Manfio (2016, p. 5), "dados dois pontos, *A* e *B*, a semirreta de origem *A*, contendo o ponto *B*, é o conjunto dos pontos do segmento *AB*, unido com todos os pontos *C*, tais que *B* está entre *A* e *C*".

Na Figura 1.8, temos a semirreta com extremo em *A* e que passa pelo ponto *B*, sendo representada por $\overrightarrow{AB}$.

Figura 1.8 | Semirreta

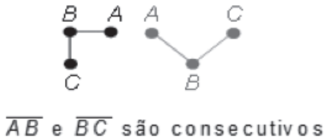


Fonte: elaborada pelo autor.

Segmentos consecutivos

Dois segmentos de reta são consecutivos se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro (uma extremidade de um coincide com a extremidade do outro), conforme Figura 1.9 (DOLCE; POMPEO, 2013).

Figura 1.9 | Segmentos consecutivos

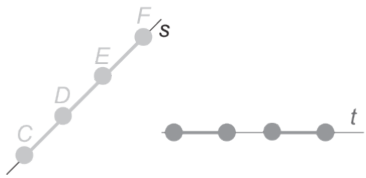


Fonte: elaborada pelo autor.

Segmentos colineares

Chamamos dois segmentos de <u>colineares</u> se, e somente se, eles estiverem na mesma reta. Eles podem ser colineares e consecutivos e também colineares não consecutivos, conforme ilustra a Figura 1.10.

Figura 1.10 | Segmentos colineares



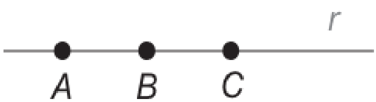
Fonte: elaborada pelo autor.

Segmentos adjacentes

São segmentos, necessariamente, consecutivos e colineares, com apenas uma extremidade em comum. Ou seja, não existem pontos internos comuns entre eles.

Na Figura 1.11, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são adjacentes, ou seja, consecutivos, colineares e possuem apenas um ponto em comum (o ponto B).

Figura 1.11 | Segmentos adjacentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

- Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares?
- Se dois segmentos são adjacentes, então eles são colineares?

Segmentos congruentes

Quando dois ou mais segmentos de reta possuem o mesmo comprimento, os chamamos de congruentes. De acordo com Dolce e Pompeo (2013), a congruência (≡) do segmento é uma noção primitiva a satisfazer os seguintes postulados:

1º) Reflexiva - Todo segmento é congruente a si mesmo: $\overline{UV} \equiv \overline{UV}$.

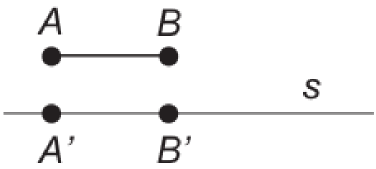
2º) Simétrica - Se $\overline{WX} \equiv \overline{YZ}$, então $\overline{YZ} \equiv \overline{WX}$.

3º) Transitiva - Se $\overline{UV} \equiv \overline{WX}$ e $\overline{WX} \equiv \overline{YZ}$, então $\overline{UV} \equiv \overline{YZ}$.

Comparação de segmentos

Para compararmos dois segmentos, devemos utilizar como recurso o postulado do transporte de segmentos, no qual, de acordo com Dolce e Pompeo (2013), dado um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta de origem *A'*, existe sobre esta semirreta um único ponto *B'*, tal que $\overline{A'B'}$ seja congruente a $\overline{AB}$.

Figura 1.12 | Comparação de segmentos

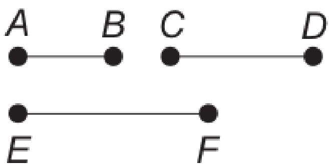


Fonte: elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

Os segmentos a seguir não possuem escala de medida.

Figura 1.13 | Segmentos sem escala



Fonte: elaborada pelo autor.

Utilize um compasso e compare-os com o segmento $\overline{PQ}$ da Figura 1.14.

Figura 1.14 | Segmento $\overline{PQ}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Avalie se são maiores, menores ou congruentes.

Adição de segmentos

Dada uma reta *r* e um segmento de reta $\overline{OQ}$ sobre esta reta e sendo *P* um ponto entre os pontos *O* e *Q*, então temos que o segmento $\overline{OQ}$ é a soma dos segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{PQ}$.

Figura 1.15 | Adição de segmentos

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ}$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Ponto médio de um segmento

Dado um segmento $\overline{CD}$, dizemos que *M* é o ponto médio dele se, e somente se, o ponto *M* estiver entre os pontos *C* e *D* e, além disso, $\overline{CM}$ for congruente à $\overline{MD}$ $\left(\overline{CM} \equiv \overline{MD}\right)$.

Figura 1.16 | Ponto médio

Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Verifique a demonstração do teorema da existência e a unicidade do ponto médio de um segmento (teorema 3.1.5) no material *Fundamentos da Geometria*. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf> Acesso em: 05 out. 2017.

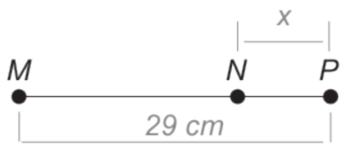
Medida e distância

Dado um segmento $\overline{AB}$, a sua **medida** é o comprimento estabelecido entre os extremos *A* e *B*. Indicamos essa medida por $m(\overline{AB})$ ou *AB*. Sendo *A* e *B* pontos distintos, chamamos de **distância entre *A* e *B*** a medida do segmento $\overline{AB}$ e fazemos a sua indicação por $d_{A,B}$.

Exemplificando

1 - Sabendo que $m(\overline{MN})$ é 22 cm, determine o valor de x na situação representada na Figura 1.17.

Figura 1.17| Determinando $m(\overline{NP})$



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução:

Observando a situação, podemos perceber que:

1º) $m(\overline{NP}) = x$

2º) $m(\overline{MP}) = 29$

3º) $m(\overline{MN}) + m(\overline{NP}) = 29$

No enunciado, temos que $m(\overline{MN}) = 22$. Após coletar todos os dados do exercício, é possível verificar que, fazendo as devidas substituições em $m(\overline{MN}) + m(\overline{NP}) = 29$, determina-se o valor de x. E assim temos:

$$m(\overline{MN}) + m(\overline{NP}) = 29$$

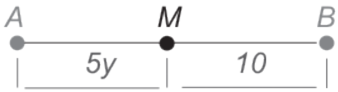
$$22 + x = 29$$

$$x = 29 - 22$$

Portanto, neste caso, o valor de x é de 7 cm.

2 – Observe a situação a seguir e responda qual é o valor de y e de $m(\overline{AB})$ tendo *M* como o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Figura 1.18 | Medida de segmentos



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução:

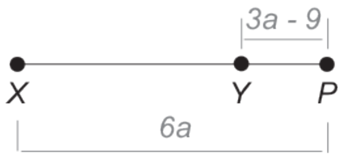
O ponto médio divide o segmento em outros dois congruentes. Sendo assim, podemos perceber que $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$. Logo, se $m\left(\overline{MB}\right) = 10$, temos também que $m\left(\overline{AM}\right) = 10$. E assim concluímos que $y = 2$

Portanto, $m\left(\overline{AB}\right) = 20$.

Faça você mesmo

1 – Observe a situação a seguir e determine o valor de $m\left(\overline{XP}\right)$, sabendo que $m\left(\overline{XY}\right) = 51$.

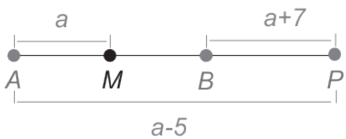
Figura 1.19 | Comprimento de segmentos



Fonte: elaborada pelo autor.

2 – Quais são os de $m\left(\overline{AB}\right)$ e $m\left(\overline{PA}\right)$ na Figura 1.20, sabendo que *M* é o ponto médio de $\overline{AB}$ e que $m\left(\overline{AM}\right) = a$?

Figura 1.20 | Medida de segmentos



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Para aprofundar sua aprendizagem, consulte o material disponível em: <http://<http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 05 out. 2017.

Entre as páginas 1 e 7, você encontrará um material que subsidiará o que você estudou até aqui.

Sem medo de errar

Relembre que no início desta seção propomos um problema do dia a dia do funcionário da prefeitura de uma pequena cidade, que neste momento está acompanhando o andamento de uma obra. Fazer um esboço geométrico da situação a ser resolvida é uma boa forma para entender e determinar o que se pede. Neste caso, é possível utilizar, como recursos, lápis e papel, a fim de associar os quebra-molas e as distâncias entre eles com elementos da Geometria Plana. Desta forma, vamos imaginar que a localização de cada quebra-molas possa ser associada a um ponto, um dos elementos primitivos da Geometria Plana. No caso, o próprio engenheiro que elaborou o projeto já fez isso, nomeando os quebra-molas com *M*, *R* e *L*. Vale lembrar-se de que os conceitos aprendidos no decorrer da seção serão fundamentais para encontrar a solução. A proposta é determinar as distâncias em linha reta entre os quebra-molas. Chamaremos a menor distância de *x* e, assim, teremos $m\left(\overline{RL}\right)=x$.

Note, entretanto, que a indicação do engenheiro permite duas possibilidades, que analisaremos a seguir:

1ª) *R* está entre *M* e *L*.

Figura 1.21 | Ponto *R* entre o ponto *M* e o ponto *L*

Fonte: elaborada pelos autores.

De acordo com a Figura 1.21, podemos perceber que:

$$m\left(\overline{MR}\right)+m\left(\overline{RL}\right)=m\left(\overline{ML}\right)$$

$$m\left(\overline{MR}\right)=3x$$

$$m\left(\overline{RL}\right)=x$$

$$m\left(\overline{ML}\right)=640$$

Realizando as substituições na primeira relação, temos:

$$m\left(\overline{MR}\right)+m\left(\overline{RL}\right)=m\left(\overline{ML}\right)$$

$$3x+x=640$$

$$4x = 640$$

$$x = 160$$

Como $m\left(\overline{RL}\right) = x$ e $m\left(\overline{MR}\right) = 3x$, segue que $m\left(\overline{RL}\right) = 160$ e $m\left(\overline{MR}\right) = 480$.

Portanto a distância entre o quebra-molas *M* e o quebra-molas *R* é 480 m e a distância entre o quebra-molas *R* e o quebra-molas *L* é 160 m.

2ª) *L* está entre *M* e *R*.

Figura 1.22 | Ponto *L* entre o ponto *M* e o ponto *R*

Fonte: elaborada pelos autores.

De acordo com a Figura 1.22, podemos perceber que:

$$m\left(\overline{ML}\right) + m\left(\overline{LR}\right) = m\left(\overline{MR}\right)$$

$$m\left(\overline{MR}\right) = 3x$$

$$m\left(\overline{LR}\right) = x$$

$$m\left(\overline{ML}\right) = 640$$

Substituindo, fazemos:

$$m\left(\overline{ML}\right) + m\left(\overline{LR}\right) = m\left(\overline{MR}\right)$$

$$640 + x = 3x$$

$$2x = 640$$

$$x = 320$$

Como $m\left(\overline{LR}\right) = x$ e $m\left(\overline{MR}\right) = 3x$, segue que $m\left(\overline{LR}\right) = 320$ e $m\left(\overline{MR}\right) = 960$.

Portanto a distância entre o quebra-molas *M* e o quebra-molas *R* é 960 m, assim como a distância entre o quebra-molas *L* e o quebra-molas *R* é 320 m.

Agora que o problema está resolvido, resta a você incluir em seu relatório que a descrição feita no projeto pelo engenheiro pode gerar dupla interpretação, sendo necessário ajuste.

Avançando na prática

Distância entre obstáculos

Descrição da situação-problema

Imagine que você é técnico de atletismo em um campus universitário e que precisa preparar a sua equipe para uma competição interestadual, em que a principal prova para classificação consiste em os atletas saltarem quatro obstáculos adjacentes, que estarão dispostos da seguinte maneira:

- A distância entre o 1º e o 2º obstáculo é o triplo da distância entre o 2º e o 3º obstáculo.
- A distância entre o 2º e o 3º obstáculo é o dobro da distância entre o 3º e o 4º obstáculo.
- A distância entre o 1º e o 4º obstáculo é de 720 metros.

De acordo com essas informações, quais seriam as distâncias entre os obstáculos para que você pudesse disponibilizá-los exatamente da mesma forma que a prova oficial nos momentos de treinamento da sua equipe?

Resolução da situação-problema

Como os obstáculos são adjacentes, ou seja, consecutivos e colineares, eles terão uma disposição em segmentos de reta. Atribuindo letras para os obstáculos, chamaremos o 1º obstáculo de *W*, o 2º obstáculo de *X*, o 3º obstáculo de *Y* e o 4º obstáculo de *Z*. Com isso, de acordo com o proposto, formamos os segmentos $\overline{WX}$, $\overline{XY}$ e $\overline{YZ}$. E ainda:

$$m\left(\overline{WX}\right) = 3 \cdot m\left(\overline{XY}\right)$$

$$m\left(\overline{XY}\right) = 2 \cdot m\left(\overline{YZ}\right)$$

Destas relações, temos:

$$m\left(\overline{WX}\right) = 3 \cdot m\left(\overline{XY}\right)$$

$$m\left(\overline{WX}\right) = 3 \cdot \left(2 \cdot m\left(\overline{YZ}\right)\right)$$

$$m\left(\overline{WX}\right) = 6 \cdot m\left(\overline{YZ}\right)$$

E também de acordo com as informações dadas, é possível perceber que a soma das medidas dos segmentos é igual a 720 m, uma vez que o primeiro ponto (obstáculo) é o *W* e o último é o *Z*, ou seja, $m\left(\overline{WZ}\right) = 720$ E assim conclui-se que $m\left(\overline{WX}\right) + m\left(\overline{XY}\right) + m\left(\overline{YZ}\right) = 720$.

Fazemos as devidas substituições e encontramos:

$$m\left(\overline{WX}\right) + m\left(\overline{XY}\right) + m\left(\overline{YZ}\right) = 720$$

$$6 \cdot m\left(\overline{YZ}\right) + 2 \cdot m\left(\overline{YZ}\right) + m\left(\overline{YZ}\right) = 720$$

$$9 \cdot m\left(\overline{YZ}\right) = 720$$

$$m\left(\overline{YZ}\right) = 80 \text{ m}$$

$$m\left(\overline{WX}\right) = 6 \cdot m\left(\overline{YZ}\right)$$

$$m\left(\overline{WX}\right) = 6 \cdot 80$$

$$m\left(\overline{WX}\right) = 480 \text{ m}$$

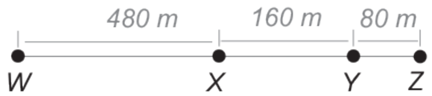
$$m\left(\overline{XY}\right) = 2 \cdot m\left(\overline{YZ}\right)$$

$$m\left(\overline{XY}\right) = 2 \cdot \overline{YZ}$$

$$m\left(\overline{XY}\right) = 160 \text{ m}$$

Podemos, então, representar geometricamente os obstáculos como na Figura 1.23:

Figura 1.23 | Representação geométrica dos obstáculos



Fonte: elaborada pelos autores.

Faça valer a pena

1. Pelo postulado da existência, se tomarmos uma reta *r* e dois pontos *P* e *Q*, com $P \in r >$ e $Q \notin r$, teremos dois pontos distintos, uma vez que um deles pertence à reta e ou outro não. Pelo postulado da determinação, considerando outra reta, denominada *s*, determinada pelos pontos *P* e *Q* $\left(s = \overleftrightarrow{PQ}\right)$, ela será distinta da reta *r*, uma vez que o ponto *Q* pertence a ela e não pertence à reta *r*. De acordo com os dois postulados, se essas retas fossem representadas geometricamente, elas teriam apenas um ponto comum.

Desta forma, em relação às retas *r* e *s*, é correto afirmar que são retas:

a) Coincidentes.

b) Paralelas.

c) Concorrentes.

d) Consecutivas.

e) Congruentes.

2. Dada uma reta v e dois pontos distintos (*O* e *P*) sobre ela, o conjunto de pontos localizados entre os pontos (*O* e *P*), inclusive os próprios, recebe o nome de segmento de reta. Se tomarmos um ponto *M*, entre os extremos do segmento $\overline{OP}$ sobre a reta *v*, de maneira a formar dois segmentos congruentes $\overline{OM}$ e $\overline{MP}$, dizemos que *M* é o ponto médio do segmento $\overline{OP}$.

Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta e *M* o seu ponto médio. Considerando um ponto P entre os pontos *A* e *M*, qual é o comprimento do segmento $\overline{PM}$, sabendo que $m\left(\overline{AB}\right) = 80$ cm e que o comprimento de $\overline{MB}$ é o quadruplo do comprimento de $\overline{PM}$?

a) 5 cm.

b) 10 cm.

c) 15 cm.

d) 20 cm.

e) 25 cm.

3. Chamamos de semirreta uma parte da reta limitada por apenas um ponto qualquer, em que $\overrightarrow{AB}$ é um exemplo de sua representação e os pontos *A* e *B* são pontos distintos da reta em questão. Definimos segmentos adjacentes, como segmentos, necessariamente, consecutivos e colineares, com apenas uma extremidade em comum. Determinamos a soma entre segmentos, a fim de encontrar um segmento com o resultado desta soma. Por exemplo, sejam os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, o comprimento do segmento $\overline{AD}$ é dado por $m\left(\overline{AD}\right) = m\left(\overline{AB}\right) + m\left(\overline{CD}\right)$.

Os pontos *P, Q, R* e *S* estão dispostos exatamente nessa sequência sobre uma semirreta. O segmento $\overline{PQ}$ tem o dobro do comprimento do segmento $\overline{QR}$, o segmento $\overline{QR}$ tem o triplo do comprimento do segmento $\overline{RS}$ e a distância entre o ponto *P* e o ponto *S* é de 180 cm. Desta forma, quais são as medidas dos segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ e $\overline{RS}$?

a) 22 cm, 48 cm e 14 cm.

b) 24 cm, 50 cm e 16 cm.

c) 96 cm, 50 cm e 16 cm.

d) 100 cm, 52 cm e 18 cm.

e) 108 cm, 54 cm e 18 cm.

Seção 1.2

Ângulos

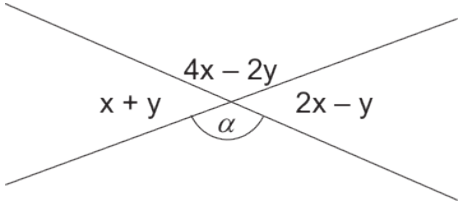
Diálogo aberto

O conteúdo aprendido aqui será ângulos e conhecer todos os seus conceitos é de extrema importância para a sua vida profissional e pessoal. Você já se perguntou, por exemplo, o que é ou para que servem os ângulos consecutivos, adjacentes e opostos pelo vértice? E também qual é a utilidade de uma bissetriz de um ângulo? Os exemplos citados são alguns dos conceitos que você conhecerá nesta seção e aprendê-los é de suma relevância.

Para que possa entender o conteúdo de modo contextualizado, lembre-se de que na presente unidade você ocupa o lugar de um funcionário da prefeitura de uma pequena cidade. Na seção anterior, você o auxiliou a perceber que o projeto da estrada podia gerar dupla interpretação na hora da execução e que o engenheiro responsável pelo projeto deveria ser contatado para esclarecimento.

Agora, nesta seção, você precisa auxiliar alguns pescadores a planejar uma armadilha para aumentar a quantidade de pescado. Para poder cumprir com essa tarefa, após consultar algumas referências sobre o assunto, você encontrou um passo a passo sobre a construção de armadilhas para peixes, no qual havia alguns trechos que falavam sobre uma parte da armadilha composta por duas telas se cruzando, como mostra a Figura 1.24.

Figura 1.24 | Esboço geométrico, telas se cruzando

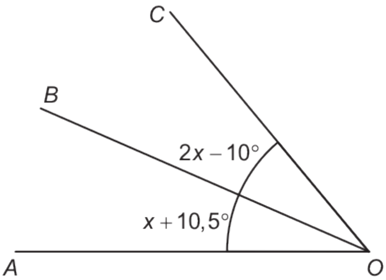


Fonte: elaborada pelo autor.

Para confeccionar a armadilha, você precisa determinar o ângulo α. E agora, qual é a medida do ângulo α em questão?

Outra peça da armadilha era desenhada como na Figura 1.25 e continha uma inscrição que dizia que $\overrightarrow{OB}$ era a bissetriz do ângulo *AOC*.

Figura 1.25 | Peça da armadilha



Fonte: elaborada pelo autor.

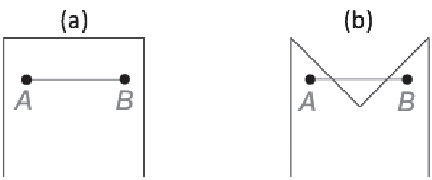
Para ajudar os pescadores a construir também essa segunda peça, você precisa entender corretamente o significado de bissetriz e também determinar as medidas dos ângulos *AOB* e *AOC*. Que tal ajudá-los a fazer isso?

Não pode faltar

Região convexa e região côncava

Observando a Figura 1.26, conseguimos perceber dois tipos de região, uma côncava e outra convexa. Uma região será <u>convexa</u> (Figura 1.26 (a)) se quaisquer dois pontos distintos pertencentes a ela são extremidades de um segmento inteiramente contido nessa região. Se dois pontos diferentes pertencerem à determinada região, mas forem extremidades de um segmento que contenha uma parte qualquer que não pertença a essa região, a chamamos de côncava (Figura 1.26 (b)).

Figura 1.26 | Região: (a) convexa; (b) côncava



Fonte: elaborada pelo autor.

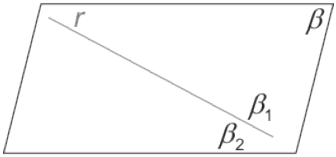
Reflita

Uma reta é uma região côncava ou convexa?

Semiplano

O postulado da existência, conforme podemos observar na Seção 1.1, contempla que um plano contém infinitas retas. A partir disso, é possível entender que o plano β, ilustrado na Figura 1.27, também contém um número infinito de retas. Porém, é destacada apenas uma reta, denominada reta r, que está dividindo este plano em duas regiões, β_1 e β_2, que podem ser chamadas de <u>semiplanos</u>.

Figura 1.27 | Semiplanos β_1 e β_2

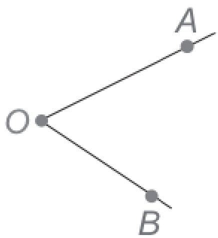


Fonte: elaborada pelo autor.

Ângulos

Dolce e Pompeo (2013, p. 20), definem um ângulo como a "reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas em uma mesma reta (não colineares)". Na Figura 1.28, temos que o ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo cuja notação é dada por $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$. Neste livro didático, além do considerado por Dolce e Pompeo (2013), entenderemos também como ângulo o objeto formado por duas semirretas opostas ou coincidentes.

Figura 1.28 | Representação geométrica do ângulo

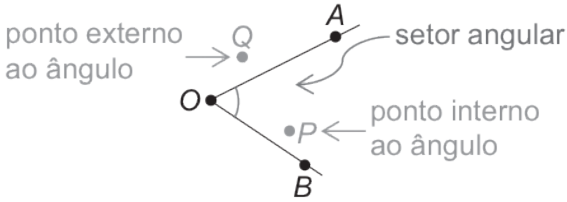


Fonte: elaborada pelo autor.

Os pontos contidos no interior de um ângulo são internos a ele. Um ângulo completo é a junção do ângulo com seu interior. Esta região completa também é chamada de setor angular.

Os pontos que não pertencem ao setor angular são **externos** a ele.

Figura 1.29| Setor angular, ponto externo e interno

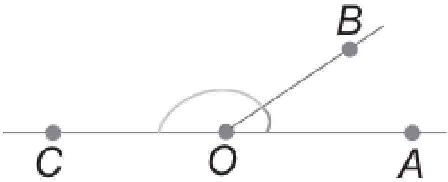


Fonte: elaborada pelo autor.

Classificação e medidas de ângulos

"Dado o ângulo $A\hat{O}B$, a semirreta $\overrightarrow{OC}$, oposta à semirreta $\overrightarrow{OA}$ e a semirreta $\overrightarrow{OB}$ determinam um ângulo $B\hat{O}C$ que se chama *ângulo suplementar adjacente* ou *suplemento adjacente* de $A\hat{O}B$ (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 26, grifo do autor).

Figura 1.30 | Ângulo suplementar adjacente



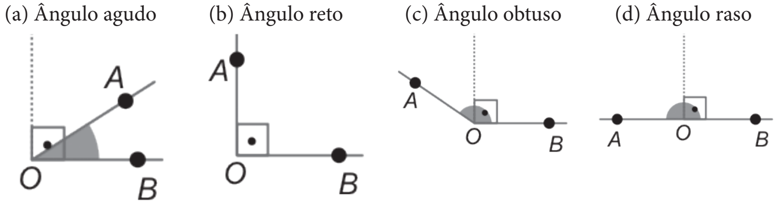
Fonte: elaborada pelo autor.

Indicamos a medida de um ângulo $X\hat{O}Y$ por $m\left(X\hat{O}Y\right)$ e o classificamos de acordo com a medida da sua abertura. O *ângulo reto*, representado pelo símbolo $\perp$, é aquele congruente ao seu suplementar adjacente.

Comumente, para indicar medidas de ângulos, utilizamos a unidade de medida conhecida como grau (°). Os submúltiplos do grau são os minutos (') e os submúltiplos dos minutos são os segundos ("). O grau pode ser subdividido em minutos, cujo símbolo é ('), e segundos, com símbolo ("). Sendo equivalentes da seguinte forma: $1^{o} = 60'$ e $1' = 60''$.

A medida de noventa graus (90^{o}) corresponde a um ângulo reto e, ao dividirmos um ângulo reto por 90, encontraremos uma medida equivalente a um grau (1^{o}). O *ângulo agudo* é o ângulo cuja medida é maior que zero grau e menor que noventa graus. O ângulo obtuso é aquele maior que noventa e menor que cento e oitenta graus. Quando os lados do ângulo coincidem, eles formam um *ângulo nulo* e a sua medida equivale a zero grau. Duas semirretas opostas formam um *ângulo raso*, que mede cento e oitenta graus.

Figura 1.31 | Classificação dos ângulos



Fonte: elaborada pelo autor.

"Dois ângulos são chamados *suplementares* se a soma de suas medidas é cento e oitenta graus. O *suplemento* de um ângulo é aquele adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados" (MANFIO, 2016, p. 13, grifo do autor). Ângulos complementares são aqueles cuja soma forma um ângulo reto. Por exemplo, os ângulos de vinte e de setenta graus são ângulos complementares, (20° + 70° = 90°). Dizemos que um deles é o complemento do outro.

Assimile

Dado um ângulo α, dizemos que:

- O seu complemento é $90° - \alpha$, com $0 \le \alpha \le 90°$.
- O seu suplemento é $180° - \alpha$, com $0 \le \alpha \le 180°$.

Exemplificando

1 – Um ângulo excede o seu complemento em 24°. Que ângulo é esse?

Solução: Como o ângulo é desconhecido, podemos chamá-lo de *x*. Desta forma, temos que o seu complemento é dado por $90° - x$. Então, o ângulo menos o seu complemento é igual a 24°. Logo:

$$x - (90° - x) = 24°$$

$$x - 90° + x = 24°$$

$$2x = 24° + 90°$$

$$2x = 114°$$

$$x = 57°$$

Portanto, o valor do ângulo é 57°.

Faça você mesmo

1 – Calcule a medida de um ângulo que vale a metade do seu complemento.

2 – Determine a medida do ângulo que excede o seu suplemento em 58°.

Congruência e comparação de ângulos

Dois ângulos com a mesma abertura são chamados de ângulos congruentes. Esta congruência (≡) é uma noção primitiva e satisfaz as seguintes propriedades:

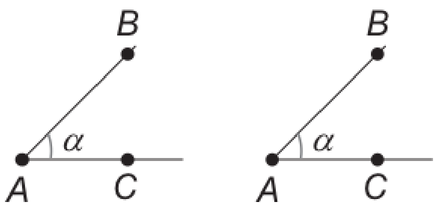
1. Reflexiva $\Rightarrow$ Todo ângulo é congruente a si mesmo. Ou seja, $A\hat{O}B \equiv A\hat{O}B$.

2. Simétrica $\Rightarrow$ Se $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$, então $C\hat{O}D \equiv A\hat{O}B$.

3. Transitiva $\Rightarrow$ Se $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$ e $C\hat{O}D \equiv E\hat{O}F$, então $A\hat{O}B \equiv E\hat{O}F$.

Para fazermos a comparação entre dois ângulos, utilizamos o postulado do transporte de ângulos. De acordo com Dolce e Pompeo (2013, p. 23), "dados um ângulo $A\hat{O}B$ e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre este plano, e dos semiplanos que $\overrightarrow{O'A'}$ permite determinar, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'\hat{O}'B'$ congruente ao ângulo $A\hat{O}B$".

Figura 1.32 | Ângulos congruentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Ângulos consecutivos

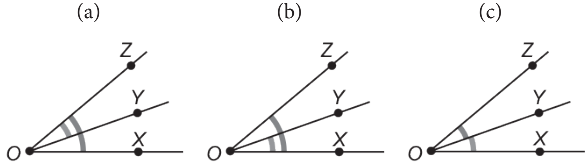
Chamamos de ângulos consecutivos dois ângulos que além de possuírem a mesma origem (vértice) também possuem um lado em comum. Observando a Figura 1.33, temos em:

(a) Os ângulos consecutivos $X\hat{O}Y$ e $X\hat{O}Z$ e lado comum $\overrightarrow{OX}$.

(b) Os ângulos consecutivos $X\hat{O}Z$ e $Y\hat{O}Z$ e lado comum $\overrightarrow{OZ}$.

(c) Os ângulos consecutivos $X\hat{O}Y$ e $Y\hat{O}Z$ e lado comum $\overrightarrow{OY}$.

Figura 1.33 | Ângulos consecutivos



Fonte: elaborada pelo autor.

Ângulos adjacentes

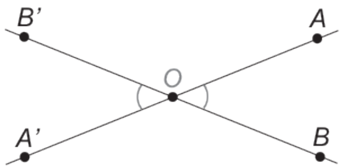
Quando dois ângulos consecutivos não têm um ponto interno comum a ambos, chamamos esses ângulos de <u>adjacentes</u>. Podemos perceber, por exemplo, na Figura 1.33 (a) e na Figura 1.33 (b) que os ângulos $X\hat{O}Y$ e $X\hat{O}Z$ e os ângulos $X\hat{O}Y$ e $Y\hat{O}Z$, respectivamente, possuem pontos internos comuns e, com isso, não são adjacentes. Entretanto, na Figura 1.33 (c), os ângulos $X\hat{O}Y$ e $Y\hat{O}Z$ não possuem pontos internos comuns, ou seja, são adjacentes.

Ângulos opostos pelo vértice (OPV)

"Dois ângulos são denominados opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 22).

Na Figura 1.34, pode-se perceber que a semirreta $\overrightarrow{OA}$ é oposta à semirreta $\overrightarrow{OA'}$ e também que a semirreta $\overrightarrow{OB}$ é oposta à semirreta $\overrightarrow{OB'}$. Desta forma, os ângulos $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}B'$ são opostos pelo vértice (OPV). É possível notar também que temos duas retas concorrentes e que elas formam dois pares de ângulos OPV.

Figura 1.34 | Ângulos opostos pelo vértice (OPV)

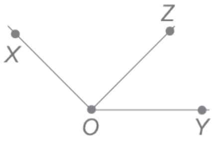


Fonte: elaborada pelo autor.

Adição de ângulos

Dado um setor angular $X\hat{O}Y$ e uma semirreta $\overrightarrow{OZ}$ interna a ele, formando os ângulos $X\hat{O}Z$ e $Z\hat{O}Y$, dizemos que o ângulo $X\hat{O}Y$ é a soma dos ângulos $X\hat{O}Z$ e $Z\hat{O}Y$.

Figura 1.35 | Adição de ângulos



$$X\hat{O}Y = X\hat{O}Z + Z\hat{O}Y$$

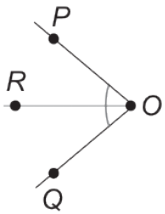
Fonte: elaborada pelo autor.

Bissetriz de um ângulo

Uma semirreta com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes é chamada bissetriz desse ângulo.

Na Figura 1.36, a semirreta $\overrightarrow{OR}$ é bissetriz do ângulo, ou seja, divide o ângulo $P\hat{O}Q$ em dois ângulos congruentes ($P\hat{O}R$ e $R\hat{O}Q$). Desta forma, tem-se a igualdade m($P\hat{O}R$) m($R\hat{O}Q$).

Figura 1.36 | Bissetriz do ângulo

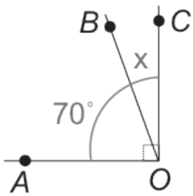


Fonte: elaborada pelo autor..

Exemplificando

1 - Determine o valor de x, sabendo que AÔC é um ângulo reto.

Figura 1.37 | Valor de *x*



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: O ângulo *AÔC* é reto, ou seja, tem noventa graus. Logo, $m(A\hat{O}C) = 90°$. Na Figura 1.37 temos que $m(A\hat{O}B) = 70°$, $m(B\hat{O}C) = x$ e $m(A\hat{O}C) = m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C)$. Desta forma, fazemos as substituições:

$$m(A\hat{O}C) = m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C)$$

$$90° = 70° + x$$

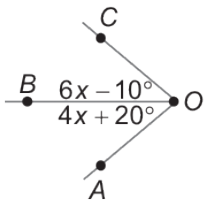
$$x = 90° - 70°$$

$$x = 20°$$

Portanto, $x = 20°$.

2 – Determine o valor de x, sabendo que a semirreta $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo *AÔC*.

Figura 1.38 | Bissetriz $\overrightarrow{OB}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: Como a semirreta $\overrightarrow{OB}$ divide o ângulo *AÔC* em dois ângulos congruentes por ser a bissetriz, temos:

$$m(A\hat{O}B) = m(B\hat{O}C)$$

$$4x + 20° = 6x - 10°$$

$$2x = 30°$$

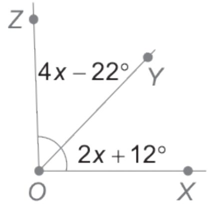
$$x = 15°$$

Portanto, $x = 15°$.

Faça você mesmo

1 – Determine a medida do ângulo XÔZ, sabendo que a semirreta $\overrightarrow{OY}$ é a sua bissetriz.

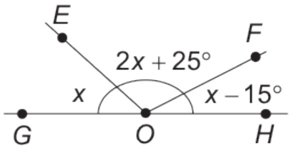
Figura 1.39 | Determinando o valor do ângulo *XÔZ*



Fonte: elaborada pelo autor.

2 – Encontre o valor de *x* e determine as medidas dos ângulos *EÔG*, *EÔF* e *FÔH*. Sabe-se que m(*GÔH*) 180°.

Figura 1.40 | Determinando os valores dos ângulos *EÔF, FÔG e GÔH*



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

Podemos simplificar a medida de um ângulo:

Por exemplo, em 9° 58' 120'' temos que 120'' é igual a 2', ou seja, 9° 58' 120'' = 9° 60'. No mesmo sentido, temos 1° = 60'. Portanto, podemos escrever 9° 58' 120'' = 9° 60' = 10°.

É possível também efetuarmos operações fundamentais com as medidas dos ângulos. Veja:

Figura 1.41 | Operações com ângulos

Soma

$$\begin{array}{r} 25°15' \\ +\ 6°12' \\ \hline 31°27' \end{array}$$

Diferença

$$\begin{array}{r} 18°\ 49'\ 85'' \\ \cancel{18°\ 50'\ 25''} \\ -\ \ 3°\ 45'\ 30'' \\ \hline 15°\ \ 4'\ 55'' \end{array}$$

Multiplicação

$$\begin{array}{r} 15°25' \\ \times\ \ \ \ 2 \\ \hline 30°50' \end{array}$$

Divisão

$$\begin{array}{l} \ \ \ \ \ \ 60'\ 60'' \\ 11°\ \cancel{21'}\ \cancel{34''}\ \underline{|\ 2\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ } \\ \ \ 1°\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 5°\ 40'\ 47'' \\ \ \ \ \ \ \ 81' \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 1' \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 94'' \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que organizamos as operações de forma convencional.

Na adição:

Efetuamos a soma da direita para a esquerda, organizando segundos com segundos, minutos com minutos e graus com graus. Caso os minutos ou segundos ultrapassem os valores de 60′ ou 60″, respectivamente, podemos efetuar a simplificação.

Na subtração:

Como é impossível subtrair 30″ de 25″, "emprestamos" 1′ para a "casa" dos segundos. Ao fazer esse procedimento, efetuamos a conversão de minutos para segundo. Com isso, na "casa" dos minutos, ao invés de termos 50′, ficamos com 49′. Na "casa" dos segundos, somamos mais 60″, que veio "emprestado" e convertido da "casa" dos minutos, assim, 60″ + 25″ = 85″. Desta forma, chegamos à 18°49′85″, que subtraindo 3°45′30″ resulta em 15°4′55″.

Na multiplicação:

Multiplicamos um número natural pelo ângulo, começando da direita para a esquerda, ou seja, mutiplicamos o número natural pelos segundos, pelos minutos e pelos graus. Caso os minutos ou segundos ultrapassem os valores de 60′ ou 60″, respectivamente, podemos efetuar a simplificação.

Na divisão:

Iniciamos dividindo 11° por 2, que resulta em 5° e resto 1°.
"Emprestamos" 1° que sobrou para a "casa" dos minutos, fazendo a devida conversão (1º = 60'), que somando com os 21' resulta em 81'. Fazemos a divisão de 81' por dois e encontramos como resultado 40' e resto 1′. "Emprestamos" o 1' que sobrou para a casa dos segundos, fazendo a conversão (1' = 60"), que somando com 34" resulta em 94".
Fazemos a divisão de 94" por dois e chegamos ao resultado 5°40'94" e resto zero para a divisão inicial.

Assimile

Teorema: Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Demonstração: Sejam $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ dois ângulos opostos pelo vértice. Temos que:

m($A\hat{O}B$) = X.

m($C\hat{O}D$) = Y.

m($A\hat{O}D$) = $180°$.

m($B\hat{O}C$) = $180°$.

Assim:

m($B\hat{O}D$) = $180° - X$,

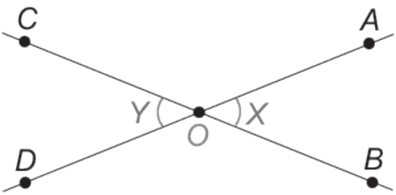
mas também:

m($B\hat{O}D$) = $180° - Y$.

Igualamos a duas equações: $180° - Y = 180° - X$.

E concluímos que $X = Y$, portanto $A\hat{O}B = C\hat{O}D$.

Figura 1.42 | Ângulos opostos pelo vértice e congruentes

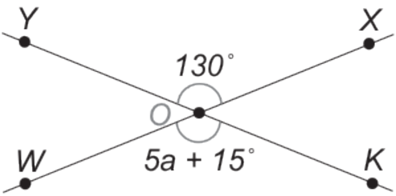


Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Sabendo que as duas retas a seguir são concorrentes e formam dois pares de ângulos OPV, determine o valor de *a*.

Figura 1.43 | Determinando o valor de *a*



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução:

Como os ângulos $Y\hat{O}X$ e $W\hat{O}K$ são opostos pelo vértice, eles têm a mesma medida. Desta forma, temos:

m($Y\hat{O}X$) = m($W\hat{O}K$)

$130° = 5a + 15°$

$5a = 130° - 15°$

$5a = 115°$

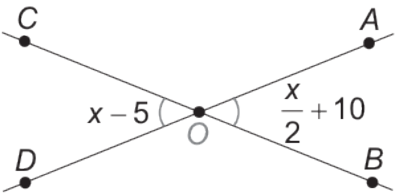
$a = 23°$

Portanto, o valor de *a* é 23°.

Faça você mesmo

Encontre o valor de x e determine a medida dos ângulos opostos pelo vértice.

Figura 1.44 | Determinando a medida dos ângulos



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Convidamos você a estudar um breve resumo sobre ângulos no link a seguir:

Disponível.em:.<http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 6 jan. 2017.

Sem medo de errar

Agora é o momento de você relembrar o problema apresentado no início desta seção. Lembre-se: você precisa auxiliar alguns pescadores de uma comunidade tradicional com a construção de uma armadilha. Para desempenhar bem seu trabalho, ele precisa ter os conhecimentos adequados de Geometria Plana. No primeiro caso, para determinar o ângulo α da Figura 1.24, precisamos utilizar um resultado importante e de uma definição básica:

1. Ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida.

2. Ângulos suplementares são aqueles que somam 180 graus.

Com base no item (1), você pode montar as seguintes equações:

$x + y = 2x - y$.

$4x - 2y = \alpha$.

Já com base no item (2), você pode fazer as seguintes relações:

$$4x - 2y + 2x - y = 180°\cdot$$

$$x + y + \alpha = 180°.$$

Podemos encontrar os valores de *x* e *y* a partir da equação $x + y = 2x - y$, da qual se deduz $x = 2y$. Substituindo $x = 2y$ em $4x - 2y + 2x - y = 180°$, encontramos:

$$4x - 2y + 2x - y = 180°$$

$$4 \cdot 2y - 2y + 2 \cdot 2y - y = 180°$$

$$9y = 180°$$

$$y = 20°$$

Desta forma, em $x = 2y$, calculamos $x = 40°$. Com isso podemos determinar os ângulos seguintes:

$$x + y = 2x - y$$

$$40° + 20° = 2 \cdot 40° + 20°$$

$$60° = 60°$$

Portanto, $x + y = 2x - y = 60°$.

$$4x - 2y = \alpha$$

$$4 \cdot 40° - 2 \cdot 20° = \alpha$$

$$160° - 40° = \alpha$$

$$120° = \alpha$$

Portanto, $4x - 2y = \alpha = 120°$.

Com isso, o primeiro passo pode ser resolvido, ou seja, está calculado que $\alpha = 120°$.

Para a segunda peça da armadilha, é necessário saber o significado de $\overrightarrow{OB}$ ser bissetriz. Basta lembrar que a bissetriz é uma semirreta que divide o ângulo em outros dois congruentes. No caso, $AOB \equiv BOC$, ou ainda:

$$m\left(AOB\right) = m\left(BOC\right)$$

$$x + 10{,}5° = 2x - 10°$$

$$10° + 10{,}5° = 2x - x$$

$$20{,}5° = x$$

Sabendo o valor de *x*, podemos encontrar as medidas dos ângulos requisitados:

$$m\left(AOB\right) = x + 10{,}5° = 20{,}5° + 10{,}5° = 31°.$$

$$m\left(AOC\right) = m\left(AOB\right) + m\left(BOC\right) = 31° + 31° = 62°.$$

Com todas as informações em mãos, você pode agora orientar a comunidade na construção da armadilha. Não se esqueça de que tem que gerar um relatório de suas atividades para arquivamento, para que o conhecimento adquirido não se perca e possa ser usado no futuro.

Avançando na prática

Complemento e suplemento dos ângulos

Descrição da situação-problema

Suponha que você é professor de Matemática em uma ONG que trabalha na formação de jovens aprendizes a serem direcionados para o mercado de trabalho. E, entre tantos alunos que você tem, um deles está atuando em uma empresa de tecnologia que desenvolve softwares educacionais voltados para a aprendizagem de Geometria Plana. Em determinada aula, este aluno abordou você, solicitando ajuda para resolver uma situação que o superior imediato dele delegou a ele em uma de suas tarefas de rotina profissional e que depois de resolvida será encaminhada para a equipe de programadores para que eles possam desenvolver um jogo digital.

O exercício a ser resolvido é o seguinte:

De um ponto *O* tomado sobre uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ (*O* entre *A* e *B*, formando um ângulo raso), traçam-se as semirretas $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$, que formam os ângulos $A\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$ e $E\hat{O}B$ adjacentes consecutivos, com *C*, *D* e *E* pertencendo a um mesmo semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$. Esses ângulos medem, respectivamente, $60° - 6x$, $9x - 10°$, *x* e $11x + 25°$. Sendo assim, descreva um passo a passo que permita determinar a medida de *x* considerando as hipóteses desse problema. Ao final, apresente a medida de *x*, os ângulos e também o complemento do menor ângulo e o suplemento do maior ângulo.

Resolução da situação-problema

Com o ponto *O* tomado entre os pontos *A* e *B* na reta $\overleftrightarrow{AB}$, forma-se o ângulo raso *AÔB*, que mede 180°. Como os pontos C, D e E estão em um mesmo semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$, formando os ângulos adjacentes consecutivos *AÔC*, *CÔD*, *DÔE* e *EÔB*, temos que $m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}C) + m(C\hat{O}D) + m(D\hat{O}E) + m(E\hat{O}B)$. A partir daí, podemos fazer as substituições com os valores dos ângulos, a fim de resolver o problema. Vejamos:

$$m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}C) + m(C\hat{O}D) + m(D\hat{O}E) + m(E\hat{O}B)$$

$$60° - 6x + 9x - 10° + x + 11x + 25° = 180°$$

$$15x = 180° - 75°$$

$$15x = 105°$$

$$x = 7°$$

Com isso, podemos determinar a medida de cada ângulo:

$m(A\hat{O}C) = 60° - 6x$ $m(A\hat{O}C) = 18°$	$m(C\hat{O}D) = 9x - 10°$ $m(C\hat{O}D) = 53°$	$m(D\hat{O}E) = x$ $m(D\hat{O}E) = 7°$	$m(E\hat{O}B) = 11x + 25°$ $m(E\hat{O}B) = 102°$

O menor ângulo é *DÔE*, cuja medida é 7º e seu complemento é 83°.

O maior ângulo é *EÔB*, cuja medida é 102º e seu suplemento é 78°.

Faça valer a pena

1. Chamamos de ângulos consecutivos dois ângulos que além de possuírem a mesma origem (vértice) também possuem um lado em comum. Dado um ângulo *AÔC* e uma semirreta $\overrightarrow{OB}$ interna a ele, formando os ângulos consecutivos *AÔB* e *BÔC*, dizemos que o ângulo *AÔC* AÔC é a soma dos ângulos *AÔB* e *BÔC*, ou seja, *AÔC* = *AÔB* + *BÔC*. Quando somamos as medidas de dois ângulos e encontramos um ângulo igual a 90° dizemos que esses ângulos são complementares. Quando somamos as medidas de dois ângulos e encontramos um ângulo igual a 180º afirmamos que eles são ângulos suplementares.

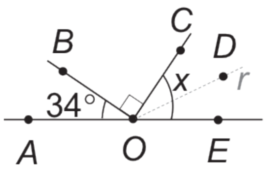
O complemento e o suplemento dos ângulos 75° e 120° são, respectivamente:

a) 165° e 30°.
c) 90° e 180°.
e) 15° e 60°.
b) 180° e 90°.
d) 60° e 15°.

2. Uma semirreta com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes é chamada bissetriz desse ângulo. Os ângulos podem ser classificados de acordo com a sua abertura e, entre essas classificações, temos, por exemplo, o ângulo reto, cuja medida é igual a noventa graus (90°) e o ângulo raso, que mede cento e oitenta graus (180°).

De acordo com a Figura 1.45, determine o valor do ângulo $D\hat{O}E$, sabendo que a semirreta r é bissetriz do ângulo $C\hat{O}E$ e que $B\hat{O}C$ é um ângulo reto.

Figura 1.45 | Determinando o valor do ângulo EÔD.



Fonte: elaborada pelo autor.

a) 21° c) 29°. e) 32°.

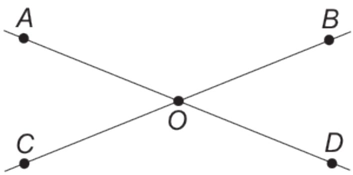
b) 28°. d) 31°.

3. Duas retas concorrentes possuem apenas um ponto em comum e formam dois pares de ângulos OPV. "Dois ângulos são denominados opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 22).

Na Figura 1.46, ilustrada a seguir, temos dois pares de ângulos opostos pelo vértice, em que a medida do ângulo $A\hat{O}C$ é obtida por meio da soma de um sexto da medida do ângulo $A\hat{O}B$ com a metade da medida do ângulo $B\hat{O}D$.

Assinale a alternativa que contém a medida do ângulo $A\hat{O}B$:

Figura 1.46 | Ângulos OPV



Fonte: elaborada pelo autor.

a) 135°. c) 140°. e) 144°.

b) 137°. d) 141°.

Seção 1.3

Triângulos

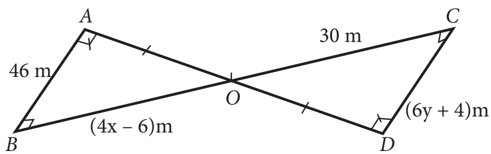
Diálogo aberto

Nesta seção, trataremos de triângulos. Iremos defini-los, conhecer os seus elementos e classifica-los. Veremos também os casos de congruência, mediana e bissetriz interna de um triângulo, além de verificar desigualdades interessantes relacionadas a eles.

Lembre-se que na seção anterior você estava auxiliando o funcionário da prefeitura a compreender o passo a passo para a construção de uma armadilha para peixes, auxiliando uma pequena comunidade tradicional. Agora, nesta seção, os seus serviços foram direcionados a uma família de pequenos agricultores para planejar o sistema de irrigação de uma horta próxima a um poço.

Nos seus esboços, você fez o planejamento de um sistema de gotejamento por meio da instalação de canos que partem do poço e retornam para ele, conforme Figura 1.47 , na qual o poço está representado pelo ponto O.

Figura 1.47 | Esboço do sistema de irrigação da horta



Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos agora avançar em seu processo de aprendizagem, para que você consiga resolver a situação apresentada.

Não pode faltar

No decorrer desta seção, a sua aprendizagem se discorrerá sobre a definição e classificação dos triângulos, conhecendo os seus elementos (lados, vértices e ângulos). Você aprenderá ainda o que é uma bissetriz interna do triângulo, mediana e também os casos de congruência e as desigualdades relacionadas a triângulos.

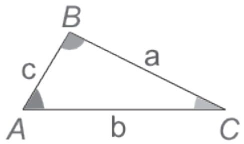
Triângulos

Assimile

"Dados três pontos *A, B* e *C* não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se *triângulo ABC*" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 36, grifo do autor).

Na Figura 1.48, o triângulo ABC é a união dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, ou seja, $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$.

Figura 1.48 | Triângulo



Fonte: elaborada pelo autor..

Elementos do triângulo

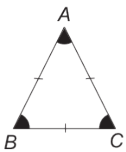
No triângulo representado na Figura 1.48, os pontos não colineares *A, B* e *C* são chamados vértices do triângulo *ABC*. Por vezes, em vez de escrever 'triângulo *ABC*', utilizaremos a notação ΔABC. Esses pontos formam, dois a dois, três segmentos de reta $\left(\overline{AB}, \overline{BC} \text{ e } \overline{AC}\right)$ que são denominados lados do triângulo. Observe também que cada lado possui uma medida, chamadas de *a, b* e *c*. A medida do segmento de reta $\overline{AB}$ é representada pela letra c, ou seja, $c = m\left(\overline{AB}\right)$, pelo fato deste lado ser oposto ao vértice C. A medida do segmento de reta $\overline{BC}$ é representada pela letra a, ou seja, $a = m\left(\overline{BC}\right)$, pelo fato deste lado ser oposto *BAC*, *ABC* e *ACB*, que também podem ser representados por *A* , *B* e *C*, respectivamente, e são chamados de ângulos internos do triângulo *ABC*.

Classificação do Triângulo

Em relação aos seus lados, um triângulo classifica-se em:

Triângulo equilátero: tem os três lados congruentes. Na Figura 1.49, os três lados do triângulo são iguais (congruentes), ou seja, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$. Nesse triângulo, os seus três ângulos internos possuem a mesma medida.

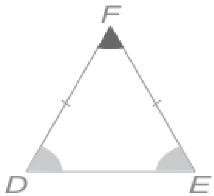
Figura 1.49 | Triângulo equilátero



Fonte: elaborada pelo autor.

Triângulo isósceles: tem apenas dois lados congruentes. Na Figura 1.50, os lados representados pelos segmentos de reta $\overline{FD}$ e $\overline{FE}$ são congruentes $(\overline{FD} \equiv \overline{FE})$. Este triângulo possui dois ângulos internos com a mesma medida. Veja a demonstração desse fato na página 53 do material disponível em<http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 05 out. 2017.

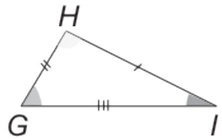
Figura 1.50 | Triângulo isósceles



Fonte: elaborada pelo autor.

Triângulo escaleno: tem os três lados com medidas diferentes (lados não congruentes). Os três ângulos internos deste triângulo possuem medidas diferentes.

Figura 1.51 | Triângulo Escaleno



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

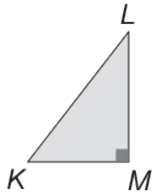
Dolce e Pompeo (2013, p. 38) contemplam que "um triângulo com dois lados congruentes é isósceles; o outro lado é chamado de base e o ângulo oposto à base é o ângulo do vértice".

Desta forma, é possível considerar que um triângulo equilátero também é um triângulo isósceles?

Quanto aos seus ângulos, podemos classificar um triângulo por:

Triângulo reto ou retângulo: é um triângulo que possui necessariamente um ângulo reto (90°). O triângulo ΔKLM representado na Figura 1.52 é retângulo em M, ou seja, $m\left(\hat{M}\right) = 90°$. Nos triângulos retângulos, chamamos o lado oposto ao ângulo reto de hipotenusa e os demais lados de catetos.

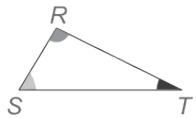
Figura 1.52 | Triângulo retângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Triângulo acutângulo: é um triângulo que possui três ângulos agudos, ou seja, três ângulos menores que noventa graus (<90°).

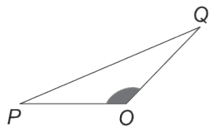
Figura 1.53 | Triângulo acutângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Triângulo obtusângulo: é um triângulo que possui um ângulo obtuso, ou seja, um ângulo maior que noventa graus (>90°). O triângulo *OPQ*, ilustrado na Figura 1.54, é obtusângulo em *O*, ou seja, $m\left(O\right) > 90°$.

Figura 1.54 | Triângulo obtusângulo

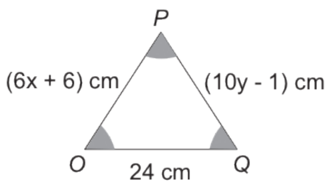


Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

O triângulo ABC, representado na Figura 1.55, é equilátero. Desta forma, determine os valores de x e y.

Figura 1.55 | Determinando os valores de x e y no triângulo equilátero



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Como o triângulo dado é equilátero, temos que todos os seus lados são congruentes, ou seja, $m\left(\overline{OP}\right)=m\left(\overline{PQ}\right)=m\left(\overline{OQ}\right)$. Percebe-se também que $m\left(\overline{OP}\right)=\left(6x+6\right)$ cm, $m\left(\overline{PQ}\right)=\left(10y-1\right)$ cm e $m\left(\overline{OQ}\right)=24$ cm.

Como os lados são congruentes, podemos igualar suas medidas:

$$m\left(\overline{OP}\right)=m\left(\overline{OQ}\right)$$

$$6x+6=24$$

$$6x=24-6$$

$$6x=18$$

$$x=\frac{18}{6}$$

$$x=3$$

$$m\left(\overline{PQ}\right)=m\left(\overline{OQ}\right)$$

$$10y-1=24$$

$$10y=24+1$$

$$10y=25$$

$$y=\frac{25}{10}$$

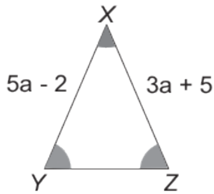
$$y=2{,}5$$

Portanto, conclui-se que $x=3$ cm e $y=2{,}5$ cm.

Faça você mesmo

1 – Encontre o valor de a e determine a medida dos lados congruentes $\overline{XY}$ e $\overline{XZ}$ no triângulo isósceles XYZ, conforme Figura 1.56.

Figura 1.56 | Determinando a medida dos lados do triângulo isósceles



Fonte: elaborada pelo autor.

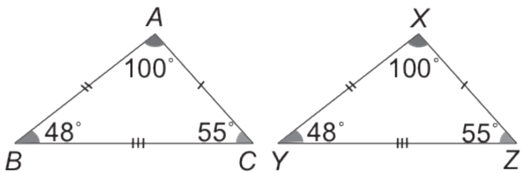
Congruência de triângulos

Para Dolce e Pompeo (2013), dois triângulos são congruentes se, e somente se, ao estabelecermos uma correspondência entre os seus vértices, os lados e ângulos de um forem ordenadamente congruentes aos lados e ângulos de outro.

Na Figura 1.57, temos o triângulo *ABC* congruente ao triângulo *XYZ*, ou seja, $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$. Desta forma, vemos que, em relação aos seus lados, $\overline{AB} \equiv \overline{XY}$, $\overline{BC} \equiv \overline{YZ}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{XZ}$. Sobre os seus ângulos temos, $A \equiv X$, $B \equiv Y$ e $C \equiv Z$.

Determinamos a congruência entre dois triângulos através da comparação entre os três lados e os três ângulos de ambos (seis congruências). Entretanto, podemos assegurar a congruência apenas com elementos mínimos necessários, formando os denominados **casos de congruência**. Vejamos cada caso a seguir.

Figura 1.57 | Determinando a medida dos lados do triângulo isósceles

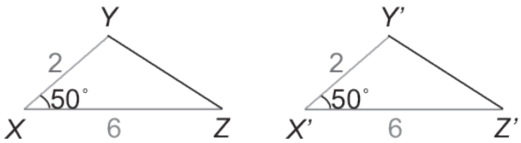


Fonte: elaborada pelo autor.

1º Caso – LAL (Lado Ângulo Lado)

Neste caso, dois triângulos serão congruentes se possuírem dois pares de lados de mesma medida e os ângulos compreendidos entre esses lados também possuírem a mesma medida.

Figura 1.58 | Caso LAL

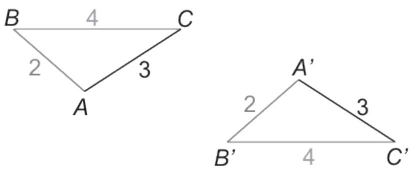


Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 1.58, são congruentes os lados $\overline{XY}$ e $\overline{X'Y'}$, os ângulos X e X' e também os lados $\overline{XZ}$ e $\overline{X'Z'}$, ou ainda, $\begin{cases} \overline{XY} \equiv \overline{X'Y'}. \\ X \equiv X' \\ \overline{XZ} \equiv \overline{X'Z'} \end{cases}$

2º Caso – LLL (Lado Lado Lado)

Figura 1.59 | Caso LLL



Fonte: elaborada pelo autor.

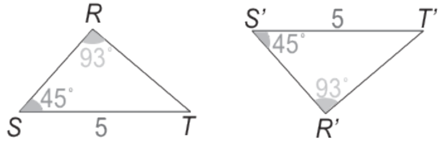
Para este caso, dois triângulos serão congruentes se possuírem dois ângulos e o lado adjacente a eles congruentes.

Vemos então, na Figura 1.60, a congruência entre os ângulos F e F', entre os lados $\overline{FG}$ e $\overline{F'G'}$, e também entre os ângulos G e G'. Resumidamente, $\begin{cases} F \equiv F' \\ \overline{FG} \equiv \overline{F'G'} \\ G \equiv G' \end{cases}$.

4º Caso – LAAo (Lado Ângulo Ângulo Oposto)

Neste caso, dois triângulos serão congruentes se tiverem ordenadamente um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a este lado congruentes.

Figura 1.61 | Caso LAAo



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 1.61, são congruentes os lados $\overline{ST}$ e $\overline{S'T'}$, os ângulos S e S' e também R e R'. De modo resumido, $\begin{cases} \overline{ST} \equiv \overline{S'T'} \\ S \equiv S' \\ R \equiv R' \end{cases}$.

Temos ainda um 5º caso (caso especial de congruência de triângulos retângulos). "Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 46).

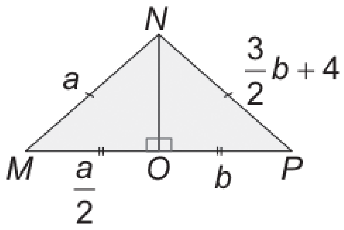
Pesquise mais

Você pode verificar as demonstrações em relação a esses casos no material disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/MTM_Geometria_I_WEB.pdf>. Acesso em: 6 jan. 2016.

Exemplificando

1 – Na Figura 1.62, verifique o caso de congruência entre os triângulos *MON* e *PON*, encontre os valores de a e b e determine o comprimento dos lados $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{MO}$ e $\overline{OP}$.

Figura 1.62 | Caso LAAo



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Na Figura 1.62, temos dois triângulos retângulos e percebemos que existe a congruência das hipotenusas $\left(\overline{MN} \equiv \overline{NP}\right)$ e dos catetos $\left(\overline{MO} \equiv \overline{OP}\right)$. E, nessa situação, o caso de congruência tratado é o caso especial de congruência de triângulos retângulos.

Salientamos que, neste exemplo, $\overline{ON}$ é comum aos dois triângulos. Desta forma, podemos considerar também o caso de congruência LLL.

Como $\overline{MN}$ é congruente a $\overline{NP}$ e $\overline{MO}$ é congruente a $\overline{OP}$, fazemos:

$$\begin{cases} m\left(\overline{MN}\right) = m\left(\overline{NP}\right) \\ m\left(\overline{MO}\right) = m\left(\overline{OP}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2}b + 4 & \text{(I)} \\ \dfrac{a}{2} = b & \text{(II)} \end{cases}$$

Na equação (II) no sistema temos $a = 2b$.

Fazendo a substituição na equação (I), podemos encontrar o valor de b:

$$a = \frac{3}{2}b + 4 \Rightarrow 2b = \frac{3}{2}b + 4 \Rightarrow 2b - \frac{3}{2}b = 4 \Rightarrow$$

$$4b - 3b = 8 \Rightarrow b = 8$$

A partir disso, voltamos à equação (II) e encontramos o valor de a:

$$a = 2b \Rightarrow a = 2 \cdot 8 \Rightarrow a = 16$$

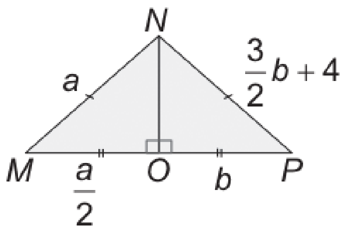
Sendo conhecidos os valores de a e b, pela congruência de triângulos, é possível determinar as medidas dos lados $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{MO}$ e $\overline{OP}$.

Como $\overline{MN} \equiv \overline{NP}$, e $m\left(\overline{MN}\right)=16$, temos que $m\left(\overline{NP}\right)=16$. E também, como $\overline{MO} \equiv \overline{OP}$ e $m\left(\overline{OP}\right)=8$, temos que $m\left(\overline{MO}\right)=8$.

Faça você mesmo

Na Figura 1.63, são congruentes os lados $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ $\left(\overline{BC} \equiv \overline{CD}\right)$ e os ângulos *B* e *D* $\left(B \equiv D\right)$. Além disso, os ângulos *BCA* e *DCE* são opostos pelo vértice. Sendo assim, verifique o caso de congruência entre os triângulos e determine os valores de *x* e *y*.

Figura 1.63 | Determinando caso de congruência



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

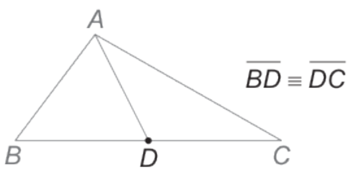
Aprenda mais sobre congruência de triângulos, consultando o capítulo 5 de Geometria - Coleção Schaum, disponível em biblioteca digital.

Disponível.em:.<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788577803194/pageid/103>. Acesso em: 6 jan. 2017.

Mediana de um triângulo

"Dado um triângulo *ABC*, considere um ponto *D* sobre a reta determinada por *B* e *C*. Se *D* é ponto médio do segmento *BC*, o segmento *AD* chama-se mediana do triângulo *ABC* relativa ao vértice *A*" (MANFIO, 2016, p. 20, grifo do autor).

Figura 1.64 | Mediana

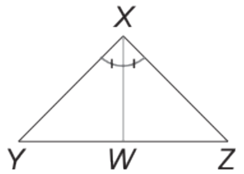


Fonte: elaborada pelo autor.

Bissetriz interna de um triângulo

Chamamos de bissetriz interna do triângulo o segmento de reta com uma extremidade em um dos vértices do triângulo e a outra extremidade no lado oposto a esse vértice, dividindo o ângulo correspondente ao vértice em outros dois ângulos congruentes.

Figura 1.65 | Bissetriz

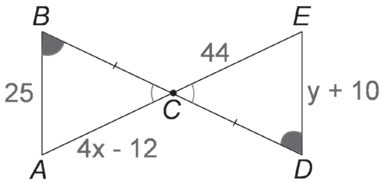


Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 1.65, o ângulo *YXZ* é a soma dos ângulos *YXW* e *WXZ*, ou seja, *YXZ* = *YXW* + *WXZ*. Os ângulos *VXW* e *WXZ* são congruentes $\left(YXW \equiv WXZ\right)$. O segmento de reta $\overline{XW}$ é a bissetriz interna do triângulo *YXW*.

Desigualdade nos triângulos

Figura 1.66 | Suposição ΔIJK



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 1.66 representa supostamente um triângulo (ΔIJK). Nela temos que $m\left(\overline{IJ}\right)=1$, $m\left(\overline{IK}\right)=3$ e $m\left(\overline{JK}\right)=5$. Analisando esta figura e refletindo que uma linha reta é a menor distância a ser percorrida entre dois pontos, é possível perceber então que o triângulo dado não existe.

Isso é verdade, pois, se tomarmos o segmento de reta $\overline{JK}$, é notável que a sua medida é maior que a soma das medidas dos outros dois segmentos $\overline{IJ}$ e $\overline{IK}$. E isso nega a afirmativa de que uma reta é a menor distância a ser percorrida entre dois pontos. Pode-se notar também que isso é verdade para os outros dois segmentos de reta que supostamente seriam os lados desse triângulo impossível.

Para Dolce e Pompeo (2013), em desigualdades nos triângulos tem-se que:

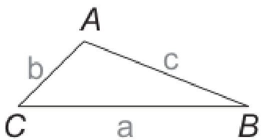
1. O maior ângulo se opõe ao maior lado.

2. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

3. Em todo triângulo, cada lado é maior que a diferença dos outros dois.

Você pode pesquisar as devidas demonstrações na referência: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

Figura 1.67 | Triângulo ABC



Fonte: elaborada pelo autor.

Para que um triângulo exista, qualquer lado dele deverá ter sempre uma medida menor que a soma dos outros dois lados. Observando a Figura 1.67, podemos estabelecer algumas relações que satisfaçam a existência de um triângulo. Veja:

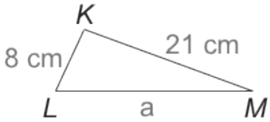
$$\begin{cases} a < b + c & \text{(I)} \\ b < a + c & \text{(II)} \\ c < a + b & \text{(III)} \end{cases}$$

Em (II) podemos escrever $b - c < a$ e em (III) podemos escrever $c - b < a$. Mas os lados do triângulo são segmentos de retas com valores representando medidas e, assim, deverão ser números reais positivos. Como dependendo do valor desse número, poderemos encontrar um resultado negativo, algo não viável quando estamos tratando situações com medidas de segmentos de reta, é preciso, então, trabalharmos com o módulo. Logo em (II) e (III), abordadas anteriormente, tem-se $|b - c| < a$ e $|c - b| < a$. Temos ainda em (I) $a < b + c$ e, a partir dessas informações, é possível concluir que um lado do triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois e maior que o módulo da diferença dos dois lados. Então: $|b - c| < a < b + c$ ou $|c - b| < a < b + c$.

Exemplificando

Observe a Figura 1.68 e determine a medida do lado desconhecido representado pela letra a, sabendo que este valor é um número inteiro múltiplo de 6.

Figura 1.68 | Determinando a medida do lado desconhecido do triângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Fazendo a atribuição de valores para letras, temos: $b = 21$ e $c = 8$. Em seguida, fazemos as substituições em $|b - c| < a < b + c$ a fim de determinar o valor de a.

$|b - c| < a < b + c$ $\qquad |21 - 8| < a < 21 + 8$ $\qquad 13 < a < 29$

Dado que a é um número inteiro e múltiplo de 6, devemos procurar valores entre os seguintes: 6, 12, 18, 24, 30..

Podemos, então, concluir que os valores possíveis serão $a = 18$ ou $a = 24$.

Faça você mesmo

Sendo $m(\overline{AB}) = 12 \text{ cm}$ e $m(\overline{BC}) = 5 \text{ cm}$ lados de um triângulo isósceles ABC, determine a medida do lado $\overline{AC}$.

Pesquise mais

Consulte *Fundamentos de Geometria* Plana e veja mais sobre os conteúdos desta seção.

Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf> Acesso em: 6 jan. 2017.

Sem medo de errar

Para ajudar a família na questão relativa ao aumento de produtividade da horta, você projetou um sistema de irrigação por gotejamento em que os canos compõem dois triângulos com as mesmas dimensões.

São dois triângulos que se encontram em suas extremidades que, se fossem desenhados em papel, e sobrepostos um sobre o outro, seriam iguais. Diante disso, eles precisam ter algumas características em comum.

De acordo com a Figura 1.47, nos triângulos *AOB* e *DOC* pode-se perceber que o lado $\overline{OA}$ é congruente ao lado $\overline{OD}$, assim como o ângulo *A*, adjacente ao lado $\overline{OA}$, é congruente ao ângulo *D* adjacente ao lado $\overline{OD}$. Percebe-se também que o ângulo *B*, oposto ao lado $\overline{OA}$, é congruente ao ângulo *C* que é oposto ao lado $\overline{OD}$.

Com isso, podemos determinar que o caso de congruência entre os dois triângulos é LAAo (Lado Ângulo Ângulo Oposto). E daí tem-se que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e também $\overline{OC} \equiv \overline{OB}$.

A partir disso, se acharmos conveniente, podemos determinar os valores de *x* e *y*:

$$m\left(\overline{OC}\right) = m\left(\overline{OB}\right)$$

$$4x - 6 = 30$$

$$4x = 36$$

$$x = \frac{36}{4}$$

$$x = 9 \text{ m}$$

$$m\left(\overline{AB}\right) = m\left(\overline{CD}\right)$$

$$46 = 6y + 4$$

$$6y = 42$$

$$y = \frac{42}{6}$$

$$y = 7 \text{ m}$$

E com isso, apenas por conveniência, determinar as medidas “desconhecidas” dos lados $\overline{OB}$ e $\overline{CD}$:

$$m\left(\overline{OB}\right) = 4x - 6$$

$$m\left(\overline{OB}\right) = 4 \cdot 9 - 6$$

$$m\left(\overline{OB}\right) = 36 - 6$$

$$m\left(\overline{OB}\right) = 30$$

$$m\left(\overline{CD}\right) = 6y + 4$$

$$m\left(\overline{CD}\right) = 6 \cdot 7 + 4$$

$$m\left(\overline{CD}\right) = 42 + 4$$

$$m\left(\overline{CD}\right) = 46$$

Logo, os lados $\overline{OB}$ e $\overline{CD}$ medem 30 e 46 metros, respectivamente.

Assim, você encaminha seus desenhos detalhados para a família, que, a partir de agora, terá um aumento na produtividade, pois poderá regular a quantidade de água ideal para sua horta e estará menos exposta a períodos longos de falta de chuva.

Com mais uma tarefa concluída, você tem todos os elementos para escrever seu relatório detalhado sobre as três atividades realizadas.

Avançando na prática

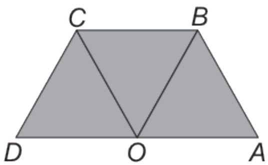
Estudando para a prova

Descrição da situação-problema

Imagine que você, um apaixonado por Matemática e por todas as suas ramificações, um estudante entusiasmado sobre Geometria Plana e todas as suas aplicações nas diversas situações do cotidiano, está em um almoço em família para comemorar o aniversário de um parente. No decorrer da confraternização, chega um sobrinho, ou um primo, solicitando ajuda para resolução de um exercício de um material preparatório para o vestibular ou para o ENEM com o seguinte enunciado:

Na Figura 1.69, os pontos *D*, *O* e *A* são colineares. Os segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$, $\overline{OD}$ e $\overline{AO}$ e os ângulos *BOD* e *COA* são, respectivamente, congruentes. Sendo assim, mostre que $m\left(\overline{CD}\right) = m\left(\overline{BA}\right)$.

Figura 1.69 | Triângulos congruentes - ΔCDO, ΔCOB e ΔBOA



Fonte: elaborada pelo autor.

Como você poderia resolver o exercício para ajudar o seu sobrinho ou primo a sanar as suas dúvidas?

Resolução da situação-problema

Na Figura 1.69, podemos chamar os ângulos *COD*, *COB* e *BOA*, respectivamente, de *y*, *x* e z, ou seja, $COD = y$, $COB = x$ e $BOA = z$. Com isso, podemos escrever que $BOD = x + y$ e $COA = x + z$.

Como no enunciado temos que $m\left(BOD\right) = m\left(COA\right)$, fazemos:

$$m\left(x\right) + m\left(y\right) = m\left(x\right) + m\left(z\right)$$

$$m\left(x\right) - m\left(x\right) + m\left(y\right) = m\left(z\right)$$

$$m\left(y\right) = m\left(z\right)$$

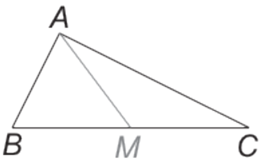
E concluímos que $m\left(COD\right) = m\left(BOA\right)$.

Desta forma, temos: $\begin{cases} \overline{OC} \equiv \overline{OB} \\ C\hat{O}D \equiv B\hat{O}A \\ \overline{OD} \equiv \overline{OA} \end{cases}$. A partir disso, pelo caso LAL, temos que o triângulo COD é congruente ao triângulo BOA $\left(\Delta COD \equiv \Delta BOA\right)$. Consequentemente, como os lados $\overline{CD}$ e $\overline{BA}$ são correspondentes nessa congruência, temos $m\left(\overline{CD}\right) = m\left(\overline{BA}\right)$.

Faça valer a pena

1. Na Figura 1.70, ilustrada a seguir, o triângulo *ABC* é a união dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. O ponto *M*, localizado entre os pontos *B* e *C*, é extremidade do segmento de reta $\overline{AM}$. Este ponto é o ponto médio do segmento de reta $\overline{BC}$, ou seja, ele divide o segmento de reta $\overline{BC}$ em outros dois segmentos de reta congruentes. Os segmentos $\overline{BM}$ e $\overline{MC}$.

Figura 1.70 | ΔABC com *M* sendo o ponto médio do segmento de reta $\overline{BC}$



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com as informações fornecidas, em relação ao ΔABC, é possível dizer que o segmento de reta $\overline{AM}$ é uma:

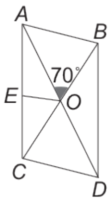
a) Bissetriz interna. c) Hipotenusa. e) Congruência.

b) Mediana. d) Semirreta.

2. Chamamos de bissetriz interna do triângulo o segmento de reta com uma extremidade em um dos vértices do triângulo e a outra extremidade no lado oposto a esse vértice, dividindo o ângulo correspondente ao vértice em outros dois ângulos congruentes.

Na Figura 1.71, os pontos *A, O* e *D* são colineares. Além disso, temos que $m\left(AOB\right) = 70°$ e o segmento de reta $\overline{OE}$ é a bissetriz interna do ângulo *AOC*. Assinale a alternativa que contém a medida dos ângulos *AOE* e *EOC*.

Figura 1.71 | Determinando as medidas dos ângulos *AOE* e *EOC*



Fonte: elaborada pelo autor.

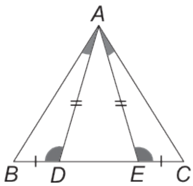
a) 50°. c) 55°. e) 62°.

b) 54°. d) 61°.

3. Determinamos a congruência entre dois triângulos através da comparação entre os três lados e os três ângulos de ambos (seis congruências). Entretanto, podemos assegurar a congruência apenas com quatro elementos mínimos necessários, denominados casos de congruência. Chamamos esses casos de LAL (Lado Ângulo Lado), LLL (Lado Lado Lado), ALA (Ângulo Lado Ângulo), LAAo (Lado Ângulo Ângulo Oposto), além do caso especial de congruência de triângulos retângulos.

Determine as medidas dos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{EC}$, conforme Figura 1.72 . Dados: $m\left(\overline{AB}\right) = 2y + 17$, $m\left(\overline{BD}\right) = x + 15$, $m\left(\overline{AC}\right) = 3y - 2$, $m\left(\overline{EC}\right) = 2x + 5$, medidas em centímetros.

Figura 1.72 | Triângulos congruentes *ABD* e *ACE*



Fonte: elaborada pelo autor.

a) $m\left(\overline{AB}\right)=55\text{ cm}$; $m\left(\overline{EC}\right)=25\text{ cm}$.

b) $m\left(\overline{AB}\right)=25\text{ cm}$; $m\left(\overline{EC}\right)=55\text{ cm}$.

c) $m\left(\overline{AB}\right)=56\text{ cm}$; $m\left(\overline{EC}\right)=26\text{ cm}$.

d) $m\left(\overline{AB}\right)=26\text{ cm}$; $m\left(\overline{EC}\right)=56\text{ cm}$.

e) $m\left(\overline{AB}\right)=52\text{ cm}$; $m\left(\overline{EC}\right)=55\text{ cm}$.

Referências

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e estatística. **História indígena**. Disponível em: <http://brasil500anos.ibge.gov.br/territorio-brasileiro-e-povoamento/historiaindigena.html>. Acesso em: 6 jan. 2017.

MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 21 out. 2016

MANFIO, F. **Fundamentos da Geometria**. São Paulo: ICMC-USP, 2016. Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/manfio/GeoAxiomatica.pdf>. Acesso em: 28 out. 2016.

MATTA, P. S.; FERREIRA, C. A. M. **Geometria Plana**. Disponível em: <http://www.uezo.rj.gov.br/proext/matematicaGeometria.pdf>. Acesso em: 6 jan. 2017.

RICH, B. **Geometria**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788577803194/pageid/0>. Acesso em: 6 jan. 2017.

UEL. **Ângulos**. Disponível em: <http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/dg/dg_2t.php.>. Acesso em: 6 jan. 2017.

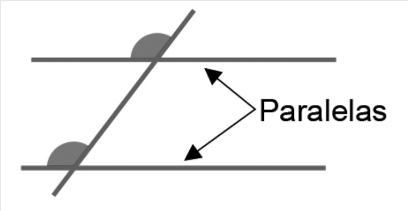
Retas e polígonos

Convite ao estudo

Dois dos principais objetos de estudo da Geometria são a reta e o ângulo, porque são construídos com esses dois elementos diversos outros elementos, emergindo propriedades e teoremas no meio do caminho dessas construções, que já são conhecidos há séculos, pelo menos desde a época dos gregos antigos.

Não há como falar em Geometria e não citar Euclides, matemático grego do terceiro século anterior à Era Comum. Em sua obra *Elementos* há diversos resultados relacionados a retas e ângulos, além do famoso postulado de Euclides que fala sobre retas paralelas (Figura 2.1).

Figura 2.1 | Postulado de Euclides



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesta unidade, você estudará o postulado de Euclides e diversos outros resultados relacionados a ele. Mais especificamente, pretendemos que você conheça um pouco das retas paralelas, perpendiculares e oblíquas, bem como os ângulos determinados por essas retas. Queremos também que você aprenda a relação entre os ângulos internos e externos de um triângulo, além de localizar corretamente a altura desse polígono.

Na segunda seção, você entenderá o que são quadriláteros, como classificá-los em quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos e quais são suas principais propriedades.

Para finalizar, na terceira seção, você reconhecerá os pontos notáveis de um triângulo e aprenderá como determiná-los. Além disso, poderá entender mais sobre outros polígonos. E para deixar isso mais interessante, imagine-se como um professor no início de sua carreira, trabalhando em uma escola de ensino básico que não dispõe de muitos recursos para a aquisição de materiais e insumos para utilização em sala de aula. Com esse cenário em mente, você precisa repensar seus métodos e meios de mediar aulas para promover o aprendizado e garantir que a falta de recursos não afete a qualidade do ensino.

Algumas perguntas podem direcionar o seu estudo: quais estratégias e materiais poderiam ser utilizados para ensinar os resultados provenientes do estudo de Geometria? Quais aplicações poderiam ser abordadas em sala, a partir da utilização de materiais baratos, de modo que a compreensão do assunto fosse motivada?

Para você repensar sua maneira de ensinar, ao longo desta unidade, algumas situações lhe serão propostas e o foco será elaborar uma estratégia de ensino pensando na economia de recursos. Nesta primeira seção, você terá que pensar em um meio de ensinar dois teoremas, o do ângulo externo a um triângulo e o da soma dos ângulos internos também de um triângulo. Já na segunda seção, o desafio será estruturar um passo a passo para a construção de um retângulo. Por fim, será necessário pensar em como trabalhar a localização de pontos notáveis em um triângulo. Logicamente, a ideia é que você, como docente, elabore planos de aula para cada uma das estratégias, visando documentar sua prática docente e, possivelmente, compartilhar suas ideias com seus colegas. Vamos lá?

Seção 2.1

Retas

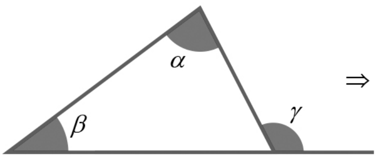
Diálogo aberto

Como já mencionado, nesta seção você aprenderá mais sobre retas, em especial sobre pares de retas localizadas em um mesmo plano, podendo estas serem classificadas como paralelas, perpendiculares ou oblíquas. Essas nomenclaturas já devem fazer parte dos seus conhecimentos prévios, mas não por esse motivo você deve deixar de ler e entender cada uma delas. E por que você deve fazer isso? É comum enraizarmos alguns significados de termos que nos foram apresentados no ensino básico. Contudo, nem sempre esse "significado" corresponde à essência da palavra. Por vezes, eles são consequências de teoremas e propriedades e não a definição de um objeto. Será que o que você entende por reta paralela é o real significado adotado pela Geometria? Pense nisso e o compare com a definição que será apresentada adiante.

Você deve se lembrar de que pedimos a você que se imaginasse como um professor do ensino básico de uma escola com poucos recursos. Para que você possa encarar o desafio de ensinar com qualidade e, ao mesmo tempo, lidar com as dificuldades presentes no dia a dia do docente atual, é preciso realizar o planejamento antecipado de suas aulas. Para uma primeira aula, imagine-se com a tarefa de ensinar aos estudantes dois resultados notáveis da Geometria Plana:

1. A medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele (Figura 2.2).

Figura 2.2 | Ângulo externo a um triângulo

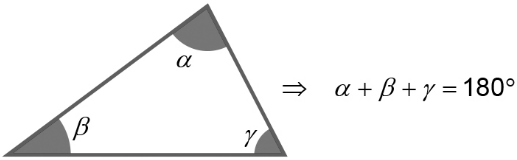


$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = \gamma$$

Fonte: elaborada pelo autor.

2. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus (Figura 2.3).

Figura 2.3 | Ângulos internos de um triângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Você conseguiria propor uma estratégia interessante para abordar esses dois assuntos? Que tal descrever em um plano de aula os passos a serem realizados e as justificativas teóricas que garantem o sucesso do experimento? Afinal, o objetivo é ensinar Geometria Plana. A estratégia utilizada é somente uma alternativa dentre as inúmeras que existem.

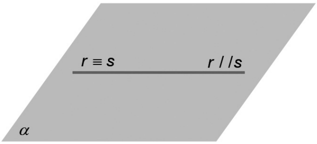
Não pode faltar

A Geometria Plana é também conhecida como a Geometria Euclidiana pelo fato de Euclides de Alexandria (300 a.C.) ser um dos matemáticos que a estudou mais a fundo, formalizando-a. Apesar dessa formalização, você aprendeu que alguns elementos da Geometria não possuem uma definição formal e são tomados como noções primitivas, como é o caso do ponto, da reta e do plano. Esse segundo elemento, a reta, será o foco dos estudos desta seção. Em especial, estaremos interessados em pares de retas ditas paralelas. No entanto, o que isso significa?

Paralelismo

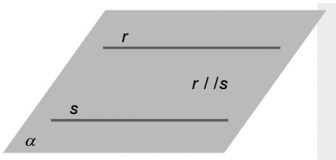
Retas **paralelas** são aquelas: (1) coincidentes ou (2) coplanares e sem pontos comuns.

Figura 2.4 | Retas coincidentes



Fonte: elaborada pelo autor.

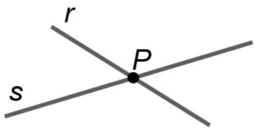
Figura 2.5 | Retas coplanares e sem pontos



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma reta *s* será **concorrente** com r quando tiverem somente um ponto em comum, $r \cap s = \{P\}$, como na Figura 2.6.

Figura 2.6 | Retas concorrentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Em se tratando de retas paralelas, quando não possuem pontos em comum, haverá sempre uma distância *d* positiva e constante entre elas. No caso proposto na Figura 2.5, podemos escrever:

$$d_{r,s} > 0$$

Já quando duas retas possuem pontos em comum, paralelas ou não, a distância entre elas será nula, como é o caso das retas das Figuras 2.4 e 2.6, ou seja, em ambos os casos, $d_{r,s} = 0$.

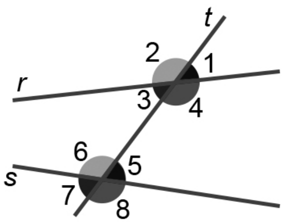
Uma reta *t* é **transversal** a duas retas *r* e *s* paralelas ou não, se *t* é concorrente com *r* e com *s*, como mostra a Figura 2.7. Repare que quando temos duas retas cortadas por uma transversal, ficam definidos oito ângulos, quatro em cada interseção. Os pares de ângulos determinados recebem nomes especiais, sendo eles (vide Figura 2.7):

Alternos: $\underbrace{\hat{1} \text{ e } \hat{7};\ \hat{2} \text{ e } \hat{8}}_{\text{Alternos externos}};\ \underbrace{\hat{4} \text{ e } \hat{6};\ \hat{3} \text{ e } \hat{5}}_{\text{Alternos internos}}$

Colaterais: $\underbrace{\hat{1} \text{ e } \hat{8};\ \hat{2} \text{ e } \hat{7}}_{\text{Colaterais externos}};\ \underbrace{\hat{3} \text{ e } \hat{6};\ \hat{4} \text{ e } \hat{5}}_{\text{Colaterais internos}}$

Correspondentes: $\hat{1} \text{ e } \hat{5};\ \hat{2} \text{ e } \hat{6};\ \hat{3} \text{ e } \hat{7};\ \hat{4} \text{ e } \hat{8}$

Figura 2.7 | Reta t, transversal a *r* e a *s*



Fonte: elaborada pelo autor.

Em uma situação como a descrita pela Figura 2.7, existe uma forte relação entre os ângulos.

Se os dois ângulos de um dos pares de alternos são congruentes,

então:

1. Os dois ângulos de todos os pares de alternos são congruentes.

2. Os dois ângulos de todos os pares de correspondentes são congruentes.

3. Os dois ângulos de todos os pares de colaterais são suplementares.

Para ficar mais claro, considere que $\hat{1} \equiv \hat{7}$ ou seja, $med(\hat{1}) = med(\hat{7}) = \alpha$ Com a afirmação anterior poderíamos concluir, por exemplo, que o par de ângulos correspondentes $\hat{2}$ e $\hat{6}$ também são congruentes, mas por quê? Veja que $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são suplementares, assim como os ângulos $\hat{6}$ e $\hat{7}$, ou seja, $m(\hat{1}) + m(\hat{2}) = 180° = m(\hat{6}) + m(\hat{7})$. Então:

$$\alpha + m(\hat{2}) = 180° = m(\hat{6}) + \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha + m(\hat{2}) = m(\hat{6}) + \alpha \quad \Rightarrow \quad m(\hat{2}) = m(\hat{6}).$$

Portanto, $\hat{2}$ e $\hat{6}$ também são congruentes.

As recíprocas da afirmação anterior também são verdadeiras.

Faça você mesmo

Com base na Figura 2.7, assumindo que $\hat{1} \equiv \hat{7}$, justifique por que:

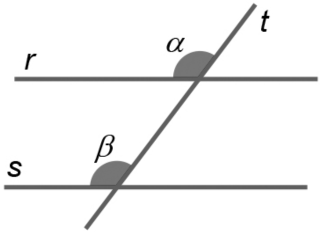
$\bullet\ \hat{2} \equiv \hat{8}$; $\bullet\ \hat{4} \equiv \hat{6}$; $\bullet\ m(\hat{3}) + m(\hat{6}) = 180°$.

Existe um resultado muito importante relacionado a duas retas cortadas por uma transversal. Segundo ele (vide Figura 2.8):

Assimile

"se *r* e *s* são retas interceptadas por uma transversal *t*, de modo que um par de ângulos correspondentes sejam congruentes, então *r* e *s* são retas paralelas" (MANFIO, 2016, p. 34).

Figura 2.8 | Retas *r*, *s* cortadas por *t*



Fonte: elaborada pelo autor.

Simbolicamente: $\alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad r // s$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada. A demonstração desse resultado pode ser encontrada na página 78 do material disponível em <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 05 out. 2017.

A recíproca deste resultado também é verdadeira, ou seja, se *r* e *s* são retas **paralelas** interceptadas por uma transversal *t*, qualquer par de ângulos correspondentes será congruente.

Esses resultados são particularmente úteis para a construção de retas paralelas, pois basta construir ângulos correspondentes (ou alternos) congruentes.

Exemplificando

Suponha que 2x e x+20° sejam as medidas de um par de ângulos alternos formado pelo cruzamento de duas retas paralelas com uma transversal. Qual é o valor de x? Dica: faça um esboço representando o problema.

Resolução: como as retas que determinam os ângulos são paralelas, seguem que esses ângulos são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida. Logo: $2x = x + 20° \quad \Rightarrow \quad 2x - x = 20° \quad \Rightarrow \quad x = 20°$.

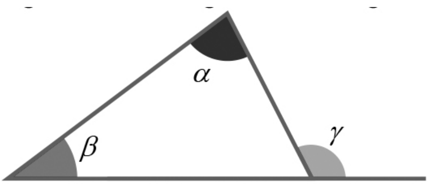
De acordo com Dolce e Pompeu (2013), a reta que passa por um ponto escolhido e é paralela a uma reta dada é única. Além disso, essa unicidade é garantida pelo postulado de Euclides, que enuncia:

“Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada” (DOLCE; POMPEU, 2013, p. 64).

Teoremas dos ângulos internos e externos de um triângulo

A partir dos resultados anteriores e do postulado de Euclides, podemos demonstrar duas igualdades interessantes relacionadas aos ângulos de triângulos quaisquer, mas, primeiramente, veja a Figura 2.9 e reflita: qual é a relação entre os ângulos internos (α e β) e o ângulo externo do lado oposto (γ)?

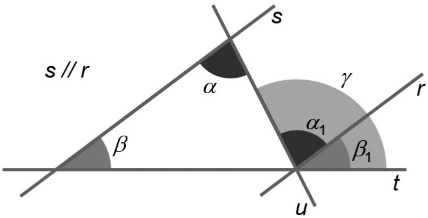
Figura 2.9 | Triângulo e seus ângulos



Fonte: elaborada pelo autor.

Para facilitar, considere que sejam traçadas retas *s*, *r* e *u* sobre os lados do triângulo, sendo *s* traçada sobre o lado adjacente aos ângulos α e β e uma seja traçada paralela a *s*, denominada *r*, que contenha o terceiro vértice do triângulo, conforme Figura 2.10. A reta *r* dividirá o ângulo γ em dois outros, α_1 e β_1, com

Figura 2.10 | Triângulo com destaque para o ângulo externo



Fonte: elaborada pelo autor.

$\alpha_1 + \beta_1 = \gamma$. Devido ao paralelismo de *s* e *r*, esperamos que você tenha percebido que $\alpha = \alpha_1$ (alternos internos) e $\beta = \beta_1$ (correspondentes).

Com isso, podemos enunciar:

Em todo triângulo, a medida de qualquer um de seus ângulos externos é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Essa afirmação se justifica com o fato, obtido por construção, de que $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma$, $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \beta_1$. Além da afirmação anterior, outra também é verdadeira:

Em todo triângulo, a soma de seus ângulos internos é igual a 180°.

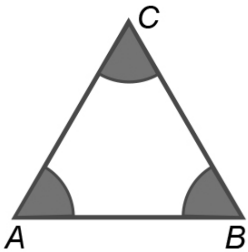
Faça você mesmo

Com base na Figura 2.10, justifique a afirmação anterior.

Do fato de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180º, decorre uma particularidade muito útil na Geometria:

Cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero mede 60°.

Figura 2.11 | Triângulo equilátero



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se de que o triângulo equilátero é aquele que possui todos os lados de mesma medida. Para justificar isso, primeiramente precisamos saber que todo triângulo equilátero é também **equiângulo**, ou seja, seus ângulos internos possuem a mesma medida. Essa informação é obtida, por sua vez, do fato de que em todo triângulo isósceles (um triângulo equilátero é também isósceles), os ângulos da base são congruentes. Veja a demonstração desse fato na página 53 do material disponível em<http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 05 out. 2017.

Para entender melhor, observe o triângulo equilátero ABC da Figura 2.11. Como $m\left(\overline{AC}\right)=m\left(\overline{BC}\right)$ segue que $m\left(\hat{A}\right)=m\left(\hat{B}\right)$. Além disso, de $m\left(\overline{AB}\right)=m\left(\overline{AC}\right)$ segue que $m\left(\hat{B}\right)=m\left(\hat{C}\right)$. Conclusão: $m\left(\hat{A}\right)=m\left(\hat{B}\right)=m\left(\hat{C}\right)$. Já que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos:

$$m\left(\hat{A}\right) + m\left(\hat{B}\right) + m\left(\hat{C}\right) = 180°;$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

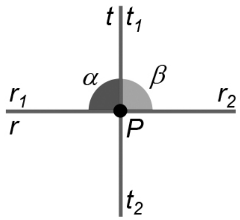
$$m\left(\hat{A}\right) + m\left(\hat{A}\right) + m\left(\hat{A}\right) = 180° \quad \Rightarrow \quad 3m\left(\hat{A}\right) = 180° \quad \Rightarrow \quad m\left(\hat{A}\right) = 60°.$$

Logo, $m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{B}\right) = m\left(\hat{C}\right) = 60°$.

Perpendicularidade

Suponha duas retas *r* e *t* concorrentes, cuja interseção é um ponto *P*. A partir de *P*, considere quatro semirretas, r_1, r_2, t_1 e t_2, sendo r_1 e r_2 sobre *r* e opostas, t_1 e t_2 sobre *t* e opostas. Considere ainda dois ângulos adjacentes e suplementares α e β determinados, respectivamente, pelas semirretas t_1 e r_1, r_2 e t_1, como mostra a Figura 2.12.

Figura 2.12 | Retas *r* e *t*



Fonte: elaborada pelo autor.

As retas *r* e *t* serão **perpendiculares** caso os ângulos α e β forem congruentes, ou seja, $\alpha = \beta$.

Caso *r* e *t* forem perpendiculares, tanto α quanto β serão **ângulos retos** e medirão 90°. Veja o porquê disso:

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha + \beta = 180° \end{cases} \Rightarrow \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 90° \underset{\alpha=\beta}{\Rightarrow} \beta = 90°.$$

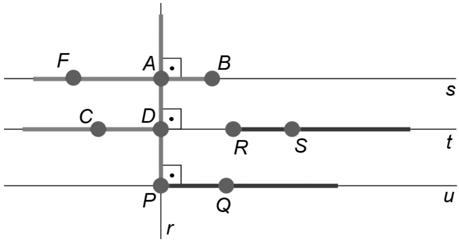
Para simbolizar um ângulo reto, é comum utilizarmos ⦜, enquanto que para simbolizarmos que duas retas são perpendiculares, utilizamos $\perp$. No caso da Figura 2.12, $r \perp t$.

O conceito de perpendicularidade também é estendido para outros objetos, como semirretas e segmentos. Essa extensão é feita com algumas considerações:

> **Duas semirretas são perpendiculares se, e somente se, estão contidas em retas perpendiculares e têm um ponto comum. Dois segmentos de reta são perpendiculares se, e somente se, estão contidos em retas perpendiculares e têm um ponto comum. (DOLCE; POMPEU, 2013, p. 80, grifo nosso)**

Essas definições podem causar um pouco de estranheza com algumas possibilidades que temos. Veja, por exemplo, a Figura 2.13:

Figura 2.13 | Retas, segmentos e semirretas



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 2.13, as retas *s*, *t* e *u* são ambas perpendiculares à reta *r*. Com a definição anterior, é válido que $\overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{DC}$, mas não é verdade que $\overrightarrow{PD}$ seja perpendicular a $\overrightarrow{RS}$, pois essas semirretas não têm pontos em comum.

Também é verdade que $\overline{BF} \perp \overline{AD}$ e $\overline{DC} \perp \overline{AD}$, mas não é verdade, por exemplo, que $\overline{BF} \perp \overline{DP}$, pois, novamente, esses dois últimos segmentos não possuem pontos em comum.

Reflita

Ainda em relação à Figura 2.13, quais outras perpendicularidades são válidas e quais não são verdadeiras? Escreva algumas de forma simbólica.

Dado um plano e um ponto pertencente a ele, existe e é única a reta perpendicular a uma reta pertencente a este plano que passa pelo ponto dado.

A afirmação anterior é um teorema que exige demonstração. Não a esboçaremos aqui, contudo recomendamos que você a leia, acessando: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 05 out. 2017.

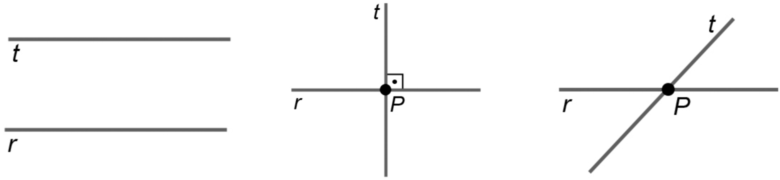
Caso duas retas pertençam ao mesmo plano, há três possibilidades para elas, como mostra a Figura 2.14:

Figura 2.14 | Possibilidades para duas retas no plano

Paralelas
r // t
$r \cap t = \varnothing$

Perpendiculares
$r \perp t$
$r \cap t = \{P\}$

Oblíquas
$r \cap t = \{P\}$



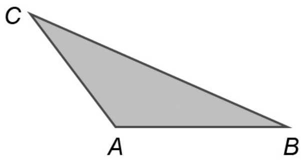
Fonte: elaborada pelo autor.

Veja que no terceiro caso, as retas *r* e *t* são concorrentes, mas não são perpendiculares. Por esse motivo, são classificadas como oblíquas.

Altura de um triângulo

Para identificar a **altura** de um triângulo, considere o triângulo da Figura 2.15 e a seguinte construção:

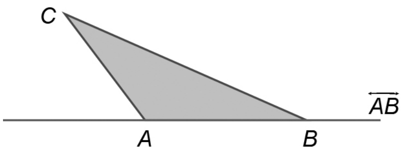
Figura 2.15 | Triângulo *ABC*



Fonte: elaborada pelo autor.

Passo 1: construa uma reta $\overleftrightarrow{AB}$. Essa será a denominada **reta suporte** do lado $\overline{AB}$.

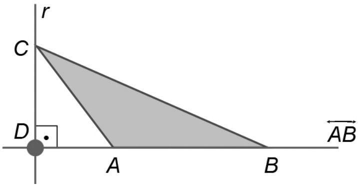
Figura 2.16 | Triângulo ABC e reta $\overleftrightarrow{AB}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Passo 2: construa uma reta *r* perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ que passe por *C* e marque o ponto *D* de interseção dessas duas retas.

Figura 2.17 | Triângulo *ABC* e altura $\overleftrightarrow{CD}$



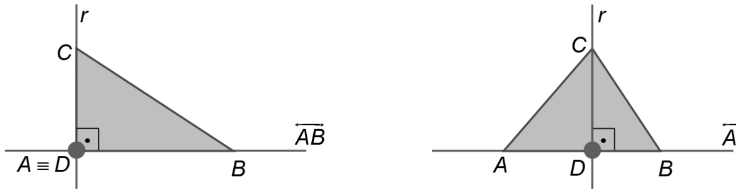
Fonte: elaborada pelo autor.

O segmento CD da Figura 2.17 é denominado **altura** do triângulo *ABC*, relativa à base $\overline{AB}$ ou relativa ao vértice *C*. Por construção, $\overline{CD}$ tem a propriedade de ser perpendicular à reta suporte de $\overline{CD}$. O ponto *D* costuma ser denominado **pé da perpendicular** e ou a **projeção** do ponto C sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$. A projeção também pode, conforme a Figura 2.18, coincidir com um dos vértices da base ou estar entre eles.

Figura 2.18 | Outras possibilidades para a altura de um triângulo

(a) coincidir com um dos vértices da base

(b) estar entre os vértices da base



Fonte: elaborada pelo autor.

Dado que agora você sabe o que é a projeção de um ponto sobre uma reta, como seria a projeção de um segmento *AB* sobre uma reta *r*, ambos localizados em um mesmo plano? Faça uma pesquisa e descubra a resposta dessa pergunta.

Ainda aproveitando a Figura 2.18 (b), podemos definir a **mediatriz de um segmento**. A reta *r* será a mediatriz de $\overline{AB}$ somente se for perpendicular ao segmento e passar pelo seu ponto médio, ou seja:

$$(r \perp \overline{AB}) \text{ e } (\overline{AD} \equiv \overline{DB}) \Rightarrow r \text{ é mediatriz de } \overline{AB}.$$

Pesquise mais

Leia mais sobre os conteúdos desta seção em:

RICH, B. SCHMIDT, P. A. **Geometria**. 3. ed. Bookman, 2015. Coleção Schaum.

Lembre-se de que como estudante de nossa instituição, você tem acesso gratuito a esse e muitos outros livros na Biblioteca Virtual. Entre na biblioteca virtual e depois acesse: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577803194/cfi/117!/4/4@0.00:10.1>. Acesso em: 27 jan. 2016.

Sem medo de errar

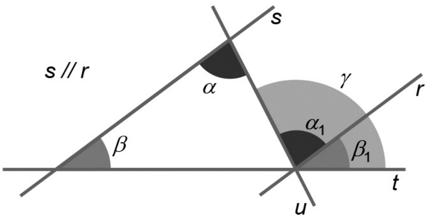
Lembre-se: você é o docente de uma escola e está planejando suas aulas. Como ensinar que:

1. A medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele?

2. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus?

Esses dois resultados são válidos e foram justificados quando discutimos as Figuras 2.9 e 2.10. O interessante aqui é que, às vezes, a própria justificativa teórica "dá dicas" sobre estratégias didáticas que podem ser utilizadas. Por exemplo, note que na Figura 2.10, reproduzida novamente a seguir, traçamos, a partir da Figura 2.9, retas *s*, *r* e *u* sobre os lados do triângulo sendo s sobre o lado adjacente aos ângulos α e β e uma paralela a *s*, denominada *r*, que contém o terceiro vértice do triângulo" (como já descrevemos anteriormente).

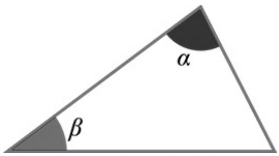
Figura 2.10 | Triângulo com destaque para o ângulo externo



Fonte: elaborada pelo autor.

O que quisemos fazer com isso foi "transferir" os ângulos α e β para junto do ângulo γ, de modo a realizar uma adição geométrica de α e β e mostrar que essa adição equivale ao ângulo γ. Feito isso, o resultado (1) fica justificado. Ao trabalhar esse conceito com alunos do ensino básico, você poderia utilizar régua, lápis e tesoura. Primeiramente, poderia desenhar o triângulo em uma folha de papel/cartolina, marcar os ângulos e recortar o triângulo, como na Figura 2.19.

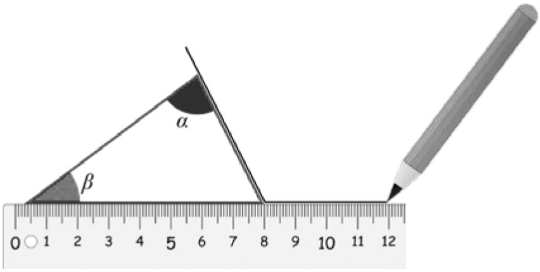
Figura 2.19 | Passo 1 com o triângulo de papel



Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, uma boa estratégia seria desenhar o ângulo externo em um papel, com o auxílio do triângulo e de uma régua.

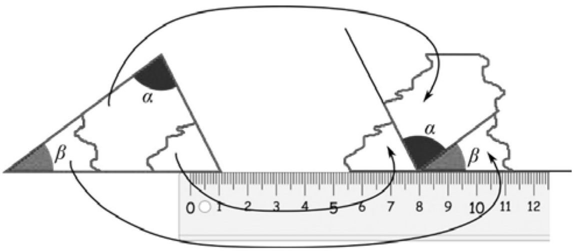
Figura 2.20 | Passo 2 com o triângulo de papel



Fonte: adaptado de <https://goo.gl/bBY7aC>; <https://goo.gl/WlHAfF>. Acesso em: 27 jan. 2017.

Por fim, rasgar as pontas do triângulo de papel e sobrepor o ângulo externo poderia evidenciar o resultado teórico.

Figura 2.21 | Passo 3 com o triângulo de papel



Fonte: adaptada de <https://goo.gl/spTPtG>; <https://goo.gl/QN1SUK>. Acesso em: 27 jan. 2017.

Observe na Figura 2.21 que o ângulo externo é visivelmente equivalente à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Esse passo a passo pode convencer facilmente um aluno do ensino básico, pois utiliza recursos visuais. De quebra, ganhamos tempo, pois esse mesmo passo a passo também deixa visual que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Logo, essa também pode ser uma estratégia para o tratamento do item (2), elencado anteriormente.

Atenção: esse passo a passo somente funciona porque a Geometria garante os resultados aqui evidenciados e não o contrário. Esse experimento não poderia, aos olhos dos geômetras, ser considerado uma demonstração formal.

No objeto interativo presente no link seguir há mais uma estratégia de como explorar esse teorema. Cabe agora a você encontrar outras.

GEOGEBRA. **Teorema do ângulo externo**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/UPxzmzw7>. Acesso em: 27 jan. 2017.

Agora que todos os passos foram detalhados, basta você documentar tudo por meio de um plano de aula.

Avançando na prática

Construção de uma paralela

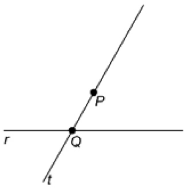
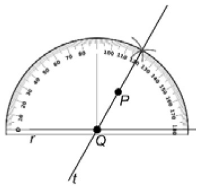
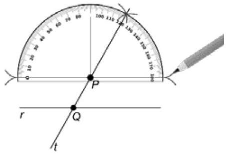
Descrição da situação-problema

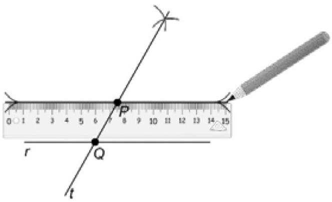
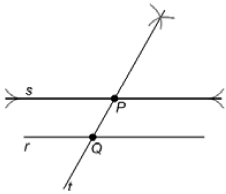
Suponha que você tenha sido contratado para lecionar *Noções de Geometria Plana* para o curso técnico de Topografia de uma instituição de ensino de sua cidade. O topógrafo, futuro egresso desse curso, deve ter bons conhecimentos geométricos, pois suas atividades profissionais estarão relacionadas, entre outras coisas, à agrimensura, uma das primeiras áreas da história da humanidade a aplicar conhecimentos de Geometria, conforme já mencionamos neste livro didático.

Considere que em uma das suas aulas, é necessário demonstrar um modo de construir uma reta paralela a uma reta dada. Pensando na importância dos alunos fixarem esse conhecimento, qual seria um passo a passo interessante para realizar essa tarefa?

Resolução da situação-problema

Com base no que foi tratado nesta seção, novamente os conteúdos nos dão dicas de como realizar essa construção, contudo, a estratégia que você utilizará é uma escolha pessoal. Lembre-se de que "se *r* e *s* são retas interceptadas por uma transversal t, de modo que um par de ângulos correspondentes sejam congruentes, então *r* e *s* são retas paralelas" (MANFIO, 2016, p. 34). Utilizando-se desse resultado, suponha que a reta dada seja *r* e que queiramos obter a reta *s*.

Primeiramente, (1) construímos uma reta *t* concorrente com *r*; (2) marcamos o ponto *Q* na interseção das duas retas e um ponto *P* em *t*, sendo *P* fora da reta *r*, como na Figura 2.22.	Depois, (3) com um transferidor, medimos o ângulo formado entre as retas. Nesse exemplo, 120°, conforme Figura 2.23.	(4) Centramos o transferidor no ponto *P*, mantemos a marcação de 120° junto da reta *t* e (5) marcamos dois pontos que determinarão a nova reta.
Figura 2.22 | Passos 1 e 2 	Figura 2.23 | Passo 3 	Figura 2.24 | Passos 4 e 5 

(6) Com os dois pontos obtidos com o transferidor, determinamos a reta *s*.	(7) A reta s será paralela à *r*, pois a construímos de modo a formar com a transversal ângulos correspondentes congruentes.
Figura 2.25 | Passos 6 	Figura 2.26 | Passo 7 

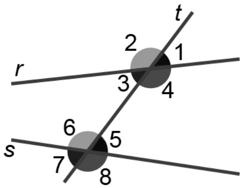
Fonte: adaptada de: <https://goo.gl/QN0p9c>; <https://goo.gl/qCiXxk>;<https://goo.gl/mTIfkx>. Acesso em: 27 jan. 2017.

Observe que os passos de 1 a 7 demonstram detalhadamente uma maneira de construir uma reta paralela a uma reta dada. Que tal agora criar um plano de aula para arquivar esse procedimento ou outro que você possa ter elaborado?

Faça valer a pena

1. Quando uma reta t concorre com duas outras, que denominaremos *a* e *b*, dizemos que *t* é transversal em relação às retas *a* e *b*. Neste caso, ficam determinados oito ângulos, conforme representados na Figura 2.27.

Figura 2.27 | Retas concorrentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base no texto anterior e na Figura 2.27, os ângulos do par $\hat{2}$ e $\hat{7}$ são denominados:

a) Colaterais internos.

b) Colaterais externos.

c) Alternos internos.

d) Alternos externos.

e) Correspondentes.

2. Um dos resultados relevantes da Geometria relaciona o ângulo externo de um triângulo com os ângulos internos não adjacentes a ele. Esse é o conhecido teorema do ângulo externo.

À luz do que estabelece o teorema do ângulo externo, analise a seguinte situação:

Um triângulo possui um ângulo externo que mede o dobro de cada um dos ângulos internos não adjacentes a ele, sendo estes congruentes. A soma das medidas desses três ângulos é igual a 120°.

Qual é a medida do referido ângulo externo do triângulo descrito anteriormente?

a) 80°.
c) 40°.
e) 20°.
b) 60°.
d) 30°.

3. É bem sabido que a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é igual a 180°, lembrando-se de que triângulo retângulo é aquele que possui um de seus ângulos internos retos, sendo os outros dois ângulos agudos.

Em um triângulo retângulo *ABC*, sabe-se que um de seus ângulos agudos tem um quarto da medida do outro ângulo também agudo. Necessita-se saber a medida do menor ângulo desse triângulo.

Assinale a alternativa que contém a medida do menor ângulo do triângulo *ABC*:

a) 18°.
c) 24°.
e) 32°.
b) 22°.
d) 25°.

Seção 2.2

Quadriláteros

Diálogo aberto

Na seção anterior, você estudou um pouco sobre pares de retas no plano, o postulado de Euclides e resultados importantes, como a relação entre os ângulos determinados por uma transversal e o paralelismo das retas cortadas por ela. Esses assuntos, além de poderem por si só ser aplicados de modo prático, também servem de base para a construção de outros objetos da Geometria Plana, como os quadriláteros, foco do nosso estudo nesta seção.

Você verá que conceitos já estudados, tais como segmento de reta, vértice, ângulo, congruência e paralelismo, auxiliam na construção e na classificação das figuras conhecidas como quadriláteros.

Recorde-se de que no início desta unidade pedimos para você supor que estava atuando como docente do ensino básico, no qual um dos desafios frequentes é a falta de recursos para as aulas. A primeira tarefa que propusemos foi a realização de uma atividade com papel e tesoura para verificar dois resultados importantes da Geometria, a saber: o teorema do ângulo externo e o da soma dos ângulos internos de um triângulo. Então, suponha agora que você tenha recorrido ao armário de materiais da escola para pegar réguas e compassos para ensinar os seus estudos sobre os quadriláteros. Contudo, ao verificar as réguas, a maioria delas estavam com as graduações apagadas pelo desgaste do tempo, restando somente duas ou três com as marcações visíveis. Por sorte, os compassos estavam em bom estado.

Ao se lembrar do seu planejamento, recordou-se de que uma das atividades propostas era a construção de um retângulo de lados adjacentes medindo 3 cm e 4 cm. Como descrever a construção dessa figura geométrica aos estudantes? Que tal montar um passo a passo da construção para levar para a sala de aula, sintetizando a teoria que justifica os procedimentos a ser realizados? Outras atividades envolviam a verificação de propriedades dos quadriláteros. Que tal pensar em algumas que poderiam ser trabalhadas facilmente com os recursos disponíveis? No final, para se organizar, aproveite para elaborar um plano de aula com tudo o que você desenvolverá nessa atividade.

Não pode faltar

Nesta seção, estudaremos os quadriláteros e suas propriedades, mas, primeiramente, o que é um quadrilátero? Para entender sua definição, temos que recorrer a elementos da Geometria, mais especificamente a plano, ponto e segmento de reta.

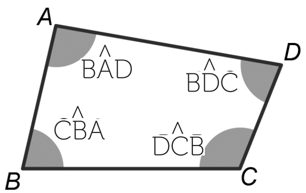
Quadrilátero

Considere, em um mesmo plano, quatro pontos distintos, os quais nomearemos *A*, *B*, *C* e *D*. Suponha ainda que quaisquer três deles são não colineares, ou seja, não estão sobre uma mesma reta. Segundo Dolce e Pompeu (2013, p. 99, grifo do autor), "se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a união desses quatro segmentos é um **quadrilátero**".

Na Figura 2.28, temos um quadrilátero *ABCD*. Nele podemos destacar alguns elementos importantes:

- Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são os **vértices**.
- Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são os **lados**.
- $B\hat{A}D$, $C\hat{B}A$, $D\hat{C}B$ e $A\hat{D}C$ são os ângulos internos do quadrilátero.

Figura 2.28 | Quadrilátero e alguns de seus elementos

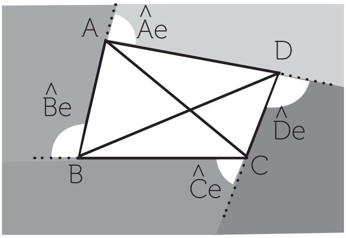


Fonte: elaborada pelo autor.

Além dos elementos anteriores, podemos ainda destacar os seguintes, conforme Figura 2.29:

- Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as **diagonais** do quadrilátero *ABCD*, sendo *A* e *C* vértices opostos, assim como *B* e *D*.
- Os ângulos $\hat{A}_e$, $\hat{B}_e$, $\hat{C}_e$ e $\hat{D}_e$ são os **ângulos externos** do quadrilátero *ABCD*. Repare que, com exceção dos seus lados, os **ângulos externos** não se interceptam.

Figura 2.29 | Outros elementos do quadrilátero



Fonte: elaborada pelo autor.

Há ainda outra maneira de localizar os ângulos externos de um quadrilátero. Reflita sobre essa possibilidade e tente esboçar essa outra maneira para o quadrilátero da Figura 2.29.

Assimile

Um quadrilátero qualquer possui exatamente **duas** diagonais.

Agora que você já conhece alguns elementos do quadrilátero, podemos ir além, distribuindo-os em dois grupos, os convexos e os côncavos. Veja na Figura 2.30 dois representantes desses grupos.

Figura 2.30 | Quadrilátero: (a) convexo; (b) côncavo

elaborada pelo autor.

Na Figura 2.30 (a), temos um denominado **quadrilátero convexo**, já na Figura 2.30 (b), um **quadrilátero côncavo**. Para melhor definir, um quadrilátero será convexo se para qualquer um dos lados sua reta suporte não interceptar os demais lados, com exceção dos vértices. Já se a reta que contém um dos lados interceptar outro lado, esse quadrilátero será côncavo. Veja na Figura 2.30 (b), por exemplo, que a reta suporte $\overleftrightarrow{BC}$ intercepta o lado $\overline{AD}$. Já na Figura 2.30 (a), nenhuma reta que contém os lados intercepta outro lado, com exceção dos vértices.

Com os conhecimentos que você já tem sobre quadriláteros e com o que aprendeu na Seção 2.1, pode pensar um pouco sobre a validade da seguinte afirmação:

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360 graus.

Consegue justificar por que essa afirmação é verdadeira? Para fazer isso, você precisa se lembrar dos resultados acerca dos triângulos da Seção 2.1. Veja na Figura 2.29, por exemplo, que o quadrilátero *ABCD* pode ser dividido em dois triângulos, *ABC* e *ACD,* que compartilham um lado, no caso $\overline{AC}$, uma das diagonais do quadrilátero. Os ângulos $C\hat{B}A$, $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ são ângulos internos de um triângulo, assim como $C\hat{A}D$, $A\hat{D}C$ e $D\hat{C}A$, logo é verdade que a soma de suas medidas é igual a 180 graus. Portanto:

$$\overbrace{m\left(C\hat{B}A\right)+m\left(B\hat{A}C\right)+m\left(A\hat{C}B\right)}^{180°}+\overbrace{m\left(C\hat{A}D\right)+m\left(A\hat{D}C\right)+m\left(D\hat{C}A\right)}^{180°}=180°+180° \Rightarrow$$

$$m\left(C\hat{B}A\right)+\underbrace{m\left(B\hat{A}C\right)+m\left(C\hat{A}D\right)}_{m\left(B\hat{A}D\right)}+\underbrace{m\left(A\hat{C}B\right)+m\left(D\hat{C}A\right)}_{m\left(D\hat{C}B\right)}+m\left(A\hat{D}C\right)=360° \Rightarrow$$

$$m\left(C\hat{B}A\right)+m\left(B\hat{A}D\right)+m\left(D\hat{C}B\right)+m\left(A\hat{D}C\right)=360° .$$

Observe que na última expressão sobraram apenas ângulos internos do quadrilátero, cuja soma resulta em 360°, como queríamos.

Ainda com o auxílio da Figura 2.29, é possível demonstrar que:

A soma dos ângulos externos de um quadrilátero é igual a 360 graus.

Reflita

Como justificar a validade do resultado anterior? Dica: você pode utilizar o teorema do ângulo externo apresentado na Seção 2.1 para isso.

O fato de a soma dos ângulos externos ser igual a 360 graus não é um resultado válido somente para os quadriláteros.

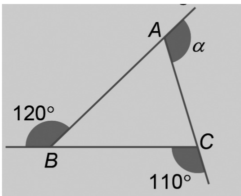
Para qualquer triângulo, é verdade que a soma de seus ângulos externos é 360°.

Reflita sobre essa afirmação e perceba que parte dos argumentos utilizados na justificativa da afirmação anterior também se aplica aqui.

Exemplificando

Determine a medida do ângulo α representado na Figura 2.31.

Figura 2.31 | Ângulos externos do triângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Dado que a soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é igual a 360 graus, basta somarmos os ângulos representados na Figura 2.31 e igualarmos a esse valor, como segue:

$$120° + 110° + \alpha = 360° \Rightarrow$$

$$\alpha = 360° - 120° - 110° \Rightarrow$$

$$\alpha = 130°.$$

Logo, $\alpha = 130°$.

Comentamos anteriormente que podíamos organizar os quadriláteros em dois grupos, os convexos e os côncavos, mas esses não são os únicos grupos. Observe a seguir mais algumas classificações que podemos atribuir aos quadriláteros.

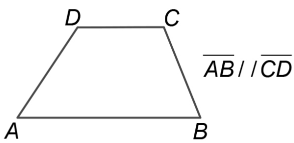
Alguns quadriláteros notáveis

Trapézio

"Um quadrilátero que possui um par de lados opostos paralelos entre si, e os outros dois lados não são paralelos entre si, é um **trapézio**" (MACHADO, 2012, p. 107, grifo do autor).

Na Figura 2.32, você pode ver a representação de um trapézio, sendo que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, paralelos, são as **bases** e os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são as **laterais**.

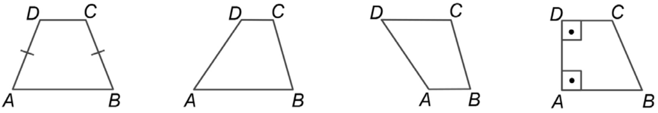
Figura 2.32 | Trapézio



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 2.33 | Classificações dos trapézios

(a) Trapézio isósceles (b) Trapézio escaleno (c) Trapézio escaleno (d) Trapézio retângulo



Fonte: adaptada de Dolce e Pompeu (2013, p. 100).

Para sintetizar, um trapézio será:

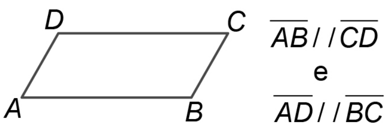
- **Isósceles**, como o representado na Figura 2.33 (a), se suas laterais forem congruentes (repare que a congruência está indicada por meio de duas marcações sobre as laterais).
- **Escaleno**, como representado na Figura 2.33 (b) e (c), se suas laterais não forem congruentes.
- **Retângulo**, como representado na Figura 2.33 (d), se possui dois ângulos internos retos.

Paralelogramo

Diferentemente do trapézio, que possui apenas um par de lados opostos paralelos, o **paralelogramo** é um quadrilátero convexo que possui os dois pares de lados opostos paralelos.

Na Figura 2.34, temos a representação de um paralelogramo ABCD, em que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são opostos e paralelos, assim como os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Figura 2.34 | Paralelogramo

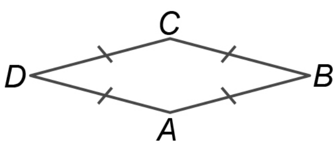


Fonte: elaborada pelo autor.

Losango

"Um quadrilátero plano convexo é um **losango** se, e somente se, possui os quatro **lados** congruentes" (DOLCE; POMPEU, 2013, p. 101, grifo do autor). Observe a representação de um losango na Figura 2.35.

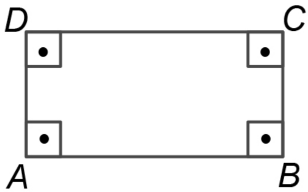
Figura 2.35 | Losango



Fonte: elaborada pelo autor.

Retângulo

Figura 2.36 | Retângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

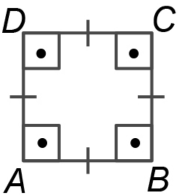
Definimos como **retângulo** o quadrilátero convexo que possui os quatro ângulos internos congruentes, como na Figura 2.36. Além disso:

Cada ângulo interne mede 90°.

Justifique essa afirmação.

Quadrado

Figura 2.37 | Quadrado



Fonte: elaborada pelo autor.

Um **quadrado** é definido como o quadrilátero que é, simultaneamente, um losango e um retângulo. Por reunir as características desses dois tipos de quadriláteros, o quadrado possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos internos medindo 90°, como mostra a Figura 2.37.

Classificar os quadriláteros não é nosso único interesse, mas também melhor entendê-los e saber as consequências de suas respectivas definições, assunto que será explorado a seguir.

Propriedades dos quadriláteros

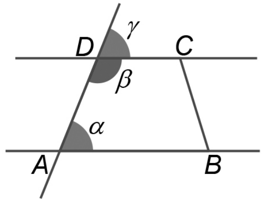
Acabamos de apresentar algumas classificações dos quadriláteros e fizemos isso pois é muito comum o uso prático dos tipos citados. Com a definição de cada um, emergem propriedades interessantes que tornam especiais as classes apresentadas. Veja algumas delas:

A primeira propriedade que consideramos pertinente a esse assunto diz respeito ao trapézio, segundo a qual:

A soma das medidas dos ângulos adjacentes a uma das laterais de um trapézio é igual a 180°.

Para justificar essa afirmativa, lembre-se do que foi tratado na Seção 2.1 sobre retas paralelas cortadas por uma transversal e veja a Figura 2.38. No trapézio *ABCD*, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases e $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ as laterais. Os ângulos $\alpha = B\hat{A}D$ e $\beta = A\hat{D}C$ são adjacentes à lateral $\overline{AD}$ e, portanto, devemos justificar por que $\alpha + \beta = 180°$.

Figura 2.38 | Trapézio *ABCD* de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Da definição, trapézio é o quadrilátero que possui somente dois lados paralelos, no caso $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que são as bases. Mas então as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, que contêm esses lados também são paralelas e $\overleftrightarrow{AD}$ é uma transversal a elas. Por consequência, os ângulos correspondentes α e γ possuem a mesma medida. Como β e γ são suplementares, temos:

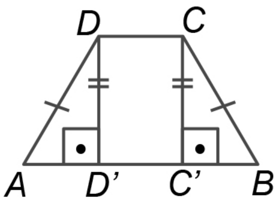
$$\beta + \underbrace{\gamma}_{\alpha} = 180° \quad \Rightarrow \quad \beta + \alpha = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 180°.$$

Assim justificamos a afirmação. Ainda sobre trapézios, é verdade que:

Em um trapézio isósceles, o par de ângulos adjacentes a qualquer uma das bases é congruente.

Para compreender melhor, considere o trapézio isósceles da Figura 2.39, cujas bases são $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ um dos pares de ângulos adjacentes às bases é $B\hat{A}D$ e $C\hat{B}A$ e o outro é $A\hat{D}C$ e $D\hat{C}B$. De acordo com a afirmação anterior, devemos mostrar que $m\left(B\hat{A}D\right) = m\left(C\hat{B}A\right)$ e $m\left(A\hat{D}C\right) = m\left(D\hat{C}B\right)$.

Figura 2.39 | Trapézio isósceles *ABCD*



Fonte: elaborada pelo autor.

Para isso, considere as perpendiculares às bases baixadas dos vértices *C* e *D* e também os pés das perpendiculares, *C'* e *D'*, respectivamente. Obtemos assim os triângulos retângulos *DD'A* e

CC'B. Esses triângulos retângulos são congruentes, pois possuem um dos catetos congruentes, já que eles possuem comprimentos iguais à distância entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ e as hipotenusas congruentes, pois o trapézio é isósceles (UESU, 2016). Dessa congruência, segue que:

$m\left(B\hat{A}D\right) = m\left(C\hat{B}A\right)$ [como desejado];

$$m\left(A\hat{D}D'\right) = m\left(C'\hat{C}B\right) \Rightarrow \underbrace{m\left(A\hat{D}D'\right) + \underbrace{m\left(D'\hat{D}C\right)}_{90°}}_{m\left(A\hat{D}C\right)} = \underbrace{m\left(C'\hat{C}B\right) + \underbrace{m\left(D\hat{C}C'\right)}_{90°}}_{m\left(D\hat{C}B\right)} \Rightarrow$$

$m\left(A\hat{D}C\right) = m\left(D\hat{C}B\right)$ [como desejado].

Outro fato que decorre imediatamente é que as projeções $\overline{AD'}$ e $\overline{C'B}$ das laterais também são congruentes.

Faça você mesmo

Justifique a seguinte afirmação:

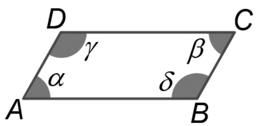
Dado um trapézio isósceles, suas diagonais são segmentos congruentes.

Outro quadrilátero que possui propriedades importantes é o paralelogramo. Para este, é verdade que:

Os ângulos internos opostos de qualquer paralelogramo são congruentes. Além disso, o quadrilátero convexo que possui ângulos internos opostos congruentes só pode ser um paralelogramo.

Na Figura 2.40, temos um paralelogramo *ABCD*. De acordo com a afirmação anterior, ocorre que $\alpha = \beta$ e $\gamma = \delta$. Fica sob sua responsabilidade justificar essa afirmação. Uma interessante consequência desse resultado é que:

Figura 2.40 | Paralelogramo *ABCD*



Fonte: elaborada pelo autor.

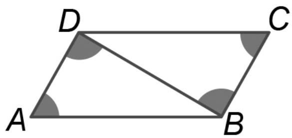
Todo retângulo é um paralelogramo.

Esse fato é verdadeiro, visto que o retângulo é o quadrilátero que possui todos os ângulos internos retos, em especial seus ângulos internos opostos são retos e congruentes.

Sobre paralelogramos, podemos também afirmar que:

(1) Quaisquer dois lados opostos de um paralelogramo possuem medidas iguais. (2) Além disso, se um quadrilátero convexo possui lados opostos de mesma medida, então ele pode ser classificado como paralelogramo (DOLCE; POMPEU, 2013).

Figura 2.41 | Paralelogramo *ABCD*, de diagonal $\overline{BD}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Justificaremos apenas a afirmação (1) anterior. Para isso, considere o paralelogramo da Figura 2.41. Os ângulos $A\hat{D}B$ e $D\hat{B}C$ são congruentes devido ao paralelismo dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ também são congruentes, pois são ângulos opostos do paralelogramo. A partir dessas congruências, perceba que os triângulos ABD e CDB são congruentes pelo caso LAAo, pois o lado $\overline{BD}$ é comum e, portanto, congruente. Dessa congruência, resulta que $m\left(\overline{AB}\right)=m\left(\overline{CD}\right)$ e $m\left(\overline{AD}\right)=m\left(\overline{BC}\right)$, como queríamos. Tente agora justificar a afirmação (2) anterior. Você poderá utilizar como base também a Figura 2.41.

Reflita

Tomando como base a afirmação (2) anterior, um losango é também um paralelogramo?

Você deve ter notado que devido ao modo como alguns quadriláteros são definidos, são percebidas várias consequências. Já citamos algumas, mas, obviamente, não abrange tudo o que pode ser afirmado acerca dos quadriláteros. Elencamos a seguir mais algumas propriedades destacadas por Dolce e Pompeu (2013):

- As diagonais do paralelogramo interceptam-se nos respectivos pontos médios.
- Todo quadrilátero convexo cujas diagonais se interceptam nos pontos médios pode ser classificado como paralelogramo.

- Todo quadrilátero convexo que possui dois lados paralelos e congruentes pode ser classificado como paralelogramo.
- As diagonais do retângulo são congruentes.
- Todo paralelogramo que possui diagonais congruentes é um retângulo.
- Todo losango tem diagonais perpendiculares.
- Todo quadrado é retângulo e também losango.

Certamente essas propriedades ainda não abarcam todo o conteúdo acerca dos quadriláteros. Sugerimos que justifique cada uma das afirmações anteriores e procure por outras.

Pesquise mais

Veja mais sobre quadriláteros no link a seguir: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 05 out. 2017.

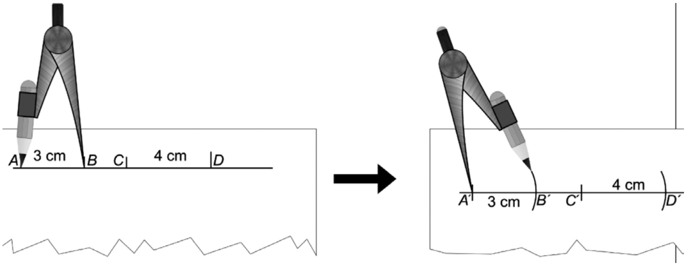
Sem medo de errar

Chegou o momento de planejar sua aula e descrever os passos necessários para construir um retângulo de lados adjacentes medindo 3 cm e 4 cm. Além disso, você precisa também pensar em uma estratégia para a verificação de algumas das propriedades dos quadriláteros, utilizando as réguas com as graduações apagadas e os compassos. Logicamente, a estratégia a ser empregadas e quais propriedades serão tratadas é uma escolha sua. Contudo, gostaríamos de compartilhar uma que utiliza os recursos teóricos tratados nesta seção.

Primeiramente, é preciso pensar em como disponibilizar a todos os alunos as medidas de 3 cm e de 4 cm, visto que somente poucas réguas possuem as graduações visíveis. Deixar um de cada vez utilizar a régua boa? Talvez, mas isso levaria muito tempo. Por que não utilizar os conhecimentos geométricos? Uma possibilidade seria você levar para a sala de aula papéis previamente preparados com o esboço de dois segmentos de reta, um com 3 cm e outro com 4 cm. Um papel para cada grupo de alunos talvez seja o suficiente.

Se cada grupo de alunos tiver um papel como esse, pode utilizar o compasso e transferir a medida de cada segmento de reta para o seu desenho. Assim, cada aluno poderá ter à disposição segmentos de reta congruentes aos que utilizará para desenhar.

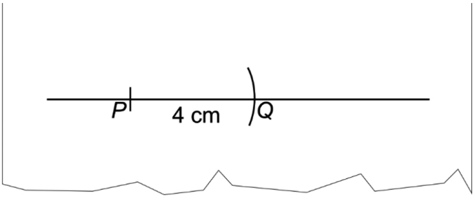
Figura 2.42 | Obtenção de $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$, congruentes a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente



Fonte: elaborada pelo autor.

Tendo em mãos os segmentos congruentes, resta agora construir o retângulo. Para construí-lo, utilizaremos como base uma reta e um segmento $\hat{A}$ medindo 4 cm que será um dos lados do retângulo. Vide Figura 2.43.

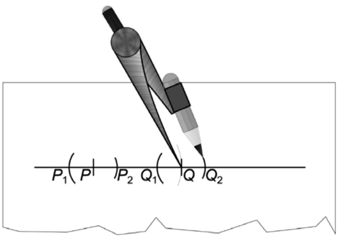
Figura 2.43 | Determinação da base $\overline{PQ}$ do retângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Com uma abertura conveniente do compasso, determinamos pontos P_1 e P_2 com P entre eles, Q_1 e Q_2 com Q entre eles. Fazemos isso de modo que P seja o ponto médio de $\overline{P_1P_2}$ e Q seja o ponto médio de $\overline{Q_1Q_2}$, como mostra a Figura 2.44.

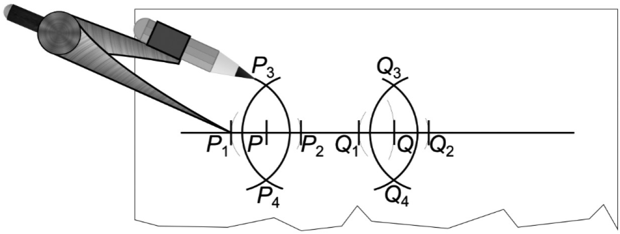
Figura 2.44 | Obtenção de $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Com o centro do compasso em P_1, P_2, Q_1 e Q_2 e abertura conveniente, fazemos arcos que se interceptam, como na Figura 2.45.

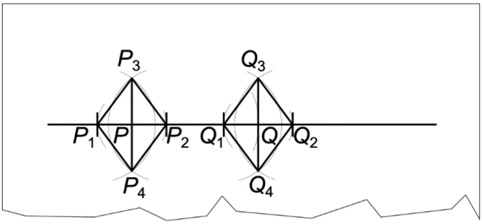
Figura 2.45 | Obtenção de P_3, P_4, Q_3 e Q_4



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que, por construção, $\overline{P_1P_3} \equiv \overline{P_3P_2} \equiv \overline{P_2P_4} \equiv \overline{P_4P_1}$ e $\overline{Q_1Q_3} \equiv \overline{Q_3Q_2} \equiv \overline{Q_2Q_4} \equiv \overline{Q_4Q_1}$. Logo, os quadriláteros $P_1P_4P_2P_3$ e $Q_1Q_4Q_2Q_3$ são losangos, tal como definido nesta seção. Veja na Figura 2.46 os losangos desenhados com as diagonais $\overline{P_3P_4}$, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{Q_3Q_4}$ e $\overline{Q_1Q_2}$.

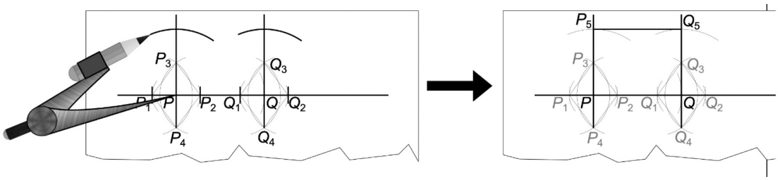
Figura 2.46 | Losangos e suas diagonais



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se de que enunciamos nesta seção que "todo losango tem diagonais perpendiculares". Desse modo, dois dos lados do retângulo devem estar sobre as retas $\overleftrightarrow{P_3P_4}$ e $\overleftrightarrow{Q_3Q_4}$. Com isso, marcamos as retas, transferimos a medida de 3 cm e terminamos de desenhar o retângulo.

Figura 2.47 | Retângulo desenhado



Fonte: elaborada pelo autor.

O quadrilátero será realmente um retângulo, pois $m\left(P_2\hat{P}P_3\right) = m\left(Q_3\hat{Q}Q_1\right) = 90°$ por construção e as congruências $\hat{P} \equiv \hat{P}_5$ e $\hat{Q} \equiv \hat{Q}_5$ ocorrem devido ao paralelismo de $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{P_5Q_5}$.

Feita agora a construção do retângulo, quais propriedades poderiam ser apresentadas utilizando os mesmos recursos? Planeje-as e descreva como seria essa aplicação. Isso fica por sua conta.

Avançando na prática

Demonstrações de propriedades dos quadriláteros

Descrição da situação-problema

Suponha que você esteja trabalhando como professor do ensino médio e tratando de propriedades dos quadriláteros com seus alunos. Considere ainda que, em uma das aulas, um dos alunos tenha chegado até você com as seguintes anotações:

I. Os lados opostos de um paralelogramo possuem medidas iguais.

II. Todo retângulo pode ser classificado como paralelogramo.

III. O quadrado possui os quatro ângulos internos retos.

A essa altura, além dos assuntos elencados por ele, a turma já estudou também congruência de triângulos. Depois de mostrar as anotações, suponha que o aluno tenha lhe feito a seguinte pergunta:

- Professor, como consigo justificar com essas ou outras informações que o quadrado possui diagonais de mesma medida? Todas essas informações são necessárias?

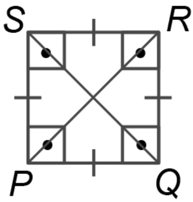
Resolução da situação-problema

Para responder a perguntas como essa, você deve estar apto a utilizar o raciocínio dedutivo e ciente de uma série de propriedades da Geometria Plana, além de uma boa dose de didática, é claro! Não basta saber o conteúdo para si, mas também é preciso ter a habilidade de conduzir o aluno à obtenção da resposta.

Não há estratégia única, obviamente, e a seguir temos uma possibilidade de estruturação do raciocínio:

Considere o quadrado da Figura 2.48.

Figura 2.48 | Quadrado *PQRS*



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se de que o quadrado é o quadrilátero é ao mesmo tempo losango e retângulo, ou seja, possui todos os lados congruentes, ou de mesma medida, e todos os quatro ângulos internos retos. Observe que até aqui utilizamos que: (1) o quadrado possui os quatro ângulos internos retos; (2) o quadrado é também losango. A primeira informação estava na lista do aluno e a segunda não. Com esses dados, perceba que $\overline{PS} \equiv \overline{QR}$ e $\overline{PQ}$ é comum aos triângulos *PQS* e *QPR*, ambos triângulos retângulos. Mas então, pelo caso de congruência LAL, esses triângulos são congruentes e, em consequência, $\overline{PR} \equiv \overline{QS}$. A congruência das diagonais implica no fato de as duas possuírem a mesma medida. Você poderia utilizar esse raciocínio para explicar o conteúdo ao aluno e dizer que as informações (I) e (II) não foram necessárias. Porém que outros caminhos poderiam ser utilizados para se chegar à mesma conclusão? Reflita sobre isso e descreva outros modos.

Faça valer a pena

1. Suponha um quadrilátero *ABCD* cujas medidas de seus lados sejam todas iguais a 2 cm. As diagonais desse quadrilátero são $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, cuja interseção é o ponto *M*, por sinal, o ponto médio de cada uma das diagonais. Nesse quadrilátero, há um ângulo que daremos destaque, $C\hat{M}D$.

De acordo com as características do quadrilátero *ABCD* descritas no texto, e em relação ao ângulo $C\hat{M}D$, é correto afirmar que:

a) $m\left(C\hat{M}D\right) = 30°$

b) $m\left(C\hat{M}D\right) = 45°$

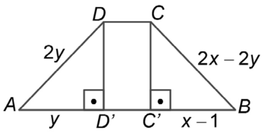
c) $m\left(C\hat{M}D\right) = 60°$

d) $m\left(C\hat{M}D\right) = 90°$

e) $m\left(C\hat{M}D\right) = 180°$

2. O trapézio é uma classificação de quadriláteros definida por possuir um único par de lados paralelos, sendo estes denominados bases. Os outros dois lados, não paralelos, são as laterais. Dentro do conjunto dos trapézios há ainda aqueles denominados trapézios isósceles, sendo que um dos exemplares desse conjunto está representado na Figura 2.49, com algumas de suas medidas.

Figura 2.49 | Exemplar de trapézio isósceles, cujas medidas estão em centímetros



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando o trapézio da Figura 2.49, marque a alternativa correta:

a) x + y = 2 cm.

b) x + y = 4 cm.

c) x + y = 3 cm.

d) x + y = 5 cm.

e) x + y = 6 cm.

3. Um quadrilátero convexo *ABCD* de segmentos de reta consecutivos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ possui seus lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ congruentes e paralelos. Além disso, sabe-se que $m\left(\overline{BC}\right) = y - 10$, $m\left(\overline{DA}\right) = 26 - 2y$ e $m\left(\overline{BC}\right) = 2 \cdot m\left(\overline{AB}\right)$. Considere todas as medidas em centímetros.

De acordo com as características do quadrilátero *ABCD*, qual é a soma das medidas dos seus lados e qual é a sua classificação?

a) 4 cm; retângulo.

b) 6 cm; paralelogramo.

c) 8 cm; quadrado.

d) 10 cm; paralelogramo.

e) 12 cm; quadrado.

Seção 2.3

Pontos notáveis do triângulo e polígonos

Diálogo aberto

Estudamos até o momento, nesta unidade, retas paralelas, perpendiculares, ângulos determinados por uma transversal, quadriláteros e suas propriedades. Esperamos que esses elementos estejam ficando cada vez mais evidentes no seu dia a dia. Provavelmente na sua casa eles devem estar presentes. Os telhados e as estruturas suspensas, em geral, utilizam formas triangulares para sustentação devido à rigidez dessa figura geométrica. As paredes da sua casa certamente devem estar sobre um quadrilátero, possivelmente um retângulo, presentes propriedades como perpendicularismo e paralelismo. Não deixe esses elementos passar despercebidos e tente conectar a Geometria ao mundo que o rodeia.

Para continuar os estudos acerca dos elementos geométricos, trataremos agora da localização de alguns pontos notáveis nos triângulos e veremos a definição geral de polígono, além de estudar algumas de suas propriedades.

Prosseguindo nessa jornada, volte a se lembrar de que você está atuando como docente em uma escola com poucos recursos. Suas atividades em sala até aqui tem sido um sucesso. Os estudantes estão gostando bastante dos desafios que você propõe e isso chamou a atenção da coordenadora pedagógica da escola em que você trabalha. Ela pediu que você faça um relato dos experimentos realizados e gostaria que acrescentasse a eles uma sugestão de atividade a ser realizada para ensinar a localização do baricentro e do circuncentro de um triângulo, cujas medidas dos lados serão informadas aos alunos e qual a utilidade prática desses pontos para a construção civil. Ela quer compartilhar isso com outros professores, mostrando uma boa prática escolar. Para isso, sugeriu que você elabore um texto com as figuras e outros elementos gráficos pertinentes ao entendimento de todos.

Como você estruturará essa atividade solicitada pela coordenadora? Primeiramente você deve compilar em um único texto o que já elaborou nas Seções 2.1 e 2.2. Depois, você deve estar ciente da definição de baricentro e de circuncentro e elaborar um plano de aula contendo um passo a passo da execução da atividade em sala, prevendo os materiais necessários. Suponha, para isso, disponíveis novamente as réguas com graduações apagadas e os compassos em bom estado, como já lhe propusemos na seção anterior.

Para planejar a atividade, primeiramente você deve ter os conhecimentos teóricos do assunto. Vamos lá?

Não pode faltar

Dividimos o texto desta seção em tópicos. Primeiramente detalharemos como localizar cada um dos pontos notáveis dos triângulos e depois apresentaremos os polígonos e suas regularidades.

Interseção das medianas de um triângulo

Na Seção 1.3, apresentamos a definição de **mediana**. Relembre o conceito:

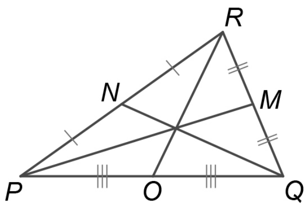
"Dado um triângulo *ABC*, considere um ponto *D* sobre a reta determinada por *B* e *C*. Se *D* é ponto médio do segmento *BC*, o segmento *AD* chama-se **mediana** do triângulo *ABC* relativa ao vértice *A*" (MANFIO, 2016, p. 20, grifo do autor).

Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* da definição anterior são "genéricos", o que faz com que cada triângulo possua não somente uma, mas exatamente três medianas, cada uma correspondendo a um vértice e ao lado oposto a esse vértice. Veja o exemplo do triângulo *PQR* da Figura 2.50.

O triângulo PQR (Figura 2.50) possui três medianas, a saber:

- $\overline{RO}$, mediana correspondente ao vértice *R* e ao lado $\overline{PQ}$.
- $\overline{PM}$, mediana correspondente ao vértice *P* e ao lado $\overline{QR}$.
- $\overline{QN}$, mediana correspondente ao vértice *Q* e ao lado $\overline{PR}$.

Figura 2.50 | Triângulo *PQR* com suas medianas representadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Conseguiu identificar todos os elementos na figura?

Observe que as medianas da Figura 2.50 parecem se interceptar em um único ponto. Essa não é somente uma constatação visual, mas também um resultado já conhecido da Geometria, que Dolce e

Pompeu (2013, p. 122) enunciam precisamente como segue:

"As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra".

A demonstração desse resultado pode ser encontrada detalhadamente na referência bibliográfica mencionada. Para entender melhor o que descreve o texto em destaque, vamos dividi-lo em duas partes:

1. As três medianas de um triângulo se interceptam em um mesmo ponto, que denominaremos *G*.

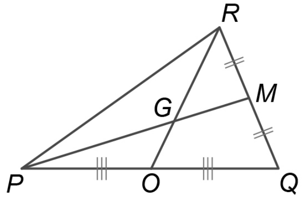
2. O ponto de encontro das medianas de um triângulo, ponto *G*, divide cada mediana em dois segmentos adjacentes, de modo que aquele que contém o vértice mede o dobro de seu adjacente que não contém o vértice do triângulo.

A primeira parte do texto nos diz que o ponto *G* está localizado no encontro das três medianas. Ora, então basta observar a interseção de duas delas, pois ao traçar a terceira mediana, o ponto *G* coincidirá com a interseção das duas primeiras. Para compreender melhor a segunda parte do texto, observe a Figura 2.51, obtida a partir da Figura 2.50 com o acréscimo do ponto *G* e com a retirada alguns detalhes.

De acordo com Dolce e Pompeu (2013), $\overline{RG}$ possui o dobro do comprimento de $\overline{GO}$ e, também, $\overline{PG}$ possui o dobro do comprimento de $\overline{GM}$. Podemos escrever essa relação de modo sintético, como segue:

$$m\left(\overline{RG}\right)=2\cdot m\left(\overline{GO}\right) \quad \text{e} \quad m\left(\overline{PG}\right)=2\cdot m\left(\overline{GM}\right).$$

Figura 2.51 | Triângulo *PQR* com duas medianas traçadas e com a localização do ponto *G*



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

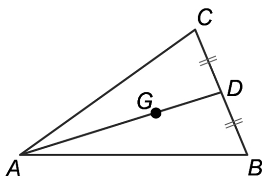
Com base nas expressões anteriores, qual expressão poderia representar corretamente a relação estabelecida para a terceira mediana ($\overline{QN}$)?

Exemplificando

Na Figura 2.52, está representado o triângulo *ABC*, uma de suas medianas e o ponto *G*, que está na interseção das medianas desse triângulo.

Sabe-se que o segmento $\overline{AD}$ mede 9 cm. Quanto medem os segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{GD}$?

Figura 2.52 | Triângulo *ABC* com a mediana $\overline{AD}$ traçada e com o ponto *G* localizado



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Aprendemos anteriormente que é válida a relação $m\left(\overline{AG}\right)=2\cdot m\left(\overline{GD}\right)$, pois *G* é o ponto de encontro das medianas desse triângulo. Além disso, como $\overline{AG}$ e $\overline{GD}$ são adjacentes, é verdade que $m\left(\overline{AG}\right)+m\left(\overline{GD}\right)=m\left(\overline{AD}\right)$. Logo, temos:

$$m\left(\overline{AG}\right)+m\left(\overline{GD}\right)=m\left(\overline{AD}\right)=9 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad 2\cdot m\left(\overline{GD}\right)+m\left(\overline{GD}\right)=9 \text{ cm} \quad \Rightarrow$$

$$3\cdot m\left(\overline{GD}\right)=9 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad m\left(\overline{GD}\right)=3 \text{ cm}.$$

Dado que $m\left(\overline{GD}\right)=3 \text{ cm}$, obtemos a partir de $m\left(\overline{AG}\right)+m\left(\overline{GD}\right)=m\left(\overline{AD}\right)$ que:

$$m\left(\overline{AG}\right)+m\left(\overline{GD}\right)=9 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad m\left(\overline{AG}\right)+3 \text{ cm}=9 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad m\left(\overline{AG}\right)=6 \text{ cm}$$

.

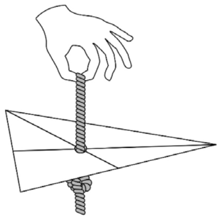
Logo, como queríamos, $m\left(\overline{GD}\right)=3 \text{ cm}$ e $m\left(\overline{AG}\right)=6 \text{ cm}$.

Faça você mesmo

Diferentemente do que se afirma no exemplo anterior, considere agora que $\overline{AD}$ mede 15,9 cm. Quanto medem os segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{GD}$?

Algo interessante a respeito do ponto G, de interseção das medianas, é o fato de ele ser o “centro de gravidade” de qualquer triângulo rígido, composto de material de densidade constante. Esse ponto também é conhecido como baricentro. O centro de gravidade ou ponto de equilíbrio de um objeto é aquele que se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada nele. Na prática, se desenharmos um triângulo em um papelão e localizarmos seu baricentro, este ficará em equilíbrio se for sustentado por ele, como ilustra a Figura 2.53.

Figura 2.53 | Triângulo de papel sustentado pelo baricentro



Fonte: adaptada de <https://goo.gl/em5CK4>; <https://goo.gl/lqFFLa>. Acesso em: 27 jan. 2017.

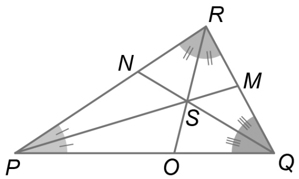
Interseção das bissetrizes de um triângulo

Acabamos de tratar das medianas de um triângulo e mencionamos que elas se interceptam em um mesmo ponto, denominado baricentro, mas não somente as medianas se interceptam em um mesmo ponto, as bissetrizes internas de um triângulo também. Isso é enunciado por Machado (2012, p. 145) da seguinte maneira:

“As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo concorrem em um mesmo ponto” (grifo do autor).

Justificaremos isso logo adiante. Lembre-se de que a **bissetriz interna** de um triângulo é o segmento de reta que tem como umas das extremidades um vértice do triângulo e outra pertencente ao lado oposto a esse vértice, de modo que o segmento divide o ângulo adjacente ao vértice em outros dois congruentes. Veja na Figura 2.54 o triângulo *PQR* com suas bissetrizes internas.

Figura 2.54 | Triângulo PQR com suas bissetrizes traçadas



Fonte: elaborada pelo autor.

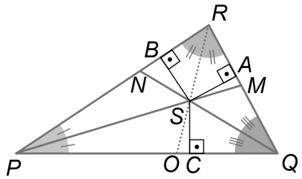
Todo triângulo possui três bissetrizes internas, cada uma correspondendo a um vértice e ao lado oposto a esse vértice, assim como representado na Figura 2.54.

Vamos agora justificar o que é afirmado por Machado (2012), ou seja, que as bissetrizes se interceptam em um mesmo ponto, o que pode ser simbolizado por $\overline{PM} \cap \overline{QN} \cap \overline{RO} = \{S\}$. Utilizaremos, para isso, um teorema apresentado por Costa et al. (2012, p. 5):

“Todo ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados”.

Também utilizaremos o fato de que se um ponto está a igual distância dos lados de um ângulo, então ele pertence à bissetriz do ângulo. Além disso, um segmento cujas extremidades está em semiplanos distintos determinados por uma reta *r*, intercepta essa reta em um único ponto. Para seguirmos com a argumentação, considere a Figura 2.55.

Figura 2.55 | Triângulo *PQR* com as bissetrizes $\overline{PM}$ e $\overline{QN}$ traçadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Primeiramente precisamos justificar por que $\overline{PM}$ e $\overline{QN}$ se interceptam em um único ponto. Ora, os pontos *Q* e *N* estão em semiplanos distintos, determinamos pela reta $\overleftrightarrow{PM}$, logo, $\overleftrightarrow{PM} \cap \overline{QN} = \{S\}$. Resta mostrar agora que *S* pertence à bissetriz $\overline{RO}$, ou seja, $S \in \overline{RO}$. De acordo com o teorema destacado por Costa et al. (2012), *S* é equidistante de $\overline{PR}$ e $\overline{PQ}$, ou ainda, $\overline{SB} \equiv \overline{SC}$. Mas também, pelo mesmo teorema, *S* é equidistante de $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$, isto é, $\overline{SC} \equiv \overline{SA}$. Pela transitividade da congruência, $\overline{SB} \equiv \overline{SA}$. Essa congruência indica que S está a igual distância de $\overline{PR}$ e $\overline{QR}$, logo S só pode estar na bissetriz de $\hat{R}$. Assim fica justificado que $\overline{PM} \cap \overline{QN} \cap \overline{RO} = \{S\}$.

O ponto S em questão, representado na Figura 2.55, é denominado incentro. Note que durante nossa argumentação anterior concluímos também que $\overline{SA} \equiv \overline{SB} \equiv \overline{SC}$. A partir disso, podemos enunciar:

O incentro, ponto de interseção das bissetrizes internas de um triângulo, está a igual distância de ambos os lados do triângulo.

Discutiremos isso mais adiante neste livro didático, mas, para adiantar, o incentro é o centro da circunferência interna ao triângulo que o intercepta em exatamente três pontos, sendo um em cada lado do triângulo. Diremos que essa circunferência é tangente aos lados do triângulo.

Exemplificando

Considere um triângulo *ABC* cujo incentro é denotado por *S*. Dadas as distâncias $d_{S,\,\overline{AB}} = x + 8$, $d_{S,\,\overline{BC}} = 2x + 2y$ e $d_{S,\,\overline{AC}} = 3y + 1$, em centímetros, pede-se:

a) Os valores de *x* e *y*.

b) Numericamente, a distância do incentro aos lados do triângulo *ABC*.

Resolução:

Lembrando-se de que $\overline{SP_{AB}} \equiv \overline{SP_{AC}} \equiv \overline{SP_{BC}}$, em que P_{AB}, P_{AC} e P_{BC} são os pés das perpendiculares baixadas de *S* até os lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente (vide Figura 2.55), podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+8=2x+2y \\ x+8=3y+1 \\ 2x+2y=3y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=8 \\ x-3y=-7 \quad \times(-1) \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=8 & \text{(I)} \\ -x+3y=7 & \text{(II)} \\ 2x-y=1 & \text{(III)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5y=15 & \text{(I)}+\text{(II)} \\ 2x-y=1 & \text{(III)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases}.$$

Portanto, respondendo ao solicitado em (a), $x = 2$ cm e $y = 3$ cm.

Para o solicitado em (b), temos:

$$\overline{SP_{AB}} \equiv \overline{SP_{AC}} \equiv \overline{SP_{BC}} \Rightarrow m\left(\overline{SP_{AB}}\right)=m\left(\overline{SP_{AC}}\right)=m\left(\overline{SP_{BC}}\right)=2x+2y \Rightarrow$$

$$m\left(\overline{SP_{AB}}\right)=m\left(\overline{SP_{AC}}\right)=m\left(\overline{SP_{BC}}\right)=2x+2y=2\cdot 2+2\cdot 3=10.$$

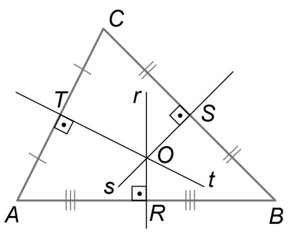
Logo, a distância do incentro aos lados do triângulo *ABC* é 10 cm.

Interseção das mediatrizes de um triângulo

Acabamos de comentar que o ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo é denominado incentro e que este ponto possui a propriedade de ser equidistante dos lados do triângulo. Continuando nossa discussão, outro ponto notável do triângulo é denominado circuncentro e está contido na interseção das mediatrizes do triângulo (entenda que estamos nos referindo às mediatrizes dos seus lados).

Veja na Figura 2.56 o triângulo *ABC* representado com suas mediatrizes.

Figura 2.56 | Triângulo *ABC* com as mediatrizes *r*, *s* e *t*



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma propriedade importante do circuncentro está enunciada a seguir:

O circuncentro é equidistante dos vértices do triângulo (DOLCE; POMPEU, 2013).

Não entraremos em detalhes acerca das justificativas da veracidade da propriedade anterior.

Você pode encontrá-las na página 125 de Dolce e Pompeu (2013) e também na página 84 de Costa et al. (2012), referências que podem ser encontradas completas ao final desta seção. Perceba que essa propriedade implica na congruência $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$.

Interseção das alturas de um triângulo

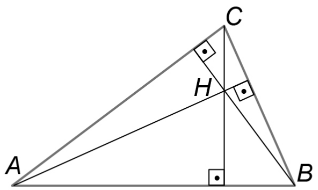
Vimos até o momento três pontos notáveis do triângulo: baricentro, incentro e circuncentro. O último que citaremos é o denominado ortocentro, o ponto de interseção das retas suportes das alturas do triângulo. Na Figura 2.57, você pode visualizar o triângulo *ABC* e seu ortocentro *H*.

Para finalizar a discussão dos pontos notáveis dos triângulos, enunciamos dois resultados interessantes:

Os quatro pontos notáveis de um triângulo equilátero coincidem.

Em um triângulo isósceles, a mediatriz relativa à base contém a altura, a mediana e a bissetriz relativas à mesma base.

Figura 2.57 | Triângulo *ABC* com seu ortocentro destacado



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Você pode encontrar essa e outras informações acerca dos pontos notáveis em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2017.

Polígonos

Dentre os elementos da Geometria estudados até o momento, podemos destacar dois notáveis, o triângulo e o quadrilátero. Essas duas figuras pertencem a um conjunto amplo, o dos **polígonos**. Utilizaremos uma abordagem similar à de Dolce e Pompeu (2013) para definir um polígono:

Assimile

Considere uma sequência finita de pontos $\left(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n\right)$ em que os trios de pontos da forma (P_{i-1}, P_i, P_{i+1}), (P_{n-1}, P_n, P_1) e (P_n, P_1, P_2), para $i = 2, 3, ..., n-1$ e $n \geq 3$, são não colineares, ou seja, não estão sob uma reta.

A figura formada pela reunião dos segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{i-1}P_i}$, $\overline{P_iP_{i+1}}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$ é denominada polígono.

Um polígono $P_1 P_2 P_3 ... P_{i-1} P_i P_{i+1} ... P_n$ possui:

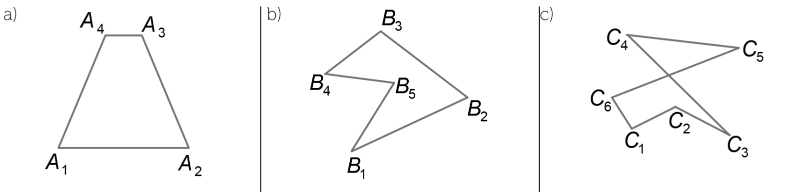
- n lados, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{i-1}P_i}$, $\overline{P_iP_{i+1}}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$;
- n vértices, P_1, P_2, ..., P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, ..., P_{n-1} e P_n;
- n ângulos, $P_n \widehat{P_1} P_2$, $P_1 \widehat{P_2} P_3$, ..., $P_{i-1} \widehat{P_i} P_{i+1}$, ..., $P_{n-2} \widehat{P_{n-1}} P_n$ e $P_{n-1} \widehat{P_n} P_1$.

Além disso, como destaca Dolce e Pompeu (2013, p. 133):

> **Dois lados que têm um vértice comum (ou uma extremidade comum) são lados consecutivos.**
> **Dois lados não consecutivos não têm vértice (ou extremidade) comum.**
> **Dois ângulos de um polígono são consecutivos se têm um lado do polígono comum.**

Na Figura 2.58, temos a representação de três polígonos:

Figura 2.58 | Polígonos de quatro, cinco e seis vértices



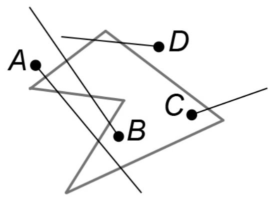
Fonte: elaborada pelo autor.

Os polígonos $A_1A_2A_3A_4$ e $B_1B_2B_3B_4B_5$ da Figura 2.58 são ditos **polígonos simples**, pois nenhum lado intercepta outro que não seja adjacente. Já o polígono $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ é dito **complexo**, pois não se encaixa no primeiro caso. Veja que o lado $\overline{C_3C_4}$ intercepta o lado não adjacente $\overline{C_5C_6}$.

Podemos separar os polígonos simples em dois subgrupos, os **convexos** e os côncavos. Já fizemos isso anteriormente para os quadriláteros e aqui a interpretação é a mesma. Na Figura 2.58, por exemplo, o polígono $A_1A_2A_3A_4$ é convexo e o polígono $B_1B_2B_3B_4B_5$ é côncavo.

As noções de ponto interior e ponto exterior a um polígono são bastante intuitivas. Contudo, formalmente, você pode identificá-los de acordo com o número de interseções que as semirretas que partem desse ponto têm com o polígono. Veja o caso da Figura 2.59.

Figura 2.59 | Polígono e pontos interiores e exteriores



Fonte: elaborada pelo autor.

Os pontos *A* e *D* são **externos** ao polígono, pois as semirretas que partem desses pontos interceptam o polígono um número par de vezes, 4 e 2, respectivamente. Já as semirretas que partem de *B* e *C*, pontos **internos** ao polígono, o interceptam um número ímpar de vezes, 3 e 1, respectivamente. Atenção, essa contagem não é válida se a semirreta interceptar um vértice.

Assimile

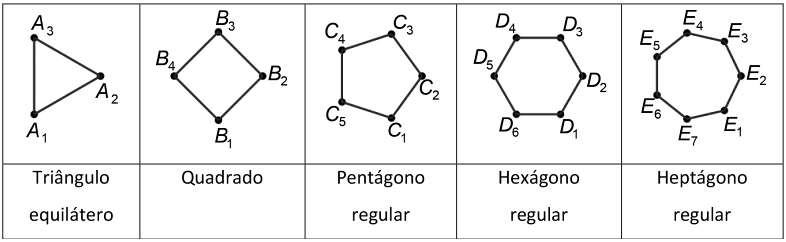
A reunião do polígono com os seus pontos interiores é denominada **superfície poligonal**.

Para nomear um polígono, geralmente utiliza-se como critério o número de lados ou ângulos. Os mais comuns são os triângulos (três lados), os quadriláteros (quatro lados), os pentágonos (cinco lados) etc. Pesquise mais sobre as nomenclaturas em:

MEC. **Geometria II**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/gestar/aaamatematica/mat_aaa6.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2017.

Você deve se lembrar de que quando estudamos os quadriláteros, apresentamos o losango e o retângulo. O primeiro pertence a um grupo de polígonos denominados **equiláteros**, ou seja, cujos lados possuem a mesma medida. Já o segundo pertence ao conjunto dos polígonos denominados **equiângulos**, isto é, cujos ângulos possuem a mesma medida. Quando um polígono pertence a ambos os conjuntos, ou seja, quando é equilátero e equiângulo, o denominamos polígono **regular**. Esse é o caso do quadrado e do triângulo equilátero, ambos são regulares. Na Figura 2.60, temos alguns exemplos de polígonos regulares.

Figura 2.60 | Alguns polígonos regulares



Fonte: elaborado pelo autor.

Há algumas regularidades interessantes nos polígonos simples, independentemente de serem convexos ou côncavos. Uma delas diz respeito ao número de diagonais e outra trata da soma dos seus ângulos internos e dos seus ângulos externos. Estamos confortáveis em utilizar essas nomenclaturas, pois você já teve contato com elas ao estudar os quadriláteros. Generalizando, uma diagonal de um polígono é um segmento que tem como extremidades dois vértices não adjacentes.

Para compreender a regularidade a que nos referimos, observe na Figura 2.60, o triângulo $A_1A_2A_3$. Esse polígono não possui diagonais, visto que todos os vértices são adjacentes dois a dois. Já o quadrilátero $B_1B_2B_3B_4$ possui duas diagonais, $\overline{B_1B_3}$ e $\overline{B_2B_4}$. O pentágono, por sua vez, possui cinco diagonais, $\overline{C_1C_4}$, $\overline{C_1C_3}$, $\overline{C_2C_5}$, $\overline{C_2C_4}$ e $\overline{C_3C_5}$. O hexágono possui nove. Podemos sintetizar isso de um modo mais prático, como na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 | Número de diagonais de acordo com o número de lados de um polígono

Número de lados	3	4	5	6	7	...	n
Número de diagonais	0	2	5	9	14	...	d = ?

Fonte: elaborada pelo autor.

Caso tenha dúvidas sobre os valores da Tabela 2.1, esboce as diagonais em uma folha de papel que você verá que a constatação é imediata. A principal pergunta é: para um polígono qualquer, qual é o número de diagonais? De acordo com Dolce e Pompeu (2013, p. 137):

"O número de diagonais d de um polígono de n lados ($n \geq 3$) é dado por: $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$".

Faça o teste da fórmula anterior para os polígonos cujas quantidades de lados estão apresentadas na Tabela 2.1. Outra regularidade interessante acerca dos polígonos é a soma de seus ângulos internos.

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, com $n \geq 3$, é dada por $S_i = (n-2) \cdot 180°$.

Por fim, a última regularidade que citaremos é em relação aos ângulos externos de um polígono:

A soma dos ângulos externos de um polígono de n lados, com $n \geq 3$, é constante e igual a 360 graus, ou seja, $S_e = 360°$.

Pesquise mais

Veja mais sobre a soma dos ângulos dos polígonos na referência a seguir:

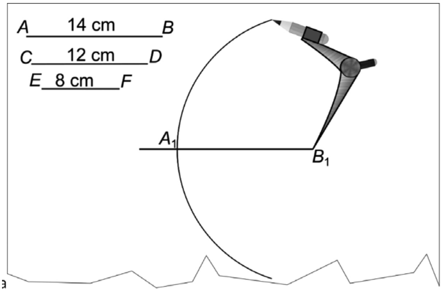
RICH, B.; SCHMIDT, P. A. **Geometria**. 3. ed. Bookman, 2015. Coleção Schaum.

Sem medo de errar

Agora que você estudou sobre os pontos notáveis dos triângulos e os polígonos, volte ao **Diálogo aberto** e releia o desafio proposto. Lembre-se de que você deve elaborar uma estratégia para ensinar os alunos a localizar o baricentro e o circuncentro de um triângulo utilizando réguas desgastadas e compassos, esses em bom estado.

Vamos supor que você queira pedir aos alunos para localizar esses dois pontos em um triângulo escaleno de lados medindo 8 cm, 12 cm e 14 cm. Primeiramente eles devem construir o triângulo em um papel e depois localizar os pontos. Visto que as réguas não possuem graduação, você pode empregar a mesma estratégia utilizada na seção anterior ou se prevenir, uma vez que o problema das réguas apagadas já é conhecido. Você pode, por exemplo, esboçar segmentos com os comprimentos pedidos em uma folha A4 e tirar fotocópias para os alunos. Assim todos terão à disposição as medidas necessárias em um papel como representado na Figura 2.61.

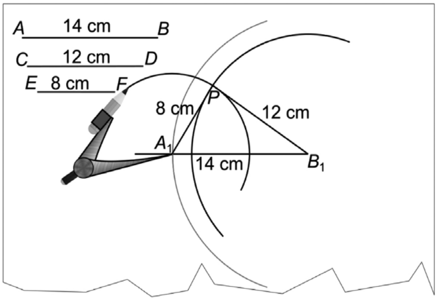
Figura 2.61 | Papel com os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ de medidas 14 cm, 12 cm e 8 cm representados



Fonte: elaborada pelo autor.

Os alunos podem, com o compasso, transferir a medida $m\left(\overline{AB}\right)=14\text{ cm}$ para a base do triângulo formando o segmento $\overline{A_1B_1}$ côngruo ao $\overline{AB}$ (Figura 2.61). Em seguida, com o compasso centrado em B_1, traçar um arco de medida $m\left(\overline{CD}\right)=12\text{ cm}$ e com o compasso centrado em A_1 traçar um arco de medida $m\left(\overline{EF}\right)=8\text{ cm}$, determinando um ponto P na interseção dos arcos e definindo os segmentos $\overline{A_1P}$ e $\overline{B_1P}$ de medidas 8 cm e 12 cm, conforme mostra a Figura 2.62.

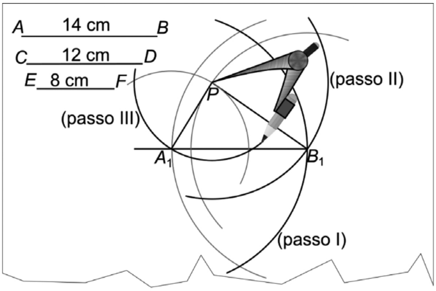
Figura 2.62 | Papel com a construção do triângulo A_1B_1P com as medidas dadas



Fonte: elaborada pelo autor.

O aluno pode, em seguida, construir arcos de medidas 14 cm, 12 cm e 8 cm com o compasso centrado, respectivamente, em A_1 (passo I), P (passo II) e P (passo III) novamente. Os pontos de interseção dos arcos nortearão a construção das mediatrizes dos lados do triângulo (Figura 2.63). Lembre-se de que já construímos as mediatrizes na Seção 2.2 quando desenhamos o retângulo de lados conhecidos.

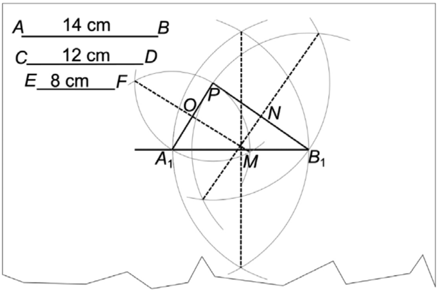
Figura 2.63 | Triângulo A_1B_1P com os arcos traçados



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, ficam definidas as mediatrizes de cada lado do triângulo, como mostra a Figura 2.64.

Figura 2.64 | Triângulo A_1B_1P com as mediatrizes de seus lados



Fonte: elaborada pelo autor.

As mediatrizes dos segmentos $\overline{A_1P}$, $\overline{B_1P}$ e $\overline{A_1B_1}$ determinam tanto os pontos médios O, N e M de cada lado, respectivamente, quanto um ponto de encontro das três. Esse ponto de encontro das três mediatrizes será o circuncentro. Para determinar o baricentro, basta traçar duas das medianas, $\overline{B_1O}$ e $\overline{A_1N}$, por exemplo. Experimente você mesmo repetir o procedimento e obter o baricentro.

Agora que você tem estruturado um passo a passo para a obtenção do baricentro e do circuncentro, elabore um plano de aula documentando sua estratégia, detalhando mais cada passo, e não se esqueça de fazer uma pesquisa sobre as aplicações disso na construção civil, conforme a coordenadora pedagógica solicitou. E aqui vai uma dica para direcioná-lo a uma aplicação do baricentro: analise a Figura 2.53 novamente e pense nas possibilidades!

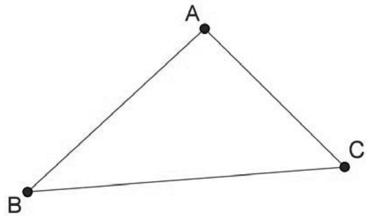
Avançando na prática

Consultoria em Geometria

Descrição da situação-problema

Suponha que uma equipe de uma *startup* de criação de programas de computador tenha lhe contratado como consultor de Geometria para auxiliar na programação de um novo software de desenho. Eles precisam que você elabore um roteiro, passo a passo, da construção da bissetriz de um triângulo escolhido um vértice qualquer. Eles pretendem criar, a partir do seu roteiro, uma ferramenta denominada "bissetriz do triângulo dado um vértice" cuja entrada do usuário desse programa será um vértice de livre escolha. Para você elaborar esse roteiro, eles lhe passaram um papel com o triângulo da Figura 2.65 desenhado.

Figura 2.65 | Triângulo *ABC* qualquer



Fonte: elaborada pelo autor.

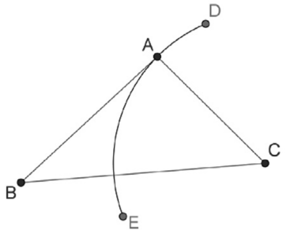
E agora, qual seria uma ordem lógica para a construção da bissetriz relativa ao vértice C, por exemplo?

Resolução da situação-problema

Uma maneira de determinar a bissetriz é lembrar-se de que ela está contida na mediatriz de um triângulo isósceles, ambas relativas à mesma base. Vamos então, a partir do triângulo dado, obter um triângulo com essa classificação.

Passo 1: com o compasso centrado em *C* (vértice dado), escolha qual dos outros dois vértices está mais próximo. No caso da Figura 2.65, será o vértice A. Trace então um arco passando por A e cruzando o lado $\overline{BC}$, como mostra a Figura 2.66.

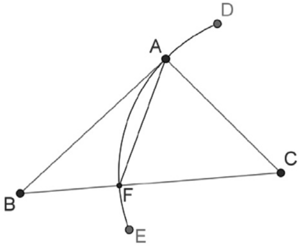
Figura 2.66 | Triângulo *ABC* com o arco passando por *A* e por $\overline{BC}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Passo 2: marque o ponto *F* na interseção do arco com o lado $\overline{BC}$ e trace o segmento $\overline{AF}$ como na Figura 2.67.

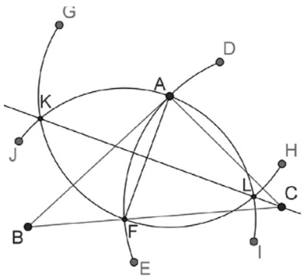
Figura 2.67 | Triângulo *ABC* com o segmento $\overline{AF}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Passo 3: o triângulo AFC formado é isósceles de base $\overline{AF}$ e lados congruentes $\overline{AC} \equiv \overline{FC}$. Agora, basta construir a mediatriz de $\overline{AF}$ como já fizemos nesta seção. A bissetriz estará contida nela, como mostra a Figura 2.68.

Figura 2.68 | Triângulo *ABC* e triângulo isóscele *AFC*, com a mediatriz $\overleftrightarrow{LK}$ traçada



Fonte: elaborada pelo autor.

A bissetriz está contida na mediatriz $\overleftrightarrow{LK}$. Vale lembrar-se de que os procedimentos seriam os mesmos caso você tivesse optado pelo vértice *A* ou *B*. Basta agora você se reunir com a equipe que o contratou e ver se o roteiro está de acordo com as expectativas ou se precisa de mais detalhes.

Faça valer a pena

1. Considere a localização de um ponto *O* dada pela seguinte descrição:

Dado um triângulo *ABC*, determine a mediatriz *r* do lado $\overline{AB}$ e a mediatriz *s* do lado $\overline{BC}$. Marque o ponto *M* na interseção de *r* e $\overline{AB}$ e o ponto *N* na interseção de *s* e $\overline{BC}$. Trace os segmentos $\overline{CM}$ e $\overline{AN}$ e marque o ponto *O* na interseção deles, ou seja, $\overline{CM} \cap \overline{AN} = \{O\}$.

Sobre o ponto *O* cuja localização foi descrita no texto, podemos afirmar:

a) É o isocentro do triângulo *ABC*.

b) É o baricentro do triângulo *ABC*.

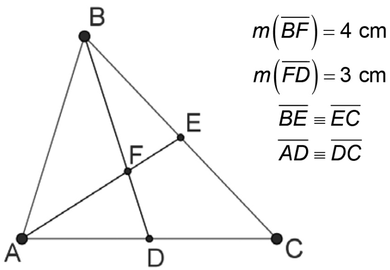
c) É o circuncentro do triângulo *ABC*.

d) É o ortocentro do triângulo *ABC*.

e) É o incentro do triângulo *ABC*.

2. Considere a Figura 2.69 e as afirmativas (I) e (II).

Figura 2.69 | Figura ABC



Fonte: elaborada pelo autor.

(I) O suposto triângulo *ABC* da Figura 2.69 é impossível de ser construído,

PORQUE

(II) Em um triângulo *ABC* de baricentro *F* e mediana $\overline{BD}$, *F* divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra, ou seja, $m(\overline{BF}) = 2 \cdot m(\overline{FD})$.

Enunciado: Analise a relação entre as afirmativas (I) e (II) e a veracidade delas. Depois, marque a alternativa correta:

a) A afirmativa (I) é falsa e (II) é verdadeira.

b) A afirmativa (I) é falsa e (II) é uma justificativa para sua incoerência.

c) A afirmativa (I) é verdadeira e (II) é uma justificativa para ela.

d) A afirmativa (I) é verdadeira e (II) é falsa.

e) Ambas as afirmativas são falsas.

3. Um dos motivos de se estudar profundamente e frequentemente as formas geométricas é o entendimento de certas regularidades que são percebidas nelas. Nos polígonos simples de *n* lados, por exemplo, sempre haverá uma quantidade fixa de diagonais e uma soma constante de seus ângulos internos. Ambas as quantidades estarão dependentes desse valor *n*.

Um polígono que possui 35 diagonais e cujos ângulos internos somam 1440 graus, deve ser um:

a) Hexágono.

b) Heptágono.

c) Octógono.

d) Eneágono.

e) Decágono.

Referências

COSTA, D. M. B. et al. **Elementos de geometria**: geometria plana e espacial. 3. ed. Curitiba: UFPR - Departamento de Expressão Gráfica, 2012. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/elementos.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2017.

DOLCE, O; POMPEU, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf. Acesso em: 27 jan. 2017.

MANFIO, F. **Fundamentos da Geometria**. São Paulo: ICMC-USP, 2016. Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/manfio/GeoAxiomatica.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2017.

RICH, B.; SCHMIDT, P. A. **Geometria**. 3. ed. Bookman, 2015. Coleção Schaum. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577803194/cfi/127!/4/4@0.00:55.8>. Acesso em: 12 dez. 2016.

UESU, D. **Congruência de triângulos**. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/dirceuesu/wp-content/uploads/sites/38/2017/07/GBaula2.pdf>. Acesso em: 30 out. 2018.

Circunferência, círculo e triângulo

Convite ao estudo

Se você fosse questionado a respeito do que é um triângulo, qual é o seu formato, como se classificam os seus ângulos ou ainda qual é a diferença entre reta, semirreta, segmento de reta e retas paralelas, transversais e perpendiculares, com certeza você responderia rapidamente. Tanto pelos conhecimentos prévios a respeito do assunto, quanto pela sua aprendizagem, proporcionada pelos seus estudos no decorrer desta disciplina. No entanto, se perguntassem a você a diferença entre a circunferência e o círculo? É possível que, nesse momento, você esteja refletindo sobre isso. Curioso, não? Será que existe alguma diferença?

O estudo acerca da circunferência, do círculo e de seus elementos, na Seção 3.1, com o estudo, na Seção 3.2, dos ângulos na circunferência e dos teoremas de Tales e Pitágoras na Seção 3.3, auxiliará você a responder a essas e a outras perguntas relacionadas aos elementos da Geometria Plana.

Para isso, nós convidamos você a imaginar que está vivendo um período de transição em sua vida acadêmica e profissional. Você está prestes a terminar a sua graduação e tem como objetivo entrar o quanto antes no mercado de trabalho. Surgiu uma oportunidade como monitor de uma escola de ensino médio muito tradicional na cidade e você sabe que essa posição pode abrir caminho para uma futura contratação como professor.

A sua primeira tarefa é preparar a resolução de três exercícios que fazem parte de uma lista, que o atual professor trabalha com os alunos no decorrer de suas aulas. Você muito em breve será procurado pelos estudantes para esclarecer eventuais dúvidas e deverá estar preparado para recebê-los e para fazer um ótimo trabalho. E, assim, no primeiro exercício, serão expostas duas situações distintas sobre circunferências e o objetivo será determinar o raio delas. O segundo também envolverá situações com circunferência, entretanto, o foco será encontrar o valor de uma incógnita a fim de determinar a medida de um ângulo. E, no terceiro, será preciso determinar o tamanho da frente de três terrenos e a quantidade de arame usada para cercá-los.

Como você desenvolveria uma boa didática a fim de sanar as dúvidas dos estudantes que você deve auxiliar? Como você desenvolveria um roteiro ou um plano de aula para as suas explicações?

Esteja à vontade e convidado a adquirir novos conhecimentos. Participe ativamente de todas as etapas dessa nova fase de aprendizagem e plante dentro de você a certeza de sua capacidade.

Seção 3.1

Circunferência e círculo

Diálogo aberto

Tente visualizar uma circunferência ou um círculo. Temos, por exemplo, no futebol o círculo central do campo. Na quadra de basquete, o aro da cesta. No corpo humano, podemos pensar no globo ocular e em seu formato circular e, na natureza, no miolo das flores, em algumas frutas e ainda no formato do Planeta Terra e de uma bela Lua cheia. Na indústria automotiva, temos as rodas dos carros, o formato dos faróis em alguns modelos etc.

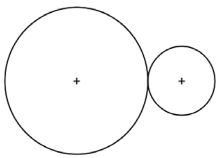
Os exemplos citados anteriormente podem ser contemplados pela aprendizagem sobre circunferência e círculo. Desta forma, você adquirirá conhecimentos a respeito dos elementos do círculo e da circunferência e das posições relativas. Aprenderá também os conceitos de setor circular, de segmento circular e semicírculo, além de compreender segmentos tangentes e quadriláteros circunscritíveis.

Então, imagine que você foi contratado para ser monitor de uma escola de ensino médio muito tradicional na cidade e precisa elaborar um roteiro sobre o seguinte exercício, dividido em duas partes, apresentado da seguinte forma:

Romeu é operador de tornos industriais, utilizados na produção de peças em grandes quantidades. O seu superior imediato demandou a ele uma nova tarefa, a fim de produzir peças no formato circunferencial que servirão de bases de apoio para engrenagens, utilizadas por indústrias que fabricam e vendem caminhões. Analisando os desenhos com os projetos das peças, ele se deparou com as seguintes situações:

1ª. Distâncias entre os centros igual a 36 cm. Diferença entre os raios igual a 4 cm.

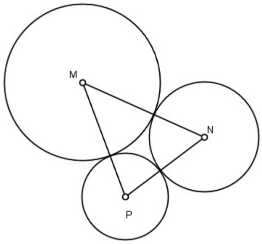
Figura 3.1 | Circunferências com distâncias entre centros igual a 36 cm



Fonte: elaborada pelo autor.

$$2^{\underline{a}}.\ m\left(\overline{MN}\right)=23\,\text{cm}\ ;\ m\left(\overline{NP}\right)=18\,\text{cm}\ ;\ m\left(\overline{MP}\right)=21\,\text{cm}.$$

Figura 3.2 | Circunferências com centros *M*, *N* e *P*



Fonte: elaborada pelo autor.

Para programar a máquina, ele precisará saber a medida exata dos raios de todas as circunferências. Sendo assim, quais conhecimentos de Geometria Plana ele deverá utilizar para resolver essa questão? De que maneira você explicaria isso para os estudantes; como ficaria o seu plano de aula?

Não pode faltar

Imaginaremos um anel e uma moeda, sem considerar as suas espessuras. É possível notar que o anel é vazado, ou seja, ele não é preenchido em seu interior e nos fornece a noção de circunferência. A moeda, por sua vez, é inteiramente preenchida e nos remete à ideia de círculo. A circunferência é apenas o contorno e o círculo é toda a região preenchida. Formalmente, temos:

Assimile

"Sejam r um número real positivo e O um ponto do plano. O lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão à distância r de O é a circunferência de raio r e centro O." (MACHADO, 2012, p. 89, grifo do autor)

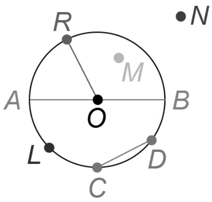
"O círculo é a reunião da circunferência com seu interior." (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 149)

Elementos do círculo e da circunferência e posições relativas

Na Figura 3.3, temos uma circunferência, cuja notação é dada por *C*(*O*,*r*). O segmento de reta $\overline{OR}$ é o raio da circunferência, ele é um segmento cujas extremidades estão uma em algum ponto da circunferência e a outra exatamente no centro da circunferência.

O segmento de reta $\overline{CD}$ têm as suas extremidades pertencentes à circunferência, ele é chamado de **corda**. O segmento de reta $\overline{AB}$ é o **diâmetro** da circunferência; este segmento é uma corda que passa pelo centro e tem sua medida igual ao dobro do raio. O ponto *O* é o **centro** da circunferência.

Figura 3.3 | Circunferência e seus elementos



Fonte: elaborada pelo autor.

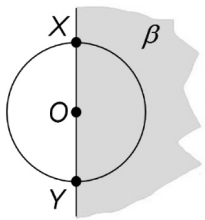
Dado um ponto e uma circunferência *C*(*O*,*r*), podemos ter três situações:

- O ponto *M* é interno e a sua distância até o centro da circunferência é sempre menor que o raio, ou seja, $d_{M,O} < r$.
- O ponto *L* pertence à circunferência e a distância entre o ponto e seu centro é igual ao raio, ou seja, $d_{L,O} = r$.
- O ponto N é externo e a sua distância até o centro da circunferência é sempre maior que o raio, ou seja, $d_{N,O} > r$.

"O conjunto de todos os pontos interiores a uma circunferência é chamado **interior** da circunferência e, reciprocamente, o conjunto dos pontos exteriores a ela é chamado de **exterior** da circunferência." (MACHADO, 2012, p. 90, grifo do autor)

Na Figura 3.4, sendo *X* e *Y* as extremidades do diâmetro da circunferência, chamaremos de **semicircunferência** (denotada por $\overset{\frown}{XY}$) o conjunto dos pontos *X* e *Y* e de todos os pontos da circunferência contidas no mesmo semiplano (β) dos pontos determinados pela reta $\overleftrightarrow{XY}$.

Figura 3.4 | Semicircunferência



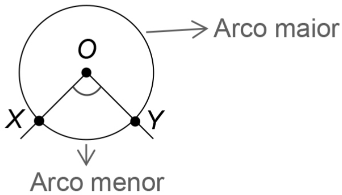
Fonte: elaborada pelo autor.

Dados dois pontos X e Y e uma circunferência de centro O, de tal forma que os pontos não sejam as extremidades do diâmetro da circunferência (Figura 3.5), temos:

- O **arco maior** $\overset{\frown}{XY}$ sendo o conjunto dos pontos *X* e *Y* e de todos os pontos da circunferência que estão no *exterior* do ângulo $X\hat{O}Y$.

- O **arco menor** $\overset{\frown}{XY}$ sendo o conjunto dos pontos *X* e *Y* e todos os pontos da circunferência que estão no *interior* do ângulo $X\hat{O}Y$.

Figura 3.5 | Arco de circunferência



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

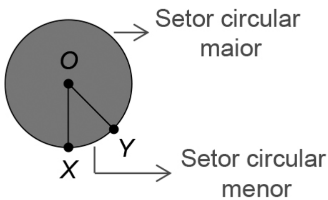
Tanto a circunferência quanto o círculo possuem centro, raio, corda, arco e diâmetro. Será que, para ambos, esses conceitos são definidos da mesma maneira?

Setor circular, segmento circular e semicírculo

Assim como os arcos (menor e maior) na circunferência, de forma análoga, o círculo possui setores (menor e maior). Vamos considerar, então, um círculo com centro O e dois pontos *X* e *Y*, da circunferência do círculo (Figura 3.6), de forma que esses pontos não sejam extremidades de um diâmetro.

O **setor circular maior** *XOY* é a região limitada pelos raios *OX* e *OY* e todos os pontos pertencentes ao círculo que estão no exterior do ângulo $X\hat{O}Y$. O **setor circular menor** *XOY* é a região limitada pelos raios *OX* e *OY* e todos os pontos pertencentes ao círculo que estão no interior do ângulo $X\hat{O}Y$. Comumente, ao nos referirmos ao setor circular, sem aviso contrário, consideramos o menor.

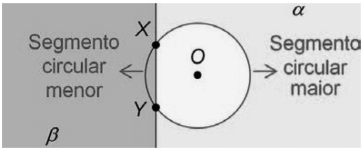
Figura 3.6 | Setores circulares



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 3.7, XY é o **segmento circular menor**, pois ele é a interseção do círculo com o semiplano β de origem na reta $\overleftrightarrow{XY}$, não contendo o centro do círculo. Analogamente, XY é o **segmento circular maior**, uma vez que ele é a interseção do círculo com o semiplano α de origem na reta $\overleftrightarrow{XY}$ e contém o centro do círculo.

Figura 3.7 | Segmentos circulares

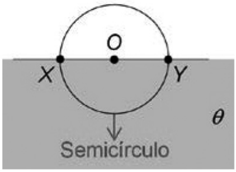


Fonte: elaborada pelo autor.

Também para esses casos, ao nos referirmos ao segmento circular, sem aviso contrário, devemos considerar o menor.

Sejam X e Y extremidades de um diâmetro de um círculo, chamaremos de semicírculo XY a interseção do círculo com o semiplano θ (Figura 3.8) de origem na reta $\overleftrightarrow{XY}$.

Figura 3.8 | Semicírculo



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

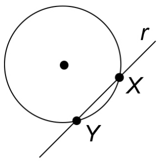
Um setor circular pode coincidir com um segmento circular?

Posições relativas de reta e circunferência e duas circunferências

As retas são caracterizadas de acordo com a posição que se localizam em relação a uma circunferência. Vejamos:

Se uma reta r intercepta uma circunferência em dois pontos distintos, ela é chamada de **secante** a uma circunferência (Figura 3.9).

Figura 3.9 | Reta secante *r*



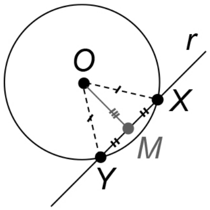
Fonte: elaborada pelo autor.

A partir daí, são elencadas duas propriedades a seu respeito (Figura 3.10).

Em que:

- *Se ela não passa pelo centro da circunferência e a intercepta em dois pontos distintos X e Y, tendo M como o ponto médio da corda* $\overline{XY}$*, tem-se que a reta* $\overleftrightarrow{OM}$ *é perpendicular* $(\perp)$ *à secante r.*
- *Se ela não passa pelo centro da circunferência e a intercepta nos pontos distintos X e Y, tem-se que a perpendicular à secante r, conduzida pelo centro, passa pelo ponto médio da corda* $\overline{XY}$.

Figura 3.10 | Secante *r* e suas propriedades



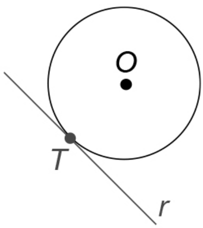
$$\overleftrightarrow{OM} \perp \overleftrightarrow{XY}$$

Fonte: elaborada pelo autor.

As demonstrações dessas propriedades podem ser verificadas nas páginas 151 e 152 do livro *Fundamentos da Matemática Elementar*, volume 9, dos autores Dolce e Pompeo (2013).

A distância entre a reta secante e o centro da circunferência será sempre menor que o raio.

Figura 3.11 | Reta tangente *r*



Fonte: elaborada pelo autor.

A reta que possui apenas um ponto comum à circunferência (Figura 3.11) é chamada de reta **tangente**. Os seus demais pontos são externos à circunferência. Este conceito também é caracterizado por duas propriedades. De acordo com Dolce e Pompeo (2013, p. 153, grifo nosso):

> **a) Toda reta perpendicular a um raio na sua extremidade da circunferência é tangente à circunferência.**
> **b) Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto da tangência.**

A distância entre a reta tangente e o centro da circunferência será sempre igual ao raio.

Uma reta que não intercepta a circunferência é chamada de **reta exterior**. Neste caso, a sua distância até o centro da circunferência será sempre maior que o raio.

Duas circunferências, entre si, também se caracterizam de acordo com as suas posições. Dolce e Pompeo (2013, p. 155, grifo do autor) contemplam que:

- Uma circunferência é **interna** a outra se todos os seus pontos são pontos internos da outra.
- Uma circunferência é **tangente interna** a outra se elas têm um único ponto comum e os demais pontos da primeira são pontos internos da segunda.
- Duas circunferências são **secantes** se têm em comum somente dois pontos distintos.
- Duas circunferências são **tangentes externas** se têm um único ponto comum e os demais pontos de uma são externos à outra.
- Duas circunferências são **externas** se os pontos de uma delas são externos à outra.

A partir disso, em relação às posições entre duas circunferências, temos (Figura 3.12):

(I) C_2 externa a C_1, a distância entre os seus centros é maior que a soma das medidas dos seus raios, ou seja, $d > r_1 + r_2$.

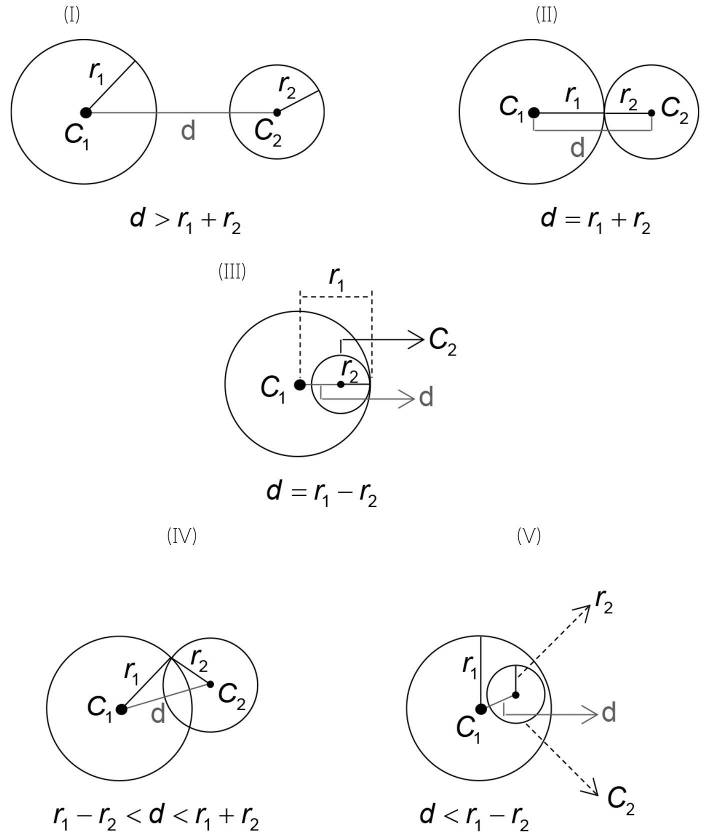
(II) C_2 tangente externa a C_1, a distância entre os seus centros é igual à soma das medidas dos seus raios, ou seja, $d = r_1 + r_2$.

(III) C_2 tangente interna a C_1, a distância entre os seus centros é igual à diferença entre os seus raios, ou seja, $d = r_1 - r_2$.

(IV) C_2 e C_1 são secantes, a distância entre os centros deve estar entre as situações para circunferências tangentes internas ou externas, ou seja, $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$.

(V) C_2 interna a C_1, a distância entre os seus centros é menor que a diferença entre os seus raios, ou seja, $d < r_1 - r_2$.

Figura 3.12 | Posições relativas entre duas circunferências



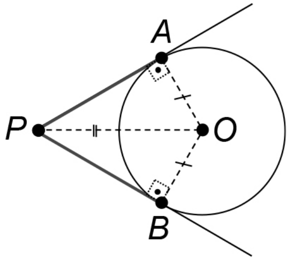
Fonte: elaborada pelo autor.

Caso a distância entre os centros de duas circunferências seja nula (igual a zero), possuem o raio e o centro em comum e são chamadas de **concêntricas**.

Segmentos tangentes e quadriláteros circunscritíveis

Seja uma circunferência de centro *O* e os pontos *A*, *B* e *P*, com os pontos *A* e *B*, pertencentes à circunferência e *P* externo a ela, se conduzirmos os segmentos de reta $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, tangentes à circunferência, teremos dois segmentos congruentes $\left(\overline{PA} \equiv \overline{PB}\right)$.

Figura 3.13 | Segmentos tangentes à circunferência



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 3.13, pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, temos os catetos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ congruentes $\left(\overline{OA} \equiv \overline{OB}\right)$ e $\overline{OP}$, a hipotenusa comum aos dois triângulos. Com isso, o triângulo *PAO* é congruente ao triângulo *PBO* e, portanto, $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

Dado um quadrilátero convexo e uma circunferência e, sendo todos os lados dele tangentes a ela, dizemos que esse quadrilátero é **circunscrito** na circunferência. Podemos dizer também que a circunferência é *inscrita* no quadrilátero. Para que um quadrilátero seja circunscritível a uma circunferência, a soma de dois dos seus lados opostos deve ser igual à soma dos outros dois. Vamos verificar essa afirmação:

Sejam *A*, *B*, *C* e *D* os pontos respectivos de tangência em $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$, $\overline{ZW}$ e $\overline{WX}$ (Figura 3.14), temos que:

$$m\left(\overline{XA}\right) = m\left(\overline{XD}\right)$$

$$m\left(\overline{YA}\right) = m\left(\overline{YB}\right)$$

$$m\left(\overline{ZC}\right) = m\left(\overline{ZB}\right)$$

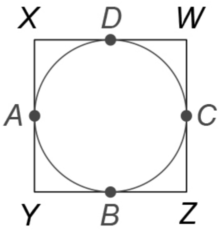
$$m\left(\overline{WC}\right) = m\left(\overline{WD}\right)$$

Somando membro a membro nas igualdades fica:

$$\underbrace{m\left(\overline{XA}\right)+m\left(\overline{AY}\right)}_{m\left(\overline{XY}\right)}+\underbrace{m\left(\overline{ZC}\right)+m\left(\overline{WC}\right)}_{m\left(\overline{ZW}\right)}=\overbrace{m\left(\overline{XD}\right)+m\left(\overline{WD}\right)}^{m\left(\overline{XW}\right)}+\underbrace{m\left(\overline{YB}\right)+m\left(\overline{ZB}\right)}_{m\left(\overline{YZ}\right)}$$

$$m\left(\overline{XY}\right)+m\left(\overline{ZW}\right)=m\left(\overline{XW}\right)+m\left(\overline{YZ}\right).$$

Figura 3.14 | Quadrilátero circunscrito



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Determine a soma de todos os lados de um quadrilátero ABCD circunscritível a uma circunferência, sabendo que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são respectivamente opostos. Dados: $m\left(\overline{AB}\right)=3a+1$, $m\left(\overline{BC}\right)=2a$, $m\left(\overline{CD}\right)=a+1$ e $m\left(\overline{AD}\right)=3a$.

Resolução:

Para que um quadrilátero seja circunscritível, a soma das medidas de dois dos seus lados opostos deve ser igual à soma das medidas dos outros dois. Então $m\left(\overline{AB}\right)+m\left(\overline{CD}\right)=m\left(\overline{BC}\right)+m\left(\overline{AD}\right)$. Fazendo a substituição com os dados fornecidos no enunciado, temos:

$$m\left(\overline{AB}\right)+m\left(\overline{CD}\right)=m\left(\overline{BC}\right)+m\left(\overline{AD}\right)$$

$$3a+1+a+1=2a+3a$$

$$a=2$$

E encontramos $m\left(\overline{AB}\right)=7$, $m\left(\overline{BC}\right)=4$, $m\left(\overline{CD}\right)=3$ e $m\left(\overline{DA}\right)=6$.

Somamos os valores encontrados, concluímos que $7+4+3+6=20$ ou seja, 20 cm.

Pesquise mais

Aprenda mais sobre os conceitos estudados nesta seção a partir da consulta ao seguinte material:

CARMO, J. **Circunferência e círculo**. Disponível em: <http://docente.ifrn.edu.br/joaocarmo/disciplinas/aulas/desenho-geometrico/circunferencia-e-circulo/view>. Acesso em: 11 mar. 2017.

Sem medo de errar

Lembre-se de que você foi contratado para ser monitor de uma escola de ensino médio e precisa desenvolver um plano de aula para esclarecer dúvidas dos alunos sobre a tarefa. O exercício a ser resolvido está estruturado em dois itens:

No primeiro, sabe-se que a distância entre os centros é igual a 36 cm $(d = 36)$ e que a diferença entre os raios é igual a 4 cm $(r_1 - r_2 = 4)$. Além disso, é possível observar que as circunferências são tangentes externas, ou seja, a distância entre os seus centros é igual à soma das medidas dos seus raios $(d = r_1 + r_2)$. Organizando essas informações, podemos determinar o valor dos raios. Vejamos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 36 \\ r_1 - r_2 = 4 \end{cases} \qquad r_1 = 20 \qquad r_2 = 16$$

E, com isso, se conclui que os raios medem 20 cm e 16 cm, respectivamente.

No segundo item, as circunferências são tangentes externas duas a duas e, da mesma forma que o primeiro item, a distância entre os seus centros é igual à soma das medidas dos seus raios $(d = r_1 + r_2)$. Chamemos então de r_m, r_n e r_p os raios das circunferências de centros *M*, *N* e *P*, respectivamente, e d_{mn}, d_{np} e d_{mp} as distâncias entre os seus centros. Com isso, temos:

Para $d_{mn} = 23$,

$$d_{mn} = r_m + r_n \quad \Rightarrow \quad r_m + r_n = 23 \qquad \text{(I)}$$

Para $d_{np} = 18$,

$$d_{pn} = r_n + r_p \quad \Rightarrow \quad r_n + r_p = 18 \qquad \text{(II)}$$

Para $d_{mp} = 21$,

$$d_{mp} = r_m + r_p \quad \Rightarrow \quad r_m + r_p = 21 \qquad \text{(III)}$$

Efetuamos a diferença (I) – (II):

$$r_m + r_n - (r_n + r_p) = 23 - 18$$

$$r_m - r_p = 5 \qquad \text{(IV)}$$

Fazemos (III) + (IV), e encontramos r_m:

$$r_m + r_p + r_m - r_p = 21 + 5$$

$$2r_m = 26$$

$$r_m = 13$$

Substituindo $r_m = 13$ em (I) encontramos r_n:

$$r_m + r_n = 23$$

$$13 + r_n = 23$$

$$r_n = 10$$

Em (II) podemos fazer a substituição para $r_n = 10$ e encontrar r_p:

$$r_n + r_p = 18$$

$$10 + r_p = 18$$

$$r_p = 8$$

Portanto, os valores dos raios das circunferências de centro *M*, *N* e *P* são, respectivamente, $r_m = 13\text{ cm}$, $r_n = 10\text{ cm}$ e $r_p = 8\text{ cm}$.

A partir de então, você precisa utilizar alguma estratégia e inseri-la em seu plano de aula, a fim de sanar as possíveis dúvidas de seus alunos. Cabe a você pensar na melhor maneira de explicar esse exercício. Bom trabalho!

Avançando na prática

Reforço escolar

Descrição da situação-problema

Você é universitário e está cursando licenciatura em Matemática. No contraturno ao seu período de estudos você atua como professor particular em uma franquia de reforço escolar. Em determinada semana, assumiu um plantão para sanar dúvidas de alunos com dificuldades em Geometria Plana, no qual, no decorrer da atividade, um deles lhe abordou com o seguinte problema:

- A diferença de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível a uma circunferência é igual a 16 cm e a diferença dos outros lados é de 8 cm. Determine as medidas dos lados do quadrilátero, sendo 112 cm a soma de todas.

Desta forma, como você resolveria o problema na lousa, para sanar a dúvida do aluno?

Resolução da situação-problema

Vamos chamar de *ABCD* o quadrilátero e adotar como opostos os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sendo $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ os outros dois lados opostos.

Lembrando que, em um quadrilátero circunscritível a uma circunferência, a soma de dois dos seus lados opostos deve ser igual à soma dos outros dois, ou seja, $m(\overline{AB})+m(\overline{CD})=m(\overline{BC})+m(\overline{AD})$. Do enunciado temos:

$$m(\overline{AB})-m(\overline{CD})=16 \quad \Rightarrow \quad m(\overline{AB})=16+m(\overline{CD}) \qquad (I)$$

$$m(\overline{AD})-m(\overline{BC})=8 \quad \Rightarrow \quad m(\overline{AD})=8+m(\overline{BC}) \qquad (II)$$

$$m(\overline{AB})+m(\overline{CD})+m(\overline{AD})+m(\overline{BC})=112$$

Substituindo (I) e (II) em $m(\overline{AB})+m(\overline{CD})+m(\overline{AD})+m(\overline{BC})=112$ chegamos a:

$$m(\overline{AB})+m(\overline{CD})+m(\overline{AD})+m(\overline{BC})=112$$

$$16+m(\overline{CD})+m(\overline{CD})+8+m(\overline{BC})+m(\overline{BC})=112$$

$$2\cdot m(\overline{CD})+2\cdot m(\overline{BC})=88$$

$$m(\overline{CD})+m(\overline{BC})=44 \qquad (III)$$

Substituindo (I) e (II) em $m(\overline{AB})+m(\overline{CD})=m(\overline{BC})+m(\overline{AD})$ chegamos a:

$$m(\overline{AB})+m(\overline{CD})=m(\overline{BC})+m(\overline{AD})$$

$$16 + m\left(\overline{CD}\right) + m\left(\overline{CD}\right) = m\left(\overline{BC}\right) + 8 + m\left(\overline{BC}\right)$$

$$2 \cdot m\left(\overline{CD}\right) - 2 \cdot m\left(\overline{BC}\right) = -8$$

$$m\left(\overline{CD}\right) - m\left(\overline{BC}\right) = -4 \qquad (IV)$$

Efetuando a diferença (III) – (IV) encontramos $m\left(\overline{BC}\right)$:

$$m\left(\overline{CD}\right) + m\left(\overline{BC}\right) - \left(m\left(\overline{CD}\right) - m\left(\overline{BC}\right)\right) = 44 - (-4)$$

$$2 \cdot m\left(\overline{BC}\right) = 48$$

$$m\left(\overline{BC}\right) = 24$$

Substituindo $m\left(\overline{BC}\right) = 24$ em (III) encontramos $m\left(\overline{CD}\right)$:

$$m\left(\overline{CD}\right) + m\left(\overline{BC}\right) = 44$$

$$m\left(\overline{CD}\right) + 24 = 44$$

$$m\left(\overline{CD}\right) = 20$$

Substituindo $m\left(\overline{CD}\right) = 20$ em (I) encontramos $m\left(\overline{AB}\right)$:

$$m\left(\overline{AB}\right) = 16 + m\left(\overline{CD}\right)$$

$$m\left(\overline{AB}\right) = 16 + 20$$

$$m\left(\overline{AB}\right) = 36$$

Substituindo $m\left(\overline{BC}\right) = 24$ em (II) encontramos $m\left(\overline{AD}\right)$:

$$m\left(\overline{AD}\right) = 8 + m\left(\overline{BC}\right)$$

$$m\left(\overline{AD}\right) = 8 + 24$$

$$m\left(\overline{AD}\right) = 32$$

Com isso, determinamos as medidas dos lados: $m\left(\overline{AB}\right) = 36 \text{ cm}$, $m\left(\overline{BC}\right) = 24 \text{ cm}$, $m\left(\overline{CD}\right) = 20 \text{ cm}$ e $m\left(\overline{AD}\right) = 32 \text{ cm}$.

Assim, você está preparado para explicar o exercício para o aluno.

Faça valer a pena

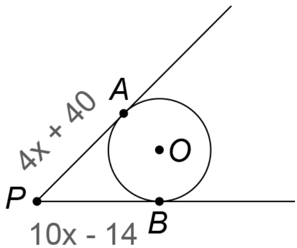
1. "Sejam *r* um número real positivo e O um ponto do plano. O lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão à distância *r* de *O* é a circunferência de raio *r* e centro O" (MACHADO, 2012, p. 89, grifo do autor). Entre os seus elementos, temos o raio (um segmento de reta cujas extremidades estão uma em algum ponto da circunferência e outra exatamente no centro da circunferência), a corda (um segmento de reta com as extremidades pertencentes à circunferência) e o diâmetro (uma corda que passa pelo centro da circunferência e tem sua medida igual ao dobro do raio).

Os raios de uma circunferência são dados pelos segmentos de reta $m\left(\overline{XO}\right)=6x-6$ e $m\left(\overline{OY}\right)=2x+6$. Determine o seu diâmetro.

a) 3.
b) 6.
c) 12.
d) 24.
e) 30.

2. Na Figura 3.15, temos uma circunferência de centro *O* e os pontos *A*, *B* e *P*. Os pontos *A* e *B* pertencem à circunferência e o ponto *P* é externo a ela. Partindo do ponto *P*, os pontos *A* e *B* formam os segmentos de reta $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, que são tangentes à circunferência.

Figura 3.15 | Segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes à circunferência



Fonte: elaborada pelo autor.

Encontre o valor de x e assinale a alternativa que contém a medida correta dos segmentos de reta $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$.

a) 9.
b) 25.
c) 54.
d) 76.
e) 80.

3. Sejam duas circunferências C_2 e C_1, dizemos que C_2 é tangente interna à C_1 se tiver um único ponto comum a C_1 e os seus demais pontos forem pontos internos de C_1. Neste caso, a distância entre os seus centros é igual à diferença entre os seus raios, ou seja, $d = r_1 - r_2$.

Sejam duas circunferências C_2 e C_1, dizemos que C_2 é tangente externa à C_1 se elas possuem um único ponto comum e os demais pontos de uma são externos à outra. Neste caso, a distância entre os seus centros é igual à soma das medidas dos seus raios, ou seja, $d = r_1 + r_2$.

Sejam duas circunferências C_2 e C_1, dizemos que elas são secantes se têm em comum apenas dois pontos distintos. Neste caso, a distância entre os seus centros deve estar entre as situações para circunferências tangentes internas ou externas, ou seja, $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$.

Duas circunferências são secantes e a distância entre os seus centros é de 24 cm. Determine o raio da maior, que é múltiplo de 8, sabendo que o raio da menor é igual a 7 cm.

a) 16 cm.

b) 24 cm.

c) 32 cm.

d) 40 cm.

e) 48 cm.

Seção 3.2

Ângulos na circunferência

Diálogo aberto

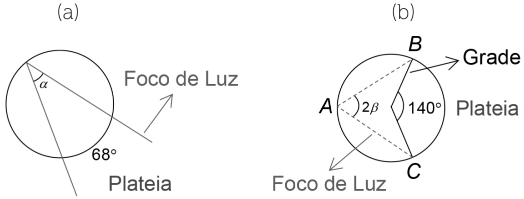
Nesta seção você conhecerá os conteúdos que tratam os ângulos na circunferência. Eles estão divididos conceitualmente em arcos congruentes, adição de arcos, medida do ângulo central, medida do arco correspondente, medida do ângulo inscrito, quadrilátero inscritível e arco capaz.

A compreensão desses temas é fundamental para resolver as situações-problema relacionando ângulos em sistemas de coordenadas polares ou esféricas e permite que os especialistas compreendam mapas de rotas terrestres ou marítimas, analisem plantas de Engenharia e Arquitetura, leiam projetos mecânicos etc.

Para que a sua aprendizagem se torne significativa, convidamos você, mais uma vez, a imaginar que foi contratado para ser monitor de uma escola de ensino médio muito tradicional na cidade e está resolvendo alguns exercícios da lista de um professor de Matemática, além de desenvolver um plano de aula, a fim de atender bem aos alunos que vierem lhe procurar para o esclarecimento de dúvidas. O próximo exercício a ser resolvido, ainda sobre circunferência, solicita a determinação do valor de uma incógnita para encontrar a medida de um ângulo. Tal exercício foi apresentado da seguinte forma:

Um trabalhador que atua na área de fabricação de estruturas metálicas construirá dois palcos com formatos circunferenciais, que serão utilizados para apresentações artísticas. De acordo com o projeto apresentado a ele, será necessário determinar a medida do ângulo considerado ideal para demarcar o posicionamento dos artistas durante as apresentações, de acordo com a localização da plateia. A Figura 3.16 contempla as situações projetadas. Nas duas situações, o artista ficará localizado no fundo do palco entre as saídas de dois focos de luzes. Além disso, na situação (b), haverá uma área de convidados sentados sobre o palco, cuja separação para o espaço do artista será feita por grades que se encontrarão ao centro do palco, formando um ângulo de 140 graus.

Figura 3.16 | Palcos circunferenciais



Fonte: elaborada pelo autor.

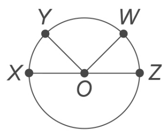
Desta forma, quais seriam os valores de α e β a fim de determinar o ângulo ideal para que os artistas se posicionem corretamente no palco? Quais as peculiaridades utilizadas por você a fim de criar um bom plano de aula que possa sanar as possíveis dúvidas apresentadas?

Não pode faltar

Arcos congruentes e adição de arcos

Sejam dois arcos distintos XY e ZW em uma circunferência com centro em O. Dizemos que esses arcos são **congruentes** se, e somente se, os ângulos formados por cada um deles $\left(XOY \text{ e } ZOW\right)$ também forem congruentes (Figura 3.17).

Figura 3.17 | Arcos congruentes

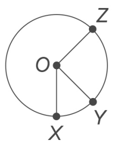


$$\overset{\frown}{XY} \equiv \overset{\frown}{ZW} \Leftrightarrow X\hat{O}Y \equiv Z\hat{O}W$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Na circunferência de centro O (Figura 3.18), dizemos que o arco XZ é a soma dos arcos XY e YZ se, e somente se, o ângulo XOZ for a soma dos ângulos XOY e YOZ.

Figura 3.18 | Adição de arcos

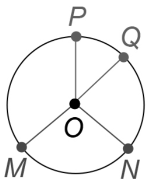


$$\overset{\frown}{XZ} = \overset{\frown}{XY} + \overset{\frown}{YZ} \Leftrightarrow X\hat{O}Z = X\hat{O}Y + Y\hat{O}Z$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 3.19, podemos dizer que o arco MN é maior que o arco PQ se, e somente se, o ângulo MON for maior que o ângulo POQ. Neste caso, estamos tratando da desigualdade entre arcos, em que $MN > PQ \Leftrightarrow MON > POQ$.

Figura 3.19 | Desigualdade de arcos



Fonte: elaborada pelo autor.

Duas circunferências com raios iguais são congruentes.

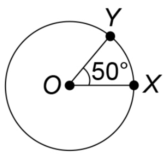
Reflita

A partir da definição de arcos congruentes, como você definiria arcos não congruentes?

Medida do ângulo central, do arco correspondente e do ângulo inscrito

O ângulo cujo vértice está no centro de uma circunferência é chamado de **ângulo central** e o arco determinado por ele é o **arco correspondente**. Em relação a suas medidas temos que "a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 168).

Figura 3.20 | Ângulo central e arco correspondente



$$m\left(X\hat{O}Y\right) = 50° \Leftrightarrow m\left(\overset{\frown}{XY}\right) = 50°$$

Fonte: elaborada pelo autor.

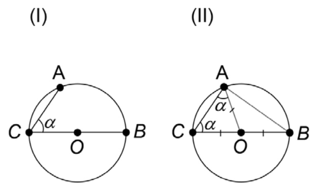
Na circunferência de centro O (Figura 3.20), se $m\left(X\hat{O}Y\right) = 50°$, então $m\left(\overset{\frown}{XY}\right) = 50°$ Ou se $m\left(\overset{\frown}{XY}\right) = 50°$, então $m\left(X\hat{O}Y\right) = 50°$.

Assimile

Um ângulo que possui o vértice em um ponto da circunferência, com os lados secantes a ela, é chamado de **ângulo inscrito**. Neste ângulo, o centro da circunferência pode estar em um lado do ângulo, pode ser interno ou externo ao ângulo. A sua medida é a metade da medida do arco correspondente.

Verificaremos o caso em que o centro da circunferência pertence a um dos lados do ângulo inscrito. Na Figura 3.21, em (I), o centro O da circunferência está no lado (corda) $\overline{CB}$ do ângulo $\hat{ACB} = \alpha$. Esta corda é o diâmetro da circunferência. Com isso, $\overline{OC} \equiv \overline{OB}$ (raios).

Figura 3.21 | Ângulo inscrito



Fonte: elaborada pelo autor.

Em (II), traçando o segmento de reta $\overline{AB}$ e o segmento de reta $\overline{OA}$ (raio da circunferência), tem-se dois triângulos isósceles, ΔOAC e ΔOAB, que possuem dois lados e dois ângulos internos iguais. No ΔOAC, α são os ângulos internos iguais. No triângulo OAB, $\hat{AOB}$ é o ângulo central do arco $\overset{\frown}{AB}$. Nesse triângulo, $\hat{AOB}$ é externo ao ΔOAC, ou seja, ele é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele. Com isso, tem-se:

$$\overset{\frown}{AB} = \alpha + \alpha$$

$$\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$$

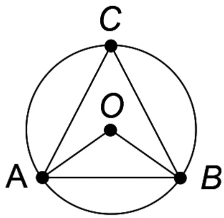
$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

As outras duas situações podem ser verificadas no livro *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 9, dos autores Dolce e Pompeo (2013), nas páginas 169 e 170.

Exemplificando

Determine a medida do ângulo $\hat{ACB}$ na Figura 3.22, sendo O o centro da circunferência. Dado: $m(O\hat{A}B) = 30°$.

Figura 3.22 | Ângulo inscrito ACB



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Como O é o centro da circunferência, tem-se que $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são os raios (congruentes). Eles formam o triângulo isósceles OAB que possui dois lados congruentes e dois ângulos internos congruentes (com medidas iguais). Com isso, temos $m\left(O\hat{A}B\right)=m\left(O\hat{B}A\right)=30°$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, fazemos:

$$m\left(O\hat{A}B\right)+m\left(O\hat{B}A\right)+m\left(A\hat{O}B\right)=180°$$

$$30°+30°+m\left(A\hat{O}B\right)=180°$$

$$m\left(A\hat{O}B\right)=120°$$

A medida do ângulo central $\left(m\left(A\hat{O}B\right)=120°\right)$ é igual à medida do arco correspondente AB, ou seja, $m\left(\overset{\frown}{AB}\right)=120°$. Como a medida do ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente, temos:

$$m\left(ACB\right)=\frac{m\left(AB\right)}{2}$$

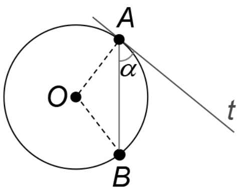
$$m\left(A\hat{C}B\right)=\frac{120°}{2}$$

$$m\left(A\hat{C}B\right)=60°$$

Portanto, a medida do ângulo inscrito ACB é 60°.

Um ângulo formado por uma corda e uma tangente à circunferência, em uma das extremidades dessa corda, é chamado de ângulo **semi-inscrito** ou **ângulo de segmento**. A sua medida também é dada por $\alpha = \frac{AB}{2}$. Vejamos:

Figura 3.23 | Ângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Como já vimos anteriormente, a medida do ângulo central é igual à medida do arco AB. Também temos que os segmentos de reta $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são os raios e formam o triângulo isósceles *OAB*. Como a tangente *t* à circunferência é perpendicular ao lado $\overline{OA}$ do triângulo, temos $m(\hat{A}) = 90° - \alpha$. Sendo o triângulo *OAB* isósceles, é possível observar que $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90° - \alpha$. Sabendo que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180°, fazemos:

$$m(\widehat{AB}) + 90° - \alpha + 90° - \alpha = 180°$$

$$m(AB) - 2\alpha = 0$$

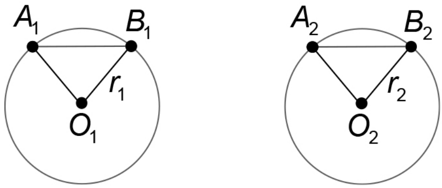
$$m(AB) = 2\alpha$$

$$\alpha = \frac{m(AB)}{2}$$

Destacamos também que, em circunferências congruentes, cordas congruentes correspondem a ângulos centrais congruentes. Vejamos:

Supondo que as cordas $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$, na Figura 3.24, sejam congruentes $(\overline{A_1B_1} \equiv \overline{A_2B_2})$, com os raios $(r_1 \text{ e } r_2)$ formarão triângulos congruentes (e isósceles, os triângulos $A_1O_1B_1$ e $A_2O_2B_2$, pois os seus lados são os respectivos raios da circunferência). Da congruência de triângulos, tem-se que os ângulos centrais são congruentes, pelo caso *LLL* (raio, corda, raio).

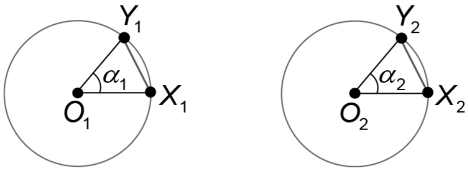
Figura 3.24 | Circunferências congruentes



Fonte: elaborada pelo autor.

De forma recíproca, supondo que os ângulos centrais α_1 e α_2 (Figura 3.25) são congruentes, ou seja, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, as cordas determinadas por eles $\overline{Y_1X_1}$ e $\overline{Y_2X_2}$, com os raios das circunferências $\left(r_1 = \overline{O_1Y_1} = \overline{O_1X_1} \text{ e } r_2 = \overline{O_2Y_2} = \overline{O_2X_2}\right)$, formam dois triângulos congruentes, $\Delta Y_1O_1X_1$ e $\Delta Y_2O_2X_2$, pelo caso *LAL* (raio, ângulo central, raio). E, pela congruência de triângulos, temos a congruência das cordas.

Figura 3.25 | Cordas congruentes

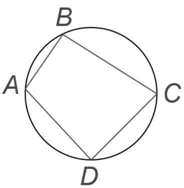


Fonte: elaborada pelo autor.

Quadrilátero inscritível

Um quadrilátero que tem os quatro vértices pertencentes a uma circunferência é chamado de **quadrilátero inscritível**. Sendo ele convexo, os seus ângulos opostos são suplementares (essa é uma importante propriedade a respeito desse conceito). Reciprocamente, dado um quadrilátero convexo, com ângulos opostos suplementares, ele é inscritível.

Figura 3.26 | Quadrilátero inscritível



$$\begin{cases} m\left(\hat{A}\right) + m\left(\hat{C}\right) = 180° \\ m\left(\hat{B}\right) + m\left(\hat{D}\right) = 180° \end{cases}$$

Fonte: elaborada pelo autor.

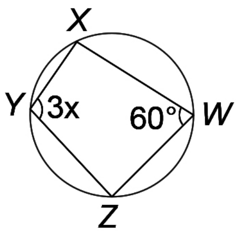
Na Figura 3.26, temos que a medida do ângulo inscrito A é igual à metade do arco BD, ou seja, $A = \frac{BD}{2}$. O ângulo inscrito C é igual à metade do arco DB, ou seja, $C = \frac{DB}{2}$. A soma das medidas dos arcos BD e DB é igual a 360°, sendo a soma das metades das medidas desses arcos igual a 180°. Logo:

$$m\left(\hat{A}\right) + m\left(\hat{C}\right) = \frac{m\left(\overset{\frown}{BD}\right)}{2} + \frac{m\left(\overset{\frown}{DB}\right)}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

Exemplificando

Determine o valor da incógnita x na Figura 3.27.

Figura 3.27 | Quadrilátero inscritível *WXYZ*



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Em um quadrilátero convexo inscritível, os ângulos opostos são suplementares. Com isso, temos $m\left(\hat{Y}\right) + m\left(\widehat{W}\right) = 180^\circ$, em que, substituindo os seus respectivos valores, temos:

$$m\left(\hat{Y}\right) + m\left(\widehat{W}\right) = 180^\circ$$

$$3x + 60^\circ = 180^\circ$$

$$3x = 120^\circ$$

$$x = 40^\circ$$

Com isso, conclui-se que o valor da incógnita *x* é igual a 40°.

Faça você mesmo

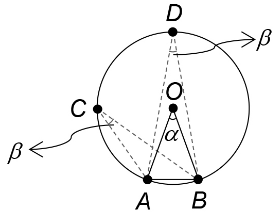
Prove que dado um quadrilátero convexo, com ângulos opostos suplementares, ele é inscritível.

Sugestão: considere o quadrilátero convexo ABCD com $m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 180°$ e $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180°$. Considere também uma circunferência que passe por A, B e C, mas não passe por D. Procure encontrar uma contradição.

Arco capaz

Observando a Figura 3.28, o arco ADB, externo ao ângulo α, é dito arco capaz de β, pois, para qualquer ponto C pertencente ao arco ADB, o ângulo ACB será congruente ao ângulo ADB e medirá $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Figura 3.28 | Arco capaz



Fonte: elaborada pelo autor.

Veja que todos os ângulos da forma APB, com *P* pertencente ao arco capaz, são congruentes, pois todos correspondem ao mesmo arco AB.

Pesquise mais

Enriqueça a sua aprendizagem sobre ângulos na circunferência consultando o material disponível em: <http://www.professores.uff.br/dirceuesu/GBaula4.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2017.

Sem medo de errar

Lembre-se de que você foi contratado para ser monitor de uma escola de ensino médio e está resolvendo alguns exercícios da lista do professor de Matemática. Precisamos, então, determinar o valor da incógnita e estabelecer a medida dos ângulos, considerados ideais para as ocasiões propostas.

Na primeira situação projetada, tem-se que o ângulo α é inscrito na circunferência, ou seja, ele possui um vértice na circunferência e os seus lados são secantes a ela. Além disso, a sua medida é dada pela metade do arco correspondente. Na Figura 3.28 é possível observar que o arco correspondente mede 68°. Com isso, conclui-se que a medida do ângulo α é igual a 34°, pois:

$$\alpha = \frac{arco \text{ correspondente}}{2}$$

$$\alpha = \frac{68°}{2}$$

$$\alpha = 34°$$

Na segunda situação proposta, tem-se que 140° é a medida do ângulo cujo vértice encontra-se no centro da circunferência, ou seja, trata-se do ângulo central. Desta forma, o arco $\left(BC\right)$ correspondente a ele também mede 140°. Como A é um ângulo inscrito na circunferência e mede a metade do seu arco correspondente que, neste caso, também é o arco BC, temos:

$$2\beta = \frac{BC}{2}$$

$$2\beta = \frac{140°}{2}$$

$$2\beta = 70°$$

$$\beta = 35°$$

E, com isso, conclui-se que os ângulos ideais para que os artistas possam se posicionar adequadamente para as duas situações são 34° e 70°, respectivamente.

Após a resolução, insira-a em seu plano de aula e desenvolva boas práticas para sanar as possíveis dúvidas dos alunos.

Avançando na prática

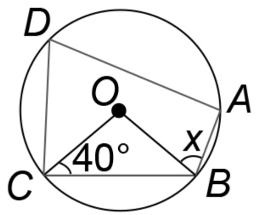
Matemática na web

Descrição da situação-problema

Ser graduado na área de exatas proporciona um leque de possibilidades para atuação profissional. Ter um canal do Youtube é uma grande oportunidade de desenvolver diversos trabalhos de utilidade pública, entretenimento, educação, ensino etc., além do fato de que um canal de muito sucesso pode se tornar rentável financeiramente. Sendo assim, suponha que você lançou um canal de esclarecimento de dúvidas de conteúdos matemáticos para estudantes que pretendem prestar exames de acesso a cursos superiores e que entre as dúvidas a esclarecer, um dos inscritos em seu canal solicitou ajuda para resolver a seguinte questão:

Determine o valor de *x* na figura ilustrada, sabendo que o arco AB mede 100°.

Figura 3.29 | Determinando o valor de *x* no quadrilátero inscritível



Fonte: elaborada pelo autor.

Como você ajudaria o seguidor do seu canal a resolver esse problema?

Resolução da situação-problema

Com a ajuda de uma mesa digital, uma câmera e um microfone de boa qualidade, você gravou um vídeo apresentando a seguinte solução:

No triângulo *COB*, os lados $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são congruentes, uma vez que são os raios na circunferência de centro O. Portanto, este triângulo é isósceles e possui também dois ângulos congruentes. Como a soma dos ângulos do triângulo é igual a 180°, para determinar o ângulo O (que é o ângulo central da circunferência), fazemos:

$$40^\circ + 40^\circ + m\left(\hat{O}\right) = 180^\circ$$

$$\hat{O} = 100^\circ$$

O arco CB é correspondente ao ângulo central O, ou seja, $m\left(\overset{\frown}{CB}\right) = 100^\circ$ O arco ABC é o resultado da soma entre os arcos

AB e BC, ou seja, $m\left(CB\right)=m\left(AB\right)+m\left(BC\right)$. Do enunciado tem-se que $m\left(\widehat{AB}\right)=100°$. Com isso temos que $m\left(\widehat{AC}\right)=200°$, pois $m\left(\widehat{AC}\right)=100°+100° \quad \Rightarrow \quad m\left(\widehat{AC}\right)=200°$

O ângulo $\hat{D}$ é um ângulo inscrito cujo arco correspondente é o arco $\widehat{AC}$. A medida desse ângulo é dada pela metade do seu arco correspondente, ou seja, $m\left(\hat{D}\right)=\dfrac{m\left(\widehat{AC}\right)}{2} \quad \Rightarrow \quad m\left(\hat{D}\right)=\dfrac{200°}{2} \quad \Rightarrow \quad m\left(\hat{D}\right)=100°$. A partir disso, podemos determinar o valor de x, sabendo que, para que um quadrilátero convexo seja inscritível em uma circunferência, os seus ângulos opostos devem ser suplementares. Com isso, fazemos:

$$m\left(\hat{D}\right)+m\left(\hat{B}\right)=180°$$

$$100°+40°+x=180°$$

$$x=40°$$

Então, você foi capax de apresentar a solução completa no vídeo (com o valor de x igual a quarenta graus) e atendeu de forma satisfatória ao pedido do seguidor do canal.

Faça valer a pena

1. Ao abordarmos o conteúdo de circunferência, nos deparamos com alguns conceitos, como os ângulos e os arcos. Chamamos de ângulo central da circunferência aquele cujo vértice está localizado em seu centro. Esse ângulo e o seu arco correspondente possuem a mesma medida. Temos também outro ângulo, que possui o vértice em um ponto da circunferência, com os lados secantes a ela, denominado ângulo inscrito.

A medida do ângulo inscrito está relacionada a seu arco correspondente. Sendo assim, a respeito desse ângulo, é correto afirmar que:

a) A sua medida é igual à medida do arco correspondente.

b) A sua medida é a metade da medida do arco correspondente.

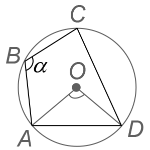
c) A sua medida é o dobro da medida do ângulo central.

d) Os seus lados sempre serão tangentes ao centro da circunferência.

e) É sempre maior que 180 graus.

2. Na Figura 3.30, o ponto *B*, além de vértice do quadrilátero inscritível *ABCD*, também é o vértice ângulo (B) inscrito na circunferência de centro O. A medida de B é dada pela metade da medida do seu arco correspondente, o arco AC, ou seja, $m(\alpha)=\dfrac{m(AC)}{2}$. A medida do arco AC pode ser determinada efetuando a soma das medidas dos arcos AD e DC

Figura 3.30 | Ângulo inscrito B.



Fonte: elaborada pelo autor.

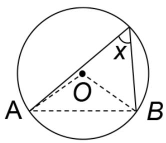
Determine a medida do ângulo inscrito $\left(m(B)=\alpha\right)$, sabendo que o arco DC mede 102° e que o ângulo central O mede 108°.

a) 100°.
c) 105°.
e) 118°.
b) 103°.
d) 115°.

3. Na Figura 3.31, temos:

- Uma circunferência de centro *O*.
- Os segmentos de reta $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ que são raios da circunferência e que formam o seu ângulo central O.
- O triângulo OAB formado pelos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ da circunferência e pelo segmento de reta $\overline{AB}$.
- O ângulo O A *B* do triângulo *OAB*, cuja medida é igual a 40°.
- Um ângulo inscrito *x*.

Figura 3.31 | Ângulo inscrito *x*



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que contém o valor correto do ângulo inscrito x, de acordo com as informações fornecidas a respeito da Figura 3.31.

a) 50°.
c) 55°.
e) 65°.
b) 52°.
d) 62°.

Seção 3.3

Teorema de Tales e teorema de Pitágoras

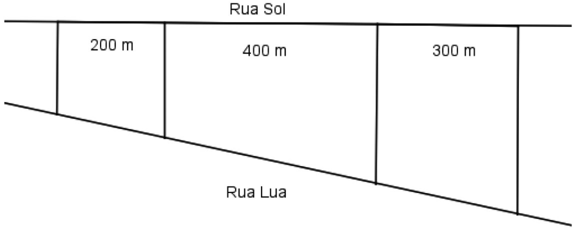
Diálogo aberto

Nas seções anteriores, você estudou os elementos do círculo e da circunferência e desenvolveu situações de aprendizagens envolvendo as posições relativas entre reta e circunferência e também entre duas circunferências. Além de estudarmos os arcos, os quadriláteros circunscritíveis e inscritíveis, foi possível, também, aplicar na resolução de problemas os conceitos relativos ao ângulo inscrito. Nesta seção, a sua aprendizagem contemplará o teorema de Tales, com o qual você trabalhará os segmentos de retas proporcionais. Contemplará, também, o teorema de Pitágoras, com o qual você poderá resolver situações envolvendo comprimentos e aturas, ao aplicar os conceitos de diagonal do quadrado e altura do triângulo equilátero. E, ainda, determinar algumas distâncias inacessíveis através da semelhança de triângulos.

Lembramos, então, que nesta unidade nos colocamos no lugar de um jovem que foi contratado para ser monitor de uma escola muito tradicional em sua cidade, na qual, dando continuidade a suas atribuições, resolverá o terceiro exercício da lista de exercícios de um professor, que é o seguinte:

Uma construtora adquiriu quatro terrenos para construir pontos comerciais e revender. Três desses terrenos são adjacentes e possuem frente para duas ruas, conforme a figura:

Figura 3.32 | Pessoas em ambientes diversos realizando atividades diversas



Fonte: elaborada pelo autor.

O outro terreno, distante dos três indicados anteriormente, possui o formato de um triângulo retângulo, cujos lados (catetos) medem 60 e 80 metros.

A empresa precisará cercar os quatro terrenos e, para isso, será necessário obter algumas medidas. No primeiro caso, qual seria a medida de frente de cada terreno para a rua Lua, sabendo que a soma das medidas frontais dos terrenos é de 1800 metros? Se, para o segundo caso, a construtora montar uma cerca com arame, qual seria a quantidade de material utilizado, considerando uma cerca com quatro fios?

Agregue os seus conhecimentos teóricos, adquiridos na graduação, com a experiência prática obtida nas suas atribuições como monitor de dúvidas e finalize o seu plano de aula, destinado a contemplar todas as possíveis solicitações dos alunos.

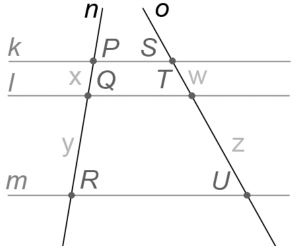
Não pode faltar

Nesta parte dos seus estudos, você irá se deparar com termos que já devem ter se tornado corriqueiros, como as retas paralelas e transversais, os ângulos, os triângulos, as diagonais, os segmentos de reta etc. Com base nesse repertório de conteúdo, estabeleceremos, a partir de agora, relações importantes.

Teorema de Tales

O teorema de Tales, cuja demonstração é atribuída ao matemático Tales de Mileto (cerca de 600 a.C.), trata de segmentos determinados por feixes de retas paralelas interceptadas por retas transversais. Para compreender esse teorema e suas implicações, considere a Figura 3.33, na qual as retas paralelas entre si *k*, *l* e *m* ($k // l // m$) são interceptadas pelas retas transversais n e o, determinando os segmentos de reta $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{ST}$ e $\overline{TU}$.

Figura 3.33 | Retas paralelas *k*, *l* e *m*, interceptadas pelas retas transversais *n* e *o*



Fonte: elaborada pelo autor.

Primeiramente, diremos que os pontos P e S correspondem (ou são correspondentes), o que também ocorre com o par de pontos Q e T e com o par R e U. Como segundo passo, podemos definir agora segmentos correspondentes. Acompanhe:

Dado um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais, definimos como **correspondentes**, sendo um em cada transversal, aqueles cujas extremidades são pontos correspondentes.

De acordo com a Figura 3.33 e com a definição anterior, os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{ST}$ são correspondentes, assim como os segmentos $\overline{QR}$ e $\overline{TU}$ e os segmentos $\overline{PR}$ e $\overline{SU}$. Mas atenção: os segmentos de reta $\overline{PQ}$ e $\overline{TU}$, por exemplo, não são correspondentes.

Para simplificar a escrita, considere x, y, w e z, as medidas dos segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{ST}$ e $\overline{TU}$, respectivamente, e veja o que esabelece o teorema de Tales:

Assimile

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos *quaisquer* de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 185).

Para exemplificar, considere novamente a Figura 3.33. A partir do teorema, podemos estabelecer as seguintes relações:

$\frac{x}{y}=\frac{w}{z}$	$\frac{x}{x+y}=\frac{w}{w+z}$	$\frac{y}{x+y}=\frac{z}{w+z}$

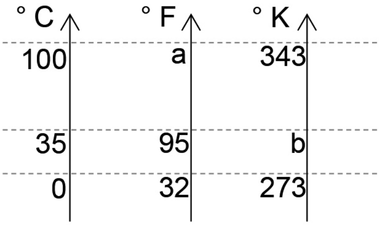
Dolce e Pompeo (2013, p. 185) afirmam ainda que "a razão entre segmentos correspondentes é constante", isto é:

$\frac{x}{y}=\frac{w}{z}=k$, em que k é chamada constante de proporcionalidade.

A demonstração desse teorema (Tales) pode ser verificada nas páginas 185 e 186, da obra de Dolce e Pompeo (2013), da qual a citação anterior foi extraída.

A escala utilizada para conversão de temperaturas (Figura 3.34) é um exemplo de aplicação do teorema de Tales, em que cada escala é uma transversal e as linhas tracejadas representam um feixe de retas paralelas.

Figura 3.34 | Conversão de temperaturas



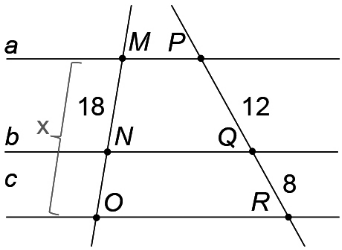
Fonte: elaborada pelo autor.

Outras escalas de conversões de unidades também utilizam o mesmo princípio: metros para centímetros, reais para dólares, horas para minutos etc.

Exemplificando

Sendo a, b e c retas paralelas entre si, determine o valor de x. Considere todas as medidas em centímetros e omita a unidade de medida nos cálculos.

Figura 3.35 | Feixe de retas paralelas interceptado por retas transversais



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Da figura temos as seguintes informações:

$m(x) = m(\overline{MN}) + m(\overline{NO})$; $m(\overline{MN}) = 18$; $m(\overline{NO}) = y$;

$m(\overline{PQ}) = 12$ e $m(\overline{QR}) = 8$

Pelo teorema de Tales, podemos escrever $\dfrac{m(\overline{MN})}{m(\overline{NO})} = \dfrac{m(\overline{PQ})}{m(\overline{QR})}$ e efetuar:

$$\frac{18}{y}=\frac{12}{8} \quad \Rightarrow \quad 12\cdot y=144 \quad \Rightarrow \quad y=12$$

Como $m(x)=m(\overline{MN})+m(\overline{NO})$ e $m(\overline{NO})=y$, fazemos:

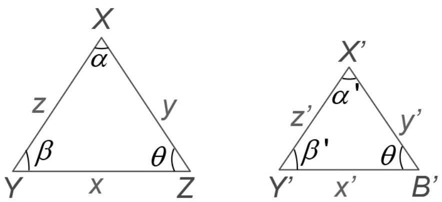
$$m(x)=18+12 \quad \Rightarrow \quad m(x)=30$$

Desta forma, concluímos que a medida de *x* ou do segmento de reta $\overline{MO}$ é igual a 30.

Semelhança de triângulos

Formalmente, Dolce e Pompeo (2013, p. 198, grifo do autor), definem que "dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos *ordenadamente congruentes* e os lados *homólogos* proporcionais".

Figura 3.36| Semelhança de triângulos



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 3.36, os triângulos *XYZ* e *X'Y'Z'* são semelhantes (e fazemos essa notação por: $\Delta XYZ - \Delta X'Y'Z'$); possuem dois lados homólogos (congruentes), em que cada um pertence a um triângulo e ambos são opostos a ângulos congruentes. E assim, de acordo com a Figura 3.36, temos

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{X}\equiv\widehat{X'}\\ \widehat{Y}\equiv\widehat{Y'}\\ \widehat{Z}\equiv\widehat{Z'}\end{array}\right. \quad \text{e} \quad \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta XYZ - \Delta X'Y'Z'$$

A razão k entre os lados correspondentes $\left(\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=k\right)$, na Figura 3.36, em semelhanças de triângulos, é chamada **razão de semelhança**.

Reflita

Qual é a característica de dois triângulos que possuem uma razão de semelhança k = 1?

Podemos verificar a semelhança entre dois triângulos através de três casos. Em um deles, "se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 204)

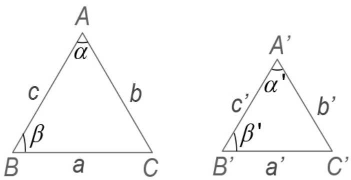
Observando o ΔABC e o $\Delta A'B'C'$, Figura 3.37, temos que os ângulos α e α' são congruentes, assim como também existe uma congruência entre os ângulos β e β'. No triângulo ABC, atribuindo θ como medida do outro ângulo, e lembrando de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos que a medida de θ é um valor que somado a α e β resulta 180°, ou seja, $\alpha + \beta + \theta = 180°$.

Analogamente, no $\Delta A'B'C'$, podemos atribuir θ' como medida do ângulo no vértice C', e também concluir que, somando o seu valor aos ângulos α' e β', teremos 180°, ou seja, $\alpha' + \beta' + \theta' = 180°$. Além disso, temos que os lados correspondentes (homólogos) são proporcionais, ou seja, $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{a}{a'}$.

Os demais casos podem ser verificados na página 206, da obra de Dolce e Pompeo (2013).

Pelo teorema fundamental de semelhança de triângulos, que é uma aplicação do Teorema de Tales, "se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 200).

Figura 3.37 | Triângulos semelhantes *ABC A'B'C'*

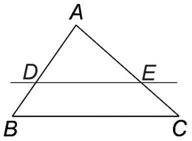


Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Na Figura 3.38, a reta suporte que determina o segmento de reta $\overline{DE}$ é paralela à reta suporte que determina o segmento de reta $\overline{BC}$, então $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$.

Figura 3.38| Aplicação teorema de Tales

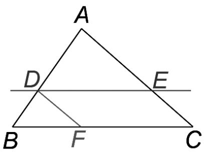


Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo teorema de Tales, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. E, reescrevendo a igualdade, temos $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ (dois pares de lados proporcionais).

Para determinarmos a proporcionalidade entre os lados $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ traçamos um segmento de reta $\overline{DF}$ (Figura 3.39) paralelo ao lado (segmento de reta) $\overline{AC}$, ou seja, $\overline{DF} \,//\, \overline{AC}$. De modo a obter o paralelogramo *DEFC*, no qual os lados $\overline{DE} = \overline{FC}$ e $\overline{DF} = \overline{EC}$

Figura 3.39 | Triângulos semelhantes *ABC* e *ADE*

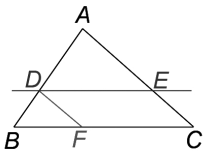


Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo teorema de Tales, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. E, reescrevendo a igualdade, temos $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ (dois pares de lados proporcionais).

Para determinarmos a proporcionalidade entre os lados $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ traçamos um segmento de reta $\overline{DF}$ (Figura 3.39) paralelo ao lado (segmento de reta) $\overline{AC}$, ou seja, $\overline{DF} \,//\, \overline{AC}$. De modo a obter o paralelogramo *DEFC*, no qual os lados $\overline{DE} = \overline{FC}$ e $\overline{DF} = \overline{EC}$

Figura 3.39 | Triângulos semelhantes *ABC* e *ADE*



Fonte: elaborada pelo autor.

Novamente pelo teorema de Tales, temos $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CF}}$. E, reescrevendo a igualdade, fica $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}$.

Como $\overline{CF} = \overline{DE}$, em $\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}$, podemos escrever $\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$.

A partir disso e com a igualdade $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$, concluímos que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$.

Relações métricas no triângulo retângulo

Como já é do seu conhecimento, o triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo de 90°. Dele, podemos extrair algumas relações métricas, que podem demonstrar um dos teoremas mais conhecidos da Geometria Plana, o teorema de Pitágoras. Na Figura 3.40, destacamos alguns dos seus elementos:

a: é a hipotenusa (sempre será oposta ao ângulo de 90°).

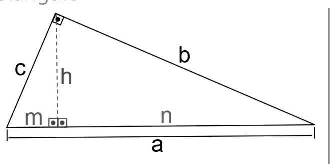
b e *c*: são os catetos.

h: a altura do triângulo relativa à hipotenusa.

m: é a projeção do cateto c sobre a hipotenusa.

n: é a projeção do cateto b sobre a hipotenusa.

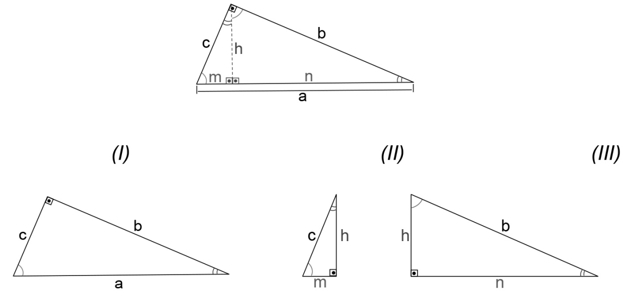
Figura 3.40 | Triângulo retângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

É possível observar também que a altura h é perpendicular à hipotenusa a e divide o triângulo em outros dois triângulos menores, porém semelhantes. A Figura 3.41 ilustra quatro triângulos retângulos, em que um deles é o da Figura 3.40, diferente apenas por ter seus ângulos agudos destacados e outros três triângulos retângulos separados, que poderão facilitar a visualização de tal semelhança.

Figura 3.41 | Triângulos semelhantes



Fonte: elaborada pelo autor.

Os ângulos agudos destacados nos triângulos retângulos (Figura 3.41) possuem medidas com valores desconhecidos, entretanto, a soma entre elas resultará sempre em 90°, uma vez que, em triângulos retângulos, os ângulos agudos são complementares. Com isso, o entendimento sobre tais relações métricas fica mais evidente.

Entre os triângulos I e II:

- **1ª relação métrica**: a hipotenusa a está para a hipotenusa c, assim como o cateto b está para o cateto h (repare que, para os catetos, estamos observando a localização de acordo com seus ângulos adjacentes). Assim, temos: $$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c.$$
- **2ª relação métrica**: a hipotenusa a está para a hipotenusa c assim como o cateto *c* está para o cateto *m*, ou seja, $$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m.$$

Entre os triângulos I e III:

- **3ª relação métrica**: a hipotenusa a está para a hipotenusa *b* assim como o cateto *b* está para o cateto *n*, ou seja, $$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n$$

Entre os triângulos II e III:

- **4ª relação métrica**: o cateto *h* está para o cateto *n* assim como o cateto *m* está para o cateto *h*, ou seja, $$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n.$$

Faça você mesmo

Ainda sobre as relações métricas, observe a Figura 3.41 e verifique se é possível obter mais algumas.

Teorema de Pitágoras

É possível afirmar que este teorema é o mais famoso da Geometria Plana. Dolce e Pompeo (2013, p. 224) o apresentam da seguinte maneira: em um triângulo retângulo "a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa", ou seja, dado um triângulo retângulo com as medidas dos seus lados dadas por *a*, *b* e *c*, com a sendo a sua hipotenusa e b e c os seus catetos, temos $c^2 + b^2 = a^2$.

Dentre as muitas maneiras de demonstrá-lo, uma maneira bem simples faz uso das relações métricas $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$. Efetuando a soma delas, membro a membro, segue que:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m \qquad \Rightarrow \qquad b^2 + c^2 = a \cdot (n + m).$$

Da Figura 3.40, temos que $a = n + m$. Substituindo essa igualdade em $b^2 + c^2 = a \cdot \underbrace{(n + m)}_{a}$, concluímos que $c^2 + b^2 = a^2$.

A Figura 3.42 ilustra um exemplo de aplicação do teorema de Pitágoras. Nela, podemos ver um triângulo cujos lados *a*, *b* e *c* são a sua hipotenusa e os seus catetos, medindo, respectivamente, 5, 3 e 4. Utilizando os respectivos valores na equação $c^2 + b^2 = a^2$, podemos fazer a verificação do teorema. Vejamos:

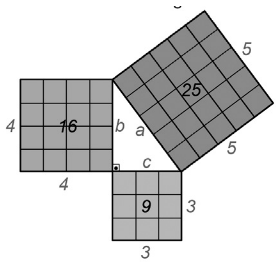
$$c^2 + b^2 = a^2$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25$$

Figura 3.42 | Representação geométrica do teorema de Pitágoras



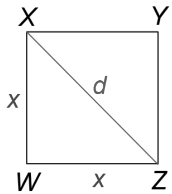
Fonte: elaborada pelo autor.

Diagonal do quadrado e altura do triângulo equilátero

Através do teorema de Pitágoras, podemos calcular a **diagonal do quadrado**. No quadrado *WXYZ* (Figura 3.43), temos que *d* é a sua diagonal. Sendo *x* o seu lado, fazemos:

$$d^2 = x^2 + x^2 \qquad \Rightarrow \qquad d^2 = 2x^2 \qquad \Rightarrow \qquad d = x\sqrt{2}$$

Figura 3.43 | Diagonal do quadrado

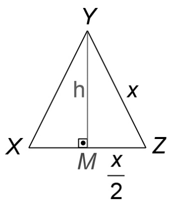


Fonte: elaborada pelo autor.

Para um triângulo equilátero *XYZ*, cujos lados medem *x*, podemos determinar a sua **altura** também através do teorema de Pitágoras. Na Figura 3.44, a altura *h* do triângulo, que é perpendicular ao lado $\overline{XZ}$, também é sua mediana. Desta forma, temos que:

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Figura 3.44 | Altura do triângulo equilátero



Fonte: elaborada pelo autor.

Seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis

Denominamos ângulos notáveis aqueles mais comuns no dia a dia, como os ângulos de 30°, 45° ou 60°. Esses ângulos têm os seus senos, cossenos e tangentes determinados por meio de razões entre catetos e hipotenusas.

No ΔABC (Figura 3.45), determinamos o seno do ângulo β pela razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa, ou seja,

$$\text{seno } \beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \Rightarrow \qquad sen\beta = \frac{b}{c}.$$

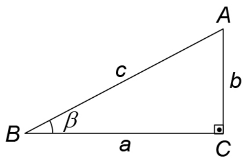
O cosseno de β é determinado pela razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa, ou seja,

$$\text{cosseno } \beta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

Por fim, a tangente de β é determinada pela razão entre os catetos oposto e adjacente ao ângulo, isto é,

$$\text{tangente } \beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{a} \qquad \Rightarrow \qquad tg\beta = \frac{b}{a}.$$

Figura 3.45 | Triângulo retângulo *ABC*



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinarmos o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 45°, utilizaremos a Figura 3.46, na qual está representado um quadrado de lado *x*:

<u>Seno</u>

$$\text{seno } 45° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \qquad \Rightarrow \qquad sen\ 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow$$

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \qquad \Rightarrow \qquad sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cosseno

$$\text{cosseno } 45^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} \Rightarrow$$

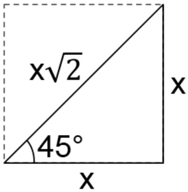
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tangente

$$\text{tangente } 45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \Rightarrow tg\ 45^\circ = \frac{x}{x} \Rightarrow$$

$$tg\ 45^\circ = 1$$

Figura 3.46 | Seno, cosseno e tangente de 45°

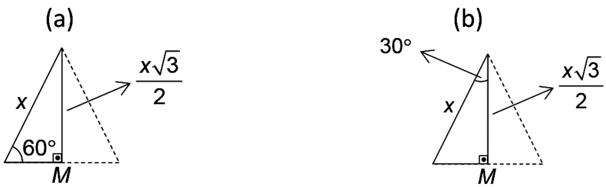


Fonte: elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

Determine o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30° e 60°. Dica: utilize triângulos equiláteros, conforme a Figura 3.47, com *M* sendo o ponto médio da base em ambos os casos. Não se esqueça de que em em um triângulo equilátero, a altura relativa a um dos lados é também mediana do mesmo lado e bissetriz do ângulo oposto a esse lado.

Figura 3.47 | Triângulos equiláteros com destaque para os ângulos de 30° e 60°



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Aprenda mais sobre os conteúdos estudados nesta seção, nos materiais indicados a seguir:

MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2017.

PINHO, J. L. R. ; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. **Geometria I**. Florianópolis: EAD/UFSC/CFM, 2010. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/MTM_Geometria_I_WEB.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2017.

Deixamos, também, como uma rica sugestão de leitura, um livro raro do período da Monarquia que retrata a Geometria Plana e está digitalizado em domínio público:

LEGENDRE, A. M. **Elementos de Geometria**. Rio de Janeiro: Impressão Régia, 1809. Disponível em: <http://bd.camara.leg.br/bd/handle/bdcamara/22882>. Acesso em: 14 mar. 2017.

Sem medo de errar

Lembre-se de que, na presente unidade, você se colocou no lugar do monitor de um tradicional colégio de sua cidade e está resolvendo exercícios da lista do professor de Matemática. Você deseja elaborar o seu plano de aula para desenvolver da melhor forma possível as suas práticas ao tirar as dúvidas dos estudantes. O problema a ser resolvido nesta ocasião procura determinar as medidas de dois terrenos adquiridos por uma construtora e o exercício propriamente dito está dividido em duas etapas que podem ser resolvidas da seguinte maneira:

Na primeira situação, chamando as frentes dos terrenos de 200 m, 400 m e 300 m, respectivamente, de *x*, *y* e *z*, pelo teorema de Tales, fazemos $\frac{200}{x} = \frac{400}{y} = \frac{300}{z}$. Também pelo teorema de Tales, temos que $\frac{200+400+300}{1800} = \frac{900}{1800} = \frac{1}{2}$. A partir desse resultado, temos:

$$\frac{200}{x} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = 400$$

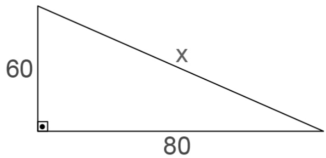
$$\frac{400}{y} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y = 800$$

$$\frac{300}{z} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad z = 600$$

Concluímos, então, que as frentes dos terrenos para a rua Lua medem 400 metros, 800 metros e 600 metros, respectivamente.

Na segunda situação, a Figura 3.48 representa o esboço do terreno em formato triangular com medidas dos lados (catetos) de 60 e 80 metros.

Figura 3.48 | Terreno em formato triangular



Fonte: elaborada pelo autor.

O lado oposto ao ângulo reto (hipotenusa) pode ser chamado de *x* e, pelo teorema de Pitágoras, fazemos:

$$x^2 = 60^2 + 80^2$$

$$x^2 = 3600 + 6400$$

$$x^2 = 10000$$

$$x = \sqrt{10000}$$

$$x = 100 \text{ metros}.$$

Para saber a quantidade de arame para cercar o terreno, somam-se as medidas dos lados $(60 + 80 + 100 = 240)$ e multiplica-se o resultado por quatro, que é a quantidade de fios $(240 \cdot 4 = 960)$. E, com isso, concluímos que serão necessários 960 metros de arame para cercar o terreno em formato de triângulo retângulo.

Com a resolução de todos os exercícios, você está pronto para construir seu plano de aula. As resoluções estão corretas e completas, mas, agora, você deve refletir: quais seriam as dúvidas mais comuns? Algum ponto da resolução apresenta maior dificuldade? Quais são os momentos mais importantes da resolução que devem ser destacados para a fixação dos conceitos teóricos mais importantes? Pense nisso!

Avançando na prática

Altura da árvore

Descrição da situação-problema

Você é professor de Matemática em um colégio e, em determinado final de semana, todos os professores que trabalham lá combinam um piquenique no parque com suas famílias. No decorrer do dia, um jovem com idade para estar cursando o ensino fundamental II olha para uma imensa árvore e, já sabendo que você é professor de Matemática, pergunta a você se seria possível saber a medida da altura da árvore. Como você esclareceria essa dúvida?

Use como dados:

Sua altura: 1,90 m.

Comprimento da sua sombra: aproximadamente 4,40 m.

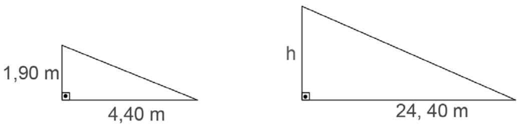
Altura da árvore: *h*.

Comprimento da sombra da árvore: aproximadamente 24,40 m.

Resolução da situação-problema

Os dados fornecidos podem facilmente resolver este exercício e esclarecer a dúvida apresentada pelo jovem, através do teorema de Tales e da Semelhança de Triângulos. Basta pensar que a sua altura é perpendicular à sua sombra projetada no solo. Analogamente, ocorre o mesmo com a árvore e com sua respectiva sombra. A Figura 3.49 esboça a situação e permite visualizar dois triângulos semelhantes.

Figura 3.49 | Semelhança de triângulos para determinar a altura da árvore



Fonte: elaborada pelo autor.

Vale lembrar que, em dois triângulos semelhantes, os lados homólogos são proporcionais. E, assim, pelo teorema de Tales, podemos fazer:

$$\frac{1{,}90}{h} = \frac{4{,}40}{24{,}40}$$

$$h \cdot 4{,}40 = 24{,}40 \cdot 1{,}90$$

$$h \quad 10{,}54$$

Desta forma, pode-se concluir que a altura da árvore é aproximadamente 10,54 m. E, através dos conceitos da Geometria Plana (teorema de Tales e Semelhança de Triângulos), você poderá sanar as dúvidas do jovem que cursa o ensino fundamental II, além de mostrar a ele a aplicação de tais conceitos.

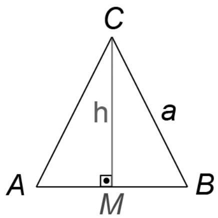
Faça valer a pena

1. Umas das aplicações do teorema de Pitágoras é a determinação da altura do triângulo equilátero. Observando a Figura 3.50, temos o ΔABC, cujos lados medem a. A altura h do triângulo, que é perpendicular ao lado $\overline{AB}$, possui uma de suas extremidades nesse lado. Essa extremidade também pode ser considerada o ponto médio do segmento (lado). E, assim, temos que $\overline{AM} = \frac{a}{2}$. A partir daí, podemos determinar a fórmula para encontrarmos a altura de qualquer triângulo equilátero. E, assim, fazemos:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right) = a^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = a^2 - \frac{a}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Figura 3.50 | Altura do triângulo equilátero pelo teorema de Pitágoras



Fonte: elaborada pelo autor.

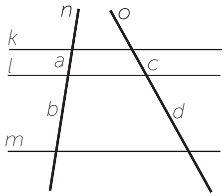
Supondo que, na Figura 3.50, a seja igual a 10 cm, podemos dizer que a altura do triângulo valerá:

a) $5\sqrt{3}\ cm$.
b) $3\sqrt{5}\ cm$.
c) $5\sqrt{15}\ cm$.
d) $3\sqrt{15}\ cm$.
e) $3\sqrt{75}\ cm$.

2. O teorema de Tales trata de segmentos proporcionais, determinados por feixes de retas paralelas entre si, interceptadas por retas transversais. Dolce e Pompeo (2013, p. 185) contemplam que "se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra".

De acordo com a Figura 3.51, dizemos que *a* está para *b*, assim como *c* esta para *d*, ou seja, $\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$.

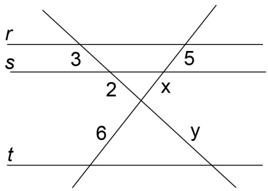
Figura 3.51 | Teorema de Tales



Fonte: elaborada pelo autor.

Determine os valores de *x* e *y* na Figura 3.52, sendo *r*, *s* e *t* retas paralelas.

Figura 3.52 | Determinando os valores de x e y através do teorema de Tales



Fonte: elaborada pelo autor.

a) 5 e 8.

b) $\frac{10}{3}$ e $\frac{18}{5}$.

c) $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{10}$.

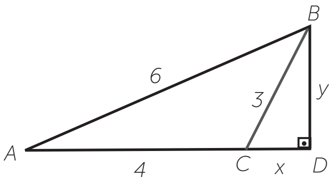
d) 7 e 9.

e) 6 e 13.

3. O teorema de Pitágoras é dito por muitos como o mais famoso da Geometria Plana. Dolce e Pompeo (2013, p. 224) enunciam que, em um triângulo retângulo, “a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”, ou seja, dado um triângulo com as medidas dos seus lados dadas por a, b e c, com a sendo a sua hipotenusa e b e c os seus catetos, temos $c^2+b^2=a^2$.

Assinale a alternativa correta, com os valores de *x* e *y*, conforme Figura 3.53.

Figura 3.53 | Determinando os valores de x e y pelo teorema de Pitágoras



Fonte: elaborada pelo autor.

a) 5 e 7.

b) $\frac{11}{8}$ e $\frac{3}{8}$.

c) $\frac{11}{8}$ e $\frac{\sqrt{455}}{8}$.

d) 5 e 9.

e) 6 e 5.

Referências

CARMO, J. **Circunferência e círculo**. Disponível em: <http://docente.ifrn.edu.br/joaocarmo/disciplinas/aulas/desenho-geometrico/circunferencia-e-circulo/view>. Acesso em: 11 mar. 2017.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LEGENDRE, A. M. **Elementos de Geometria**. Rio de Janeiro: Impressão Régia, 1809. Disponível em: <http://bd.camara.leg.br/bd/handle/bdcamara/22882>. Acesso em: 14 mar. 2017.

MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2017.

PINHO, J. L. R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. **Geometria I**. Florianópolis: EAD/UFSC/CFM, 2010. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/MTM_Geometria_I_WEB.pdf >. Acesso em: 15 mar. 2017.

Perímetro e área

Convite ao estudo

Chegamos na Unidade 4 da disciplina Geometria Plana. Lembre-se de que iniciamos nossos estudos com os elementos primitivos da Geometria: ponto, reta e plano, os quais possibilitaram definir e entender outros elementos, como ângulos, triângulos, quadriláteros e polígonos, de modo geral. Vimos também o círculo, a circunferência, seus elementos e os importantíssimos teoremas de Tales e Pitágoras.

Todos esses conhecimentos foram úteis para definir e para esclarecer nomenclaturas e resultados essenciais, já aplicados nas unidades precedentes e que continuarão sendo utilizados na Unidade 4. Se restaram dúvidas dos tópicos anteriores, não hesite em revisitá-los.

Com esse embasamento, nossa tarefa agora fica simplificada, sendo possível avançar para dois tópicos de ampla aplicação prática: **perímetro** e **área**. Tais temas são muito cobrados em vestibulares e concursos em geral e, por conta disso, são exaustivamente revisados em cursinhos preparatórios para esses tipos de testes, e também têm presença garantida em materiais didáticos para concursos nas prateleiras das mais diversas livrarias.

Pensando no contexto do parágrafo anterior, suporemos que você tenha sido contratado para o departamento de Matemática de uma editora especializada na publicação de materiais preparatórios para vestibulares. Para iniciar os trabalhos, o seu editor chefe lhe atribuiu duas tarefas: (1ª) pesquisar as provas dos vestibulares mais concorridos da região em que você está trabalhando e, a partir delas, selecionar questões de Geometria para a elaboração de gabaritos comentados; (2ª) tendo em vista que os subtemas "perímetro" e "área de figuras planas" são sempre muito presentes nessas provas, paralelamente à primeira tarefa, ele deseja que você prepare um "resumão" sobre o assunto.

Esse resumo, objeto da segunda tarefa, deverá ser dividido em três tópicos, sendo que o primeiro precisa tratar do perímetro de polígonos e do comprimento da circunferência, enquanto que o segundo abordará as áreas de polígonos e, por fim, o terceiro deverá tratar da área do círculo e suas partes. O produto final, o "resumão", deverá ficar visualmente agradável, sucinto, ser bem ilustrado, didático, conter as fórmulas de cálculo de perímetro e área de cada objeto geométrico. Além disso, cada tópico deve conter uma questão de vestibular com a resolução por meio das fórmulas incluídas por você no resumo. Essa questão você extrairá da pesquisa solicitada como primeira tarefa.

Antes de começar, você precisa entender bem dos assuntos perímetro e área para caprichar nesse projeto. Para isso, nesta unidade você encontrará a discussão necessária para a compreensão das fórmulas de cálculo e sua origem. Entendê-las e saber demonstrá-las fará de você um profissional capacitado para o desenvolvimento de um projeto como esse.

Seção 4.1

Comprimento da circunferência e perímetro

Diálogo aberto

Na Unidade 2 deste livro didático, estudamos os triângulos, os quadriláteros e os demais polígonos, em especial, os regulares. Já na Unidade 3, discutimos as circunferências e os arcos. Tendo visto todos esses temas, uma pergunta natural e absolutamente prática é: qual é o comprimento do contorno de cada uma dessas figuras? Como ele é calculado?

Essa é uma pergunta natural, pois diversos objetos do dia a dia, desde elementos decorativos e componentes mecânicos até casas e terrenos, possuem formatos aproximadamente planos e saber as medidas dos contornos é importante para diversas situações, como para a estimativa de custos em construções e reformas, para o dimensionamento de espaço ocupado, entre outros.

Para responder a essas perguntas, formalizaremos o conceito de perímetro (a medida do contorno) para os polígonos e para a circunferência. Para outras figuras planas, as ideias são as mesmas, mas a formalização depende de conceitos de cálculo diferencial e integral, então apenas mencionaremos.

No intuito de tornar seus estudos mais interessantes, relembre o contexto apresentado na abertura desta unidade, na qual estamos supondo que você é membro do departamento de Matemática de uma editora. Seu editor chefe solicitou que você elaborasse um "resumão" destinado a candidatos de vestibulares, sendo que o primeiro tópico deve conter fórmulas matemáticas para o cálculo do perímetro de polígonos, do comprimento da circunferência e dos arcos de circunferência. Além disso, é imprescindível tratar também da conversão das unidades de medidas de ângulo, grau e radiano. O seu resumo deve ser sucinto, ilustrado com figuras que auxiliem a compreensão das fórmulas e precisa conter uma questão de vestibular com gabarito e resolução, a qual deverá utilizar uma das fórmulas selecionadas por você.

Para auxiliá-lo nessa tarefa, na sequência, tratamos da dedução de várias das fórmulas de cálculo de perímetro. Tenha como objetivo entender todas as deduções e, durante a leitura desse material, anote trechos para compor seu "resumão". Boa leitura!

Não pode faltar

Como mencionado, nesta seção estudaremos o cálculo de perímetro de figuras planas, que nada mais é do que a medida do contorno dessas figuras. Para um triângulo, por exemplo, o seu perímetro seria a soma das medidas de seus três lados. Veja o tratamento mais rigoroso desse conceito na sequência.

Perímetro

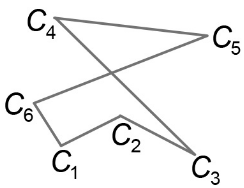
Considere um polígono $A_1A_2...A_n$ de *n* lados, *n* vértices e n ângulos. O perímetro desse polígono é um número real *p*, positivo (*p* > 0), definido como a soma das medidas de seus lados, ou seja: $p = m\left(\overline{A_1A_2}\right) + m\left(\overline{A_2A_3}\right) + ... + m\left(\overline{A_{n-1}A_n}\right) + m\left(\overline{A_nA_1}\right)$. A soma dos (*n* – 1) primeiros termos pode ser sintetizada pela notação de somatório da seguinte maneira:

$$p = \sum_{i=1}^{n-1} m\left(\overline{A_iA_{i+1}}\right) + m\left(\overline{A_nA_1}\right).$$

Para o polígono da Figura 4.1, por exemplo, temos o seguinte perímetro:

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^{5} m\left(\overline{C_iC_{i+1}}\right) + m\left(\overline{C_6C_1}\right) \\ &= m\left(\overline{C_1C_2}\right) + m\left(\overline{C_2C_3}\right) + m\left(\overline{C_3C_4}\right) + m\left(\overline{C_4C_5}\right) \\ &\quad + m\left(\overline{C_5C_6}\right) + m\left(\overline{C_6C_1}\right) \end{aligned}$$

Figura 4.1 | Polígono $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$

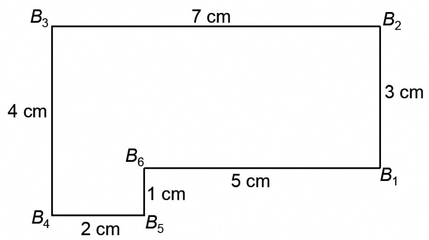


Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Determine o perímetro do polígono da Figura 4.2.

Figura 4.2 | Polígono $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

O polígono ilustrado é um hexágono, ou seja, seis vértices, seis lados e seis ângulos. Portanto, seu perímetro é:

$$p = \sum_{i=1}^{5} m\left(\overline{B_iB_{i+1}}\right) + m\left(\overline{B_6B_1}\right)$$

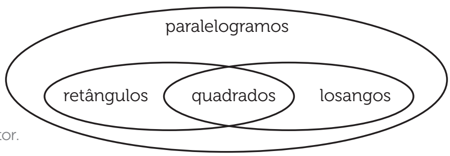
$$= m\left(\overline{B_1B_2}\right) + m\left(\overline{B_2B_3}\right) + m\left(\overline{B_3B_4}\right) + m\left(\overline{B_4B_5}\right) + m\left(\overline{B_5B_6}\right) + m\left(\overline{B_6B_1}\right)$$

$$= 3\text{ cm} + 7\text{ cm} + 4\text{ cm} + 2\text{ cm} + 1\text{ cm} + 5\text{ cm} = 22\text{ cm}$$

Como pode ser observado, o perímetro é a simples adição das medidas dos lados do polígono, que nesse caso resultou em 22 cm.

Como mencionamos na Unidade 2, alguns polígonos possuem propriedades interessantes, como é o caso dos paralelogramos, dos retângulos, dos losangos e dos quadrados. Lembre-se de que o paralelogramo é o quadrilátero convexo com lados opostos paralelos e, em decorrência de sua definição, ele possui seus lados opostos de mesma medida e ângulos internos opostos congruentes, o que torna o losango e o retângulo também paralelogramos. O quadrado, por sua vez, é um retângulo e um losango simultaneamente, consequentemente, também é um paralelogramo. Podemos resumir todo esse parágrafo com o diagrama da Figura 4.3.

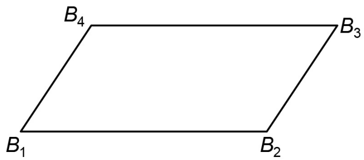
Figura 4.3 | Organização de alguns polígonos



Fonte: elaborada pelo autor.

Todos esses comentários buscam tornar evidente para você que todas as propriedades válidas para paralelogramos também são válidas para retângulos, quadrados e losangos, em especial no que se refere ao perímetro. Para compreender melhor, considere o paralelogramo da Figura 4.4.

Figura 4.4 | Paralelogramo $B_1B_2B_3B_4$



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabemos que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, logo $m\left(\overline{B_1B_2}\right)=m\left(\overline{B_3B_4}\right)$ e $m\left(\overline{B_1B_4}\right)=m\left(\overline{B_2B_3}\right)$. Aproveitaremos para denotar por L e ℓ as medidas dos lados "maior" e "menor" (lados consecutivos), ou seja, $m\left(\overline{B_1B_2}\right)=m\left(\overline{B_3B_4}\right)=L$ e $m\left(\overline{B_1B_4}\right)=m\left(\overline{B_2B_3}\right)=\ell$. Calculando o perímetro desse polígono, temos:

$$p=m\left(\overline{B_1B_2}\right)+m\left(\overline{B_2B_3}\right)+m\left(\overline{B_3B_4}\right)+m\left(\overline{B_4B_1}\right) = L+\ell+L+\ell = 2L+2\ell = 2(L+\ell)$$

Resumidamente, é válido o que se afirma na sequência:

Assimile

O perímetro de um paralelogramo é igual ao dobro da soma das medidas de dois lados consecutivos.

Lembrando do diagrama da Figura 4.3, esse resultado é válido para paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados. Comumente, em livros sobre o assunto, os lados consecutivos de um retângulo são denominados **base** (*b*) e **altura** (*h*). Nesse caso, a afirmação anterior poderia ser adaptada para o perímetro de um retângulo é igual ao dobro da soma da medida da base com a altura, ou seja, $p = 2(b + h)$.

Tratando-se de losangos, vale lembrar que são definidos como os quadriláteros convexos que possuem todos os lados congruentes, ou seja, todos os lados de medida ℓ. Com isso, podemos voltar a atenção para a expressão $p=2(L+\ell)$, recentemente obtida, e substituir L por ℓ quando o quadrilátero for um losango, obtendo:

$$p = 2(\ell + \ell) = 2 \cdot 2\ell = 4\ell .$$

Dessa forma, podemos afirmar:

O perímetro de um losango é igual a quatro vezes a medida de seu lado.

O resultado anterior é válido para os quadrados, como deixa claro o diagrama da Figura 4.3.

Faça você mesmo

Qual seria a expressão que calcula o perímetro (p) de um triangulo equilátero de lado ℓ ?

Perímetro de polígonos regulares

Vimos na Unidade 2 que polígonos regulares são aqueles que possuem todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes. Calcular o perímetro *p* de um polígono regular de *n* lados, conhecendo a medida ℓ de um de seus lados, é uma tarefa simples, veja:

$$p = \sum_{i=1}^{n-1} m\left(\overline{A_i A_{i+1}}\right) + m\left(\overline{A_n A_1}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \ell + \ell = (n-1)\ell + \ell = n\ell;$$

$$p = n\ell.$$

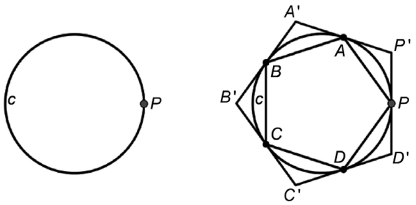
Portanto, o perímetro de um polígono regular de n lados de medida ℓ é igual a $n\ell$.

Uma pergunta interessante de ser feita é: há como relacionar outras medidas dos polígonos regulares com o perímetro? A resposta é sim e, para entender a resposta a essa pergunta, precisamos de alguns resultados e definições, apresentados na sequência.

Teorema 1 (DOLCE; POMPEU, 2013): dada uma circunferência *c* e um ponto *P* pertencente a ela, existem somente dois polígonos regulares de *n* lados, tais que um deles possui vértice *P* e é inscrito em *c* e outro é circunscrito em *c* e possui *P* como ponto médio de um de seus lados. O ponto *P* é o ponto de tangência do referido lado à circunferência *c*.

Em resumo, o teorema 1 garante, por exemplo, a partir da Figura 4.5 (a), a existência da Figura 4.5 (b), sendo os vértices do polígono inscrito pontos médios dos lados do polígono circunscrito.

Figura 4.5 | (a) Circunferência e (b) polígonos inscrito e circunscrito



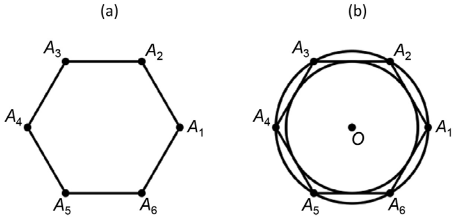
Fonte: elaborada pelo autor.

Teorema 2 (DOLCE; POMPEU, 2013): dado um polígono regular de n lados, são únicas e concêntricas (de mesmo centro) as circunferências inscrita e circunscrita ao referido polígono. A circunferência inscrita passa pelos pontos médios dos lados do polígono e a circunferência circunscritatambém pelos vértices dele.

Em síntese, o teorema 2 garante, a partir da Figura 4.6 (a), a existência da Figura 4.6 (b) qualquer que seja o polígono regular em questão.

O centro das circunferências na Figura 4.6 (b) será tomado como sendo o centro do polígono.

Figura 4.6 | (a) Polígono e (b) circunferência inscrita e circunscrita



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

O **centro de um polígono regular** será o mesmo que o da circunferência inscrita ou da circunscrita ao polígono.

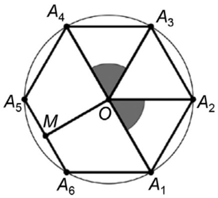
A partir do centro de um polígono regular, podemos definir dois elementos importantes, o apótema e o ângulo cêntrico. Definimos **apótema** de um polígono regular como o segmento de reta que tem uma extremidade no centro do polígono e outra no ponto médio de um de seus lados. O apótema é o raio da circunferência inscrita no polígono. Já o **ângulo cêntrico** de um polígono regular

$A_1A_2A_3...A_{i-1}A_iA_{i+1}...A_{n-1}A_n$ de centro O é qualquer ângulo da forma $A_i\hat{O}A_{i+1}$ ou $A_n\hat{O}A_1$, ou seja, é qualquer ângulo de vértice O que tem lados passando por dois vértices consecutivos do polígono. Veja na Figura 4.7 um hexágono regular com dois de seus ângulos cêntricos e um de seus apótemas representados.

A partir do que você aprendeu na Unidade 3, poderá perceber que os arcos A_1A_2 e A_3A_4 são congruentes, pois são determinados por cordas congruentes. Portanto, os ângulos cêntricos $A_1\hat{O}A_2$ e $A_3\hat{O}A_4$ possuem a mesma medida. De modo geral:

Os *n* ângulos cêntricos de um polígono regular de *n* lados são congruentes, sendo que cada um mede $\frac{360°}{n}$.

Figura 4.7 | Hexágono regular, ângulos cêntricos e apótema



Fonte: elaborada pelo autor.

A medida α de cada ângulo cêntrico é facilmente obtida efetuando a soma de todos os ângulos cêntricos do polígono:

$$m\left(A_1\hat{O}A_2\right)+m\left(A_2\hat{O}A_3\right)+...+m\left(A_{n-1}\hat{O}A_n\right)+m\left(A_n\hat{O}A_1\right)=360° \ ;$$

$$\underbrace{\alpha+\alpha+...+\alpha+\alpha}_{n \text{ vezes}}=360° \quad \Rightarrow \quad n\alpha=360° \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{360°}{n} \ .$$

Note que o triângulo A_6OA_5 é isósceles de base $\overline{A_5A_6}$, cujo apótema do polígono da Figura 4.7 é sua altura relativa à base. Para facilitar o raciocínio, veja na Figura 4.8 o triângulo A_6OA_5 destacado.

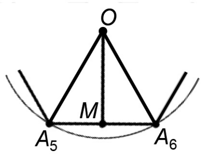
Lembre-se de que estudamos que em um triângulo isósceles a altura é também bissetriz e mediana. Logo, considerando α o ângulo cêntrico, a o apótema e ℓ a medida do lado $\overline{A_5A_6}$, temos:

$$\overline{A_5M} \equiv \overline{MA_6} \quad \Rightarrow \quad m\left(\overline{A_5M}\right) = m\left(\overline{A_6M}\right) = \frac{\ell}{2};$$

$$A_5\hat{O}M \equiv M\hat{O}A_6 \quad \Rightarrow \quad m\left(A_5\hat{O}M\right) = m\left(M\hat{O}A_6\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Note que o triângulo A_6OA_5 é isósceles de base $\overline{A_5A_6}$, cujo apótema do polígono da Figura 4.7 é sua altura relativa à base. Para facilitar o raciocínio, veja na Figura 4.8 o triângulo A_6OA_5 destacado.

Figura 4.8 | Triângulo A_6OA_5



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se de que estudamos que em um triângulo isósceles a altura é também bissetriz e mediana. Logo, considerando α o ângulo cêntrico, a o apótema e ℓ a medida do lado $\overline{A_5A_6}$, temos:

$$\overline{A_5M} \equiv \overline{MA_6} \quad \Rightarrow \quad m\left(\overline{A_5M}\right) = m\left(\overline{A_6M}\right) = \frac{\ell}{2};$$

$$A_5\hat{O}M \equiv M\hat{O}A_6 \quad \Rightarrow \quad m\left(A_5\hat{O}M\right) = m\left(M\hat{O}A_6\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Observando o triângulo MA_6O, o lado $\overline{MA_6}$ é o cateto oposto ao ângulo $M\hat{O}A_6$ e $\overline{OM}$ é o cateto adjacente. Assim:

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{m(\overline{MA_6})}{m(\overline{OM})} = \frac{\ell/2}{a} = \frac{\ell}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\ell}{2a} \quad \Rightarrow \quad \ell = 2a \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Lembrando de que temos a expressão $\frac{360°}{n}$ para o ângulo cêntrico (no caso do hexágono, n = 6), obtemos:

$$\ell \;=\; 2a \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \;=\; 2a \cdot \tan\left(\frac{360°/n}{2}\right) \;=\; 2a \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Sintetizando, para o hexágono da Figura 4.7, de lado ℓ e apótema a, segue que:

$$\ell = 2a \cdot \tan(30°) = 2a \cdot \tan(30°) = 2a\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Veja que a expressão anterior relaciona o apótema ao lado do hexágono regular. Como o perímetro do hexágono é $p = n\ell = 6\ell$, conclui-se o que segue:

$$p = 6\ell = 6 \cdot 2a\frac{\sqrt{3}}{3} = 4a\sqrt{3}.$$

Essa fórmula é específica para o nosso hexágono regular de lado ℓ, contudo, para o caso geral, temos o que se afirma a seguir.

Assimile

Dado um polígono regular de lado ℓ, apótema a e perímetro p, temos:

I. $\ell = 2a \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$; II. $p = n \cdot 2a \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$.

Não nos ocuparemos em demonstrar o caso geral, pois ele pode ser deduzido a partir do exemplo do hexágono com leves adaptações. Sugerimos que você reescreva os passos adaptando para o caso geral.

Reflita

Relembre: (1) a relação existente entre o número de diagonais de um polígono regular com o número de lados; (2) a relação entre a soma dos ângulos internos e o número de lados de um polígono regular.

Qual seria uma expressão que relaciona o número d de diagonais e a medida a do apótema com a medida ℓ do lado de um polígono regular? E a expressão que relaciona a soma S dos ângulos internos e a medida a do apótema com o perímetro p?

Ainda considerando o triângulo MA_6O da Figura 4.7 e adotando r como raio da circunferência circunscrita ao hexágono, temos:

$$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{m\left(\overline{MA_6}\right)}{m\left(\overline{OA_6}\right)} = \frac{\ell/2}{r} = \frac{\ell}{2r};$$

$$sen\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\ell}{2r} \Rightarrow \ell = 2r \cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2r \cdot sen\left(\frac{360°/n}{2}\right) = 2r \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right);$$

$$p = n\ell \Rightarrow p = n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right).$$

Assim, para o caso geral, temos:

Dado um polígono regular de n lados inscrito em um circunferência de raio r, seu perímetro será: $p = n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)$.

Esse resultado é muito importante e nos será muito útil no próximo tópico desta seção.

Exemplificando

Qual seria o perímetro de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio igual a 1 cm?

Resolução: o quadrado é um polígono regular de quatro lados. Logo, é válida a fórmula $p = n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)$ para o cálculo do perímetro p, sendo n.= 4 e r = 1 cm. Temos:

$$p = n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right) = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot sen\left(\frac{180°}{4}\right) = 8 \cdot sen(45°) = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$
.

Concluímos então que o perímetro é de $4\sqrt{2}$ cm.

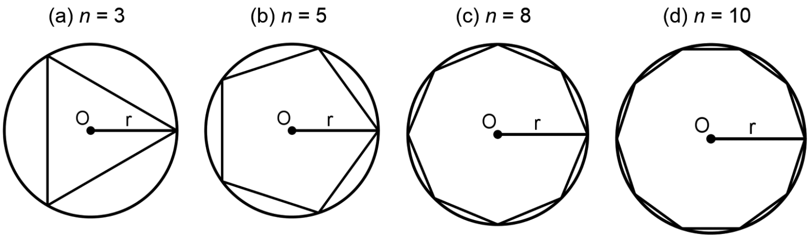
Comprimento da circunferência

Nesta seção, até o momento, falamos exclusivamente do perímetro dos polígonos, que são figuras planas formadas por segmentos de reta. No entanto, como é calculado o perímetro de figuras curvas como a circunferência? Quando se trata de figuras com essas características, recursos como limites e derivadas e integrais, estudados em cálculo diferencial e integral, são extremamente úteis, mas não essenciais. O astrônomo grego Eratóstenes, por exemplo, determinou a circunferência da Terra com enorme precisão, sendo que isso ocorreu há mais de 2 mil anos, época em que o cálculo ainda não havia sido sistematizado (sistematização essa que ocorreu somente no século XVII).

Apesar de haver argumentos puramente geométricos para calcular o comprimento da circunferência, optamos aqui por "pegar um caminho mais curto", utilizando conhecimentos já desenvolvidos nesta unidade e um pouco de cálculo.

Para tanto, primeiramente precisamos que você tenha claro que o nosso objetivo é determinar o comprimento *C* de uma circunferência de raio r. Além disso, é necessário lembrar-se de que o teorema 1 (apresentado nesta seção) garante a existência de um polígono regular de n lados inscrito nessa circunferência, sendo n um número natural qualquer maior ou igual a 3 ($n \geq 3$ para fazer sentido). Veja na Figura 4.9 a mesma circunferência de comprimento *C* e quatro opções de polígonos regulares inscritos nela.

Figura 4.9 | Circunferência e polígonos



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceptivelmente, o perímetro do polígono é sempre menor do que o comprimento da circunferência e, ainda, o perímetro p_n será crescente à medida que o número de lados do polígono inscrito aumentar. Podemos dizer aqui que o polígono "tende" à circunferência, conforme o número de lados aumenta. Nesse contexto, é de se esperar que o perímetro p_n do polígono se aproxime cada vez mais do comprimento C da circunferência conforme o número de lados crescer. Na linguagem do cálculo: $\lim_{n\to\infty} p_n = C$. No limite, quando n tende ao infinito, o perímetro tende ao comprimento da circunferência. Como já sabemos a fórmula para o perímetro p_n de um polígono regular de n lados, temos:

$$\lim_{n\to\circ} n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = C \quad \Rightarrow \quad C = 2r \cdot \lim_{n\to\circ} n \cdot sen\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

.

O limite $\lim_{n\to\infty} n \cdot sen\left(\dfrac{180°}{n}\right)$ é um clássico do cálculo diferencial, geralmente apresentado na forma $\pi \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} sen(x)$ utilizando-se a substituição $\dfrac{180°}{n} = x$, com

$180° = \pi$ rad, sendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$, resultando em:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right) = \pi \quad \Rightarrow \quad C = 2r \cdot \pi = 2\pi r .$$

Não nos deteremos aos detalhes do cálculo do limite, pois isso compete à disciplina de cálculo, mas ainda nesta seção discutiremos a igualdade $180° = \pi$ rad (guarde-a bem). O símbolo π representa um número irracional (número pi), cuja aproximação com seis casas decimais é 3,141593. Dado que o diâmetro da circunferência é $d = 2r$, alguns autores definem o número π como a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, ou seja, $\pi = \dfrac{C}{d}$. Essa relação é válida para qualquer circunferência.

Faça você mesmo

Obtenha aproximações com sete, nove e dez casas para π utilizando um computador e a aproximação $\pi \simeq n \cdot sen\left(\dfrac{180°}{n}\right)$.

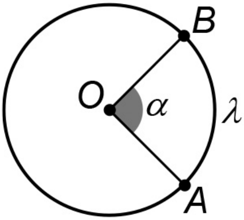
Dica:empregue valores suficientemente grandes para n Exemplo: $n > 10^6$).

Comprimento de um arco de circunferência

Tendo determinado o comprimento da circunferência, uma pergunta imediata é: como calcular o comprimento de um arco, ou seja, um trecho da circunferência limitado por dois pontos? Dolce e Pompeu (2013, p. 293) destacam que "o comprimento de um arco de circunferência (λ) é proporcional à sua medida (α)", lembrando de que a medida de um arco é idêntica à medida do ângulo central correspondente.

Para compreender o que afirmam os autores, considere a Figura 4.10.

Figura 4.10 | Circunferência de centro O com destaque para o arco AB



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com o afirmado, temos a seguinte relação de proporcionalidade:

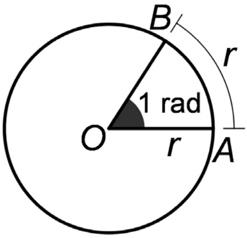
Comprimento		Ângulo
$2\pi r$	----------	360°
λ	----------	α

$$\Rightarrow 2\pi r \cdot \alpha = \lambda \cdot 360° \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360°} = \frac{\pi r \cdot \alpha}{180°}$$

Lembrando que anteriormente apresentamos a igualdade $180° = \pi$ **rad**, podemos escrever:

$$\lambda = \frac{\pi r \cdot \alpha}{\pi} = r\alpha \cdot$$

Figura 4.11 | Ângulo de medida 1 radiano



Fonte: elaborada pelo autor.

Tanto a relação $\lambda = \dfrac{\pi r \cdot \alpha}{180°}$ quanto a relação $\lambda = r\alpha$ fornece o comprimento λ do arco AB. Na primeira delas, α deve ser entendido como uma medida em graus, já na segunda, α deve ser entendido como uma medida em radianos. **O radiano (rad)** é a unidade de medida adotada pelo Sistema Internacional de Unidades (SI) para a medição de ângulos. A medida de 1 radiano (1 rad) é igual à medida de um ângulo central, cujo arco de circunferência delimitado por ele possui o mesmo comprimento que o raio (vide Figura 4.11).

Reflita

Qual é o comprimento do arco λ, de medida 1 rad, contido em uma circunferência de raio igual a 1 cm?

Conscientes de que o comprimento da circunferência é $C = 2\pi r$ e que metade dela, isto é, uma semicircunferência, possui comprimento $C/2 = \pi r$, temos:

<u>Ângulo α correspondente ao arco completo (comprimento da circunferência)</u>

$2\pi r$	----------	α
r	----------	1 rad

$\Rightarrow 2\pi r \cdot 1\text{ rad} = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{2\pi r \cdot 1\text{ rad}}{r} = 2\pi \text{ rad}$

<u>Ângulo α correspondente à semicircunferência</u>

πr	----------	α
r	----------	1 rad

$\Rightarrow \pi r \cdot 1\text{ rad} = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi r \cdot 1\text{ rad}}{r} = \pi \text{ rad}$

Finalmente vemos a igualdade mencionada anteriormente, $180° = 1\text{ rad}$, pois o ângulo correspondente à semicircunferência é, também, 180°.

Exemplificando

Qual é o equivalente em graus ao ângulo $\dfrac{\pi}{6}$ rad? E o equivalente em radianos ao ângulo de 45 graus?

Resolução:

Para converter $\dfrac{\pi}{6}$ rad para graus, utilizamos a relação de proporcionalidade seguinte:

Radianos		Graus
π rad	----------	180°
$\dfrac{\pi}{6}$ rad	----------	α

$\Rightarrow \quad \alpha\pi \text{ rad} = 180° \cdot \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$

Continuando: $\alpha = \dfrac{180°}{6} \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} = 30°$.

Agora, para converter 45 graus para radianos, efetuamos:

Radianos		Graus
π rad	----------	180°
α	----------	45°

$\Rightarrow 45° \cdot \pi \text{ rad} = \alpha \cdot 180°$

Continuando: $\alpha = \dfrac{45° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{\pi}{4} \text{ rad}$.

Portanto, $\dfrac{\pi}{6} \text{ rad} = 30°$ e $\dfrac{\pi}{4} \text{ rad} = 45°$.

Pesquise mais

Sugerimos a seguinte leitura para complementar os seus estudos desta seção:

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE, A. E. **Geometria plana e trigonometria. Curitiba**: InterSaberes, 2014. Disponível em: <http://anhanguera.bv3.digitalpages.com.br/users/publications/9788582129142/pages/47>. Acesso em: 14 abr. 2017.

Veja a partir da página 45 para consultar mais detalhes sobre medidas de ângulos.

Sem medo de errar

Vamos retomar o desafio proposto a você no início desta seção, isto é, o de preparar um "resumão" para candidatos ao vestibular tratando dos seguintes tópicos: perímetro de polígonos, comprimento de arcos de circunferência e conversão de medidas em graus para radianos e vice-versa. Esse desafio será dividido em duas partes nesta seção, sendo que a primeira delas, selecionar uma questão de vestibular envolvendo os conteúdos desta seção, deixaremos inteiramente sob sua responsabilidade. Para a segunda parte, daremos um auxílio a você.

O início da segunda parte desse desafio é a escolha de quais fórmulas de cálculo serão apresentadas e, de acordo com os critérios estabelecidos por seu editor chefe, o material deve ser sucinto, ilustrado e didático, por isso boas escolhas são essenciais. Há uma variedade de fórmulas e cabe a você a sensibilidade de optar pelas mais presentes nos vestibulares da região, afinal o objetivo é atender ao cliente, no caso, os candidatos aos vestibulares da correspondente região. Apesar das regionalidades, algumas fórmulas são de presença frequente nas resoluções de questões de vestibulares e, por isso, elencamos algumas:

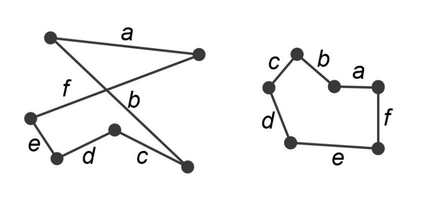
1ª. Obviamente, para calcular o perímetro de figuras planas, é imprescindível o entendimento do que é o perímetro, conceito que pretendemos que fique claro com a Figura 4.12 e com a fórmula que a acompanha.

Figura 4.12 | Fórmula para o perímetro de um polígono

Perímetro de polígono

Soma das medidas dos lados do polígono. Medida de seu contorno.

$$p = a + b + c + d + e + f$$



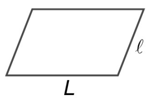
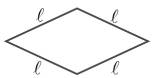
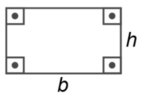
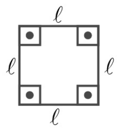
Fonte: elaborada pelo autor.

Obviamente essa fórmula está exemplificando o cálculo do perímetro de um polígono de seis lados. Cabe a você a decisão de especificar (como na Figura 4.12) ou generalizar, isto é, considerar um polígono de n lados, tal como fizemos no início desta seção. Seja qual for sua escolha, lembre-se de que o material deve ser didático e isso implica em pensar no entendimento que o leitor terá do seu trabalho.

2ª. Fórmulas para o paralelogramo, losango, retângulo e quadrado.

Para essas figuras, você pode relembrar o leitor das suas definições no intuito de auxiliar na memorização das respectivas fórmulas.

Figura 4.13 | Fórmulas para o perímetro de alguns quadriláteros

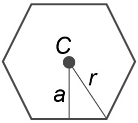
Paralelogramo	Losango	Retângulo	Quadrado
			
$p = 2(L + \ell)$	$p = 4\ell$	$p = a + b + c + d + e + f$	$p = 4\ell$

Fonte: elaborada pelo autor.

Algo que pode ser útil nesse caso seria uma fórmula para o perímetro do quadrado que se relacionasse com a medida de sua diagonal. Faça a dedução desta para o seu resumo.

3ª. Perímetro de polígonos regulares.

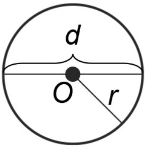
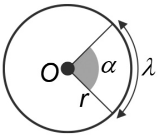
Figura 4.14 | Fórmulas para o perímetro de polígonos regulares

 	*a*: apótema; *r*: dist. do centro a um vértice; *n*: número de lados; *p*: perímetro;	$p = n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)$; $p = n \cdot 2a \cdot tan\left(\frac{180°}{n}\right)$.

Fonte: elaborada pelo autor.

4º. Comprimento da circunferência e do arco.

Figura 4.15 | Fórmulas para o comprimento da circunferência e do arco

 	 	*C*: comprimento da circunferência; *r*: raio; *d*: diâmetro; $\pi \approx 3{,}141516$; λ : comprimento do arco.	$C = 2\pi r = d\pi$; $\lambda = \frac{\alpha}{360°} 2\pi r$ (graus); $\lambda = \frac{\alpha}{2\pi} 2\pi r = \alpha r$ (radianos).

Fonte: elaborada pelo autor.

5ª. Conversão de graus para radianos e vice-versa.

$\overline{MA_6}$: medida de um ângulo em graus;

β : medida de um ângulo em radianos;

Radianos		Graus
π rad	----------	180°
β	----------	α

$$\Rightarrow \quad \pi \cdot \alpha = \beta \cdot 180°$$

Acreditamos que os pontos elencados sejam essenciais para a composição do seu resumo. Contudo, sua análise sobre as questões de vestibulares é que irá realmente certificará isso.

Para finalizar, selecionada a questão de vestibular sobre o tema (o que ficou sob sua responsabilidade), basta acrescentar a essa primeira parte as fórmulas que julgar relevantes e entregar essa etapa do trabalho ao seu editor chefe.

Avançando na prática

Aula de Geometria

Descrição da situação-problema

Já ouviu falar sobre o Pentágono, sede do Departamento de Defesa dos Estados Unidos? Esse prédio, em formato de polígono regular, localiza-se na cidade de Washington e é o símbolo das forças armadas estadunidenses.

Suponha que você esteja ministrando aulas de Geometria para o curso técnico em Construção Civil, cujo perfil do profissional a ser formado é bastante prático. Por isso, o curso deve oferecer aulas dinâmicas e com aplicações do conteúdo teórico em situações reais e uma das suas ideias foi calcular o perímetro e a apótema do Pentágono por meio de estimativas feitas por meio do site Google Maps (Disponível em: <https://www.google.com.br/maps>. Acesso em: 14 abr. 2017).

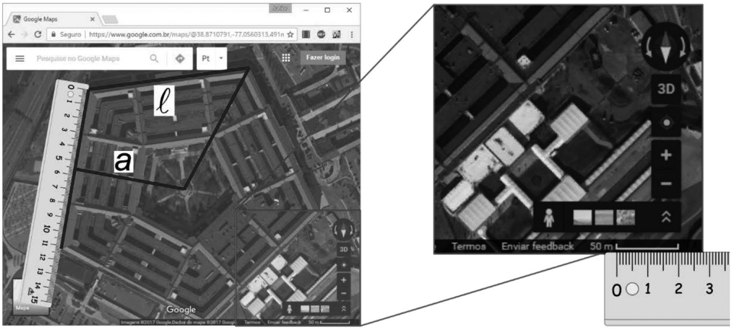
Considerando o desafio proposto, como você faria para ministrar essa aula? Roteirize como você abordaria o assunto e faça estimativas para o perímetro do Pentágono e para o apótema.

Resolução da situação-problema

Elaborar um plano de aula é uma tarefa importante e requer bastante planejamento seu, pois deve possuir estratégias didáticas pensando no perfil da turma e nos possíveis vieses que a aula pode tomar, sendo que você deve estar preparado para mediar qualquer situação. Por ser uma decisão particular e personalizada para as diferenças regionais existentes, isso fica sob sua responsabilidade. Auxiliaremos você a pensar em como obter as medidas requeridas, isto é, o perímetro do Pentágono e seu apótema.

1º Acesse o site do Google Maps, disponível em: <https://goo.gl/uL7ZVj> (acesso em: 14 abr. 2017) para visualizar o prédio. Na Figura 4.11, você pode ver uma imagem dele com algumas medidas destacadas, além de uma régua que incluímos para determinar a medida do lado.

Figura 4.16 | O Pentágono



Fonte: adaptada de <https://goo.gl/uL7ZVj>. Acesso em: 14 abr. 2017.

2º Perceba que no canto inferior direito da figura há uma escala indicando que cada 2 cm da imagem equivale a 50 m, na realidade, ou ainda, cada 1 cm da imagem equivale a 25 m.

3º Veja na Figura 4.11 que a régua indica que o lado do Pentágono possui cerca de 11 cm na imagem. Utilizando a escala, multiplicamos 11 por 25 e obtemos uma medida de 275 m para um lado do Pentágono, isto é, $\ell = 275 \text{ m}$.

4º. Em posse dos valores $\ell = 275 \text{ m}$ e n = 5 (5 lados), podemos utilizar as fórmulas de cálculo que obtemos nesta seção e calcular o perímetro e o apótema:

$$p = n\ell = 5\ell = 5 \cdot 275 = 1375 \rightarrow 1375 \text{ m};$$

$$p = n \cdot 2a \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad 1375 = 5 \cdot 2a \cdot \tan\left(\frac{180°}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1375}{10} = a \cdot \tan(36°) \quad \Rightarrow$$

$$137{,}5 = a \cdot \tan(36°) \quad \Rightarrow \quad 137{,}5 \approx a \cdot 0{,}726543 \quad \Rightarrow \quad a \approx \frac{137{,}5}{0{,}726543} \approx 189{,}252391 \rightarrow 189{,}3 \text{ m}$$

Portanto, o perímetro do Pentágono se aproxima de 1375 metros e seu apótema de 189,3 metros.

Agora que você já tem planejado como obter o perímetro e o apótema, complemente esse desafio elaborando o seu plano de aula e inclua também os procedimentos para obter outras medidas e ângulos presentes no Pentágono. Uma boa maneira de complementar seria buscar por construções em sua região, próximas à realidade de seus alunos e incluir também em seu plano de aula aplicações semelhantes ao exposto aqui.

Faça valer a pena

1. Em relação ao perímetro, julgue as afirmativas como verdadeiras (V) ou falsas (F):

I) Para determinar o perímetro de qualquer paralelogramo, é suficiente conhecer a medida de um de seus lados.

II) O perímetro de um quadrado pode ser obtido a partir do comprimento de sua diagonal.

III) Dado um triângulo equilátero, o seu perímetro é maior que o quíntuplo de seu apótema.

Agora, marque a alternativa que contém a sequência correta dos valores lógicos V e F.

a) F – F – V. c) F – F – F. e) V – F – V.

b) F – V – V. d) V – F – F.

2. O perímetro de um polígono é o resultado da soma das medidas de todos os seus lados. Para algumas classificações de polígonos, temos modos úteis e simples de obter esse resultado, como é o caso dos retângulos, dos paralelogramos, dos losangos e dos polígonos regulares.

Considerando um polígono regular de ângulo cêntrico $\alpha = 60°$ e perímetro p = 13,2 cm, qual é a medida de cada um de seus lados?

a) 1,65 cm. c) 2,64 cm. e) 3,30 cm.

b) 2,00 cm. d) 2,20 cm.

3. O comprimento de uma circunferência, também denominado perímetro do círculo, é calculado pela fórmula $C = 2\pi r$ na qual, considerando $d = 2r$ o diâmetro da circunferência, tem-se uma definição clara para o número p_n, ou seja, $\pi = \frac{C}{d}$ que em linguagem comum fica: o número pi é igual à razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro.

Em cada alternativa a seguir há dois valores, *C* e *d*, correspondendo, respectivamente, ao comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Os valores foram obtidos experimentalmente por meio de uma atividade que um docente do ensino fundamental realizou com seus alunos, utilizando fita métrica e embalagens de enlatados de vários tamanhos. Seu intuito era que os alunos obtivessem aproximações para o número π .

Marque a alternativa em que houve a maior precisão numérica na obtenção dessa aproximação.

a) d = 7,4 cm; C = 22,1 cm.

b) d = 3,8 cm; C = 12,4 cm.

c) d = 6,5 cm; C = 19,5 cm.

d) d = 5,2 cm; C = 16,9 cm.

e) d = 4,3 cm; C = 13,5 cm.

Seção 4.2

Área de polígonos

Diálogo aberto

Na seção anterior, estudamos o conceito de perímetro (a medida do contorno), tanto para os polígonos quanto para o círculo, para o qual também utilizamos a nomenclatura comprimento da circunferência e, deduzimos as fórmulas de cálculo para cada caso. O raciocínio desenvolvido para a obtenção de algumas fórmulas, principalmente para aquelas relacionadas aos polígonos regulares, é algo que deve ser ressaltado, pois não pretendemos que você memorize todas elas, mas, pelo contrário, conhecer o modo de pensar é fundamental. Se houver dúvidas, revise a seção anterior, pois o raciocínio empregado aqui será muito semelhante.

Em se tratando desta seção, voltaremos nossa atenção para um conceito-chave da Geometria a área de figuras planas. Esse pode ser um dos conceitos mais antigos dessa área da Matemática e também um dos mais práticos, pois vemos sua aplicação no dia a dia. Por exemplo, quando você compra uma cortina para a sua casa, o valor do produto depende principalmente da "área" de tecido; ao comprar uma tinta para aquele seu "projeto de garagem" do fim de semana, você analisa o rendimento da tinta que vem especificado em função da área que ela pode cobrir, enfim, as aplicações são diversas. Pense um pouco e liste outras aplicações com as quais você já teve contato.

Assim como está presente em nosso dia a dia, o cálculo de área também se apresenta nas provas de vestibular que você está analisando em seu novo emprego, no departamento de Matemática de uma editora especializada em materiais preparatórios para concursos e testes seletivos. Relembre o contexto que apresentamos a você na abertura desta unidade e a tarefa já desempenhada na seção anterior, na qual você foi escolhido para selecionar fórmulas de cálculo de perímetro das figuras mais conhecidas e também uma questão de vestibular relacionada aos conceitos. Mas isso tudo foi para o primeiro tópico, perímetro e comprimento da circunferência.

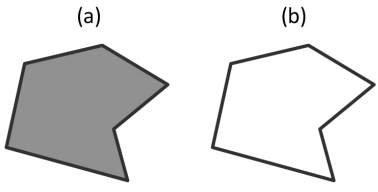
No segundo tópico a ser abordado no seu "resumão", área de polígonos, você deve proceder de modo semelhante ao primeiro: (1º) selecionar uma questão de vestibular na qual se utilizem conceitos e fórmulas de cálculo de área e deve construir, para ela uma resolução comentada passo a passo, empregando os argumentos necessários para o bom entendimento de seu cliente (o candidato que comprará o resumo); (2º) sintetizar as principais fórmulas de cálculo de área e os textos/legendas adequados ao bom entendimento das fórmulas. Lembre-se de que o resumo deve ser didático, conter ilustrações atraentes e ser sucinto, isto é, você precisa ter aqui um grande poder de síntese, sem deixar de incluir o essencial. Lembre-se de acrescentar o seu progresso desta seção ao que você já desenvolveu na seção anterior.

Para desempenhar satisfatoriamente essa nova tarefa, você precisará de alguns conhecimentos que elencamos na sequência. Bons estudos. ,

Não pode faltar

Para o estudo desta seção, consideraremos apenas os polígonos ditos simples (aqueles cujos dois lados distintos só se interceptam nos vértices). Lembre-se de que já estudamos o conceito de superfície poligonal (ou região poligonal), que é a reunião do polígono com seus pontos interiores (veja Figura 4.17).

Figura 4.17 | (a) Região poligonal; (b) Polígono



Fonte: elaborada pelo autor.

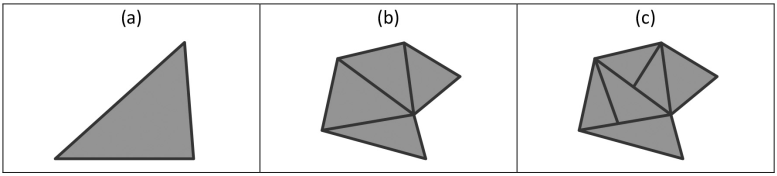
Mais especificamente, quando a região poligonal for limitada por um triângulo, a denominaremos **região triangular** e podemos entendê-la como o conjunto de pontos formado pela união de todos os segmentos de reta com extremidades nos lados do triângulo, figura essa que será a **fronteira** da região.

Segundo Costa et al. (2012), toda região poligonal é a reunião de um número finito de regiões triangulares, sendo essas regiões, duas a duas, sem pontos interiores em comum. Observe na Figura 4.18

uma região triangular e uma região poligonal, esta última dividida em regiões triangulares de duas maneiras diferentes.

Figura 4.18 – (a) Região triangular; (b) Região poligonal dividida em quatro regiões triangulares; (c) Região poligonal dividida em seis regiões triangulares

Figura 4.18 | (a) Região triangular; (b) Região poligonal dividida em quatro regiões triangulares; (c) Região poligonal dividida em seis regiões triangulares



Fonte: elaborada pelo autor.

Atenção

Nesta seção, mesmo nos casos em que estivermos nos referindo a uma região poligonal, não utilizaremos o preenchimento nas figuras para facilitar a visualização. Portanto, polígono e região poligonal estarão representados do mesmo modo. Fique atento às nomenclaturas para uma boa compreensão do texto.

O intuito de apresentar essas definições é o de entender o conceito de área, que Costa et al. (2012) descrevem com o auxílio dos seguintes axiomas:

Vocabulário

Axioma: afirmação aceita sem comprovação.

Axioma 1: a toda região poligonal corresponde um número positivo, denominado área da região.

Axioma 2: se uma região poligonal é a reunião de duas ou mais regiões poligonais que, duas a duas, não possuem pontos interiores comuns, então a área da primeira é a soma das áreas das outras duas.

Axioma 3: regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.

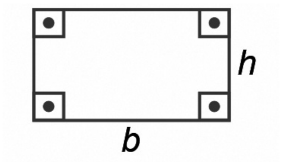
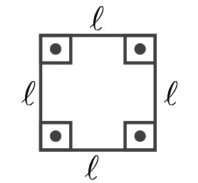
Axioma 4: a área de um retângulo *ABCD*, denotada por A_{ABCD}, é igual ao produto das medidas de dois lados consecutivos, isto é,

$$A_{ABCD} = m\left(\overline{AB}\right) \cdot m\left(\overline{BC}\right) \text{ (COSTA et al., 2012).}$$

Perceba que segue diretamente do axioma 4 o que se afirma na sequência.

Assimile

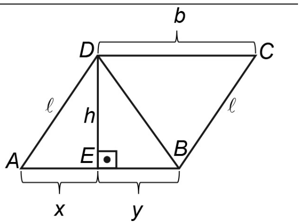
São válidas as seguintes fórmulas de cálculo:

Área do retângulo Figura 4.19 | Retângulo de base *b* e altura *h*  Fonte: elaborada pelo autor.	Área do quadrado Figura 4.20 | Quadrado de lado ℓ  Fonte: elaborada pelo autor.
$A_{\text{Retângulo}} = b \cdot h$	$A_{\text{Quadrado}} = \ell \cdot \ell = \ell^2$

Área do paralelogramo

Nosso intuito agora é determinar a área do paralelogramo. Para isso, considere a região poligonal delimitada pelo paralelogramo da Figura 4.21, o qual está dividido em três regiões triangulares.

Figura 4.21 | (a) Região poligonal; (b) Polígono



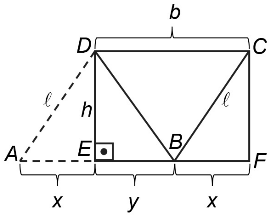
Fonte: elaborada pelo autor.

Afirmamos que existe um retângulo de mesma área que o paralelogramo *ABCD*. Justificaremos essa afirmação com o auxílio dos axiomas 2 e 3. Veja que o paralelogramo *ABCD* pode ser subdividido nos triângulos *AED*, *EBD* e *BCD*, sendo que, dois a dois, não possuem pontos interiores comuns. Logo:

$$A_{ABCD} = A_{AED} + A_{EBD} + A_{BCD}.$$

Na reta $\overleftrightarrow{AB}$ construa um segmento de reta $\overline{BF}$ de modo que $\overline{AE} \equiv \overline{BF}$, com B entre *A* e *F*, como mostra a Figura 4.22.

Figura 4.22 | Paralelogramo (passo 2)



Fonte: elaborada pelo autor.

Afirmamos que os triângulos *AED* e *BFC* são congruentes e, por consequência, possuem a mesma área. Para verificar essa congruência, veja que $\overline{AE} \equiv \overline{BF}$ (por construção), $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ (lados opostos do paralelogramo) e, além disso, $EAD \equiv FBC$ (ângulos correspondentes determinados pela interseção de uma transversal $\overleftrightarrow{AB}$ com as paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$). Assim, fica comprovada a congruência pelo caso LAL. Tal congruência ainda fornece elementos para garantir que o quadrilátero *EFCD* é um retângulo.

Da congruência $\Delta AED \equiv \Delta BFC$ e do uso do axioma 3, extraímos a seguinte relação:

$$A_{ABCD} = \underbrace{A_{AED}}_{A_{BFC}} + A_{EBD} + A_{BCD} \quad \Rightarrow \quad A_{ABCD} = A_{BFC} + A_{EBD} + A_{BCD} = A_{EFCD}$$

Com isso, não somente justificamos a afirmação de que existe um retângulo de mesma área que o paralelogramo *ABCD*, como ainda identificamos um retângulo, do qual conhecemos as medidas da base e da altura. Finalmente:

$$\left.\begin{array}{l} A_{ABCD} = A_{EFCD} \\ A_{EFCD} = b \cdot h \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A_{ABCD} = b \cdot h.$$

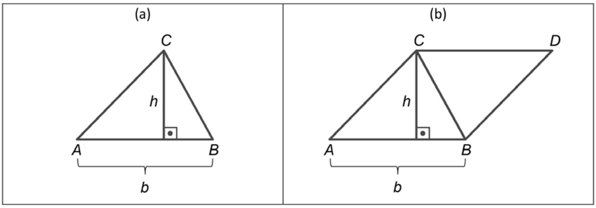
Assimile

A área do paralelogramo ABCD é dada pelo produto das medidas da base e da altura, isto é: $A_{ABCD} = b \cdot h$.

Área do triângulo

Tendo determinado a área do paralelogramo, fica simples calcular a área do triângulo. Para isso, veja a Figura 4.19 (a) na qual temos um triângulo de base *b* e altura *h* e, na Figura 4.23 (b), um segundo triângulo construído a partir do primeiro determinando um ponto *D* sobre a reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que passa por *C*, de modo que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Figura 4.23 | (a) Triângulo; (b) Paralelogramo



Fonte: elaborada pelo autor.

Como, por construção, $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, o quadrilátero *ABDC* só pode ser um paralelogramo, cuja área já sabemos ser igual a $A_{ABDC} = b \cdot h$. Perceba ainda que os triângulos *ABC* e *BDC* são congruentes pelo caso LLL e que, por essa razão, suas áreas são iguais. Logo:

$$\left.\begin{array}{l} A_{ABC} = A_{BDC} \\ A_{ABDC} = A_{ABC} + A_{BDC} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A_{ABDC} = A_{ABC} + A_{ABC} = 2 \cdot A_{ABC}$$

Com as informações que dispomos, vale o seguinte:

$$\left.\begin{array}{l} A_{ABDC} = b \cdot h \\ A_{ABDC} = 2 \cdot A_{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2 \cdot A_{ABC} = b \cdot h \quad \Rightarrow \quad A_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Assimile

A área do triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.

Reflita

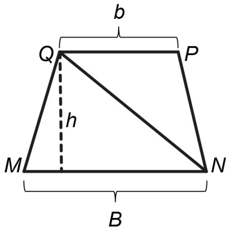
Qual seria uma expressão para o cálculo da área de um triângulo equilátero de lado ℓ que seja escrita em função apenas da medida do lado?

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

Área do trapézio

Considere o trapézio da Figura 4.24, de altura *h* em que a medida da "base maior" é $m\left(\overline{MN}\right)=B$ e a medida da "base menor" é $m\left(\overline{PQ}\right)=b$.

Figura 4.24 | Trapézio



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que o trapézio está dividido em dois triângulos de mesma altura e bases paralelas de medidas $m\left(\overline{MN}\right)=B$ e $m\left(\overline{PQ}\right)=b$, de modo que $A_{MNPQ}=A_{MNQ}+A_{NPQ}$. Como já é do nosso conhecimento o cálculo da área dos triângulos, temos:

$$\left.\begin{array}{l} A_{MNPQ}=A_{MNQ}+A_{NPQ} \\ A_{MNQ}=\dfrac{B\cdot h}{2} \\ A_{NPQ}=\dfrac{b\cdot h}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A_{MNPQ}=\frac{B\cdot h}{2}+\frac{b\cdot h}{2};$$

$$A_{MNPQ}=\frac{B\cdot h+b\cdot h}{2}=\frac{(B+b)\cdot h}{2}.$$

Assimile

A área do trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das medidas das bases.

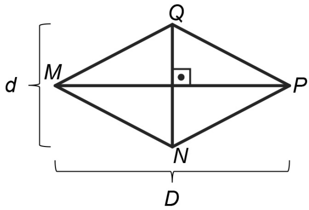
Área de um losango

Para determinar a área do losango, conhecer novamente a área de um triângulo será útil. Veja como analisando a Figura 4.25.

Note que o losango *MNPQ* está dividido em dois triângulos, *MQP* e *MNP,* de base comum *MP* e de altura igual a *d/2* (lembre-se que em um losango as diagonais se interceptam no ponto médio e são perpendiculares entre si). Naturalmente, os triângulos têm a mesma área e, ainda, $A_{MNPQ} = A_{MNP} + A_{MPQ}$. Com isso, temos:

$$\left.\begin{aligned} A_{MNPQ} &= A_{MNP} + A_{MPQ} \\ A_{MNP} &= A_{MPQ} = \frac{D \cdot \frac{d}{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_{MNPQ} = \frac{D \cdot \frac{d}{2}}{2} + \frac{D \cdot \frac{d}{2}}{2} = \frac{D \cdot d}{4} + \frac{D \cdot d}{4} = \frac{2 \cdot D \cdot d}{4} = \frac{D \cdot d}{2} \cdot$$

Figura 4.25 | Losango



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

A área do losango é igual à metade do produto das medidas de suas diagonais.

Exemplificando

Calcule a área da região poligonal *MNPQRST*, apresentada na Figura 4.26, dado que *MNQT* é um losango de diagonais *D* = 4 cm e *d* = 2 cm, *NPQ* é um triângulo equilátero e *QRST* é um quadrado.

Resolução: primeiramente perceba que:

$$A_{MNPQRST} = \underbrace{A_{MNQT}}_{\text{losango}} + \underbrace{A_{NPQ}}_{\substack{\text{triângulo} \\ \text{equilátero}}} + \underbrace{A_{QRST}}_{\text{quadrado}} .$$

Agora, note que precisamos determinar a medida ℓ do lado do losango, o que faremos por meio do teorema de Pitágoras, visto que cada lado do losango é hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo *d/2* e *D/2* (metades das diagonais do losango). Logo:

$$\ell^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{5} \text{ cm}$$

.

Em posse da medida do lado do losango, podemos determinar as áreas que precisamos:

$$A_{MNQT} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \rightarrow 4 \text{ cm}^2;$$

$$A_{NPQ} = \frac{\ell\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4} \rightarrow \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2;$$

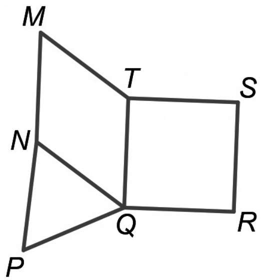
$$A_{QRST} = \ell^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5 \rightarrow 5 \text{ cm}^2.$$

Portanto:

$$A_{MNPQRST} = 4 + \frac{\sqrt{15}}{4} + 5 = 9 + \frac{\sqrt{15}}{4} \rightarrow \left(9 + \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \text{ cm}^2.$$

Concluímos, então, que a área da região poligonal *MNPQRST* é igual a $\left(9 + \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \text{ cm}^2$, ou aproximadamente 9,97 cm^2.

Figura 4.26 | Região poligonal *MNPQRST*



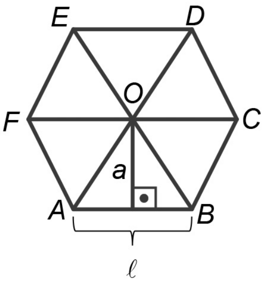
Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba no exemplo anterior que a unidade de medida de área advém da unidade de medida de comprimento utilizada, acompanhada do símbolo (^{2}) que indica área. Se, por exemplo, a unidade de comprimento utilizada for metros (m), a unidade de área será metros quadrados (m^2), se for quilômetros (km), a unidade de área será quilômetros quadrados (km^2), e assim por diante.

Área de um polígono regular

Lembre-se de que na seção anterior determinamos expressões para o perímetro dos polígonos regulares, pois o mesmo raciocínio utilizado lá, agora, será útil para o cálculo da área de regiões poligonais cujas fronteiras sejam tais polígonos. O que fizemos na seção precedente foi dividir o polígono regular, de *n* lados, em *n* triângulos congruentes, cujas bases coincidissem com os lados do polígono e a altura suas apótemas. Veja, na Figura 4.27, o hexágono, por exemplo.

Figura 4.27 | Hexágono regular



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos determinar a área desse hexágono conhecendo a área de um dos triângulos que o compõem, pois todos os demais triângulos são congruentes e, além disso, a área do hexágono será igual à soma das áreas dos seis triângulos. Generalizando para um polígono de n lados, temos:

$$\left.\begin{aligned} A_{\text{triângulo}} &= \frac{\ell \cdot a}{2} \\ A_{\substack{\text{polígono}\\\text{regular}}} &= n \cdot A_{\text{triângulo}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_{\substack{\text{polígono}\\\text{regular}}} = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}.$$

Você deve se lembrar de que, na seção anterior, determinamos a relação $\ell = 2a \cdot tan\left(\frac{180°}{n}\right)$, que fornece a medida do lado de um polígono regular em função da medida de seu apótema e do número de lados. Utilizando as duas últimas equações, temos:

$$\left.\begin{aligned} A_{\substack{\text{polígono}\\\text{regular}}} &= n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} \\ \ell &= 2a \cdot tan\left(\frac{180°}{n}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_{\substack{\text{polígono}\\\text{regular}}} = n \cdot \frac{2a \cdot tan\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot a}{2} = n \cdot a^2 \cdot tan\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Mais uma fórmula notável pode ser obtida utilizando-se as fórmulas $A_{\substack{\text{polígono}\\\text{regular}}} = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}$ e $p = n\ell$. Veja:

$$\left.\begin{array}{l} A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = n \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ p = n\ell \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = \dfrac{p \cdot a}{2}.$$

Pesquise mais

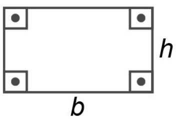
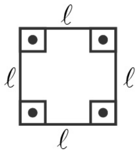
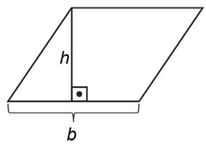
Veja outra abordagem do cálculo de área no livro referenciado a seguir:

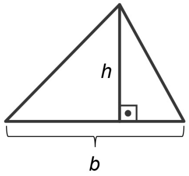
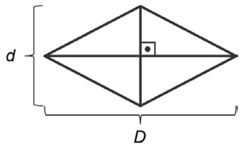
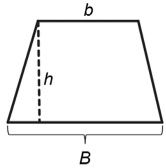
COSTA, D. M. B. et al. **Elementos de Geometria:** Geometria Plana e Espacial. 3. ed. Curitiba: UFPR, 2012. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/elementos.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2017.

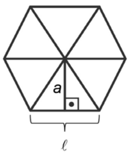
Sem medo de errar

Volte agora a lembrar do desafio que foi proposto a você no início desta seção, isto é: (1º) selecionar uma questão de vestibular na qual se utilizem os conceitos e as fórmulas de cálculo de área de polígonos e construir, para ela, uma resolução comentada passo a passo; (2º) sintetizar as principais fórmulas de cálculo de área de polígonos e os textos/legendas adequados ao bom entendimento das fórmulas. Em relação ao primeiro item, novamente o tipo de questão e a complexidade dependerão de sua pesquisa nas provas de vestibulares da sua região. Como profissional do ramo, é importante você estar atualizado sobre o que é cobrado nesse tipo de teste seletivo, principalmente na região em que atua. Por conta disso, essa parte fica inteiramente sob sua responsabilidade.

Em relação à segunda parte, elencaremos algumas fórmulas principais para o cálculo de áreas de polígonos e esperamos que isso o direcione na síntese dos principais trechos desta seção.

Área do retângulo	Área do quadrado	Área do paralelogramo
Figura 4.28 | Retângulo de base *b* e altura *h*  Fonte: elaborada pelo autor.	Figura 4.29 | Quadrado de lado ℓ  Fonte: elaborada pelo autor.	Figura 4.30 | Paralelogramo de base *b* e altura *h*  Fonte: elaborada pelo autor.
$A_{\text{Retângulo}} = b \cdot h$	$A_{\text{Quadrado}} = \ell \cdot \ell = \ell^2$	$A_{\text{Paralelogramo}} = b \cdot h$

Área do triângulo	Área do losango	Área do paralelogramo
Figura 4. 31 | Triângulo de base b e altura h  Fonte: elaborada pelo autor.	Figura 4.32 | Losango de diagonais D e d  Fonte: elaborada pelo autor.	Figura 4. 33 | Trapézio de bases b e B e altura h  Fonte: elaborada pelo autor.
$A_{\text{Triângulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2}$	$A_{\text{Losango}} = \dfrac{D \cdot d}{2}$	$A_{\text{Trapézio}} = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$

Área do polígono regular	
Figura 4. 34 | Polígono regular  Fonte: elaborada pelo autor.	p: perímetro n: número de lados a: apótema ℓ : lado $A_{\substack{\text{polígono}\\\text{regular}}} = n \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2}$ $A_{\substack{\text{polígono}\\\text{regular}}} = \dfrac{p \cdot a}{2}$

Vale ressaltar que essas fórmulas podem ter variações, pois dependem da forma como foram deduzidas. Como profissional da área, você deve ser capaz de determinar outras variações e optar pela mais apropriada aos seus propósitos de ensino.

Cabe agora escolher a maneira mais didática de expor e explicar as fórmulas anteriores e, além disso, incluir a questão de vestibular que utilize uma das fórmulas em sua resolução. Lembre-se de que é necessário transpor a questão e elaborar também a resolução comentada, passo a passo, para incluir no resumo que você está elaborando. Bom trabalho.

Avançando na prática

Programação de uma planilha eletrônica

Descrição da situação-problema

Imagine que o gerente de uma loja de revestimentos, que conhece você e a sua facilidade com a Geometria Plana e com o cálculo de áreas, tenha lhe procurado para que você o auxiliasse na montagem de uma planilha eletrônica. Ele trabalha com a venda de lajotas e pisos personalizados em formatos de polígonos regulares e está tentando montar a planilha apresentada na Figura 4.35.

Figura 4.35 | Planilha de orçamento parcialmente preenchida

	A	B	C	D	E	F	G
1	Item	Medida de um lado (metros)	Número de lados	Quantidade de peças	Área coberta (metros)	Preço do metro quadrado	Preço
2	001	0,10	3	45		45	
3	002	0,15	4	25		35	
4	003	0,20	5	40		48	
5	004	0,08	6	60		54	

Fonte: elaborada pelo autor.

Nessa planilha, ele pretende montar os orçamentos de seus clientes, calculando os preços de cada pedido (ou item) de acordo com o número de lados do polígono que dá forma à lajota. Além disso, outro dado relevante é a área total que pode ser coberta com a quantidade de lajotas compradas.

Considerando a disposição das colunas, quais devem ser as fórmulas que ele precisa inserir nas células E2 e G2 para que o computador efetue o cálculo dos dados faltantes?

Resolução da situação-problema

Para resolver essa situação, você deve compreender tanto o cálculo de área de polígonos regulares quanto a manipulação de planilhas eletrônicas. No caso da manipulação de planilhas, procure tutoriais na internet para entender a ferramenta. No que diz respeito ao cálculo de área, lembre-se do que estudou até aqui: perímetro e área.

Na seção anterior, deduzimos as seguintes fórmulas (para polígonos regulares):

$$\ell = 2a \cdot tan\left(\frac{180°}{n}\right) \qquad \text{e} \qquad p = n \cdot \ell \, .$$

Adicionando a fórmula $A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = \dfrac{p \cdot a}{2}$ a esse conjunto e realizando um pouco de manipulação algébrica, lembrando que $180° = \pi$ rad (obs.: planilhas geralmente trabalham com radianos), temos:

$$\ell = 2a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\ell}{2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)};$$

$$A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{1}{2} p \cdot a = \frac{1}{2} n\ell \cdot \frac{\ell}{2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n\ell^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Veja que essa fórmula relaciona o número de lados e a medida de um dos lados com a área do polígono, justamente as informações disponíveis na planilha. Basta agora "traduzir" essa expressão para uma linguagem que a planilha compreenda. Considere, para isso, $\pi = \text{PI()}$, a multiplicação representada por *, a potenciação representada por ^ e a divisão representada por /, não esquecendo dos parênteses para separar corretamente as operações. Temos:

$$\frac{n\ell^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \xrightarrow{\text{traduzindo}} \frac{\text{(C2)*(B2)\^{}2}}{\text{4*tan}\left(\frac{\text{PI()}}{\text{(C2)}}\right)} = \text{(C2)*(B2)\^{}2 / (4*tan(PI()/(C2)))}$$

Veja que as variáveis n e ℓ foram substituídas por suas correspondentes na planilha, ou seja, C2 e B2. Essa última fórmula calcula a área de um único polígono e, para determinarmos a área da quantidade especificada na coluna "Quantidade de peças" multiplicamos ela por D2, ficando com:

$$A_{\text{coberta}} = \underbrace{\text{(D2)}}_{\substack{\text{Quantidade}\\ \text{de peças}}} * \underbrace{\text{(C2)}}_{\substack{\text{Número}\\ \text{de lados}}} * \underbrace{\text{(B2)}}_{\substack{\text{Medida de}\\ \text{um lado}}} \text{\^{}2 / (4*tan(PI()/(C2)))}$$

Para saber o preço de cada item, basta multiplicar o valor contido na coluna "Área coberta" pelo valor contido em "Preço do metro quadrado", isto é, Preço do item = (E2)*(F2). Por fim, incluindo a fórmula =(D2)*(C2)*(B2)^2 / (4*tan(PI()/(C2))) na célula E2 e a fórmula =(E2)*(F2) na célula G2 para obter o seguinte resultado.

Figura 4.36 | Planilha de orçamento parcialmente preenchida

	A	B	C	D	E	F	G
1	Item	Medida de um lado (metros)	Número de lados	Quantidade de peças	Área coberta (metros)	Preço do metro quadrado	Preço do item
2	001	0,10	3	45	0,19	45	R$ 8,55
3	002	0,15	4	25		35	
4	003	0,20	5	40		48	
5	004	0,08	6	60		54	

Fonte: elaborada pelo autor.

Repita o procedimento para as demais células (ou utilize as propriedades de preenchimento automático da planilha). Agora que você já entendeu o procedimento, basta orientar o gerente que o procurou.

Faça valer a pena

1. Considere uma folha de papel retangular de lados 10 cm e 15 cm e que seus quatro cantos sejam identificados com os vértices *A, B, C e D*, nessa ordem, em sentido anti-horário, sendo $m\left(\overline{AB}\right)=m\left(\overline{CD}\right)=10\text{ cm}$ e $m\left(\overline{BC}\right)=m\left(\overline{DA}\right)=15\text{ cm}$. Imagine agora o triângulo *CDE* obtido por dobradura dessa folha, de modo que o segmento de reta $\overline{DC}$ sobreponha parte do segmento de reta $\overline{AD}$, marcando um vinco na folha, que será identificado como o segmento de reta $\overline{DE}$, com o ponto *E* sobre o lado $\overline{BC}$ da folha.

Nessas circunstâncias, a área do trapézio *ABED* também determinado pela dobradura é:

a) 80 cm^2.

b) 100 cm^2.

c) 120 cm^2.

d) 130 cm^2.

e) 150 cm^2.

2. Em um projeto de Arquitetura, o responsável deseja construir duas paredes, ambas possuindo 150 metros quadrados de área e de igual altura, sendo uma delas em formato quadrado e outra em formato triangular. Para planejar a obra, ele precisa desenhar essas paredes em um programa de computador que necessita como entrada de dados a medida do lado do quadrado e a medida da base do triângulo.

Qual das alternativas seguintes possui a medida do lado do quadrado e a medida da base do triângulo, nessa ordem?

a) $4\sqrt{6}\text{ m}$; $8\sqrt{6}\text{ m}$.

b) $6\sqrt{6}\text{ m}$; $12\sqrt{6}\text{ m}$.

c) $10\sqrt{6}\text{ m}$; $20\sqrt{6}\text{ m}$.

d) $5\sqrt{6}\text{ m}$; $10\sqrt{6}\text{ m}$.

e) $7\sqrt{6}\text{ m}$; $14\sqrt{6}\text{ m}$.

3. A fórmula $A = \sqrt{sp(sp-a)(sp-b)(sp-c)}$ é conhecida como "fórmula de Herão" em homenagem ao matemático Herão de Alexandria, que viveu por volta da metade do primeiro século da era comum. Com ela, é possível determinar a área A de um triângulo de lados medindo *a*, *b* e *c* e semiperímetro sp (semiperímetro é a metade do perímetro, isto é, $sp = p/2 = (a+b+c)/2$).

Suponha um triângulo de área igual a $12\ cm^2$ de medidas *x*, *y* e *z*, de modo que *y* seja o triplo de *x* e *z* seja três quartos de *y*. Marque a alternativa que contém o perímetro aproximado desse triângulo.

a) 12 cm.

b) 15 cm.

c) 17 cm.

d) 19 cm.

e) 23 cm.

Seção 4.3

Área do círculo e suas partes

Diálogo aberto

Chegamos na última seção desta unidade, na qual você estudou, até o momento, como calcular o perímetro de polígonos, do círculo, o comprimento de arcos, além de áreas de polígonos diversos, em especial, de polígonos regulares. Certamente é muito conteúdo e todo ele possui vasta aplicação prática, assim como presença garantida em seu futuro profissional.

Continuando os estudos acerca do cálculo de áreas de figuras planas, chegamos ao tópico derradeiro deste livro didático, no qual veremos como calcular a área do círculo e suas partes, como setores e coroas circulares. Esperamos que você perceba que a estruturação que adotamos, estudar primeiro perímetro e área dos polígonos regulares para depois estudar a área do círculo, foi importante, pois utilizaremos agora recursos já trabalhados nas seções anteriores. Se tiver dúvidas sobre os conteúdos precedentes, não hesite em revisá-los.

Para tornar o estudo desta seção mais instigante, lembre-se da nossa suposição de que você está trabalhando no departamento de Matemática de uma editora especializada em materiais preparatórios para concursos e testes seletivos. Até o momento, você sintetizou conteúdos relacionados aos temas das Seções 4.1 e 4.2 para o seu "resumão", um material que está sendo compilado para atender ao perfil de seus clientes, os candidatos a vestibulares de sua região. Os últimos temas a serem abordados em seu "resumão" são área do círculo, do setor circular e da coroa circular, além da relação entre a área de duas figuras semelhantes sujeitas a uma razão constante. Além de sintetizar esses temas, lembre-se de que o seu editor chefe solicitou que fosse incluído em cada tópico uma questão de vestibular, com resolução, relacionada ao conteúdo. Para desempenhar essa atividade, você carece de conhecimentos específicos acerca da área do círculo. Vamos estudar mais essa temática?

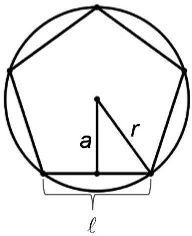
Não pode faltar

Lembre-se de que vimos na Seção 4.1 como calcular o perímetro do círculo e obtemos a fórmula de cálculo desse comprimento por meio da fórmula do perímetro de um polígono regular de *n* lados, fazendo n crescer indefinidamente. Na ocasião, comentamos que $\lim_{n\to\infty} p_n = C$, em que p_n é o perímetro de um polígono de n lados e *C* é o comprimento da circunferência. Recorde-se ainda que:

$$p_n = n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right); \qquad C = 2\pi r.$$

Nessas fórmulas de cálculo, r é o raio da circunferência circunscrita ao polígono regular, como mostra a Figura 4.37.

Figura 4.37 | Polígono regular e circunferência circunscrita

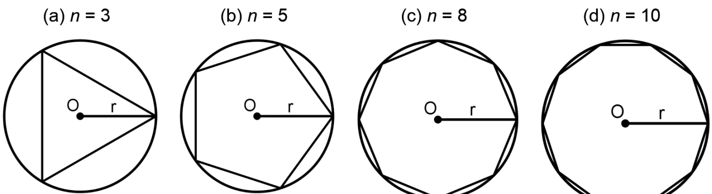


Fonte: elaborada pelo autor.

Nessas fórmulas de cálculo, *r* é o raio da circunferência circunscrita ao polígono regular, como mostra a Figura 4.37.

Nosso objetivo agora, nesta seção, é utilizar o mesmo raciocínio da Seção 4.1 para determinar a fórmula de cálculo da área delimitada pela circunferência, ou seja, a área do círculo de raio *r*. Desse modo, assim como supomos que o perímetro do polígono regular de *n* lados p_n se aproxima do comprimento da circunferência *C*, isto é, $\lim_{n\to\infty} p_n = C$, suporemos também que a área do polígono regular A_n, também de n lados, se aproxima da área do círculo $A_{\text{círculo}}$. Esperamos que essa seja uma suposição natural para você e que a Figura 4.38 possa exemplificar o que estamos afirmando.

Figura 4.38 | Circunferência e polígonos



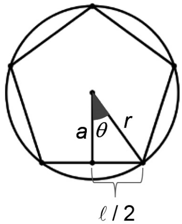
Fonte: elaborada pelo autor.

A vantagem de seguirmos por esse caminho é que já temos ciência da fórmula de cálculo da área do polígono regular de n lados, a qual deduzimos na Seção 4.2 e que é apresentada a seguir:

$$A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = n \cdot a^2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right), \text{ com } \pi \text{ rad} = 180°.$$

Observe na Figura 4.38 que, conforme o número de lados aumenta, o raio permanece constante, mas o apótema cresce. Para os nossos cálculos isso pode ser incômodo, então precisamos substituir o comprimento do apótema na fórmula de cálculo anterior por uma expressão envolvendo o raio da circunferência e faremos isso com base na Figura 4.39.

Figura 4.39 | Circunferência e polígono regular, com destaque para o triângulo retângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que temos o triângulo retângulo de hipotenusa r e catetos a e $\frac{\ell}{2}$, com o ângulo θ adjacente ao cateto a. Lembre-se de que o ângulo cêntrico de um polígono regular mede $\frac{2\pi}{n}$ e que θ é a metade do ângulo cêntrico, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{n}$. Com isso, temos:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad a = r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad a = r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Podemos agora retornar a fórmula da área do polígono regular e substituir a expressão obtida para o apótema, obtendo:

$$A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = n \cdot a^2 \cdot \tan(\pi/n) \quad \Rightarrow \quad A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = n \cdot \left(r\cos(\pi/n)\right)^2 \cdot \tan(\pi/n) \quad \Rightarrow$$

$$A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = n \cdot r^2\left(\cos(\pi/n)\right)^2 \cdot \tan(\pi/n) = n \cdot r^2\left(\cos(\pi/n)\right)^2 \cdot \frac{\text{sen}(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \quad \Rightarrow$$

$$A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = n \cdot r^2 \cdot \cos(\pi/n) \cdot \text{sen}(\pi/n)$$

.

Note que substituímos $\tan(\pi/n)$ por $\dfrac{\text{sen}(\pi/n)}{\cos(\pi/n)}$, pois trata-se da definição de tangente de um ângulo. Além disso, veja que a última expressão obtida para a área do polígono envolve um produto do cosseno de um ângulo com o seno do mesmo ângulo. Para simplificar essa fórmula de cálculo, recorreremos a uma identidade trigonométrica, a qual estabelece a seguinte relação:

$$\text{sen}(2\cdot(\pi/n)) = 2\,\text{sen}(\pi/n)\cos(\pi/n) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(\pi/n)\cos(\pi/n) = \frac{\text{sen}(2\cdot(\pi/n))}{2}$$

Pesquise mais

Veja essa e outras identidades trigonométricas em:

Thomas, G. B. **Cálculo**, v.1. São Paulo: Pearson, 2009. Disponível em: <http://anhanguera.bv3.digitalpages.com.br/users/publications/9788588639317/pages/723>. Acesso em: 14 abr. 2017.

Substituindo a identidade na fórmula do cálculo de área, temos:

$$A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = n \cdot r^2 \cdot \cos(\pi/n) \cdot \text{sen}(\pi/n) \quad \Rightarrow \quad A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = n \cdot r^2 \cdot \frac{\text{sen}(2\cdot(\pi/n))}{2}$$

Para determinar a fórmula da área do círculo, basta agora aumentar n indefinidamente, isto é:

$$A_{\text{círculo}} = \lim_{n\to\circ} A_{\substack{\text{polígono}\\ \text{regular}}} = \lim_{n\to\circ} n \cdot r^2 \cdot \frac{\text{sen}(2\cdot(\pi/n))}{2}.$$

Utilizando a substituição $x = \dfrac{2\pi}{n}$, temos $n = \dfrac{2\pi}{x}$ e, além disso, $n \to \infty$ implica em $x \to 0$. Logo:

$$A_{\text{círculo}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\pi}{x} \cdot r^2 \cdot \frac{\text{sen}(x)}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}.$$

Na Seção 4.1, já mencionamos que o limite que se apresenta na última expressão é igual a 1 e, portanto:

$$A_{\text{círculo}} = \frac{2\pi r^2}{2} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{1} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2 .$$

Assimile

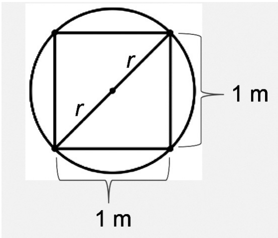
A área do círculo de raio r é calculada com a fórmula: $A_{\text{círculo}} = \pi r^2$

Exemplificando

Qual é a área de um círculo circunscrito a um quadrado de lado 1 metro?

Resolução: veja a situação proposta na Figura 4.40.

Figura 4.40 | Circunferência e quadrado inscrito



Fonte: elaborada pelo autor.

O diâmetro do círculo é igual à diagonal de medida *2r* do quadrado, portanto:

$$(2r)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow 4r^2 = 2 \Rightarrow r^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{2}} .$$

Utilizando a fórmula da área do círculo, temos:

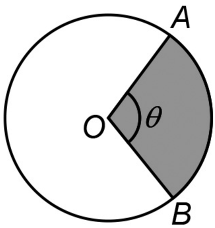
$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 \Rightarrow \pi\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \pi \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}\ \text{m}^2.$$

Portanto, a área do círculo será $\frac{\pi}{2}$ m^2.

Área do setor circular

Você deve se recordar que na Seção 4.1 determinamos não somente o comprimento da circunferência, mas também o comprimento de arcos da circunferência. Fizemos isso considerando que o comprimento do arco é proporcional à sua medida, a mesma do ângulo central a ele relacionado. Essa relação de proporcionalidade é válida também para a área do setor circular, a região delimitada por um arco de circunferência e por dois raios de extremidades coincidentes com as extremidades do arco, como mostra a Figura 4.41.

Figura 4.41 | Setor circular *BOA*



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 4.41, θ é o ângulo central e também a medida do arco BA e a área do círculo corresponde ao arco completo da circunferência, cuja medida é $360°$. Logo, podemos estabelecer a seguinte relação de proporcionalidade:

Área		Ângulo
$A_{\text{círculo}}$	---------	360°
A_{setor}	---------	θ

$$\Rightarrow A_{\text{círculo}} \cdot \theta = A_{\text{setor}} \cdot 360° \quad \Rightarrow \quad A_{\text{setor}} = \frac{A_{\text{círculo}} \cdot \theta}{360°} = \frac{\pi r^2 \cdot \theta}{360°}$$

Lembre-se de que $360° = 2\pi \text{ rad}$ e, portanto, podemos utilizar de modo equivalente para ângulos medidos em radianos a seguinte expressão:

$$A_{\text{setor}} = \frac{\pi r^2 \cdot \theta}{2\pi} = \frac{\theta r^2}{2}.$$

Exemplificando

Dado um círculo de área $4\pi \text{ m}^2$, qual é a área do setor circular determinado por um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ rad nesse mesmo círculo?

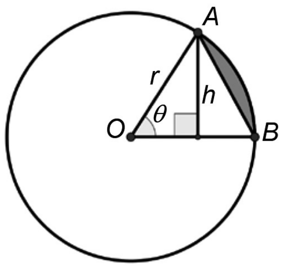
Resolução: utilizando a expressão para a área do setor, temos:

$$A_{\text{setor}} = \frac{\pi r^2 \cdot \theta}{2\pi} = \frac{4\pi \cdot \frac{\pi}{6}}{2\pi} = 2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Portanto, a área do setor será $\frac{\pi}{3}\ \text{m}^2$.

Lembre-se de que já estudamos o significado de segmento circular, a região delimitada por uma corda e por um arco de circunferência, como podemos visualizar na Figura 4.42.

Figura 4.42 | Segmento circular



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinar a área de um segmento circular, utilizamos a seguinte relação:

$$A_{\substack{\text{setor}\\\text{circular}}} = A_{\Delta AOB} + A_{\substack{\text{segmento}\\\text{circular}}}.$$

Como já conhecemos a área do setor, basta determinar a área do triângulo:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{h}{r} \quad \Rightarrow \quad h = r \cdot \text{sen}\,\theta;$$

$$A_{\Delta AOB} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{m\left(\overline{OB}\right) \cdot r \cdot \text{sen}\,\theta}{2} = \frac{r \cdot r \cdot \text{sen}\,\theta}{2} = \frac{r^2 \text{sen}\,\theta}{2}.$$

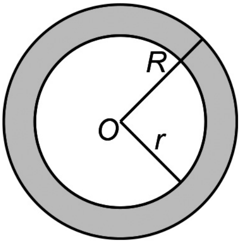
Substituindo a área do setor e a área do triângulo na expressão $A_{\substack{\text{setor}\\\text{circular}}} = A_{\Delta AOB} + A_{\substack{\text{segmento}\\\text{circular}}}$, temos:

$$\frac{\theta r^2}{2} = \frac{r^2 \text{sen}\,\theta}{2} + A_{\substack{\text{segmento}\\\text{circular}}} \quad \Rightarrow \quad A_{\substack{\text{segmento}\\\text{circular}}} = \frac{\theta r^2}{2} - \frac{r^2 \text{sen}\,\theta}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\theta - \text{sen}\,\theta\right)$$

Área da coroa circular

Denominamos de **coroa circular** a região delimitada por duas circunferências concêntricas de raios diferentes. Veja na Figura 4.43 a coroa circular determinada pelas circunferências de raios *R* e *r*.

Figura 4.43 | Coroa circular



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

Por que exige-se que os raios sejam diferentes na definição de coroa circular?

Suponha que queiramos determinar a área da coroa circular. Como proceder? Para determiná-la, considere a seguinte relação:

$$A_{\substack{\text{círculo}\\ \text{maior}}} = A_{\substack{\text{círculo}\\ \text{menor}}} + A_{\substack{\text{coroa}\\ \text{circular}}}.$$

Em posse dessa relação, efetuamos as substituições das áreas dos círculos e isolamos a área da coroa:

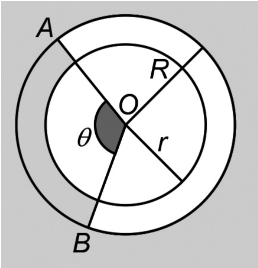
$$\pi R^2 = \pi r^2 + A_{\substack{\text{coroa}\\ \text{circular}}} \Rightarrow A_{\substack{\text{coroa}\\ \text{circular}}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

.

Exemplificando

Determine a área sombreada na Figura 4.44, construída por meio da interseção da coroa circular delimitada pelas circunferências de raios $R = 4$ m e $r = 3$ m e pelo setor circular AOB, considerando o ângulo θ igual a $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Figura 4.44 | Região de interseção da coroa circular com o setor circular



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução: para determinar a área da região, primeiramente precisamos determinar a área da coroa circular e, depois, utilizar uma relação de proporcionalidade para com o ângulo θ. Temos:

$$A_{\substack{\text{coroa}\\\text{circular}}} = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(4^2 - 3^2\right) = \pi \cdot 7 \; .$$

Conhecendo a área da coroa, utilizamos agora a seguinte relação de proporcionalidade:

Área		Ângulo
A_{coroa}	---------	2π rad
$A_{\substack{\text{região}\\\text{sombreada}}}$	---------	$\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

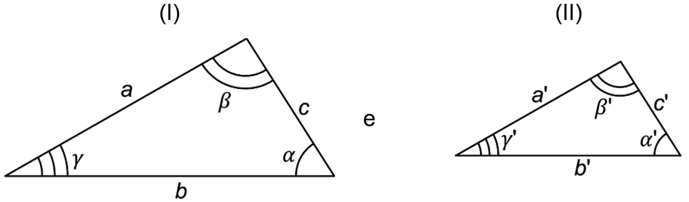
$$A_{\text{coroa}} \cdot \frac{2\pi}{3} = A_{\substack{\text{região}\\\text{sombreada}}} \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad A_{\substack{\text{região}\\\text{sombreada}}} = \frac{7\pi \cdot \dfrac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{7\pi}{3}$$

Portanto, a área da região sombreada é igual a $\dfrac{7\pi}{3}$ m^2.

Razão entre áreas de polígonos semelhantes

Você estudou na Seção 3.3 o conceito de semelhança, a partir do qual aprendeu que “dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos **ordenadamente congruentes** e os lados **homólogos** proporcionais” (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 198, grifo do autor). Apesar de termos abordado somente o caso dos triângulos, essa definição de semelhança se estende a qualquer polígono. Veja a representação disso na Figura 4.45.

Figura 4.45 | Triângulos semelhantes



são semelhantes se, e somente se,

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta', \ \gamma = \gamma' \quad \text{e} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k.$$

Fonte: elaborada pelo autor.

O valor k na Figura 4.45 é dito razão de semelhança e expressa o "quão maior" ou o "quão menor" é o triângulo (I) em relação ao triângulo (II). Se $k = 3$, por exemplo, temos que o triângulo (I) tem as medidas de seus lados, medianas, bissetrizes e alturas iguais ao triplo das medidas correspondentes do triângulo (II).

Agora que você já estudou esse conceito e também o de área de um polígono, questionamos: se construirmos o triângulo (I) a partir do triângulo (II) de modo que (I) possua suas medidas iguais ao triplo das medidas (II), quão maior será sua área? Também será o triplo? Pense um pouco a respeito e depois acompanhe o raciocínio seguinte.

Consideraremos para essa investigação h e h', as alturas dos triângulos (I) e (II) da Figura 4.45, respectivamente, e $k = 3$. Neste caso, temos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'} = 3 \quad \Rightarrow \quad b = 3b', \ h = 3h';$$

$$A_{\Delta(\mathrm{I})} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3b' \cdot 3h'}{2} = 3 \cdot 3 \cdot \underbrace{\frac{b' \cdot h'}{2}}_{A_{\Delta(\mathrm{II})}} = 9 \cdot A_{\Delta(\mathrm{II})}.$$

Simplificando, segue que:

$$A_{\Delta(\mathrm{I})} = 9 \cdot A_{\Delta(\mathrm{II})} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{\Delta(\mathrm{I})}}{A_{\Delta(\mathrm{II})}} = 9 = \underbrace{3}_{k}^{2}.$$

Perceba nas equações anteriores que a razão entre as áreas dos triângulos é igual a 9. Desse modo, a área não aumentou na mesma proporção que as medidas dos lados ou da altura. Enquanto a medida do lado do triângulo (I) aumentou três vezes quando comparada ao triângulo (II), a área aumentou nove vezes. Temos ainda que $9 = 3^2$ e a frase anterior poderia ser escrita como: enquanto as medidas dos lados aumentaram três vezes, a área aumentou um número de vezes igual ao quadrado de três. Essa percepção se daria seja qual fosse o valor de *k* escolhido. De modo geral, para qualquer polígono:

Assimile

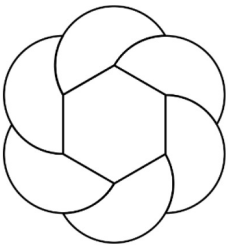
Se um polígono tem as medidas de todos os seus lados multiplicadas por *k*, formando um novo polígono semelhante, sua área aumentará k^2 vezes.

Esse resultado é válido também para qualquer figura plana, semelhante a outra por uma razão *k*.

Sem medo de errar

Agora que você já percorreu o conteúdo acerca da área do círculo e suas partes, basta se concentrar no desafio de selecionar o essencial para concluir o seu "resumão", tarefa que relembramos no início desta seção e que você já vem desenvolvendo no decorrer da Unidade 4. Lembre-se ainda de que você deve acrescentar uma atividade de vestibular que cobre esses conteúdos, acrescentando-lhe uma resolução detalhada, utilizando as fórmulas de cálculo necessárias. Diferentemente das seções anteriores, deixaremos você selecionar as fórmulas e ilustrá-las da maneira mais didática que conseguir. Iremos nos concentrar na resolução da seguinte questão, presente na prova do vestibular da Universidade Estadual de Londrina no ano de 2001:

Figura 4.46 | Enfeite de festa



Fonte: UEL (2001, p. 5)

Uma lembrança de festa foi confeccionada em cartolina a partir de um hexágono regular de lado igual a 3 cm. Com centro em cada vértice foram construídos semicírculos com raio igual ao lado do hexágono. A seguir, foi retirada a região do semicírculo que ficava por baixo do semicírculo seguinte, resultando a Figura 4.46. Use o valor 3,14 para π e o valor 1,73 para $\sqrt{3}$.

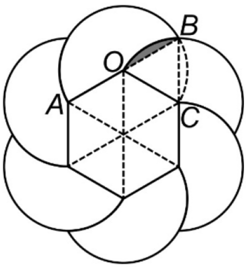
Assinale a alternativa que contém o valor mais aproximado da área total da figura.

a) $113{,}04\ \text{cm}^2$. b) $108{,}14\ \text{cm}^2$. c) $103{,}22\ \text{cm}^2$.

d) $84{,}78\ \text{cm}^2$. e) $82{,}52\ \text{cm}^2$.

Resolução: para compreender o cálculo da área total da figura, é necessário entender como ela é composta. Para isso, observe a Figura 4.47 e veja que o hexágono pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros congruentes de lado três cm.

Figura 4.47 | Enfeite de festa (decomposto)



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe também que a semirreta $\overrightarrow{AO}$ passa pelo ponto B de interseção das duas semicircunferências, a de centro *O* e a de centro *C*, determinando assim o segmento circular *OB*. Se você observar com atenção a Figura 4.46 e a Figura 4.47 verá então que a área total do enfeite é dada por:

$$A_{\text{enfeite}} = A_{\text{hexágono}} + 6 \cdot A_{\text{semicírculo}} - 6 \cdot A_{\substack{\text{segmento}\\ \text{circular}}}.$$

Vamos então calcular a área de cada um desses elementos para determinar a área total.

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\substack{\text{triângulo}\\ \text{equilátero}}} = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \approx \frac{27 \cdot 1{,}73}{2} = 23{,}355.$$

$$A_{\text{semicírculo}} = \frac{A_{\text{círculo}}}{2} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2} \approx \frac{9 \cdot 3,14}{2} = 14,13 .$$

$$A_{\substack{\text{segmento}\\ \text{circular}}} = \frac{r^2}{2}(\theta - \text{sen}\,\theta) = \frac{3^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9\pi}{6} - \frac{9\sqrt{3}}{4};$$

$$A_{\substack{\text{segmento}\\ \text{circular}}} \approx \frac{9 \cdot 3,14}{6} - \frac{9 \cdot 1,73}{4} = 0,8175.$$

Perceba no cálculo anterior que $\theta = \pi / 3 \text{ rad}$, pois é um ângulo interno de um triângulo equilátero. Agora, calculadas as áreas separadamente, podemos determinar a área total:

$$A_{\text{enfeite}} \approx 23,355 + 6 \cdot 14,13 - 6 \cdot 0,8175 = 103,23 .$$

Portanto, a área total é aproximadamente 103,23 cm^2, sendo que a alternativa que mais se aproxima é (c).

Agora que você já tem todo o repertório acerca do cálculo de áreas, basta realizar a entrega do "resumão" ao seu editor chefe. Lembre-se de compilar todo o seu trabalho das três seções desta unidade em um mesmo documento. Para finalizar a sua entrega, sugerimos a seguinte estrutura:

Figura 4.48 | Resumo (perímetros e áreas)

Resumo (perímetros e áreas)		
Perímetros	Áreas de polígonos	Área do círculo e suas partes
Fórmulas e figuras	*Fórmulas e figuras*	*Fórmulas e figuras*
Exemplo de aplicação:	Exemplo de aplicação:	Exemplo de aplicação:
Questão e resolução	*Questão e resolução*	*Questão e resolução*

Fonte: elaborada pelo autor.

Uma boa dica é: estude a concorrência e faça melhor que eles!

Avançando na prática

Como tratar de conceitos de Geometria com planilhas?

Descrição da situação-problema

Suponha que você esteja atuando como docente do ensino médio e que, durante o planejamento de suas aulas sobre áreas de figuras, você tenha resolvido tratar o cálculo da área do círculo utilizando ideias semelhantes às quais utilizamos aqui, mas sem abordar conteúdos como cálculos de limites como fizemos. (I)

Como você poderia utilizar uma planilha eletrônica, por exemplo, para convencer seus alunos de que, ao aumentarmos o número de lados de um polígono regular, sua área se aproxima da de um círculo circunscrito ao polígono? (II) Ou ainda, utilizando uma planilha eletrônica e conhecimentos acerca de áreas de polígonos e círculos, como você poderia mostrar aos seus alunos como obter aproximações numéricas para π?

Resolução da situação-problema

Pode parecer inadequado mediar uma aula de Geometria com o auxílio de uma planilha eletrônica, mas o domínio de ferramentas como essa é uma exigência cada vez mais frequente do mercado de trabalho e você, em sua atuação docente, deve preparar seus alunos para a vida profissional. Apresentamos aqui apenas uma possibilidade de uso e cabe a você pensar em outras.

Para o item (I), lembre-se de que determinamos a fórmula $A_{\substack{\text{polígono}\\\text{regular}}} = n \cdot r^2 \cdot \cos(\pi/n) \cdot \text{sen}(\pi/n)$ para a área do polígono regular de *n* lados, em que r é o raio da circunferência circunscrita ao polígono. Além disso, para a área do círculo delimitado por uma circunferência de raio *r*, temos a fórmula $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$. Podemos adotar um valor qualquer para r, digamos $r = 2$, para exibir que o aumento de *n* aproxima o valor $A_{\substack{\text{polígono}\\\text{regular}}}$ do valor $A_{\text{círculo}}$ Para isso, sugerimos que organize uma planilha como a da Figura 4.49.

Figura 4.49 | Preenchimento da planilha (passo 1)

	A	B	C	D
1	***n***	***r***	**Área do círculo de raio *r***	**Área do polígono regular de *n* lados**
2	3	2		
3	5	2		
4	10	2		
5	20	2		
6	40	2		
7	80	2		
8	160	2		
9	320	2		
10	740	2		
11	1480	2		

Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que já sugerimos alguns valores para n e estamos utilizando o valor 2 para r em todas as linhas. Para o preenchimento das colunas C e D da planilha, você deve converter as fórmulas para uma linguagem adequada, no caso, a fórmula da área do círculo, a ser inserida na célula C2, fica =(PI())*(B2)^2 e a fórmula para a área do polígono regular, a ser inserida na célula D2, fica =(A2)*(B2)^2*COS(PI() / (A2))*SEN(PI() / (A2)). Adaptando as fórmulas para as demais linhas ou utilizando recursos de preenchimento automático da planilha, você pode obter o resultado da Figura 4.50.

Figura 4.50 | Preenchimento da planilha (passo 2)

	A	B	C	D
1	***n***	***r***	**Área do círculo de raio *r***	**Área do polígono regular de *n* lados**
2	3	2	12,56637061	5,19615242
3	5	2	12,56637061	9,51056516
4	10	2	12,56637061	11,75570505
5	20	2	12,56637061	12,36067977
6	40	2	12,56637061	12,51475720
7	80	2	12,56637061	12,55345532
8	160	2	12,56637061	12,56314104
9	320	2	12,56637061	12,56556317
10	740	2	12,56637061	12,56621962
11	1480	2	12,56637061	12,56633287

Fonte: elaborada pelo autor.

Utilizando uma planilha como essa, você pode exibir facilmente a seus alunos como os valores ficam próximos à medida que o valor de n cresce. Além disso, se você adotar $r = 1$, a fórmula da área do círculo se reduz a $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 = \pi$, ou seja, com a mesma planilha, você pode ainda obter aproximações para o número π, como mostra a Figura 4.51.

Figura 4.51 | Preenchimento da planilha (passo 3)

	A	B	C	D
1	***n***	***r***	**Área do círculo de raio *r***	**Área do polígono regular de *n* lados**
2	3	1	3,14159265	1,29903811
3	5	1	3,14159265	2,37764129
4	10	1	3,14159265	2,93892626
5	20	1	3,14159265	3,09016994
6	40	1	3,14159265	3,12868930
7	80	1	3,14159265	3,13836383
8	160	1	3,14159265	3,14078526
9	320	1	3,14159265	3,14139079
10	740	1	3,14159265	3,14155491
11	1480	1	3,14159265	3,14158322

Fonte: elaborada pelo autor.

Tendo essas sugestões em mãos, pense em suas próprias estratégias e sintetize-as por meio de um plano de aula.

Faça valer a pena

1. O setor circular *AOB* pode ser definido como a região de interseção entre o círculo de centro no ponto *O* e raio $\overline{OA}$ de medida r, isto é, $r = m\left(\overline{OA}\right)$, e o ângulo central $A\hat{O}B$, sendo a medida desse ângulo representada por θ, ou seja, $m\left(A\hat{O}B\right) = \theta$.

Nas condições descritas, considere $r = 5{,}6$ cm e $\theta = 1{,}5$ rad.

Marque a alternativa que contém a área do setor circular descrito anteriormente:

a) 29,25 cm^2.

b) 27,52 cm^2 .

c) 24,52 cm^2 .

d) 23,52 cm^2 .

e) 21,25 cm^2 .

2. Dois círculos foram construídos da seguinte maneira:

Com um compasso em mãos, abriu-se suas hastes de modo que suas extremidades (ponta seca e grafite) ficassem distantes 5 cm uma da outra. Com a ponta seca em um ponto *A*, percorreu-se o papel com o grafite até completar uma volta.

O segundo círculo foi construído com o mesmo compasso, mas aumentando a abertura em 20%.

Em relação à área do segundo círculo, é correto afirmar que é maior em relação primeiro em um percentual de:

a) 20%.

b) 40%.

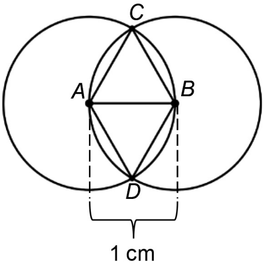
c) 44%.

d) 200%.

e) 400%.

3. Considere a figura construída pela sobreposição de parte de dois círculos secantes, ambos de raio igual a 1 cm, sendo um de centro A e outro de centro B, como mostra a Figura 4.52.

Figura 4.52 | Figura obtida por sobreposição



Fonte: elaborada pelo autor.

Leve em consideração ainda que os centros *A* e *B* distam 1 cm.

Marque a alternativa que contém a área total da figura:

a) 4,3 cm^2.

b) 4,8 cm^2.

c) 5,1 cm^2.

d) 5,5 cm^2.

e) 5,9 cm^2.

Referências

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE, A. E. **Geometria Plana e Trigonometria**. Curitiba: InterSaberes, 2014

COSTA, D. M. B. et al. **Elementos de Geometria**: Geometria Plana e Espacial. 3. ed. Curitiba: UFPR, 2012. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/elementos.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2017.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

UEL. Universidade Estadual de Londrina. **Concurso Vestibular – Julho 2001**. Disponível em: <http://www.cops.uel.br/vestibular/anteriores/docs/jul2001-dia-4.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2017.

Thomas, G. B. **Cálculo**, v.1. São Paulo: Pearson, 2009.

Anotações

ISBN 978-85-8482-927-9

9 788584 829279 >