Elementos da matemática

Elementos da matemática

José de França Bueno

© 2017 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente
Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação
Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico
Alberto S. Santana
Ana Lucia Jankovic Barduchi
Camila Cardoso Rotella
Cristiane Lisandra Danna
Danielly Nunes Andrade Noé
Emanuel Santana
Grasiele Aparecida Lourenço
Lidiane Cristina Vivaldini Olo
Paulo Heraldo Costa do Valle
Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica
Junior Francisco Dias

Editorial
Adilson Braga Fontes
André Augusto de Andrade Ramos
Cristiane Lisandra Danna
Diogo Ribeiro Garcia
Emanuel Santana
Erick Silva Griep
Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Bueno, José de França
B928e Elementos da matemática / José de França Bueno. –
Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2017.
240 p.

ISBN 978-85-522-0040-6

1. Matemática. I. Título.

CDD 510

2017
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Unidade 1 | Técnicas de demonstração 7

Seção 1.1 - Introdução à lógica matemática 9
Seção 1.2 - Validade das proposições 27
Seção 1.3 - Argumentação 49

Unidade 2 | Técnicas de demonstração 69

Seção 2.1 - Técnicas dedutivas diretas 71
Seção 2.2 - Técnicas dedutivas indiretas 89
Seção 2.3 - Indução matemática 105

Unidade 3 | Conjuntos e relações 123

Seção 3.1 - Teoria de conjuntos 125
Seção 3.2 - Conjuntos numéricos 145
Seção 3.3 - Produto cartesiano e relações 163

Unidade 4 | Funções Elementares 181

Seção 4.1 - Funções 183
Seção 4.2 - Zeros e extremos de uma função 205
Seção 4.3 - Inversa de uma função e composição 223

Palavras do autor

Nesta disciplina de Elementos da Matemática, você estudará tópicos da lógica matemática e das funções. Com o estudo da lógica matemática, você terá instrumentos para investigar a validade lógica de algumas afirmações e, eventualmente, erros em demonstrações de alguns teoremas. Veja que isto ultrapassa os limites da sala de aula ou mesmo da Matemática: em nosso cotidiano, somos bombardeados por propagandas ou notícias publicadas pela imprensa que podem conter falácias ou erros de argumentação. É um papel social muito relevante que um formador consiga identificar eventuais tentativas de manipulação por parte de quaisquer setores da sociedade.

Para a construção de sua autonomia intelectual é de grande importância que você aprenda a caminhar por conta própria, esse é o papel do autoestudo. Empenhe-se na leitura do material didático, acesse as webaulas e faça todas as tarefas solicitadas.

Esperamos que no decorrer desta disciplina você desenvolva um raciocínio lógico e estruturado e habilidades de análise, avaliação e concepção de demonstrações matemáticas, além do uso correto da linguagem simbólica, tabela-verdade, técnicas de demonstração diretas, contrapositiva, redução ao absurdo, indução matemática, operações entre conjuntos. Você também aprenderá a operar com conjuntos numéricos, compreender relações no plano cartesiano, determinar o domínio, contradomínio e imagem de funções, resolver problemas com as funções quadrática, polinomial e racional e identificar funções sobrejetoras, bijetoras e injetoras.

Iniciamos esta disciplina estudando, na Unidade 1, a diferença entre erros formais e erros materiais, os princípios da lógica, proposições, tabelas-verdade, equivalências lógicas, contradições e tautologias, noções de argumentação, dedução e indução.

Na Unidade 2, veremos o que é uma premissa, estudaremos as principais regras de inferência e silogismos. Continuaremos, nesta unidade, abordando a contrapositiva, redução ao absurdo e combinação de regras de inferência. Finalizamos essa unidade estudando proposições que envolvem números naturais, momento em que estudaremos o princípio da indução finita.

Na Unidade 3, trataremos da teoria dos conjuntos e dos conjuntos numéricos, fechando a unidade com relações no plano cartesiano e relações inversas.

Sequencialmente, na Unidade 4, estudaremos domínio, contradomínio, imagem, as funções constante, afim, quadrática, polinomial e racional. Estudaremos também injetividade, sobrejetividade e bijetividade.

Bons estudos!

Técnicas de demonstração

Convite ao estudo

Nesta primeira unidade, iniciaremos o estudo da lógica matemática com a intenção de usar esse conhecimento na comprovação e demonstração de afirmações matemáticas nas próximas unidades.

São objetivos específicos desta unidade:

• Distinção entre erro formal e erro material.

• Entendimento dos princípios da lógica e o que são proposições e conectivos lógicos.

Queremos que ao longo desta unidade você desenvolva um raciocínio lógico e estruturado, de forma que, nas unidades posteriores, você possa utilizar esse conhecimento na análise, avaliação e criação de demonstrações matemáticas.

Para iniciar nossos estudos, considere o seguinte contexto: imagine-se docente de Matemática no Ensino Médio e que a escola onde você está trabalhando solicitou o desenvolvimento de um projeto conjunto com os professores de Biologia e Língua Portuguesa. Após algumas reuniões, vocês decidiram utilizar como eixo de trabalho aspectos da lógica matemática: proposições lógicas, tabelas-verdade, equivalências lógicas, contradições e tautologias, bem como elementos de argumentação, dedução e indução. Com esse projeto, vocês pretendem valorizar o trabalho em equipe e a atitude investigativa.

O professor de Língua Portuguesa observou que a argumentação é importante na elaboração de uma dissertação e também nas nossas produções discursivas. Ao conversarmos ou escrevermos, estamos argumentando e buscando convencer nossos interlocutores sobre a validade de nossos argumentos, deduções e induções. Esse mesmo

professor complementou a discussão apresentando situações nas quais é evidente a impregnação mútua entre lógica, argumentação, conjuntos e Língua Portuguesa.

Já a professora de Biologia apresentou situações nas quais os alunos podem tirar conclusões falsas, com base em premissas válidas, e outras nas quais eles podem chegar a conclusões válidas, mas por meio de argumentações inválidas.

Seria possível desenvolver alguma ferramenta para pesquisar, de forma sistemática, a validade lógica de uma sequência de proposições? A principal questão a ser investigada em sala de aula é: existem proposições que, em qualquer condição das premissas, sejam sempre verdadeiras ou, por outro lado, que sejam sempre falsas? A ideia é que você e os seus colegas de trabalho possam, ao longo desta unidade, criar elementos para a discussão dessa questão.

Com esse objetivo em mente, vocês devem abordar as questões do erro material versus o erro formal, proposições lógicas, conectivos, tabelas-verdade, equivalências lógicas, tautologias e contradições, validade de uma argumentação e, por fim, o que são deduções e induções.

Depois de finalizar o projeto, a coordenadora pedagógica quer que vocês produzam um texto sintetizando as conclusões e sugestões para o trabalho do tema com os alunos.

Seção 1.1

Introdução à lógica matemática

Diálogo aberto

Na primeira seção desta unidade, você irá alavancar o projeto a ser desenvolvido em conjunto com os professores de Biologia e Língua Portuguesa, sendo que o primeiro enfoque será a diferenciação entre erros formais e erros materiais, ou factuais, tendo em vista os exemplos apresentados a seguir. Além disso, vocês irão descrever o que são proposições lógicas e conectivos lógicos.

Para resolver esta situação-problema, estudar a fundo proposições e conectivos lógicos é um pré-requisito. Para tal finalidade, considere a sequência de afirmações:

1. O escritor Guimarães Rosa nasceu em algum estado brasileiro da Região Sudeste, no século XX.

2. O escritor Machado de Assis nasceu no século XVI.

3. Conclusão: o escritor Machado de Assis nasceu antes de Guimarães Rosa.

Das afirmações anteriores, temos algumas questões para reflexão: você consegue identificar erros lógicos nessas frases? Elas são proposições? Como poderíamos representá-las por símbolos matemáticos para que possamos analisar com rigor e precisão?

Analise também as seguintes afirmações:

1. O escritor Guimarães Rosa nasceu em algum estado brasileiro da Região Sudeste, no século XX.

2. O escritor Machado de Assis nasceu no século XIX.

3. Conclusão: o escritor Machado de Assis nasceu após Guimarães Rosa.

O que podemos dizer sobre erros materiais e erros lógicos neste caso?

Por fim, considere esta sequência de afirmações:

1. Escorpiões são crustáceos.

2. Crustáceos têm glândulas mamárias.

3. Escorpiões tem glândulas mamárias.

Você consegue identificar em qual dessas afirmações temos erros? Os erros são da mesma natureza? É possível diferenciar o tipo de erro que temos nas três afirmações que utilizam exemplos de Língua Portuguesa daqueles que temos nas três afirmações que utilizam exemplos da Biologia? Podemos raciocinar com rigor lógico e mesmo assim chegarmos a conclusões que não sejam válidas do ponto de vista dos fatos?

Com base em toda essa discussão e pensando na primeira parte do texto que será entregue à coordenadora pedagógica, suponha que vocês três decidiram por apresentar:

a) Um primeiro exemplo com uma sequência de proposições lógicas e uma conclusão. Este exemplo deve estar, de alguma forma, relacionado com as Ciências Biológicas, com a Língua Portuguesa ou com a Matemática. Além disso, o exemplo deverá apresentar um erro formal. As proposições deverão ser apresentadas usando os conectivos lógicos.

b) Um segundo exemplo com uma sequência de proposições lógicas e uma conclusão (pode ser relacionado com as Ciências Biológicas, com a Língua Portuguesa ou com a Matemática). Este segundo exemplo deverá apresentar um erro material. As proposições deverão ser apresentadas usando os conectivos lógicos.

Para realizar tudo isso, você precisa de alguns conhecimentos que estão expostos a seguir. Vamos lá?

Não pode faltar

Para facilitar o estudo desta seção, ela foi divida em tópicos, sendo: (1) Erro formal e erro material; (2) Proposições; (3) Princípios da lógica; (4) Conectivos.

1. Erro formal e erro material

Pode-se tentar definir a lógica como a ciência que estuda os argumentos, suas premissas e conclusões, os métodos e princípios que possibilitam a distinção entre argumentos válidos e não válidos. Assim, não é objeto de estudo da lógica, o conteúdo das afirmações, mas sim a forma dos argumentos, ou seja, como eles estão estruturados.

Para explicar melhor a distinção entre forma e conteúdo, estudaremos os conceitos de erro formal (ou erro lógico) e erro material (ou erro factual). Vamos começar com alguns exemplos.

Observação: nos exemplos que veremos a seguir, temos proposições. De acordo com Baronet (2009, p. 29), proposições "são sentenças que são ou verdadeiras ou falsas". Na Subseção 2, detalharemos nosso estudo sobre proposições.

Exemplificando

Exemplo 1

Considere as proposições a seguir:

Proposição 1: elefantes têm 5000 kg de massa.

Proposição 2: seres humanos têm 80 kg de massa.

Proposição 3: formigas têm 0,1 g de massa.

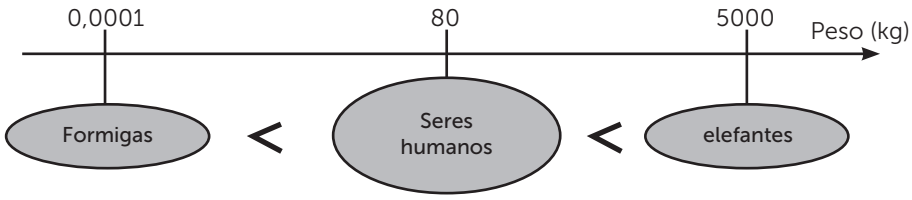
Conclusão: formigas têm menos massa do que os seres humanos.

Neste momento, vamos ignorar o que você provavelmente sabe sobre a massa dos elefantes, dos seres humanos e das formigas. Considere que elefantes, seres humanos e formigas sejam apenas "nomes de variáveis": podem ser quaisquer seres (ou objetos) que tenham, respectivamente, 5000 kg, 80 kg e 1 g de massa. O que é possível concluir?

A pergunta que fazemos é: supondo que as proposições 1, 2 e 3 sejam verdadeiras, é correto concluirmos que os "objetos", anteriormente denominados de formigas, têm menos massa do que os "objetos" denominados de seres humanos?

Para ajudar, observe a Figura 1.1, que está desenhada fora de escala.

Figura 1.1 | Formigas, seres humanos, elefantes e erros factuais e erros lógicos



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembrando das relações (do mundo "real") entre as massas de formigas, seres humanos e elefantes, sabemos que a conclusão obtida está correta, certo? Se você contar para alguma pessoa na rua que formigas pesam menos do que seres humanos e que estes, por sua vez, pesam menos do que elefantes, ninguém vai achar estranho. Não há nada de errado nisso, nem com a massa dos elefantes, dos seres humanos ou das formigas.

Exemplificando

Exemplo 2

Agora, considere este conjunto de afirmações:

Proposição 1: formigas têm 5000 kg de massa.

Proposição 2: elefantes têm 80 kg de massa.

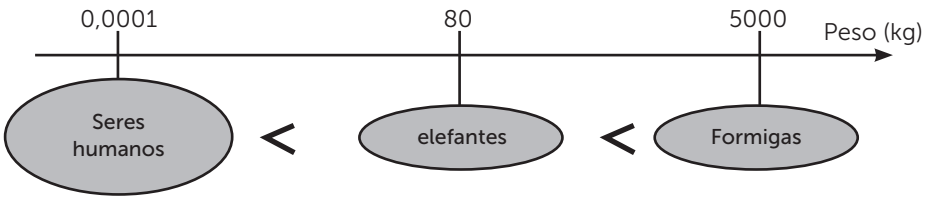
Proposição 3: seres humanos têm 0,1 g de massa.

Conclusão: seres humanos têm menos massa do que formigas.

Agora, vamos considerar que as proposições 1, 2 e 3 do exemplo 2 sejam verdadeiras. Novamente, os nomes "formigas", "elefantes" e "seres humanos" são apenas "nomes de variáveis". Não se referem, necessariamente, às formigas, elefantes e seres humanos do mundo "real".

Vamos montar a figura para nos ajudar:

Figura 1.2 | Seres humanos, elefantes, formigas, erros factuais e erros lógicos



Fonte: elaborada pelo autor.

E agora? A conclusão está correta ou não? Lembre-se: combinamos que vamos assumir como verdadeiras as proposições 1, 2 e 3 do exemplo 2. Você está considerando que os seres que nomeamos por "formigas" têm 5000 kg de massa, os "elefantes" têm 80 kg de massa e os "seres humanos" têm 0,1 g de massa.

Do ponto de vista do raciocínio lógico, do encadeamento entre as proposições que assumimos como verdadeiras, a conclusão está correta. Não há erro lógico. Dizemos

também que não há erro formal (erro de forma de raciocínio) neste exemplo 2.

Por outro lado, se lembrarmos do mundo real e pensarmos em formigas, elefantes e seres humanos, tais como os conhecemos, a afirmação passa a ter um erro de fato, também denominado de erro factual ou erro material. Afirmar que formigas têm 5000 kg de massa, elefantes têm 80 kg de massa e seres humanos 0,1 g de massa não corresponde à realidade.

Vejamos outro exemplo:

Exemplificando

Exemplo 3

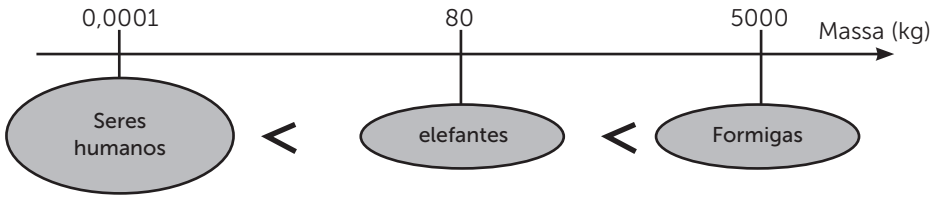
Proposição 1: formigas têm 5000 kg de massa.

Proposição 2: elefantes têm 80 kg de massa.

Proposição 3: seres humanos têm 1 g de massa.

Conclusão: formigas têm menos massa do que seres humanos.

Figura 1.3 | Seres humanos, elefantes, formigas e erros factuais e lógicos



Fonte: elaborada pelo autor.

Neste caso, temos um exemplo de um erro formal ou erro lógico. Supondo como verdadeiras as proposições 1, 2 e 3 do exemplo 3, do ponto de vista da forma do raciocínio, a conclusão de que formigas têm menos massa do que seres humanos não é correta. Embora do ponto de vista material (factual ou do fato) as formigas "reais" tenham menos massa do que os seres humanos.

Ao estudarmos lógica, que é o nosso foco, preocupamo-nos com a validade dos raciocínios, ou seja, com a relação entre as premissas e a conclusão. Do ponto de vista da lógica, não nos interessa a verdade material (concreta) das afirmações, mas sim a validade das conclusões, partindo-se de um determinado conjunto de premissas.

A partir das proposições 1, 2, 3 do exemplo 3, teremos que a conclusão "formigas têm menos massa do que seres humanos" terá de ser falsa. E esta conclusão não

precisa ter nenhuma relação com a verdade material de que formigas "reais" têm menos massa do que os seres humanos "reais".

O entendimento da lógica exige a distinção entre estas duas formas de se avaliar as informações que recebemos do mundo.

Após esses exemplos, vamos definir erro material e erro formal.

Assimile

Erro factual, erro material ou erro de conteúdo: dizemos que temos uma proposição que apresenta um erro factual ou erro material ou ainda erro de conteúdo se uma informação apresentada na proposição for falsa.

Veja outros exemplos (aqui cada proposição é independente das outras):

Proposição 1: você tem 300 anos de idade.

Proposição 2: a população do Brasil é de 50.000 habitantes.

Proposição 3: as aves têm glândulas mamárias.

Proposição 4: baleias são peixes.

Observe que, nos erros factuais ou materiais, estamos discutindo sobre o conteúdo da afirmação, e não sobre a "estrutura" ou forma.

Assimile

Erro lógico ou erro formal: dizemos que temos um erro lógico (ou erro formal) quando as informações iniciais, mesmo quando verdadeiras, permitem que cheguemos a conclusões falsas.

Por exemplo:

Proposição 1: Recife está ao norte de Salvador.

Proposição 2: Recife está ao norte do Rio de Janeiro.

Conclusão: Salvador está ao norte do Rio de Janeiro.

Da proposição 1, temos uma relação entre Recife e Salvador. Da proposição 2, temos uma relação entre Recife e Rio de Janeiro.

Contudo, estas duas relações (não interessa se são verdadeiras na realidade) não permitem que tiremos alguma conclusão válida sobre a relação entre Salvador e Rio

de Janeiro, sobre qual cidade está ao norte da outra.

Observe que nos erros lógicos (ou formais) o elemento em destaque são as relações entre as proposições e a conclusão. Ou seja, estamos preocupados com a forma da argumentação, e não o conteúdo das proposições.

2. Proposições

Na subseção anterior tratamos dos erros formais e erros materiais. Contudo, para que a lógica consiga tratar com rigor e eliminar a ambiguidade da língua natural, precisamos definir conceitos e símbolos. Com este objetivo, vamos tratar nesta subseção de proposições.

Considere as afirmações a seguir:

i) Curitiba é uma cidade da Região Sul do Brasil.

ii) Log(5) > 12.

iii) Vou ao cinema ou à praia.

iv) Vou ao cinema e à praia.

v) 3 + 2 = 19.

Todas elas são exemplos de proposições. Segundo Alencar Filho (2002, p. 11), "chama-se proposição todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo". Proposições devem ser sentenças afirmativas e declarativas.

Assim, não são proposições:

i) Carlos, vá guardar seus brinquedos! (não é uma frase declarativa, mas sim imperativa).

ii) $2^x = 10$ (uma sentença aberta na qual o valor lógico é função do valor da variável x).

iii) O filme foi fantástico! (esta é uma frase exclamativa).

iv) Você gosta de andar de bicicleta? (frase interrogativa).

Podemos representar proposições na linguagem natural, em português, inglês, chinês, por exemplo, ou utilizar alguma linguagem simbólica. Costuma-se representar as proposições utilizando letras latinas minúsculas: p, q, r, etc. Se uma proposição p tem valor lógico verdadeiro, escrevemos V(p) = **V**. Quando a proposição assume valor

lógico falso, escrevemos

V(p) = **F**.

Vejamos alguns exemplos:

i) p: Curitiba é uma cidade da Região sul do Brasil.

O valor lógico de p é verdadeiro. Assim, V(p) = **V**.

ii) q: 3 + 2 = 19.

O valor lógico de q é falso. Assim, V(q) = **F**.

3. Princípios da lógica

Ao longo da história, foram desenvolvidas várias lógicas. Elas foram chamadas de lógicas clássicas e de lógicas não clássicas, que se subdividem em extensões das lógicas clássicas e lógicas não clássicas heterodoxas. Nesta disciplina estamos inseridos no estudo da lógica matemática clássica.

A lógica clássica fundamenta-se em três princípios: o princípio da identidade, o princípio da não contradição e o princípio do terceiro excluído.

1. O princípio da identidade.

Qualquer proposição p é idêntica a ela mesma.

2. O princípio da não contradição.

Não é permitido que uma proposição seja, simultaneamente, verdadeira e falsa.

Ou seja: dada uma proposição p, p pode apenas assumir o valor lógico verdadeiro ou o valor lógico falso, mas nunca ambos ao mesmo tempo.

3. O princípio do terceiro excluído.

Uma proposição só pode ser verdadeira ou falsa, não podendo assumir um terceiro estado além desses dois.

Uma proposição p pode assumir o valor lógico verdadeiro ou o valor lógico falso, não podendo assumir nenhum outro valor lógico.

Pesquise mais

No link <https://www.youtube.com/watch?v=_q0UWz8Ia_A> (acesso em: 2 out. 2016) você encontrará uma breve história da lógica, começando em Aristóteles e chegando até Godel.

4. Conectivos

Os conectivos são utilizados para ligar uma proposição a outra, possibilitando a junção de duas ou mais proposições. Assim, teremos proposições que são formadas por mais de uma proposição. Vamos distingui-las entre simples e compostas. A seguir apresentamos alguns exemplos de proposições simples:

i) $5 + 9 = 22$.

ii) Fobos é um satélite natural de Marte.

iii) $3/7 < \log(30)$.

iv) Paris é capital da França.

A seguir temos a definição de proposições simples:

Assimile

Proposições simples: são proposições que não têm outras proposições com integrantes. As proposições simples também são denominadas de proposições atômicas.

Proposições como as que seguem são denominadas de proposições compostas:

p: Vou ao parque e à praia.

q: 11 é ímpar ou log(2) é um número irracional.

Veja a seguir a definição de proposição composta:

Assimile

Proposições compostas: são proposições constituídas pela junção de proposições simples. As proposições compostas também são denominadas de proposições moleculares.

Quando queremos combinar proposições simples para formar compostas, utilizamos operadores denominados de conectivos.

Na Tabela 1.1, temos as operações lógicas, os conectivos e seus símbolos. Você pode encontrar, nos textos de lógica, mais de uma representação para cada um dos conectivos.

Tabela 1.1 | Conectivos e respectivos símbolos

Conectivo	Operação	Símbolo
E	Conjunção	$\cdot, \wedge, \&$
Ou	Disjunção	$\vee, +$
Não	Negação	$\sim, \neg, '$
se... então	Condicional	$\supset, \rightarrow$
Se e somente se	Bicondicional	$\leftrightarrow$

Fonte: adaptada de Alencar Filho (2002); Daglhian (1995).

A seguir, vejamos exemplos com cada um destes conectivos.

Negação

Considere a proposição:

p: algum torcedor de futebol é fanático.

Como seria a negação da proposição p? Representamos a negação de uma proposição p com o símbolo "~" à frente do símbolo que representa a proposição. Assim,

~p: nenhum torcedor de futebol é fanático.

Suponha que o valor lógico de p seja verdadeiro: V(p) = **V**. Então, o valor lógico da negação de p será, sempre, falso: V(~p) = **F**.

Vejamos outro exemplo de negação:

Se q: 3 + 2 = 5, então, a negação de q será: ~q: 3 + 2 ≠ 5.

Conjunção

Sejam p e q duas proposições. A conjunção de p e q (escreve-se $p \wedge q$ ou alternativamente $p \cdot q$ ou, ainda, em alguns textos você poderá encontrar $p \& q$) será uma proposição com valor lógico verdadeiro apenas quando os valores lógicos de p e q forem, ao mesmo tempo, verdadeiros. O valor lógico da conjunção $p \wedge q$ será falso

em todos os outros casos. Lê-se a conjunção $p \wedge q$ como "p e q".

Veja um exemplo:

p: Carlos é magro

e

q: Pedro é míope.

Logo, $p \wedge q$: Carlos é magro e Pedro é míope.

Se qualquer uma das proposições p ou q for falsa (ou ainda, se ambas forem falsas), então, a conjunção $p \wedge q$ terá valor lógico falso: $\mathbf{V}(p \wedge q) = \mathbf{F}$.

A única condição na qual $\mathbf{V}(p \wedge q) = \mathbf{V}$ será quando V(p) = **V** e V(q) = **V**.

Exemplos

Considere as proposições:

p: Antônio é palmeirense

q: Maria é vascaína.

A conjunção $p \wedge q$: Antônio é palmeirense e Maria é vascaína terá valor lógico verdadeiro apenas na situação em que V(p) = **V** e V(q) = **V**. Se Antônio não for palmeirense, mas Maria for vascaína $\mathbf{V}(p \wedge q) = \mathbf{F}$. Se Antônio for palmeirense e Maria não for vascaína, também teremos $\mathbf{V}(p \wedge q) = \mathbf{F}$. Finalmente, se nem Antônio for palmeirense nem Maria for vascaína, também teremos $\mathbf{V}(p \wedge q) = \mathbf{F}$.

Disjunção

A disjunção de duas proposições p e q é representada por $p \vee q$ e terá valor lógico verdadeiro quando uma das duas proposições p ou q for verdadeira ou, ainda, quando ambas forem verdadeiras. Ela será falsa apenas quando ambas, p e q, tiverem valor lógico falso. Lê-se a disjunção $p \vee q$ como "p ou q". Vejamos exemplos:

p: Buenos Aires é a capital da Macedônia.

q: Brasília é a capital da Indonésia.

Neste caso, temos: V(p) = **F** e V(q) = **F**. Então, neste caso, $\mathbf{V}(p \vee q) = \mathbf{F}$.

Outro exemplo:

p: $\sqrt{2} = 5$

q: $\log(10) = 1$

A disjunção será p $\vee$ q: $\sqrt{2} = 5$ ou $\log(10) = 1$.

Temos que V(p) = **F** e V(q) = **V**. Então, neste caso, $V(p \vee q) = \mathbf{V}$.

Reflita

Considere a proposição r: $p \wedge q$, com

p: João é jogador de futebol

q: Carlos é jogador de basquete.

Como fica a negação de r: ~r em linguagem natural? E em linguagem simbólica?

Condicional

A condicional é uma proposição do tipo "se p então q". Representa-se simbolicamente a condicional "se p então q" da seguinte forma $p \rightarrow q$. Esta proposição assume valor lógico falso quando V(p) = **V** e V(q) = **F**. Nos outros casos, $V(p \rightarrow q) = \mathbf{V}$.

Exemplos:

p: Gauss foi um matemático europeu.

q: Tom Jobim foi um músico cubano.

Qual é o valor lógico da proposição se Gauss foi um matemático europeu, então, Tom Jobim foi um músico cubano? Como V(p) = **V** e V(q) = **F**, temos que $V(p \rightarrow q) = \mathbf{F}$.

Observe com cuidado a condicional: se o valor lógico da proposição p for verdadeiro, então, é verdadeiro concluir a proposição q.

Bicondicional

Denomina-se proposição bicondicional aquela do tipo "p se e só se q". Representa-se a bicondicional em símbolos por $p \leftrightarrow q$. O valor lógico de uma proposição bicondicional será verdadeiro em duas situações: (1ª) quando as duas proposições p e q forem verdadeiras; (2ª) quando as duas proposições p e q forem falsas. Se as proposições p e q assumirem valores lógicos distintos (uma delas é verdadeira e a outra é falsa), então, a bicondicional assumirá valor lógico falso.

Vejamos exemplos:

p: Buenos Aires é capital da Argentina.

q: Chico Buarque é um cantor brasileiro.

Temos a bicondicional: $p \leftrightarrow q$. Como V(p) = **V** e V(q) = **V**, então, V (p $\leftrightarrow$ q) = V.

Lemos a proposição bicondicional da seguinte forma: p é condição necessária e suficiente para q ou, alternativamente: q é condição necessária e suficiente para p.

Outro exemplo:

p: sen(0) = 1

q: cos(0) = 0

Sabemos que V(p) = **F** e que V(q) = **V**, então, $\mathbf{V}(p \leftrightarrow q) = \mathbf{V}$.

Pesquise mais

Na videoaula da Univesp TV, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=__m60SKn-Dw> (acesso em: 6 out. 2016), o professor Nilson José Machado discute um pouco sobre a relação entre Matemática, língua materna, lógica, linguagem do cotidiano e situações-problemas.

Sem medo de errar

Como primeira parte da discussão da situação-problema apresentada no início desta seção, você deverá definir o que é uma proposição lógica e o que são conectivos lógicos. Pesquise em livros de lógica matemática (use as referências bibliográficas ou sites confiáveis na Internet). Estas definições deverão constar no texto a ser entregue para nossa coordenadora pedagógica fictícia.

Lembre-se da primeira sequência de afirmações:

1. O escritor Guimarães Rosa nasceu em algum estado brasileiro da Região Sudeste, no século XX.

2. O escritor Machado de Assis nasceu no século XVI.

3. Conclusão: o escritor Machado de Assis nasceu antes de Guimarães Rosa.

Se fizermos uma breve pesquisa na Internet, descobriremos que o escritor João Guimarães Rosa nasceu em Cordisburgo, estado de Minas Gerais, em 1908. Portanto, a afirmação 1 é uma verdade factual ou verdade material. Trata-se de um fato verdadeiro. Já o escritor Machado de Assis nasceu em 1839 (no século XIX). A afirmação 2 não é

uma verdade factual. Mesmo assim, a conclusão é uma verdade factual: Machado de Assis nasceu antes de Guimarães Rosa.

Por outro lado, se admitirmos que as afirmações 1 e 2 são verdadeiras, então, do ponto de vista da lógica, a afirmação 3 terá de ser verdadeira, de qualquer modo. Este é um exemplo de que podemos ter uma verdade lógica e ao mesmo tempo erros materiais.

Considere agora:

1. O escritor Guimarães Rosa nasceu em algum estado brasileiro da Região Sudeste, no século XX.

2. O escritor Machado de Assis nasceu no século XIX.

3. Conclusão: o escritor Machado de Assis nasceu após de Guimarães Rosa.

Neste caso, as afirmações 1 e 2 são verdades materiais. De fato Guimarães Rosa nasceu no século XX e Machado de Assis nasceu no século XIX. Contudo, temos um erro lógico. Se 1 e 2 são verdadeiras, é um erro concluirmos que Machado de Assis nasceu após Guimarães Rosa.

Finalmente, observemos o terceiro conjunto de afirmações:

1. Escorpiões são crustáceos.

2. Crustáceos têm glândulas mamárias.

3. Escorpiões têm glândulas mamárias.

Se assumirmos como verdadeiras as afirmações 1 e 2, então, do ponto de vista lógico, somos obrigados a concluir que escorpiões têm glândulas mamárias. Assim, temos um exemplo de uma verdade formal. Sobre as afirmações 1 e 2, pesquisando em textos de Biologia, você poderá conferir que escorpiões não são crustáceos e que crustáceos não têm glândulas mamárias. Logo, as afirmações 1 e 2 são erros materiais: nem crustáceos têm glândulas mamárias nem escorpiões são crustáceos. Contudo, temos uma verdade formal: este é um exemplo de uma verdade formal, mas com erros materiais. Ou seja, respondemos que não é correto afirmar que toda verdade formal, necessariamente, também será uma verdade factual.

Finalmente, não se esqueça de preparar um texto compilando a sua interpretação dessa discussão, conforme proposto inicialmente. Sintetizar suas ideias em forma de texto auxiliam no processo de aprendizagem.

Avançando na prática

Qual é a diferença entre erro material e erro lógico?

Descrição da situação-problema

Você está na sala dos professores com seus colegas de projeto: a professora de Biologia e o professor de Língua Portuguesa. A professora de Geografia resolveu ver de que forma ela poderia participar do projeto. Após conversarem alguns minutos, vocês produziram as afirmações a seguir:

1. A área do Brasil é maior que a área da Argentina.

2. A área do Peru é maior que a área da Argentina.

3. A área da Argentina é maior que a área da Guatemala.

Conclui-se que:

4. A área da Guatemala é maior que a área do Peru.

Suponha que as afirmações 1, 2 e 3 sejam verdadeiras.

O que podemos afirmar sobre a conclusão, do ponto de vista lógico? É verdadeira? É falsa? Pode ser verdadeira ou falsa? Não pode ser nem verdadeira nem falsa? É um erro lógico concluir que a afirmação 4 é verdadeira?

Pesquise na internet sobre as áreas dos países citados. Há erro material nas afirmações 1, 2 e 3? Há erro material na conclusão?

Resolução da situação-problema

Inicialmente, vamos considerar as proposições 1, 2 e 3 como verdadeiras.

Então, é válido que: área (Brasil) > área (Argentina); área (Peru) > área (Argentina); área (Argentina) > área (Guatemala).

Dessas desigualdades podemos afirmar que área (Peru) > área (Argentina) > área (Guatemala). Assim, do ponto de vista lógico, a afirmação 4 é falsa. Concluir que a afirmação 4 seria verdadeira seria um erro lógico.

Agora, vamos considerar a questão do erro material (ou factual – baseado nos fatos). Após pesquisar na internet (por exemplo <http://paises.ibge.gov.br/#/pt>. Acesso em: 9 nov. 2016), vemos que:

Área (Brasil) = $8.516.000\ km^2$.

Área (Argentina) = $2.780.000\ km^2$.

Área (Peru) = $1.285.000\ km^2$.

Área (Guatemala) = $108.889\ km^2$.

Do ponto de vista material, as afirmações 1 e 3 são verdadeiras e a afirmação 2 é falsa. A afirmação 4 é falsa do ponto de vista material.

Faça valer a pena

1. Um problema recorrente na aprendizagem é a "tradução". O professor deve se certificar de que seus alunos sabem "traduzir" as informações recebidas da linguagem natural para a linguagem simbólica, bem como efetuar a tradução "inversa": da linguagem simbólica para a linguagem natural.

Considere as proposições:

p: Marcela é flamenguista.

q: Paula é engenheira de alimentos.

r: Sílvia é advogada.

Em símbolos, temos as proposições:

1. $\sim r \wedge \sim q$

2. $\sim p \vee q$

Ao traduzir as proposições compostas 1 e 2 para a linguagem natural, teremos, respectivamente:

a)

1. $\sim r \wedge \sim q$: não é verdade que Sílvia é advogada ou que Paula é engenheira de alimentos.

2. $\sim p \vee q$: Marcela é flamenguista ou Paula não é engenheira de alimentos.

b)

1. $\sim r \wedge \sim q$: não é verdade que Sílvia é advogada nem que Paula é engenheira de alimentos.

2. $\sim p \vee q$: Marcela não é flamenguista ou Paula é engenheira de alimentos.

c)

1. $\sim r \wedge \sim q$: não é verdade que Sílvia é advogada ou que Paula é engenheira de alimentos.

2. $\sim p \vee q$: Marcela não é flamenguista ou Paula é engenheira de alimentos.

d)

1. $\sim r \wedge \sim q$: Sílvia é advogada e Paula é engenheira de alimentos.

2. $\sim p \vee q$: não é verdade que Marcela é flamenguista ou Paula é engenheira de alimentos.

e)

1. $\sim r \wedge \sim q$: nem Sílvia é advogada nem Paula é engenheira de alimentos.

2. $\sim p \vee q$: Marcela não é flamenguista e Paula é engenheira de alimentos.

2. A lógica não trata do conteúdo das proposições, mas sim da forma dos raciocínios. Para isto, ao longo do tempo, os estudiosos acabaram por desenvolver um conjunto de símbolos que facilitam o estudo do "formato" dos raciocínios lógicos.

Ao utilizarmos os "símbolos" da lógica simbólica, buscamos eliminar a ambiguidade da língua natural e assegurar consistência.

Raciocínio 1: se "x < 6" é verdadeira ou se "y = 11", então, "z é um número inteiro" é verdadeira.

Raciocínio 2: se João foi à praia é verdade ou se Carlos foi ao cinema é verdade, então, Fátima foi ao parque.

Os dois raciocínios têm o mesmo "formato": se p ou q, então, r.

Considere as proposições:

p: João é engenheiro.

q: Pedro é professor.

r: Carlos é magro.

Considere as proposições a seguir:

1. Não é verdade que João é engenheiro ou é verdade que Pedro é professor.

2. Se Carlos não é magro, então, Pedro não é professor.

3. João é engenheiro se, e somente se, Carlos não é magro.

A alternativa que representa simbolicamente as afirmações 1, 2 e 3, respectivamente, é:

a) 1: $\sim p \vee q$; 2: $r \rightarrow \sim q$; 3: $\sim (p \leftrightarrow r)$.

b) 1: $p \vee q$; 2: $\sim r \rightarrow q$; 3: $p \leftrightarrow r$.

c) 1: $\sim p \vee q$; 2: $\sim r \rightarrow \sim q$; 3: $p \leftrightarrow \sim r$.

d) 1: $p \vee \sim q$; 2: $\sim r \rightarrow \sim q$; 3: $\sim p \leftrightarrow \sim r$.

e) 1: $\sim p \vee \sim q$; 2: $r \rightarrow q$; 3: $\sim p \leftrightarrow r$.

3. O conectivo disjunção $p \vee q$ assume valor verdadeiro se qualquer uma das proposições p ou q tiver valor lógico verdadeiro.

Já a conjunção $p \wedge q$ assume valor lógico verdadeiro apenas quando as proposições tiverem valor lógico verdadeiro.

Considere as proposições a seguir:

p: Machado de Assis é autor de Grande Sertão: Veredas.

q: Todo retângulo é um quadrado.

Então, é correto afirmar que:

a) $V(p \wedge q)=\mathbf{V}$.

b) $V(p \vee q)=\mathbf{V}$.

c) $V(\sim p \wedge q)=\mathbf{V}$.

d) $V(\sim p \vee \sim q)=\mathbf{V}$.

e) $V(\sim (p \vee q))=\mathbf{F}$.

Seção 1.2

Validade das proposições

Diálogo aberto

Na seção anterior, estudamos a distinção entre erros formais e erros materiais, o que são proposições lógicas e conectivos lógicos.

Você se lembra do projeto em equipe que você, como professor de Matemática, estava conduzindo com os professores de Biologia e Língua Portuguesa? Dando continuidade ao projeto, vocês três, em reunião, coletaram questionamentos apresentados pelos alunos. Um deles apresentou um "desafio lógico" aos colegas de sala. O desafio lógico é o seguinte:

Considere que um pesquisador da área de Biologia está investigando um tratamento para determinada moléstia, em duas raças de gado. Chamaremos essas raças de X e Y.

Quando o tratamento é utilizado na raça X, vale a proposição:

a: Se o tratamento é utilizado, os animais não adoecem.

Quando o tratamento é utilizado na raça Y, vale a proposição:

b: O tratamento é utilizado se, e somente se, os animais não adoecem.

Suponha que os animais da raça X e da raça Y não adoeceram. O desafio lógico é: como podemos concluir se o tratamento foi utilizado na raça X ou na raça Y, em ambas ou em nenhuma delas?

O desafio lógico proposto pelo aluno apresenta a oportunidade para discutirmos dois tópicos na lógica matemática:

i) Ao conectar várias proposições lógicas, por meio de conectivos, podem surgir ambiguidades. Como podemos decidir pelo valor lógico dessa combinação de proposições? Para responder a esta questão estudaremos quando as expressões da lógica simbólica são ditas bem formadas.

ii) Será que é possível apresentar uma "ferramenta" prática para ajudar a decidir se

uma proposição composta é verdadeira ou falsa?

Como outro questionamento apresentado, um dos alunos observou que, quando estudamos funções na Matemática, aprendemos sobre funções constantes: são aquelas iguais a um certo valor qualquer que seja o valor da variável. O aluno perguntou a você: existe algo parecido na lógica matemática? Temos proposições que são "constantes"? Assumem sempre o mesmo valor? Será que pode existir proposições lógicas que sempre assumam valor lógico verdadeiro ou, ao contrário, sempre assumam valor lógico falso?

Para responder a este questionamento, você e seus colegas de Língua Portuguesa e Biologia devem enviar a segunda parte do texto para a coordenadora. Nesse texto, vocês devem apresentar:

a) Um exemplo de proposição, em língua natural, que seja sempre verdadeira.

b) Um exemplo de proposição composta, em língua natural, que seja sempre falsa.

c) Um exemplo de proposição composta, em língua natural, que dependendo dos valores lógicos das proposições simples que a constituam, seja por vezes falsa e, para outros valores das proposições simples que a constituam, seja verdadeira.

Não pode faltar

Quando estamos diante de um problema lógico, podemos fazer uso das proposições e da linguagem vista na seção anterior para representá-las. Além disso, precisamos, muitas vezes, fazer uso dos parêntesis para que possamos representar corretamente aquilo que se quer dizer. Iniciaremos conversando sobre a colocação, ou não, desses parêntesis e quando devemos fazer isso.

1. Parêntesis e fórmulas bem formadas

Na seção anterior, estudamos os conectivos e vimos como determinar o valor lógico de proposições simples. Assim como nas operações aritméticas, também temos uma regra de precedência para os conectivos:

1º. A negação $\sim$.

2º. Conjunção $\wedge$ e disjunção $\vee$.

3º. Condicional $\rightarrow$.

4º. Bicondicional $\leftrightarrow$.

Também para os conectivos, podemos utilizar parêntesis para alterar as regras de precedência entre eles. Os parêntesis mais internos devem ser calculados antes daqueles mais externos, e todo parêntese aberto deve ser fechado.

Exemplificando

a) Considere a proposição:

$$p \vee q \leftrightarrow r \rightarrow s$$

Esta proposição é uma bicondicional, pois tem como precedência a disjunção e a condicional. Em primeiro lugar, efetuamos $p \vee q$. Depois, efetuamos a condicional $r \rightarrow s$. Por fim, efetuamos a bicondicional.

Para que a proposição anterior seja lida como uma condicional, devemos utilizar parêntesis:

$$(p \vee q \leftrightarrow r) \rightarrow s$$

Para que a proposição anterior seja lida como uma disjunção, alteramos os parêntesis para:

$$p \vee (q \leftrightarrow r \rightarrow s)$$

b) A proposição $(p \rightarrow s) \vee q$ é uma disjunção. O parêntesis nos obriga a calcular primeiro a expressão $(p \rightarrow s)$ para só então efetuarmos a disjunção. Como a última operação lógica a ser realizada é uma disjunção, dizemos que a proposição $(p \rightarrow s) \vee q$ é uma disjunção.

Fórmulas bem formadas

Na linguagem natural temos ambiguidades. Enquanto na nossa comunicação do dia a dia tais ambiguidades são esclarecidas ou pelo contexto ou quando perguntamos ao nosso interlocutor aquilo que não ficou claro, na construção de proposições na lógica, deve-se evitar tais ambiguidades. Ao tratarmos de expressões simbólicas na lógica, queremos evitar a possibilidade de dúvidas na interpretação de uma fórmula.

Denomina-se fórmula qualquer sequência de símbolos do cálculo proposicional, entretanto, não é qualquer fórmula que pode ser aceita no cálculo proposicional.

As fórmulas que são aceitas no cálculo proposicional são denominadas de fórmulas bem formadas (*well formed formulas ou wff*). Para a construção de fórmulas bem formadas, as regras seguintes devem ser obedecidas (BISPO, CASTANHEIRA, FILHO, 2012):

1ª Regra: uma proposição simples é uma fórmula bem formada.

2ª Regra: a negação de uma fórmula bem formada é uma fórmula bem formada (se p é bem formada, então, ~p também é bem formada).

3ª Regra: se p e q são fórmulas bem formadas, então, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q)$ também são fórmulas bem formadas.

Em fórmulas bem formadas, todos os parêntesis abertos devem ser fechados.

A seguir, temos dois exemplos de fórmulas mal formadas, pois não respeitaram a terceira regra para fórmulas bem formadas:

a) $p \rightarrow \vee q$.

b) $q \wedge \leftrightarrow r \rightarrow \wedge p$.

Já a fórmula $q \rightarrow (r \vee s$ não é bem formada pois um parêntesis foi aberto e não foi fechado.

Considere os dois exemplos a seguir com relação à colocação dos parêntesis.

a) Considere a proposição: $p \vee q \leftrightarrow r \rightarrow s$. Esta proposição é uma bicondicional, pois tem como precedência a disjunção e a condicional. Em primeiro lugar, efetuamos $p \vee q$. Depois, efetuamos a condicional $r \rightarrow s$. Por fim, efetuamos a bicondicional.

Para que a proposição anterior seja lida como uma condicional, devemos utilizar parêntesis:

$$(p \vee q \leftrightarrow r) \rightarrow s.$$

Para que a proposição anterior seja lida como uma disjunção, alteramos os parêntesis para:

$$p \vee (q \leftrightarrow r \rightarrow s).$$

b) A proposição $(p \rightarrow s) \vee q$ é uma disjunção. O parêntesis nos obriga a primeiro calcular a expressão $p \rightarrow s$, para só então efetuarmos a disjunção. Como a última operação lógica a ser realizada é uma disjunção, dizemos que a proposição $(p \rightarrow s) \vee q$ é uma disjunção.

Pesquise mais

Para conhecer mais sobre fórmulas bem formadas, consulte, na Biblioteca Virtual, o livro Fundamentos de Lógica de Edivaldo Soares.

Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522488377/cfi/150!/4/4@0.00:58.6>. Acesso em: 21 nov. 2016).

Quando temos fórmulas bem formadas e desejamos saber seus possíveis valores lógicos, para poder inferir sobre elas, podemos montar o que chamamos de tabela-verdade. Vamos estudá-las a seguir.

2. Tabelas-verdade

Tabela-verdade é um recurso que apresenta o valor lógico de uma proposição a partir dos valores lógicos das proposições que a constituem. Inicialmente, veremos as tabelas-verdade para os conectivos estudados na seção anterior.

Na sequência, aprederemos como usar a tabela-verdade para determinar o valor lógico de proposições compostas.

Em primeiro lugar, veremos a tabela-verdade da negação ("não"). Se p é uma proposição verdadeira, então, ~p será falsa. E se p for falsa, ~p terá valor lógico verdadeiro. Assim, a tabela-verdade da negação é:

Tabela 1.2 | Tabela-verdade da negação

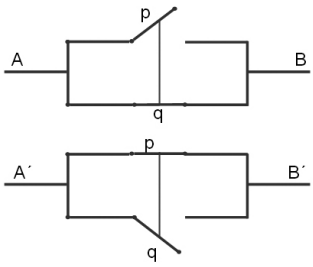
p	~p
V	F
F	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Para ilustrar a negação, considere dois interruptores ligados por uma "barra fixa". Suponha que inicialmente o interruptor p esteja desligado e o interruptor q esteja ligado. Assim, o valor lógico de p será "zero" ou falso e o valor lógico de q será "um" ou verdadeiro. Ao fecharmos o interruptor p, a barra fixa "empurrará" o interruptor q para o estado contrário ao do interruptor p.

Nesta nova condição de chaveamento, o interruptor p estará ligado (valor lógico verdadeiro) e o interruptor q estará desligado (valor lógico falso).

Figura 1.4 | Representação da negação com dois interruptores acoplados



Fonte: adaptada de Castrucci (1975).

A conjunção de duas proposições p e q, que simbolizamos por $p \wedge q$, assume valor lógico verdadeiro apenas quando ambas, p e q, forem verdadeiras, e assume valor lógico falso nos casos restantes. Neste caso, a tabela-verdade da conjunção será:

Tabela 1.3 | Tabela-verdade da conjunção

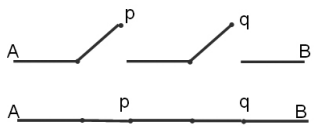
p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

É interessante você fazer uma analogia da conjunção com um circuito elétrico em série.

A lâmpada se acenderá apenas se as duas chaves, simultaneamente, forem acionadas. Se qualquer uma delas ou se ambas estiverem abertas, a lâmpada permanecerá aberta. Veja a Figura 1.5 de interruptores em série: exemplo da conjunção ("e") (o circuito estará fechado apenas quando ambas as chaves estiverem fechadas).

Figura 1.5 | Exemplo de conjunção



Fonte: elaborada pelo autor.

A disjunção de duas proposições p e q, que simbolizamos por $p \vee q$, assume valor falso apenas quando ambas as proposições forem falsas, assumindo valor lógico verdadeiro nas outras situações. Assim, sua tabela-verdade será:

Tabela 1.4 | Tabela-verdade da disjunção

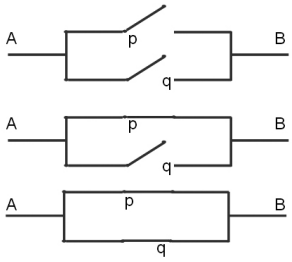
p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Você pode fazer uma analogia da disjunção com um circuito elétrico em paralelo. A lâmpada não se acenderá apenas quando ambas as chaves estiverem abertas. Ou seja, o estado lógico da disjunção é falso apenas quando o valor lógico das proposições p

e q forem ambos falsos. Se qualquer uma das chaves (ou mesmo se ambas) estiverem fechadas, a lâmpada de acenderá (por isso a associação da disjunção com o "ou"). Veja a Figura 1.6 a seguir.

Figura 1.6 | Interruptores em paralelo: exemplo da conjunção "ou" (o circuito estará ligado se qualquer uma das chaves p ou q estiver fechada)



Fonte: elaborada pelo autor.

Em uma condicional $p \rightarrow q$, denomina-se por antecedente a proposição p e por consequente a proposição q. No caso da condicional, a tabela-verdade é:

Tabela 1.5 | Tabela-verdade da condicional

p	Q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

É frequente alguma dificuldade na compreensão dos valores lógicos da condicional. Vejamos com um pouco mais de cuidado a tabela-verdade deste conectivo. Observe que uma condicional só será falsa se o antecedente for verdadeiro e o consequente for falso. Nos outros casos, a condicional assume valor lógico verdadeiro.

Observe a primeira linha da tabela-verdade: se V(p) = F, qualquer conclusão que obtivermos será verdadeira (já que estamos partindo de um antecedente falso, qualquer coisa que concluirmos será verdadeira). Assim, $\mathbf{V(p \rightarrow q) = V}$. Na última linha da tabela-verdade temos V(p) = **V** e V(q) = **V**. Se o antecedente tem valor lógico verdadeiro e o consequente também, então, a condicional será verdadeira.

Resta a terceira linha: a condicional $p \rightarrow q$ será falsa se partimos de um antecedente verdadeiro e chegarmos a uma conclusão falsa. Certamente, partindo de uma proposição p verdadeira, não pode ser verdadeiro obtermos uma proposição q cujo valor lógico seja falso.

A tabela-verdade da bicondicional é dada a seguir:

Tabela 1.5 | Tabela-verdade da condicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

A partir da construção dessas tabelas-verdade, podemos ver a aplicação desta ferramenta na determinação do valor lógico de proposições compostas. Considere a proposição composta $(p \vee q) \rightarrow \sim q$.

Para construir a tabela-verdade de uma proposição composta é conveniente seguir os passos seguintes:

Passo 1 (determinação do número de linhas na tabela-verdade): identifique a quantidade de proposições simples na proposição composta. Neste nosso exemplo, temos duas proposições: p e q. Então, nossa tabela verdade terá $2^k = 2^2 = 4$ linhas.

Passo 2 (preenchimento das colunas): para cada coluna correspondente às proposições simples, você preencherá com valores V ou F, até completar todas as sequências possíveis de V e F.

Passo 3: identifique a precedência dos conectivos, de modo a inserir colunas adicionais para as proposições compostas intermediárias.

Passo 4: determine os valores lógicos para as proposições intermediárias.

Passo 5: calcule o valor lógico da proposição composta final.

Seguindo esses passos, temos a tabela-verdade.

Tabela 1.7 | Tabela-verdade

p	q	$p \vee q$	~q	$(p \vee q) \rightarrow \sim q$
F	F	F	V	V
F	V	F	F	V
V	F	F	V	V
V	V	V	F	F

Fonte: elaborada pelo autor.

Considere este outro exemplo. Vamos observar a última coluna da tabela-verdade, considere:

$$\big((\sim p \vee q) \leftrightarrow p\big) \rightarrow (p \wedge q).$$

Como temos três proposições simples constituindo a proposições composta, nossa tabela-verdade terá oito linhas.

Tabela 1.8 | Tabela-verdade

p	q	$p \wedge q$	~p	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow p$	$((\sim p \vee q) \leftrightarrow p) \rightarrow (p \wedge q)$
F	F	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F	V
V	V	V	F	V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que a última coluna da tabela-verdade apresenta apenas valores lógicos verdadeiros.

As proposições compostas que assumem apenas valores lógicos verdadeiros, independentemente dos valores lógicos das proposições simples que as compõem, constituem uma "classe especial" de proposições na lógica matemática. Elas são importantes ao ponto de receberem um nome: denominam-se tautologias. A palavra tautologia tem origem no grego e significa "dizer o mesmo". Vamos estudá-las na sequência. Também estudaremos outras classes de proposições notáveis na lógica matemática: as contradições e as contingências.

3. Tautologias e contradições

3.1 Tautologias

Existem proposições compostas que assumem sempre valor lógico verdadeiro: são as denominadas tautologias. Por outro lado, existem as proposições compostas que sempre assumem valor lógico falso: são as contradições. Vejamos ambas na sequência.

Assimile

Define-se tautologia como uma proposição composta cuja última coluna de sua tabela-verdade assume o valor lógico verdadeiro independentemente dos valores lógicos das proposições simples que a constituam.

Existem diversas tautologias notáveis. Vejamos algumas delas.

Para verificar se uma proposição é uma tautologia, construímos sua tabela-verdade e verificamos se a última coluna apresenta valores lógicos verdadeiros quaisquer que

sejam os valores lógicos das proposições constituintes.

a) Entre duas proposições é uma tautologia $p \leftrightarrow p$. Verifiquemos:

Tabela 1.9 | Tabela-verdade

p	p	$p \leftrightarrow p$
F	F	V
V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Como a última coluna da tabela-verdade apresenta apenas valores lógicos verdadeiros, independentemente dos valores lógicos das proposições simples que compõem a proposição composta, temos uma tautologia.

b) $p \vee \sim p$ (esta tautologia é conhecida como princípio do terceiro excluído)

Construímos a tabela-verdade:

Tabela 1.10 | Tabela-verdade

p	~p	$p \vee \sim p$
F	V	V
V	F	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos apresentar esta tautologia em linguagem natural como: sempre é verdade que ou uma proposição p é verdadeira ou a negação de p é verdadeira.

A seguir temos algumas tautologias notáveis elencadas sem a correspondente tabela-verdade.

c) Uma tautologia utilizada em argumentação e conhecida como tautologia de Morgan é: $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

d) Tautologia do princípio da não contradição: $\sim(p \wedge \sim p)$.

e) $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$ (negação do antecedente).

f) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ (contraposição, esta tautologia é usada na demonstração de teoremas, voltaremos a ela neste curso).

g) $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (comutatividade da conjunção com disjunção).

Vimos na subseção anterior que existem proposições compostas que sempre assumem valor lógico verdadeiro. Também existem proposições compostas que sempre assumem valor lógico falso, independentemente do valor lógico das proposições simples constituintes. É o que veremos a seguir.

3.2 Contradição

Quando uma proposição composta assume sempre o valor lógico falso, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições que a constituem, temos uma contradição.

Assimile

Define-se contradição como uma proposição composta cuja última coluna de sua tabela-verdade assume o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das proposições simples que a constituam.

Veja agora alguns exemplos de contradições.

Exemplificando

a) A proposição $p \leftrightarrow \sim p$ é uma contradição. Confira com a tabela-verdade a seguir.

Tabela 1.11 | Tabela-verdade

p	~p	$p \leftrightarrow \sim p$
F	V	F
V	F	F

Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos "traduzir" esta proposição em palavras: é sempre falso afirmar que uma proposição p é equivalente à negação de p.

b) A proposição $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ é uma contradição:

Tabela 1.12 | Tabela-verdade

p	q	~p	~q	$(p \wedge q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
F	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
V	V	F	F	V	F	F

Fonte: elaborada pelo autor.

Vimos que existem proposições compostas que sempre assumem valor lógico verdadeiro: são as tautologias. Acabamos de estudar proposições compostas que sempre assumem valor lógico falso. Agora veremos as proposições compostas que podem assumir tanto valores lógicos verdadeiros como falsos.

3.3 Contingências

Finalmente, quando uma proposição não é nem uma tautologia nem uma contradição, recebe o nome de contingência: neste caso, a última coluna da tabela-verdade tem ao menos um valor lógico verdadeiro e ao menos um valor lógico falso.

Assimile

Denomina-se contingência toda proposição composta que pode assumir tanto valores lógicos verdadeiros quanto falsos, em função dos valores das proposições simples que a constituam.

Por exemplo: $\sim p \rightarrow q$

Tabela 1.13 | Tabela-verdade

p	q	~p	$\sim p \rightarrow q$
F	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
V	V	F	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Como a última coluna da tabela-verdade tem tanto valores lógicos verdadeiros como falsos, temos uma contingência.

Pesquise mais

No artigo a seguir, as autoras discutem a lógica na Matemática e a lógica no ensino da Matemática e as questões da argumentação e demonstração também no ensino da Matemática. O texto ainda apresenta exemplos de demonstrações para uso em sala de aula.

MATHEUS, Aline dos Reis; CANDIDO, Cláudia Cueva. **A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico**. 2013. Disponível em: <http://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/6_mc11.pdf>. Acesso em: 16 out. 2016.

4. Equivalências lógicas

As proposições p e q são equivalentes lógicas quando a proposição $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia. Para representar equivalências lógicas usa-se a notação: $p \Leftrightarrow q$.

Observação: o símbolo $\leftrightarrow$ tem o significado de uma operação lógica. Já o símbolo $\Leftrightarrow$ informa-nos que a proposição $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.

Assimile

Quando duas proposições são equivalentes do ponto de vista lógico, então, suas tabelas-verdade são iguais.

Vejamos um exemplo de equivalência lógica importante em demonstrações matemáticas:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p.$$

Provar que se p é verdadeira então temos como consequente que q também é verdadeira é equivalente a provar que, se a negação de q for verdadeira então temos como consequente que a negação de p é verdadeira. Vejamos a tabela-verdade:

Tabela 1.14 | Tabela-verdade

p	q	~p	~q	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Escrevemos: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$.

Em língua natural, podemos "traduzir" $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ por: a condicional "se Carlos sabe nadar, não morrerá afogado" é equivalente a "se Carlos não morreu afogado, então, é verdadeiro afirmar que sabe nadar".

Outra equivalência lógica importante recebe o nome de Regra de absorção: $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$ (observe que a proposição p foi "absorvida" na conjunção $p \wedge q$).

Reflita

Como poderíamos "traduzir" em palavras a equivalência dada pela Regra de absorção? Quando apresentamos como consequente de uma condicional uma conjunção cujas proposições da conjunção ("p" na formalização anterior) é o antecedente da condicional, este antecedente é desnecessário.

Outras equivalências notáveis são:

a) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$ (ou seja: a bicondicional é equivalente a demonstrar a condicional em uma direção e a condicional na outra direção). Usamos várias vezes esta equivalência em demonstrações matemáticas.

b) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (q \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

c) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (1ª lei de Morgan). A negação da conjunção é equivalente à disjunção das negações. Em língua natural, afirmar que não é verdade que vale A e B é equivalente a afirmar que não vale A ou não vale B.

d) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ (2ª lei de de Morgan). A negação da disjunção é equivalente à conjunção das negações. Em língua natural, afirmar que não é verdade que vale A ou B é equivalente a afirmar que não vale A e não vale B.

e) $p \wedge \sim q \rightarrow F \Leftrightarrow p \rightarrow q$. Provar que p e a negação de q implicam no valor lógico falso é equivalente a provar que p implica em q. Esta equivalência lógica é bastante conhecida como demonstração por absurdo. Consideramos a conjunção da hipótese (a proposição p neste caso) e sua conjunção com a negação da tese (a proposição q neste caso). Se chegarmos a uma situação contraditória (um valor lógico falso), então, isso é equivalente a demonstrarmos que vale a condicional $p \rightarrow q$ (que é o teorema que queríamos demonstrar inicialmente).

Pesquise mais

Consulte o artigo a seguir para conhecer outras relações entre a lógica, a ambiguidade da linguagem natural, as contradições, tautologias e falácias.

CUNHA, Marisa Ortegoza da. Lógica e senso comum: o diálogo precisão/ambiguidade. In: SEMINÁRIOS ABERTOS DE PÓS-GRADUAÇÃO, 2004, São Paulo. **Resumos**... São Paulo: FEUSP, 2004. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/20040827.pdf>. Acesso em: 13 nov. 2016.

Se possível, consulte também o livro a seguir, ele aborda inúmeros aspectos da lógica, além de discutir relações entre a língua materna e o ensino da Matemática, raciocínio e argumentação. O texto apresenta uma visão

panorâmica das várias lógicas (fuzzy, lógicas modais, paraconsistentes, polivantes, dentre outras).

MACHADO, Nilson José; CUNHA, Marisa Ortegoza. **Lógica e linguagem cotidiana**: verdade, coerência, comunicação, argumentação. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Sem medo de errar

Você, como professor de matemática, juntamente com uma professora de Biologia e um de Língua Portuguesa, faz parte de uma equipe de professores que está desenvolvendo um projeto interdisciplinar na escola em que atuam.

Depois de vocês terem apresentado a introdução à lógica que já estudamos, um dos alunos propôs um "desafio lógico" aos colegas de sala.

Considere que um pesquisador da área de Biologia está investigando um tratamento para determinada moléstia, em duas raças de gado. Chamaremos essas raças de X e Y.

Quando o tratamento é utilizado na raça X, vale a proposição:

a: Se o tratamento é utilizado, os animais não adoecem.

Quando o tratamento é utilizado na raça Y, vale a proposição:

b: O tratamento é utilizado se, e somente se, os animais não adoecem.

Supondo que os animais da raça X e da raça Y não adoeceram, o desafio lógico é: como podemos concluir se o tratamento foi utilizado na raça X ou na raça Y?

Para resolver este desafio, faremos uso de tabelas-verdade de proposições compostas.

Considere a primeira proposição composta:

a: Se o tratamento é utilizado, os animais não adoecem.

Se representarmos por p: o tratamento é utilizado e q: os animais não adoecem, temos uma condicional $p \rightarrow q$. A tabela-verdade da condicional é:

Tabela 1.15 | Tabela-verdade

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Como estamos supondo que os animais não adoeceram, estamos considerando que o valor lógico de q é verdadeiro. Assim, podemos estar na situação apresentada em qualquer uma das duas últimas linhas da tabela-verdade da condicional. Observe que nada pode ser concluído sobre o valor lógico de p. Ele pode ser tanto falso (3ª linha da tabela-verdade) como verdadeiro (4ª linha da tabela-verdade). Assim, nada podemos concluir sobre o resultado do tratamento sobre a raça X.

Considere agora a segunda proposição composta:

b: O tratamento é utilizado se, e somente se, os animais não adoecem.

Esta proposição pode ser representada usando as proposições p: o tratamento é utilizado e q: os animais não adoecem, como uma bicondicional da forma $p \leftrightarrow q$.

Vamos construir a tabela-verdade da bicondicional:

Tabela 1.16 | Tabela-verdade da bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
V	F	F
F	V	F
V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Como estamos supondo que a proposição q assume valor lógico verdadeiro, para que a bicondicional assuma valor lógico verdadeiro, necessariamente a proposição p também terá de assumir valor lógico verdadeiro. Assim, podemos afirmar que os animais da raça Y sofreram o tratamento.

Conclusão: nada podemos afirmar se o tratamento foi realizado sobre os animais da raça X, mas podemos concluir que o tratamento foi realizado sobre os animais da raça Y.

Notemos que este é um exemplo de como podemos utilizar tabelas-verdade para resolver desafios lógicos.

Para concluir a resolução deste problema, lembre-se de produzir o texto que a coordenadora pedagógica da escola solicitou, incluindo os itens (a), (b) e (c) elencados no início desta seção.

Avançando na prática

Usando tabelas-verdade

Descrição da situação-problema

As equivalências lógicas são importantes, pois permitem que ao reescrevermos determinadas proposições de outra forma fique, eventualmente, mais simples identificar a verdade (ou falsidade) lógica dessas proposições.

Considere a condicional $p \to q$. Então:

Denomina-se de proposição recíproca da condicional $p \to q$ a condicional $q \to p$.

Denomina-se proposição contrária da condicional $p \to q$ a condicional $\sim p \to \sim q$.

Denomina-se proposição contrapositiva da condicional $p \to q$ a condicional $\sim q \to \sim p$.

Afirmamos que a condicional $p \to q$ e sua contrapositiva $\sim q \to \sim p$ são logicamente equivalentes. Para verificar essa afirmação, basta construir a tabela-verdade da condicional e sua contrapositiva, para verificar que a última coluna das duas tabelas-verdade são iguais.

Também afirmamos que a recíproca $q \to p$ e a contrária $\sim p \to \sim q$ também são equivalentes.

Você pode verificar esta equivalência construindo a tabela-verdade da recíproca e da contrária, observando que as últimas colunas são iguais.

Tendo estas equivalências lógicas em mente, considerando a afirmação proferida por um juiz de futebol após interromper uma partida: "caso não sejam interrompidas as ofensas aos torcedores do time A, não reiniciaremos a partida" apresente uma frase equivalente à frase apresentada, sem as negações.

Justifique que a frase que você apresentou é equivalente usando a tabela-verdade.

Resolução da situação-problema

Podemos representar a frase apresentada: "se não forem interrompidas as ofensas aos torcedores do time A, então não reiniciaremos a partida" como a condicional $p \to q$.

Em que:

p: não forem interrompidas as ofensas aos torcedores do time A.

q: não reiniciaremos a partida.

Como afirmamos anteriormente, a condicional $p \to q$ é logicamente equivalente à $\sim q \to \sim p$.

Temos:

~q: reiniciaremos a partida.

~p: foram interrompidas as ofensas aos torcedores do time A.

Vamos construir a tabela-verdade das proposições $p \to q$ e $\sim q \to \sim p$ para justificar a equivalência lógica entre ambas.

Tabela 1.17 | Tabela-verdade

p	q	$p \to q$	~p	~q	$\sim q \to \sim p$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F
V	V	V	F	F	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Vimos que existem regras de precedência para os conectivos no cálculo proposicional. Para alterar a hierarquia dos conectivos, usamos parêntesis.

Por exemplo, $p \vee r \leftrightarrow q \to s$ é uma bicondicional, nesse caso, primeiro determinamos o valor lógico de $p \vee r$ e de $q \to s$. Então, determinamos o valor lógico da bicondicional. A proposição $p \wedge \sim r \leftrightarrow \sim q \to s$ também é uma bicondicional. Já a proposição $\sim p \wedge r \to q \vee \sim s$ é uma condicional.

Considere as proposições:

1. $p \vee \sim q \to \sim r \wedge s$.
2. $r \vee (s \leftrightarrow \sim p \wedge q)$.
3. $((p \leftrightarrow \sim q) \to (\sim r \vee s)) \wedge (s \leftrightarrow \sim p)$.

Assinale a alternativa que identifica corretamente as proposições anteriores:

a) 1 é uma conjunção; 2 é uma bicondicional; 3 é uma negação.

b) 1 é uma disjunção; 2 é uma negação; 3 é uma bicondicional.

c) 1 é uma negação; 2 é uma conjunção; 3 é uma disjunção.

d) 1 é uma condicional; 2 é uma disjunção; 3 é uma conjunção.

e) 1 é uma condicional; 2 é uma bicondicional; 3 é uma disjunção.

2. Considere a proposição $p \to q$

Em língua natural, escrevemos a condicional: se p então q.

Sua negação será: $\sim(p \to q)$

É válida a seguinte equivalência lógica: $\sim(p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

Considere as proposições:

p: eu canto.

q: meus males espanto.

E a condicional: se eu canto, então, meus males espanto.

Sua negação será: eu canto e não espanto meus males.

Vale a equivalência lógica entre as declarações: se eu canto, então, meus males espanto e eu canto e não espanto meus males.

Assinale a alternativa que apresenta a tabela-verdade que demonstra a equivalência lógica da negação da condicional $p \to q$ com $(p \wedge \sim q)$.

a)

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$	~q	$(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

b)

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$	~q	$(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

c)

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$	~q	$(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	V

d)

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$	~q	$(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F

e)

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$	~q	$(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

3. A negação da disjunção $\sim(p \vee q)$ é também conhecida como Adaga de Quine e utilizamos o símbolo $\downarrow$ para representá-la. Esta operação lógica é conhecida em eletrônica digital como porta lógica NOR. Sua tabela-verdade é:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A negação da conjunção $\sim(p \wedge q)$ é também conhecida como conectivo de Sheffer e utilizamos o símbolo para $\uparrow$ representá-la. Em eletrônica digital, é chamada de porta lógica NAND. Sua tabela-verdade é:

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

A disjunção exclusiva representa o "ou exclusivo" (em eletrônica digital é conhecido como porta lógica XOR). Usa-se o símbolo $\oplus$ para representá-la: $p \oplus q$. Sua tabela-verdade é:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observando a última coluna das tabelas-verdade da Adaga de Quine, do conectivo de Sheffer e do ou exclusivo, podemos concluir que:

a) $p \oplus q$ é uma expressão equivalente à $\sim(p \leftrightarrow q)$.

b) $p \uparrow q$ é uma expressão equivalente à $p \leftrightarrow p$.

c) $p \downarrow q$ é uma expressão equivalente à $\sim(p \rightarrow q)$.

d) $p \oplus q$ é uma expressão equivalente à $\sim(q \leftrightarrow q)$.

e) $p \downarrow q$ é uma expressão equivalente à $p \uparrow q$.

Seção 1.3

Argumentação

Diálogo aberto

Nesta seção, daremos continuidade ao projeto em equipe com os professores de Biologia e Língua Portuguesa. Para fechar esta primeira unidade, você e seus colegas, professores das outras áreas, pretendem discutir aspectos de argumentação, apresentar o que são argumentos dedutivos e argumentos indutivos e encerrar com a discussão sobre argumentos consistentes e argumentos inconsistentes. De forma extremamente oportuna, certo dia, quando você entrou para dar uma de suas aulas, os alunos discutiam a validade lógica das afirmações:

"É lógico que a água é molhada".

"É lógico que o gelo é frio".

"É lógico que o carvão é escuro".

"É lógico que todo animal que vive no oceano é peixe".

"É lógico que todo animal que voa é pássaro".

Será que essas afirmações constituem argumentos do ponto de vista da lógica? Só por que todas estas afirmações incluem a expressão "é lógico" elas são logicamente válidas?

Mas a discussão entre os alunos não se encerrou aí. Um dos alunos propôs que os demais pensassem sobre a validade do raciocínio apresentado a seguir:

Todos os gatos têm penas.

Todos os animais com penas são venenosos.

Existem morcegos que são gatos.

Conclusão: existem morcegos que são venenosos.

Como fazer para decidir se este argumento é válido ou inválido, do ponto de vista da lógica formal? Poderíamos chamá-lo de um argumento bom ou ruim? Por outro lado, todos já vimos, em nosso cotidiano, argumentos que são "furados" e convencem muita gente. Seria possível identificar padrões de argumentos válidos e argumentos não válidos? Como podemos educar um estudante para ficar mais assertivo na identificação de inconsistências em uma argumentação?

Vocês professores aproveitaram esta oportunidade de ouro para discutir o que são argumentos, dedução, indução e argumentos válidos e inválidos.

Lembre-se de que você deve entregar a terceira parte do seu relatório para a coordenadora pedagógica. Nesta terceira parte, vocês concordaram que o texto deverá conter um exemplo de argumento (pode ser nas Ciências Biológicas, Língua Portuguesa ou na Matemática) para cada um dos itens a seguir:

a) Dedutivo válido.

b) Dedutivo não válido.

Não pode faltar

1. Argumentos

Para a lógica, um argumento é um conjunto de proposições utilizadas para justificar um enunciado. Este enunciado que queremos provar recebe o nome de conclusão. Destacamos que não pretendemos neste texto definir rigorosamente o termo "enunciado", pois tal definição pode levantar discussões sobre filosofia da linguagem, o que foge do escopo desta disciplina.

A seguir, apresentamos a definição de argumento de Salmon (1984, p. 2): "um argumento consiste em um enunciado que é a conclusão e em um ou mais enunciados que formam as provas comprovadoras".

Aquelas provas comprovadoras recebem o nome de premissas, sendo que argumentos precisam ter, no mínimo, uma premissa. Veja que desde que o número de premissas seja finito, não há um limite máximo de premissas que um argumento pode ter. Assim, argumentos podem ter mais de uma premissa. Por outro lado, argumentos podem ter uma única conclusão.

De acordo com Paixão (2007, p. 23), "uma premissa é o enunciado no argumento que apoia, justifica, corrobora, isto é, dá o porquê do que é afirmado (ou negado) pelo enunciado-conclusão". Assim, ao encontrarmos em um texto ou na fala de uma pessoa, expressões e palavras tais "como", "porque", "como consequência de", "em conclusão a", "dado que", "supondo que", "sabendo que", esperamos encontrar na

sequência do texto ou fala as premissas.

Por outro lado, ao encontrarmos palavras ou expressões como: "então", "em consequência", "por isso", "logo", "portanto", "conclui-se que", temos a indicação de uma conclusão.

O argumento a seguir apresenta apenas uma premissa:

Todos os jogadores de futebol são esportistas.

Portanto, existem esportistas que são jogadores de futebol.

No exemplo anterior, a premissa é: "todos os jogadores de futebol são esportistas".

Já este outro argumento apresenta duas premissas:

Se Carlos estuda no Conservatório Musical Villa-Lobos, então ele estuda Teoria Musical.

Carlos estuda no Conservatório Musical Villa-Lobos.

Portanto, Carlos estuda Teoria Musical.

Será que qualquer conjunto de proposições constitui um argumento?

Vejamos os dois exemplos a seguir.

Exemplificando

Considere que um jovem pretende ir mais vezes para a balada. Como ele não trabalha, precisa pedir dinheiro aos seus pais. O jovem apresenta a exposição de motivos a seguir:

"Os ingressos da balada estão mais caros.

Eu quero continuar indo para a balada.

Logo, preciso receber mais dinheiro".

Podemos dizer que esta sequência de proposições constitui um argumento? Sim, pois os enunciados são apresentados com a finalidade de se obter uma conclusão.

Em contraponto ao exemplo anterior considere este:

Exemplificando

Consideremos agora o conjunto de proposições:

André pratica natação e Flávia pratica judô.

Márcia gosta de frango à passarinho.

Carlos vai à praia.

Esta sequência de proposições não constitui um argumento, pois não existe a intenção de comprovar uma proposição a partir das outras. Temos apenas uma coleção de enunciados não articulados entre si e sem a finalidade de se chegar a uma conclusão.

Aprendemos a distinguir uma **coleção de enunciados** que é um argumento de uma coleção de enunciados que não constitui um argumento. Veremos agora a distinção entre argumentos válidos e não válidos.

Assimile

Um argumento é considerado válido quando sua conclusão for verdadeira e todas suas premissas forem verdadeiras.

Observe que o fato de um argumento ser válido não implica que a conclusão do argumento seja uma verdade do ponto de vista factual.

Vejamos o exemplo:

Premissa 1: qualquer número inteiro é múltiplo de 5.

Premissa 2: 17 é um número inteiro.

Conclusão: Portanto, 17 é um múltiplo de 5.

Afirmamos que o argumento é válido. Se as premissas forem verdadeiras, a conclusão será verdadeira.

As premissas não são ambas verdadeiras. No caso deste exemplo, não é verdadeiro que qualquer número inteiro é múltiplo de 5. Mas do ponto de vista da forma, da estrutura do argumento, que é o que interessa para a lógica, e não o conteúdo factual ou material, o argumento é válido.

O que não pode existir é um argumento válido com conclusão falsa e premissas verdadeiras.

Contudo, podem existir argumentos válidos com premissas falsas e conclusão

falsa. Ou ainda, argumentos válidos com premissas falsas e conclusão verdadeira.

Reflita

Quando falamos na validade de um argumento, estamos preocupados com o relacionamento lógico entre as premissas e a conclusão, e não com o valor de verdade, material ou factual, das premissas.

Agora fica mais fácil entender a definição de argumentos inválidos. Veja:

Assimile

Um argumento é inválido quando a conclusão for falsa, mesmo na condição de todas as premissas serem verdadeiras.

A seguir, temos um exemplo de um argumento inválido. Suponha que as premissas e a conclusão do argumento sejam verdadeiras.

Premissa 1: existem médicos cardiologistas que são fumantes.

Premissa 2: Carlos é médico cardiologista.

Conclusão: Portanto, Carlos é fumante.

Este argumento é válido ou inválido?

É um argumento inválido. Você entende por quê?

Da premissa 1, temos que existem médicos cardiologistas fumantes. Esta afirmação não implica, necessariamente, que todo médico cardiologista seja fumante. Assim, da premissa 2 (mesmo que seja verdadeira) não podemos concluir que Carlos é fumante. Ele até pode ser fumante, mas não será uma conclusão logicamente válida a partir das premissas apresentadas.

Reflita

Podem existir argumentos inválidos com premissas verdadeiras e conclusão verdadeira.

Podem existir argumentos inválidos com premissas falsas e conclusão verdadeira.

Também podem existir argumentos inválidos com premissas verdadeiras e conclusão falsa.

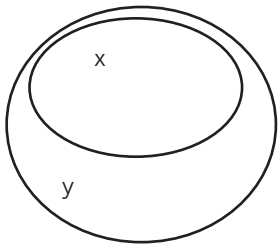
Finalmente, podemos desenvolver argumentos inválidos tanto com as premissas falsas quanto com a conclusão falsa.

Será que podemos sistematizar nossa discussão sobre argumentos com alguma ferramenta matemática?

Claro que sim! Você já estudou os diagramas de Euler-Venn? É o que veremos na sequência, por meio de exemplos.

1. Vamos definir os conjuntos A e B, com A contido propriamente no conjunto B. Assim, todo elemento de A é elemento de B. Em outras palavras, nesta situação estamos tratando de proposições do tipo "todo x é y". Tais proposições podem ser representadas pelo diagrama da Figura 1.7.

Figura 1.7 | Todo x é y



Fonte: elaborada pelo autor.

A proposição "todos os jogadores de futebol são garotos-propaganda" pode ser representada pelo diagrama de Euler-Venn da Figura 1.8. Aqui consideramos o conjunto A como sendo o conjunto de todos os jogadores de futebol e o conjunto B como sendo o conjunto dos garotos-propaganda.

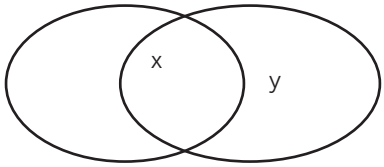
Figura 1.7 | Todo x é y

Fonte: elaborada pelo autor.

Observe na Figura 1.8 que o conjunto dos jogadores de futebol está completamente contido no conjunto dos garotos-propaganda: todos os jogadores de futebol também são garotos-propaganda. Em outras palavras: se sabemos que x um é jogador de futebol, então, podemos concluir que x também é um garoto-propaganda.

2. Proposições do tipo "existe x que é y" podem ser representadas pelo diagrama da Figura 1.9.

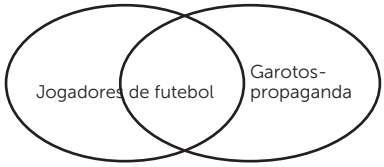
Figura 1.9 | Existe x que é y



Fonte: elaborada pelo autor.

A proposição "existe jogador de futebol que é garoto-propaganda" pode ser representada pelo diagrama de Euler-Venn a seguir:

Figura 1.10 | Existe jogador de futebol que é garoto-propaganda

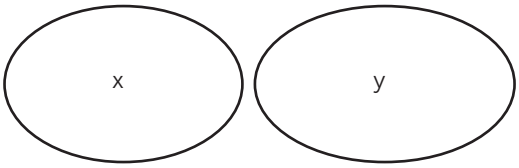


Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos recordar o que é a intersecção entre dois conjuntos A e B: a intersecção é constituída por aqueles elementos que pertencem tanto ao conjunto A quanto ao conjunto B. Observe a intersecção dos dois conjuntos "jogadores de futebol" e "garotos-propaganda". Temos jogadores de futebol que também são garotos-propaganda. Neste caso, se x é jogador de futebol não podemos concluir que, necessariamente, ele também seja garoto-propaganda.

3. Proposições do tipo "não existe x que é y" podem ser representadas pelo diagrama da Figura 1.11:

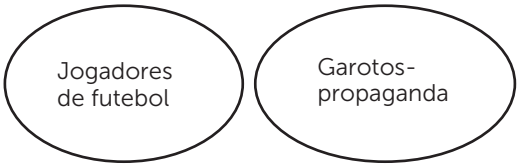
Figura 1.11 | Existe x que é y



Fonte: elaborada pelo autor.

A proposição "não existe jogador de futebol que é garoto-propaganda" pode ser representada pelo diagrama de Euler-Venn da Figura 1.12:

Figura 1.12 | Existe x que é y

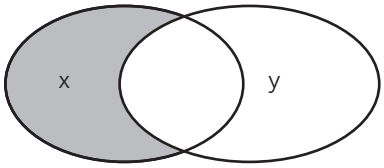


Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que a intersecção dos dois conjuntos é vazia: nenhum jogador de futebol é garoto-propaganda. Neste caso, se sabemos que X é jogador de futebol, então, podemos concluir que X não é garoto-propaganda.

4. Proposições do tipo "existe x que não é y".

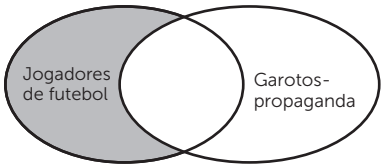
Figura 1.13 | Existe x que não é y



Fonte: elaborada pelo autor.

A proposição "existe jogador de futebol que não é garoto-propaganda" pode ser representada pelo diagrama de Euler-Venn da Figura 1.14:

Figura 1.14 | Existe x que não é y



Fonte: elaborada pelo autor.

Neste caso, sabemos que existe ao menos um elemento que é jogador de futebol e que não é garoto-propaganda.

Reflita

Note que falamos em valor lógico verdadeiro ou falso de proposições. Não cabe afirmar se um argumento tem valor lógico verdadeiro ou falso. Argumentos são válidos ou inválidos. Também não cabe afirmar que uma proposição é válida ou não válida. Proposições ou são verdadeiras ou são falsas. A propriedade de validade diz respeito aos argumentos, enquanto a propriedade de valor lógico refere-se às proposições.

Pesquise mais

No trabalho a seguir você encontrará inúmeros exemplos sobre o uso dos diagramas de Euler-Venn em questões de raciocínio lógico.

SIQUEIRA, Evandro Moreno de. **O raciocínio lógico-matemático**: classificação e uso em concursos públicos. 2013. 53 f. Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Guaratinguetá. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/138973/000865117.pdf?sequence=1>. Acesso em: 14 nov. 2016.

Nesta subseção, estudamos argumentos válidos e inválidos e aprendemos a usar os diagramas de Euler-Venn para nos ajudar na representação de proposições, premissas e argumentos.

Os argumentos podem ser categorizados em argumentos dedutivos e argumentos indutivos. Na sequência, iniciamos nosso estudo de argumentos dedutivos.

2. Deduções

Por vezes nos vemos argumentando a partir de situações particulares para obter conclusões mais gerais. São as chamadas induções.

Em outras circunstâncias, nos vemos argumentando a partir de situações gerais para situações mais particulares.

Neste caso, estamos falando de deduções, algo bastante usual na Matemática. A geometria euclidiana é um exemplo de conhecimento científico obtido por meio de argumentos dedutivos.

Vejamos dois exemplos.

Exemplo 1 (argumento dedutivo)

Todos os mamíferos caracterizam-se pela presença de glândulas mamárias.

Leões são mamíferos.

Portanto, leões têm glândulas mamárias.

Note que no exemplo 1, a conclusão será verdadeira, sem dúvida alguma, se as premissas forem verdadeiras.

Vejamos a definição formal de argumento dedutivo.

Assimile

Temos um argumento dedutivo quando a conclusão é certamente verdadeira se as premissas forem verdadeiras.

Nas palavras de Paixão (2007, p. 36), "o argumento dedutivo nos conduz de uma verdade mais geral para uma verdade menos geral".

Exemplo 2 (argumento dedutivo)

Premissa 1: toda pessoa nascida no Brasil é sul-americana.

Premissa 2: Cláudio nasceu no Brasil.

Conclusão: Portanto, Cláudio é sul-americano.

Após apresentarmos brevemente o que são argumentos dedutivos, veremos os argumentos indutivos.

3. Induções

Veja a seguir a definição de argumento indutivo.

Assimile

Temos um argumento indutivo quando a conclusão apresenta uma probabilidade de ser verdadeira.

Note que nos argumentos indutivos as conclusões são resultado de observações ou experimentos, não sendo o resultado de demonstrações formais (como na demonstração matemática de um teorema). Segundo Baronett (2009, p. 57), nos argumentos indutivos a conclusão apresenta elevado grau de probabilidade de ser verdadeira se as premissas forem verdadeiras. Assim, em argumentos indutivos

não encontraremos expressões como: "podemos concluir com certeza que..." ou "concluímos, sem dúvida alguma que...".

Exemplo de argumento indutivo:

Todas as amostras de sangue coletadas que foram avaliadas apresentaram baixo índice de colesterol.

Portanto, todas as amostras de sangue coletadas apresentam baixo índice de colesterol.

São características dos argumentos indutivos: a) quando todas as premissas são verdadeiras, podemos dizer que a conclusão é provavelmente verdadeira, mas não que ela é necessariamente verdadeira; b) a conclusão inclui informações que não temos nas premissas.

Veja outro exemplo de argumento indutivo:

A maioria dos mamíferos é terrestre.

O animal X é um mamífero.

Portanto, há grande probabilidade de o animal X ser terrestre.

Neste segundo exemplo, a conclusão não decorre, necessariamente, das premissas. Neste caso, se as premissas forem verdadeiras, existe algum grau de probabilidade de que a conclusão seja verdadeira.

Destacamos o seguinte trecho de Salmon (1984, p. 9):

> **a relação que existe entre a generalização científica e a evidência observacional que a sustenta é do tipo indutivo. Assim, por exemplo, de acordo com a primeira lei de Kepler, a órbita de Marte é uma elipse. A prova observacional para essa lei consiste numa série de observações isoladas da posição de Marte. A lei refere-se à posição de Marte, tendo sido observada ou não... É evidente que a lei (a conclusão) possui um conteúdo muito mais amplo do que os enunciados que descrevem as posições observadas de Marte (as premissas).**

Observe, de acordo com a citação, que partimos de um conjunto finito de observações da posição de Marte e, a partir deste conjunto, deriva-se a lei (ou seja, a conclusão) do movimento de Marte para qualquer instante de tempo. Veja aqui uma característica fundamental das induções: partimos de um conhecimento particular para um conhecimento mais amplo, mais geral.

4. Consistência e inconsistência

Um par de proposições p e q é considerado consistente, de acordo com Baronett (2009, p. 188) se "há ao menos uma linha em suas respectivas tabelas-verdade onde os valores de verdade são ambos verdadeiros". Dito de outra forma: para que duas proposições p e q sejam consistentes, podemos encontrar ao menos uma situação na qual ambas as proposições sejam verdadeiras.

Veja o exemplo:

Considere as proposições

p: a temperatura em São Paulo hoje é superior a 23 °C.

q: a temperatura em São Paulo hoje é superior a 27 °C.

Estas proposições podem ser ambas verdadeiras na situação em que a temperatura hoje em São Paulo seja superior a 27 °C.

Considere um par de proposições. Segundo Baronett (2009, p. 188), "em um par de proposições inconsistentes, não há nem mesmo uma linha em suas respectivas tabelas-verdade onde os valores de verdade são ambos verdadeiros". Assim, para que duas proposições p e q sejam inconsistentes, não pode ocorrer que ambas as proposições sejam verdadeiras simultaneamente.

Veja um exemplo:

Considere as proposições:

p: a temperatura em São Paulo no dia de hoje é superior a 23 °C

q:a temperatura em São Paulo no dia de hoje é inferior a 17 °C.

Como não é possível que ambas as proposições sejam verdadeiras simultaneamente, dizemos que elas são inconsistentes.

Sem medo de errar

Vamos retomar a situação-problema apresentada no início desta seção.

Será que enunciados como "o gelo é frio" podem ser considerados argumentos lógicos?

Depois do que estudamos nesta seção, podemos responder que não, pois este enunciado não apresenta outro enunciado que o justifique ou apoie de forma articulada com evidências.

Para a segunda parte da situação-problema, lembremos do texto do argumento:

Os alunos também discutiam a validade do argumento apresentado a seguir.

Todos os gatos têm penas.

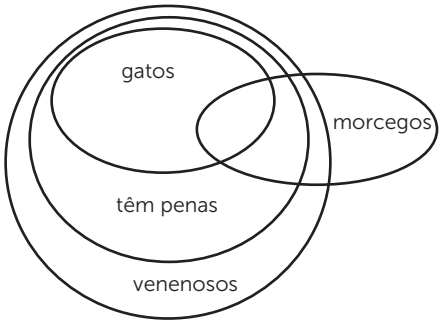
Todos os animais com penas são venenosos.

Existem morcegos que são gatos.

Conclusão: existem morcegos que são venenosos.

Vejamos o diagrama de Euler-Venn na Figura 1.15 para esta situação-problema:

Figura 1.15 | Diagrama



Fonte: elaborada pelo autor.

As premissas são:

Premissa 1: todos os gatos têm penas.

Premissa 2: todos os animais com penas são venenosos.

Premissa 3: existem morcegos que são gatos.

Da premissa 1, concluímos que o conjunto dos gatos está completamente contido no conjunto dos animais com penas. Da premissa 2, concluímos que o conjunto dos animais com penas está completamente contido no conjunto dos animais venenosos.

Da premissa 3, concluímos que existem morcegos que são gatos. Assim, existem morcegos que estão contidos no conjunto dos animais que têm penas que, por sua vez, estão contidos no conjunto dos animais que são venenosos. Logo, existem morcegos que são venenosos.

Observe na intersecção dos conjuntos no diagrama de Euler-Venn da Figura 1.15 que existem morcegos que são gatos. Como todos os gatos são venenosos, existem morcegos que são venenosos.

Assim, o argumento é válido.

Neste ponto, concluímos a nossa terceira situação-problema. Agora, que tal você compilar o conteúdo das discussões realizadas nestas três seções, com a finalidade de entregar um texto para a coordenadora pedagógica?

Considere para essa produção textual:

Capa, com título do trabalho, centralizado, em fonte Times New Roman, 14 pt e nome dos professores autores em fonte Times New Roman, 12 pt e espaçamento 1,5.

Na segunda página, você pode apresentar um resumo e, abaixo deste resumo, inserir palavras-chave.

Uma estrutura interessante para o texto é elaborar uma introdução contextualizando o projeto, uma seção de desenvolvimento e, ao final, uma última seção com as conclusões do trabalho. Na última página, é imprescindível inserir as referências bibliográficas utilizadas.

Avançando na prática

Argumentos válidos e não válidos

Descrição da situação-problema

Após o aluno ter apresentado o desafio lógico envolvendo gatos, penas e morcegos, outro aluno propôs um segundo desafio lógico para a turma. O desafio foi o seguinte:

Premissa 1: todos os alunos do curso de Matemática são dedicados.

Premissa 2: alguns dos alunos do curso de Matemática são barbudos.

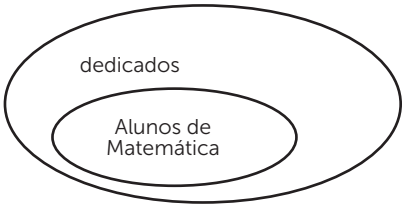
Com base nessas premissas, é válido concluirmos que não existem alunos dedicados que são barbudos? É válido concluirmos que existem alunos dedicados que são barbudos? Como decidir?

Resolução da situação-problema

Vamos construir o diagrama de Euler-Venn.

Da premissa 1, temos o diagrama da Figura 1.16:

Figura 1.16 | Avançando na prática

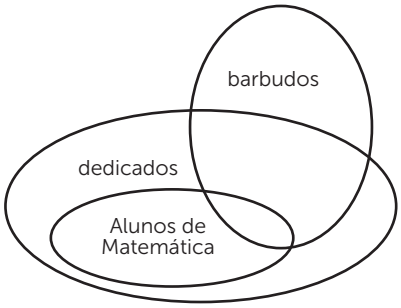


Fonte: elaborada pelo autor.

Como todos os alunos de Matemática são dedicados, o conjunto dos alunos de Matemática está contido no conjunto de pessoas dedicadas.

Na Figura 1.17 incluímos a premissa 2:

Figura 1.17 | Alunos e barbas



Fonte: elaborada pelo autor.

Como alguns dos alunos do curso de Matemática são barbudos, existem alunos do curso de Matemática que são barbudos. Ou seja: a intersecção entre estes dois conjuntos é não vazia.

Assim, como temos intersecção não vazia entre os conjuntos dos alunos dedicados e dos barbudos, é válido concluir que existem alunos dedicados que são barbudos.

Faça valer a pena

1. Dizemos que um argumento é válido quando a conclusão for verdadeira sempre que todas as premissas forem verdadeiras.

Um argumento é dito inválido quando a conclusão for falsa, mesmo quando todas as premissas forem verdadeiras.

Considere o argumento a seguir:

Premissa 1: todo profissional da área de Tecnologia da Informação que conhece linguagens de programação de computadores sabe programar em Java.

Premissa 2: Pedro é um profissional da área de Tecnologia da Informação e não sabe programar em Java.

Conclusão: Pedro não conhece linguagens de programação de computadores.

A respeito deste argumento, é correto afirmar que:

a) Este argumento é inválido.

b) É verdadeiro que Pedro não conhece nenhuma linguagem de programação de computadores.

c) É falso que Pedro não conhece nenhuma linguagem de programação de computadores.

d) Este argumento é inconsistente.

e) Nada podemos concluir sobre Pedro.

2. Lembremos que podem existir argumentos inválidos com premissas falsas e conclusão verdadeira. Também é possível desenvolver argumentos inválidos com premissas verdadeiras e conclusão falsa.

Contudo, não é possível desenvolver um argumento válido com a conclusão falsa e as premissas verdadeiras.

Considere os dois argumentos a seguir:

Argumento 1

Premissa 1: se eu praticar atividade física, ficarei em forma.

Premissa 2: eu pratico atividade física.

Conclusão: Estou em forma.

Argumento 2

Premissa 1: se eu praticar atividade física, ficarei em forma.

Premissa 2: eu não pratico atividade física.

Conclusão: não estou em forma.

É correto afirmar que:

a) O argumento 1 é válido, pois suas premissas são verdadeiras. O argumento 2 não é válido, pois suas premissas são falsas.

b) O argumento 1 não é válido, pois tanto as premissas quanto a conclusão são falsas. O argumento 2 é válido, pois as premissas e a conclusão são verdadeiras.

c) O argumento 1 é válido, pois a conclusão é decorrência lógica das premissas. O argumento 2 não é válido, pois a conclusão não é decorrência lógica das premissas.

d) O argumento 1 não é válido, pois a conclusão é falsa. O argumento 2 é válido, pois a conclusão é verdadeira.

e) O argumento 1 é válido, pois é um argumento dedutivo. O argumento 2 não é válido, pois é um argumento indutivo.

3. Duas proposições p e q são consistentes quando existe ao menos uma linha nas suas tabelas-verdade em que ambas as proposições são verdadeiras simultaneamente. Duas proposições p e q são inconsistentes quando não existe nenhuma linha nas tabelas-verdade das duas proposições tal que, simultaneamente, ambas as proposições sejam verdadeiras.

Considere as proposições a seguir:

p: $a \wedge b$.

q: $b \rightarrow a$.

r: $a \leftrightarrow b$.

s: $\sim (a \wedge b)$.

Então, é correto afirmar que:

a) As proposições p e r são consistentes, mas as proposições r e s são inconsistentes.

b) As proposições q e r são inconsistentes e as proposições r e s são consistentes.

c) Não existe par de proposições consistentes.

d) As proposições p e s são inconsistentes e as proposições q e r são consistentes.

e) Todos os pares de proposições são consistentes.

Referências

ALENCAR Filho, Edgar de. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 1975. 203 p.

BARONETT, Stan. **Lógica**: uma introdução para as ciências. Porto Alegre: Editora Bookman, 2009. 567 p.

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. **Introdução à lógica matemática**. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2001. 135 p.

CASTRUCCI, Benedito. **Introdução à lógica matemática**. Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM). São Paulo: Nobel, 1975. 157 p.

DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e álgebra de Boole**. São Paulo: Editora Atlas, 1995. 166 p.

HEGENBERG, Leônidas. **Lógica**: o cálculo sentencial. São Paulo: Editora Herder/Editora da Universidade de São Paulo, 1973. 177 p.

MACHADO, Nilson José. **Matemática por assunto**: volume 1 - lógica, conjuntos e funções. São Paulo: Scipione, 1988. 240 p.

MORAIS, José Luiz de. **Matemática e lógica para concursos**. Editora Saraiva: São Paulo, 2012. 544 p.

PAIXÂO, Walter. **Aprendendo a raciocinar**: lógica para iniciantes. São Paulo: Humanitas, 2007. 132 p.

SALMON, Wesley C. **Lógica**. 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1984. 92 p.

Técnicas de demonstração

Convite ao estudo

Nesta segunda unidade prosseguimos com nosso estudo da lógica matemática. Vamos utilizar as competências e habilidades desenvolvidas nesta unidade na construção de demonstrações matemáticas que faremos nesta e nas próximas unidades.

Como objetivos específicos desta unidade, temos: apresentar o que são silogismos; estudar as relações de implicação e equivalência lógicas; conhecer as principais regras de inferência; distinguir e identificar as situações mais adequadas para serem efetuadas provas diretas, condicionais e bicondicionais; identificar as situações mais apropriadas para aplicarmos demonstrações por redução ao absurdo; conhecer a prova indireta na forma condicional; definir o que são quantificadores; estudar operações lógicas sobre sentenças abertas.

Para prosseguirmos nossos estudos, vamos continuar trabalhando em equipe com dois outros professores e a coordenadoria pedagógica. Mas diferentemente da Unidade 1, quando desenvolvemos o projeto com professores de Biologia e Língua Portuguesa, nesta unidade o projeto será desenvolvido com dois professores de Matemática.

No início desta unidade, discutiremos silogismos, relações de implicação e equivalência, regras de inferência e provas direta, condicional e bicondicional.

Na sequência, nas Seções 2.2 e 2.3, iniciaremos o estudo de redução ao absurdo, prova indireta na forma condicional, quantificadores, sentenças abertas com quantificadores, proposições envolvendo números naturais, Princípio da Indução Finita e binômio de Newton.

Em uma reunião informal na sala dos professores, vocês discutiram as seguintes questões:

- Como apresentar a demonstração de verdades matemáticas para os alunos de forma compreensível, sem perder o rigor adequado ao nível escolar?

- Como apresentar aos alunos a distinção entre provas diretas, condicionais, bicondicionais e por redução ao absurdo?

Para discutir com maior propriedade estas questões, vocês decidiram aprofundar seus conhecimentos sobre relações de implicação e equivalência lógica e regras de inferência.

Você, em conjunto com os outros professores de Matemática, entregará para a coordenadoria pedagógica, ao final do trabalho, um projeto para melhorar o desempenho dos alunos em olimpíadas escolares.

Seção 2.1

Técnicas dedutivas diretas

Diálogo aberto

Nesta primeira situação-problema, você e seus dois colegas professores de Matemática têm em mãos a seguinte situação: como discutir argumentações e demonstrações matemáticas com seus alunos?

Para resolver esta situação, vocês começaram a pesquisar várias técnicas de demonstração: provas diretas, provas condicionais, provas bicondicionais.

Vocês também identificaram que é relevante, nesta discussão, a compreensão do que são relações de implicação e de equivalência lógica e as principais regras de inferência.

Em primeiro lugar, pensou-se em como decidir pela validade de um argumento. Existiria algum método sistemático para definir se um argumento é válido ou não válido?

Um dos seus colegas professores relatou um desafio proposto por um grupo de alunos em sala a respeito das argumentações desenvolvidas entre eles: se sabemos que um argumento não é válido, como fazer para modificar o argumento para deixá-lo válido?

Na conversa entre vocês surgiram os seguintes argumentos:

Argumento 1

Premissa 1: Se 17 não é um número primo, então, 5 não é ímpar.

Premissa 2: 17 é primo.

Conclusão: 5 é ímpar.

Será que este é um argumento válido? Se não for válido, o que poderíamos fazer para torná-lo válido?

Em seguida, um dos colegas recordou a demonstração sobre a irracionalidade da raiz quadrada de dois, mas o outro observou que esta é uma demonstração por redução ao absurdo e seria mais adequado explorá-la em um momento posterior. Por questões didáticas, seria mais simples compreender primeiro as provas diretas, condicionais e bicondicionais, e só então partir para as demonstrações por redução ao absurdo.

Não pode faltar

O pensamento grego clássico produziu enormes contribuições culturais e científicas, que são de extrema importância até hoje. Começamos esta unidade apresentando um destes produtos: os silogismos. Um silogismo é um tipo particular de argumento dedutivo constituído de apenas duas premissas e uma conclusão.

Silogismos são extremamente importantes nos argumentos, tanto em nossa vida profissional quanto no nosso dia a dia. Depois de estudarmos silogismos é altamente recomendável que você busque, em textos publicados na imprensa ou nos livros didáticos, argumentos que sejam silogismos.

1. Silogismos

Consideraremos, inicialmente, o seguinte argumento.

Premissa 1: Todo peixe é vertebrado.

Premissa 2: Todos os tipos de tubarão são peixes.

Conclusão: Todo tubarão é vertebrado.

Trata-se de um exemplo de silogismo, pois é um argumento composto por apenas duas premissas e uma conclusão. Além disso, em um silogismo, temos três termos que recebem os nomes de termo maior, termo médio e termo menor. O termo médio aparece repetido nas duas premissas, mas não na conclusão. No exemplo anterior, o termo médio é "peixes". Em um silogismo, as premissas também são denominadas de antecedentes e a conclusão de consequente.

Observe que os termos podem cumprir o papel de sujeito ou de predicado. No exemplo dos peixes e tubarões, em "todo peixe é vertebrado", peixe cumpre o papel de sujeito. Já "vertebrado" cumpre o papel de predicado. A palavra "vertebrados" é um qualificador do termo sujeito peixe, por isso, é chamado de predicado. Essa observação é fundamental para definirmos termo maior e termo menor.

A seguir, vemos as definições de termo maior e termo menor e a formalização do que é um termo médio.

• Denomina-se **termo maior** o termo que cumpre o papel de predicado na conclusão do argumento.

• Denomina-se **termo menor** o termo que cumpre o papel de sujeito na conclusão do argumento.

Lembre-se de que **termo médio** é aquele que aparece apenas nas premissas do argumento.

Por que usamos a palavra maior na expressão termo maior? Porque, usualmente, o termo que cumpre o papel de predicado apresenta uma amplitude ou extensão maior do que aquele que cumpre o papel de sujeito. No nosso exemplo, o termo maior (vertebrados) é mais extenso/mais amplo do que a classe dos tubarões (termo menor). O termo médio (peixes), como vimos, é justamente aquele que aparece nas duas premissas.

Reflita

Como lemos em Gyuricza (2009, p. 37), silogismo significa, etimologicamente, "reunir com o pensamento". Ou seja, o significado original da palavra silogismo em grego é justamente a soma ou junção de premissas para se chegar a uma conclusão.

É preciso destacar que "termo", no contexto dos silogismos, não significa, necessariamente, apenas uma palavra. Quando usamos "termo" nos silogismos podemos estar nos referindo a expressões com mais de uma palavra.

Exemplificando

"O cantor e compositor Chico Buarque é um personagem fundamental da música popular brasileira".

Nesse enunciado, o termo que cumpre papel de sujeito é " O cantor e compositor Chico Buarque" e o termo que cumpre papel de predicado é "um personagem fundamental da música popular brasileira". Perceba que nenhum deles é constituído apenas por uma única palavra.

Existem vários tipos de silogismos: categóricos, conjuntivos, disjuntivos e hipotéticos. Vejamos a seguir a definição de silogismo categórico.

Assimile

Denomina-se de silogismo categórico o argumento dedutivo constituído de apenas duas premissas e uma conclusão, em que as premissas

articulam dois termos a um terceiro.

O silogismo é categórico pelo fato de conter proposições categóricas, ou seja, enunciados simples que contêm apenas um sujeito e um predicado.

Os enunciados em um silogismo categórico podem se apresentar de quatro formas. Classicamente, são utilizadas as vogais A, E, I e O para representar cada uma dessas formas. Veja o Quadro 2.1.

Quadro 2.1 | Vogais, tipos e exemplos de enunciados categóricos

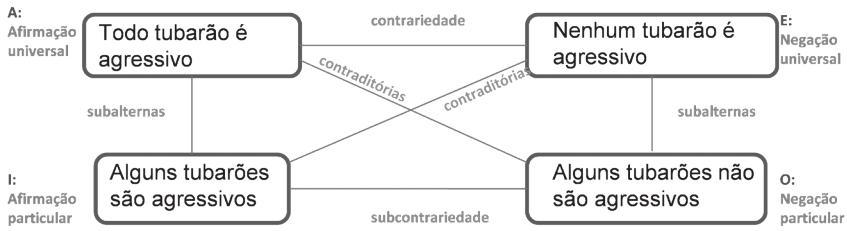
Vogal	Denominação	Formas de enunciado categórico	Exemplo
A	Universal afirmativa	Todo sujeito é predicado	Todo tubarão é peixe
E	Universal negativa	Nenhum sujeito é predicado	Nenhum tubarão é ave
I	Particular afirmativa	Algum sujeito é predicado	Alguns tubarões são agressivos
O	Particular negativa	Nenhum sujeito é predicado	Alguns tubarões não são agressivos

Fonte: elaborado pelo autor.

Observe, ainda, que nos enunciados categóricos temos a presença de quantificadores: todo, nenhum e algum. Posteriormente voltaremos à discussão sobre quantificadores.

Como o estudo dos silogismos categóricos iniciou-se com Aristóteles, há mais de dois mil anos, determinados elementos neste estudo são considerados clássicos. De acordo com a relação estabelecida entre cada uma dessas proposições, podemos ter quatro situações: proposições contraditórias, proposições subalternas, proposições contrárias e proposições subcontrárias. Estas relações são apresentadas na Figura 2.1.

Figura 2.1 | Quadro de proposições categóricas



Fonte: adaptada de: Gyuricza (2009, p. 41); Paixão (2007, p. 61).

Com base no quadro lógico apresentado na Figura 2.1 de proposições categóricas, cabe destacar determinadas relações:

a) Uma proposição só poderá estabelecer a relação de contrária à outra proposição quando ambas forem proposições universais (uma delas é uma afirmação

universal e a outra é uma negação universal).

b) Não é possível que duas proposições universais sejam ambas verdadeiras simultaneamente.

c) Não podemos ter proposições subcontrárias entre si que sejam simultaneamente falsas. Contudo, duas proposições subcontrárias podem ser verdadeiras ao mesmo tempo. Teremos esse caso quando uma proposição for uma afirmação particular e a outra for uma negação particular.

d) Para duas proposições subalternas entre si, podemos ter: ambas verdadeiras ao mesmo tempo, ambas falsas ao mesmo tempo ou uma verdadeira e a outra falsa.

e) Duas proposições contraditórias não podem ser ambas verdadeiras simultaneamente nem ambas falsas simultaneamente.

Pesquise mais

Para saber mais sobre o quadro lógico das proposições categóricas, você pode assistir à vídeoaula: <https://www.youtube.com/watch?v=TzAf7Ue0nDI>. Acesso em: 4 jan. 2017.

Para podermos qualificar um argumento como válido, é necessário utilizar as relações de implicação, que veremos na próxima subseção. As relações de equivalência são utilizadas nas técnicas dedutivas que estudaremos na sequência desta unidade.

2. Relações de implicação e equivalência

Em primeiro lugar, apresentamos a definição de relação de implicação:

Assimile

Dizemos que uma proposição composta p implica logicamente uma proposição composta q, quando a proposição q assumir valor lógico verdadeiro sempre que a proposição p assumir valor lógico verdadeiro.

Notação: se a proposição p implica logicamente a proposição q, escrevemos $p \Rightarrow q$.

Reflita

É importante que você não confunda os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$. O primeiro refere-se a uma relação entre duas proposições, resultando em uma

terceira proposição. Já o segundo símbolo denota uma relação entre duas proposições.

Alternativamente, podemos identificar quando a proposição p implica logicamente a proposição q, quando não temos V na última coluna da tabela-verdade da proposição p e F na última coluna da proposição q.

Vejamos um exemplo:

Consideremos as proposições $p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$.

Tabela 2.2 | implicação lógica

p	q	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Fonte: adaptada de Alencar Filho (1975, p. 50).

Desta tabela-verdade podemos identificar várias implicações lógicas.

Observe que temos as implicações $p \Rightarrow p \vee q$, pois nas colunas referentes às proposições p e $p \vee q$ não existe V para a proposição p e F para a proposição $p \vee q$ em uma mesma linha. Em outras palavras, não ocorre nas colunas referentes a estas duas proposições a sequência VF. A ordem aqui é importante.

Também temos a implicação $q \Rightarrow p \vee q$. Ao observar as colunas referentes às proposições q e $p \vee q$ não temos, nesta ordem, a sequência VF.

Estas duas implicações lógicas $p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$ são conhecidas como regras de adição.

Observe que não é verdade que $q \Rightarrow p \leftrightarrow q$, pois nas colunas referentes a estas duas proposições, temos VF (confira com a terceira linha da tabela-verdade anterior).

A seguir apresentamos a definição de equivalência lógica.

Assimile

Dizemos que uma proposição composta p é logicamente equivalente a uma proposição composta quando as tabelas-verdades das duas proposições forem idênticas.

Como exemplo de equivalência lógica, considere as proposições $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$:

Tabela 2.3 | equivalência lógica entre as proposições $p \to q$ e $\sim p \vee q$

p	q	$p \to q$	$\sim p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Fonte: adaptada de Alencar Filho (1975, p. 56).

Como as colunas em destaque são idênticas, as proposições $p \to q$ e $\sim p \vee q$ são logicamente equivalentes.

A seguir, apresentamos algumas equivalências notáveis.

i) Comutatividade da conjunção: $q \wedge p \Leftrightarrow p \wedge q$.

ii) Comutatividade da disjunção: $q \vee p \Leftrightarrow p \vee q$.

iii) Dupla negação: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$.

iv) Leis de de Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim q \vee \sim p$ e $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim q \wedge \sim p$.

v) Associação para conjunção: $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$.

vi) Associação para disjunção: $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$.

vii) Exportação/importação: $p \wedge q \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$.

viii) Condicional: $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.

ix) Contraposição: $p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$.

x) Distributiva para a conjunção: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

xi) Distributiva para a disjunção: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Você pode verificar que elas são logicamente equivalentes construindo as tabelas-verdade para cada uma delas e observando que são idênticas.

3. Regras de inferência

Vimos que um argumento válido é aquele que se as premissas forem todas verdadeiras a conclusão será, obrigatoriamente, verdadeira. Para identificar se um argumento é válido, podemos utilizar tabelas-verdade. Como podemos fazer isso?

Considere um argumento constituído das premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ e conclusão p_{n+1}.

1º passo: construímos a tabela-verdade para as premissas com a coluna $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n$.

2º. Passo: incluímos a coluna com os valores lógicos da conclusão p_{n+1} na tabela-verdade anterior.

3º Passo: verificamos se há implicação lógica entre as premissas e a conclusão, ou seja, buscamos uma linha que apresente, nesta ordem, VF. Se existir ao menos uma linha da tabela-verdade que apresente os valores lógicos VF, então, o argumento não será válido.

Com um exemplo ficará mais simples. Vejamos com o argumento a seguir:

Premissa 1: p.

Premissa 2: $p \rightarrow q$.

Conclusão: q.

Construímos a tabela-verdade a seguir:

Tabela 2.4 | validade de um argumento por tabelas-verdade

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Fonte: elaborada pelo autor.

Como não temos, nas duas últimas colunas da tabela-verdade, nenhuma linha que apresente VF (nesta ordem), o argumento $p, p \rightarrow q \Rightarrow q$ é válido. Considere agora um outro argumento:

Premissa 1: $p \rightarrow q$.

Premissa 2: $\sim p$.

Conclusão: $\sim q$.

Construímos a tabela-verdade a seguir:

Tabela 2.5 | validade de um argumento por tabelas-verdade

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$(p \to q) \wedge (\sim p)$	$\sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que na terceira linha, nas duas últimas colunas dessa tabela-verdade, temos a sequência VF. Portanto, o argumento $(p \to q), (\sim p) \Rightarrow \sim q$ não é válido. As premissas $p \to q$ e $\sim p$ apresentam valor lógico verdadeiro, mas a conclusão é falsa.

Argumentos que apresentam as premissas com valor lógico verdadeiro e a conclusão com valor lógico falso denominam-se sofismas.

As regras de inferência são argumentos válidos fundamentais. Você poderá verificar a validade de cada um dos argumentos a seguir construindo suas respectivas tabelas-verdade.

Elas são utilizadas para efetuar uma demonstração ou prova de um argumento, ou seja, estas regras de inferências são usadas como etapas intermediárias na demonstração de um argumento mais complexo. Em uma determinada demonstração é frequente usarmos várias dessas regras de inferência e nada impede que as usemos mais de uma vez em uma demonstração.

A seguir listamos as principais regras de inferência.

i) Modus ponens:

Premissa 1: $p \to q$; Premissa 2: p; Conclusão: q.

ii) Modus tollens:

Premissa 1: $p \to q$; Premissa 2: $\sim q$; Conclusão: $\sim p$.

iii) Regra da adição:

Premissa 1: p; Conclusão: $p \vee q$.

iv) Regra da simplificação:

Premissa 1: $p \wedge q$; Conclusão: p.

v) Regra de absorção:

Premissa 1: $p \to q$ Conclusão: $p \to (p \wedge q)$.

vi) Silogismo hipotético:

Premissa 1: $p \to q$; Premissa 2: $q \to r$; Conclusão: $p \to r$.

vii) Silogismo disjuntivo:

Premissa 1: $p \vee q$; Premissa 2: $\sim p$; Conclusão: q .

viii) Regra da bicondicional:

Premissa 1: $p \to q$; Premissa 2: $q \to p$; Conclusão: $p \leftrightarrow q$.

ix) Dilema construtivo:

Premissa 1: $p \to q$; Premissa 2: $r \to s$ Premissa 3: $p \vee r$ Conclusão: $q \vee s$.

x) Dilema destrutivo:

Premissa 1: $p \to q$; Premissa 2: $r \to s$; Premissa 3: $\sim q \vee \sim s$ Conclusão: $\sim p \vee \sim r$.

4. Prova direta, condicional e bicondicional

Dizemos que uma proposição q é uma consequência ou que é formalmente dedutível de um conjunto de premissas, se e somente se podemos formar uma sequência de proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tal que:

i) A proposição p_n é a mesma que a proposição q.

ii) Qualquer que seja k, a proposição p_k ou é uma das premissas ou é alcançada como conclusão por meio de algum argumento válido obtido das proposições $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$.

Exemplo: Considere demonstrar o argumento:

O aluno não estuda. Se o aluno não estuda ele reprova. Se o aluno reprova ele muda de escola.

Façamos a representação:

p: o aluno estuda.

q: o aluno reprova.

r: o aluno muda de escola.

O argumento fica:

Premissa 1: o aluno não estuda.

Premissa 2: se o aluno não estuda ele reprova.

Premissa 3: se o aluno reprova ele muda de escola.

Conclusão: o aluno muda de escola.

Usando a representação anterior, teremos:

Dadas as premissas a seguir, prove r .

Premissa 1: $\sim p$

Premissa 2: $\sim p \rightarrow q$

Premissa 3: $q \rightarrow r$

Demonstração:

1. $\sim p$ (premissa 1).
2. $\sim p \rightarrow q$ (premissa 2).
3. $q \rightarrow r$ (premissa 3).
4. q (utilizamos modus ponens a partir de 1 e 2).
5. r (utilizamos modus ponens a partir de 3 e 4)

Vejamos agora a definição de prova condicional:

Considere um argumento da forma $p_1, p_2, ..., p_n \Rightarrow q \rightarrow r$ em que a conclusão é uma condicional. Este argumento será válido se a condicional $(p_1, p_2, ..., p_n) \rightarrow (q \rightarrow r)$ for uma tautologia.

De acordo com Alencar Filho (1975, p. 145), a prova condicional "só pode ser usada se a conclusão do argumento tem a forma condicional".

Para efetuar a demonstração condicional utiliza-se a "regra de importação", que afirma que a condicional $(p_1, p_2, ..., p_n) \rightarrow (q \rightarrow r)$ é equivalente à condicional $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \wedge q) \rightarrow r$.

Em outras palavras, adicionamos ao conjunto inicial de premissas $(p_1, p_2, ..., p_n)$ a premissa q. Esta premissa q, por vezes, é também denominada de premissa provisória ou premissa adicional.

Exemplo:

Considere o argumento:

Se Carlos vai à praia, então, Carlos surfa, ou ele vai ao cinema.

Carlos não surfou.

Se Carlos vai à praia, então, Carlos não vai ao cinema.

Vamos representar essas proposições por:

p: Carlos vai à praia.

q: Carlos surfa.

r: Carlos vai ao cinema.

Então, teremos a representação:

Premissa 1: $(p \rightarrow q) \vee r$.

Premissa 2: $\sim q$.

Conclusão: $p \rightarrow r$ é válido.

Vamos demonstrar esse argumento.

Pela regra de importação, consideramos a premissa provisória "**Premissa 3: p**". Então:

Passo 1: $(p \rightarrow q) \vee r$ (usamos a Premissa 1).

Passo 2: $\sim q$ (usamos a Premissa 2).

Passo 3: p (usamos a Premissa 3).

Passo 4: $(\sim p \vee q) \vee r$ (utilizamos a equivalência lógica da condicional no passo 1).

O passo 4 em linguagem natural corresponde a: ou Carlos não vai à praia ou Carlos surfa ou Carlos vai ao cinema.

Passo 5: $(r \vee \sim p) \vee q$ (utilizamos a equivalência lógica da associação para disjunção no passo 4).

No passo 5, simplesmente reordenamos a frase do passo 4.

Passo 6: $r \vee \sim p$ (utilizamos o silogismo disjuntivo nos passos 2 e 5).

O passo 6 em linguagem natural fica: Carlos vai ao cinema ou não vai à praia.

Passo 7: $\sim\sim p$ (utilizamos a dupla negação no passo 3).

O passo 7 em linguagem natural corresponde a: não é verdade que Carlos não vai à praia.

Passo 8: r (utilizamos o silogismo disjuntivo nos passos 6 e 7).

Dos passos 6 e 7, por silogismo disjuntivo, concluímos por r. O passo 8 corresponde a: Carlos vai ao cinema.

Assim, concluímos a demonstração.

Por fim, veremos a técnica de prova para argumentos cuja conclusão é uma bicondicional $p \leftrightarrow q$. Para efetuar este tipo de prova, dividimos a demonstração em duas partes: primeiro demonstramos em um dos sentidos (por exemplo, $p \rightarrow q$) e, posteriormente, demonstramos no outro sentido $q \rightarrow p$.

Sem medo de errar

Lembremos que nossa situação-problema solicitava que decidíssemos se o argumento a seguir era válido e, se caso não fosse, como poderíamos modificá-lo para torná-lo um argumento válido.

Premissa 1: Se 17 não é um número primo, então, 5 não é ímpar.

Premissa 2: 17 é primo.

Conclusão: 5 é ímpar.

Inicialmente, devemos "traduzir" este argumento para a notação proposicional para ficar mais simples nosso estudo.

Chamamos de p a proposição: p: 17 não é primo, de q a proposição q: 5 é ímpar.

Então, nosso argumento tem a seguinte forma:

Premissa 1: $\sim p \rightarrow \sim q$.

Premissa 2: p.

Conclusão: q.

Assim, temos o argumento: $\sim p \rightarrow \sim q, p \Rightarrow q$.

Cabe uma observação relativa à notação: quando escrevemos as várias premissas de um argumento na mesma linha (como em $\sim p \rightarrow \sim q, p \Rightarrow q$), separamos as premissas por vírgulas.

Construindo a sua tabela-verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q, p$	q
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F

Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que nas células em destaque temos V na penúltima coluna e F na última, o que chamamos de VF, anteriormente. Neste caso, este argumento não é válido. É interessante destacar que a premissa 2 é verdadeira e que a conclusão é verdadeira, mas nem por isso temos um argumento válido.

O que poderíamos alterar neste argumento para torná-lo um argumento válido?

Veja que não adianta mudar os valores numéricos no argumento para torná-lo válido. Não é o fato de o argumento utilizar os números 17 ou 5 que o torna mais ou menos válido, mas sim a sua estrutura (a sua forma).

Assim, devemos alterar o argumento em si. Não basta uma alteração "cosmética" para torná-lo válido.

Por exemplo, um argumento da forma como o que vem a seguir é válido.

Premissa 1: $p \rightarrow q$.

Premissa 2: p.

Conclusão: q.

Construa a tabela-verdade deste argumento para verificar sua validade.

Avançando na prática

Validade de um argumento por tabela-verdade e por regras de inferência

Descrição da situação-problema

Depois de resolver a situação-problema do início desta seção, um de seus colegas, professor de Matemática, apresentou à turma dele o argumento a seguir, a fim de discutir a validade deste usando tabelas-verdade.

Se Paulo não participa das provas, então, Soraia será aprovada ou Cláudio ficará feliz.

Soraia não será aprovada.

Logo, se Paulo não participa das provas, então, Cláudio ficará feliz.

Resolução da situação-problema

Inicialmente, vamos "traduzir" as proposições do enunciado:

p: Paulo não participa das provas.

q: Soraia será aprovada.

r: Cláudio ficará feliz.

Nosso argumento fica representado assim:

Premissa 1: $p \rightarrow (q \vee r)$.

Premissa 2: $\sim q$.

Conclusão: $p \rightarrow r$.

A tabela-verdade fica:

p	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow (q \vee r)$	$\sim q$	$p \rightarrow r$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Fonte: elaborada pelo autor.

Veja que nas linhas indicadas as premissas são verdadeiras e a conclusão é verdadeira. Assim, o argumento é válido.

Faça valer a pena

1. Em um silogismo categórico, os enunciados podem se apresentar em quatro formas, as quais são identificadas com as vogais A, E, I e O. A vogal A é associada com afirmações universais, a vogal E com negações universais, a vogal I com afirmações particulares e a vogal O com negações particulares.

Considere os enunciados "Nenhum homem gentil é ganancioso" e "Todos os economistas são gentis". Estes enunciados, são, respectivamente:

a) Afirmação universal e negação universal.

b) Negação particular e negação universal.

c) Negação universal e afirmação universal.

d) Afirmação particular e negação particular.

e) Afirmação universal e afirmação universal.

2. Podemos verificar a validade ou não validade de um argumento utilizando tabelas-verdade e pesquisando se a tabela-verdade apresenta em alguma de suas linhas os valores lógicos na ordem VF para as premissas e a conclusão.

Considere o argumento:

Premissa 1: $p \rightarrow \sim q$.

Premissa 2: $p \vee q$.

Conclusão: $p \leftrightarrow q$.

a) Esse argumento é válido pois a conclusão sempre é verdadeira.

b) O argumento não é válido, pois existe ao menos uma linha na tabela-verdade para as premissas e a conclusão para a qual as premissas assumem valor lógico verdadeiro e a conclusão assume valor lógico falso.

c) O argumento não é válido, pois não existem linhas na tabela-verdade para as premissas e a conclusão nas quais tenhamos apenas valores falsos.

d) O argumento não é válido, pois existem valores lógicos na tabela-verdade para as premissas e a conclusão para os quais a conclusão é falsa.

e) Esse argumento não é válido, pois existe ao menos um valor lógico falso na conclusão.

3. As regras de inferências são exemplos de argumentos válidos. Assumem grande importância, pois são utilizadas nas demonstrações de teoremas.

Vimos as seguintes regras de inferência: modus ponens, modus tollens, regra da adição, regra da simplificação, regra da absorção, silogismo hipotético, silogismo disjuntivo, regra da bicondicional, dilema construtivo e dilema destrutivo.

Considere o argumento:

Argumento:

Premissa 1: $\sim (a \rightarrow b) \vee c$.

Premissa 2: $\sim\sim(a \rightarrow b)$.

Conclusão: c.

A alternativa que apresenta uma possibilidade de decodificação correta para a língua natural para este argumento é:

a)

Argumento:

Premissa 1: Não é verdade que Carlos é médico e é professor ou Paula é geóloga.

Premissa 2: É verdade que Carlos é médico e é professor.

Conclusão: Paula é geóloga.

b)

Argumento:

Premissa 1: Se Paulo é médico, então, não é professor ou Paula não é geóloga.

Premissa 2: É verdade que Paulo é médico e professor.

Conclusão: Paula é geóloga.

c)

Argumento:

Premissa 1: Não é verdade que Paulo é médico e professor e Paula é geóloga.

Premissa 2: É verdade que Paulo é médico e não é professor.

Conclusão: Paula é médica.

d)

Argumento:

Premissa 1: Não é verdade que se Paulo é médico, então, é professor ou Paula é geóloga.

Premissa 2: É verdade que se Paulo é médico, então, é professor.

Conclusão: Paula é geóloga.

e)

Argumento:

Premissa 1: Se Paulo é médico, então, é professor ou Paula é geóloga.

Premissa 2: Não é verdade que se Paulo é médico, então, é professor.

Conclusão: Paula é geóloga.

Seção 2.2

Técnicas dedutivas indiretas

Diálogo aberto

Nesta segunda situação-problema, você e seus dois colegas professores de Matemática avançarão com a discussão sobre demonstrações, iniciada na seção anterior. Vocês conversavam na sala dos professores sobre algumas questões trazidas para debate pelos seus alunos. Dessa conversa, surgiram as situações descritas a seguir.

Um dos seus alunos estava tentando demonstrar que nenhum número inteiro poderia ser par e ímpar ao mesmo tempo. Ele estava relatando dificuldades para construir esta demonstração.

O outro aluno relatou dificuldade em demonstrar que existe, no máximo, um número real x tal que ax + b = 0, com a e b números reais e $a \neq 0$.

O terceiro aluno estava tentando demonstrar que se k e k+1 são dois números inteiros consecutivos, então, não podem ser ambos pares.

Um dos professores relatou ainda que os alunos dele trouxeram para a sala de aula outras dúvidas, como as apresentadas a seguir.

Como negar as frases: "Alguns professores são dedicados", "Todos os professores são dedicados"?

Como transferir a negação destas frases em língua natural para frases da Matemática?

Por exemplo: como negar a afirmação $\forall x, \exists y, 3x + 2y = 18$?

Não pode faltar

Antes de discutirmos as provas indiretas, é importante apresentarmos alguns termos bastante utilizados na Matemática: conjecturas, axiomas, lemas, teoremas e corolários.

Muitas vezes, ao se efetuar investigações matemáticas, o pesquisador, por algum motivo, acredita que determinada afirmação é verdadeira, mas não consegue

demonstrá-la. Enquanto esta não é demonstrada, recebe o nome de conjectura.

Uma conjectura de grande destaque na História da Matemática ficou conhecida como Último Teorema de Fermat: se n é um natural maior que dois então a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções inteiras positivas. Pierre Fermat teria escrito à margem de um livro: "eu tenho uma demonstração maravilhosa para esta proposição mas a margem é muito estreita para contê-la", (Singh, 2014, p. 60). Foram necessários 300 anos para que fosse obtida uma demonstração aceita como válida pela comunidade matemática internacional. Esta demonstração é atribuída ao matemático inglês Andrew Wiles. Então, após aceita a demonstração como válida, a conjectura de Fermat deixou de ser uma conjectura e passou a ser um Teorema.

Assimile

Definição: de acordo com Schneirman (2000, p. 7), "afirmações cuja veracidade não podemos garantir são chamadas conjecturas". Em outras palavras, uma afirmação matemática para a qual não temos uma prova (demonstração) é denominada de conjectura.

Muitas vezes, frente a uma conjectura, temos duas alternativas: tentar demonstrá-la ou buscar um **contra-exemplo**. Mas o que é um contraexemplo na Matemática?

De acordo com Alencar Filho (1975, p. 112), "para mostrar que uma proposição da forma $\forall x \in A, p(x)$ é falsa, basta mostrar que sua negação $\exists x \in A, \sim p(x)$ é verdadeira, isto é, que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição falsa. Pois bem, o elemento x_0 diz-se um contraexemplo para a proposição $\forall x \in A, p(x)$".

Vejamos a conjectura a seguir:

Considere a afirmação: Define-se o fatorial de um número inteiro positivo e escreve-se n! como

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)!, \text{se } n \geq 1 \\ 1, \text{ se } n = 0 \end{cases}"$$

Conjectura-se que $n! \leq n^2, \forall n \geq 1$

Para buscar um contraexemplo para esta conjectura, verificamos a afirmação para alguns valores escolhidos de n. Se a afirmação não for válida para ao menos um valor de n, então, a conjectura é inválida.

Você pode testar esta conjectura para valores de n = 1, 2 e 3 e observar que a desigualdade é satisfeita, mas isto não constitui uma prova de que a afirmação é válida para qualquer n.

Contudo, se n = 4, a desigualdade não é mais válida: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 4^2$. Logo, a conjectura não é válida e não precisamos prová-la.

Vejamos agora outro exemplo de como usar contraexemplos para mostrarmos que uma conjectura não é válida.

Considere a conjectura: $3^{2n} - 1$ é divisível por 7, para todo n maior ou igual a 1.

Um contraexemplo pode ser apresentado escolhendo-se n = 1:

3^(2·1) - 1= 9 – 1 = 8, que não é divisível por 7. Assim, mostramos que a conjectura não é válida.

Veja bem: reforçamos que não basta mostrar uma quantidade de exemplos para assegurar que uma conjectura seja válida, mas basta um único contraexemplo para mostrar que ela é inválida.

Reflita

Considere a conjectura: "Todos os números primos são ímpares".

Você consegue encontrar algum contraexemplo para esta conjectura?

Os demais termos citados têm as seguintes definições:

• **Teorema**: de acordo Schneirman (2003, p. 7), "um teorema é uma afirmação declarativa, para a qual existe uma prova". Além dessa definição, é relevante para nossos propósitos comentarmos que teoremas são afirmações que foram demonstradas matematicamente e que têm relevância matemática suficiente para receberem o "status" de teorema. Não é qualquer afirmação matematicamente demonstrada que recebe o nome de teorema, apenas aquelas consideradas mais importantes.

• **Lemas**: ainda de acordo com Scheinerman (2003, p. 14), lema é "um teorema cujo objetivo principal é ajudar a provar outro teorema mais importante". Frequentemente, demonstramos um ou mais lemas para utilizar o resultado dessas demonstrações na demonstração de um teorema.

• **Corolário**: segundo Schneirman (2003, p. 14), corolário é um "resultado com uma prova rápida cujo passo principal é o uso de outro teorema provado anteriormente". Corolários são afirmações deduzidas com relativa facilidade de teoremas.

• **Proposição**: também segundo Scheinerman (2003, p.14), uma proposição é "um teorema de importância secundária". Proposições têm menos "prestígio" do que os teoremas.

Pesquise mais

Para você conhecer mais sobre algumas conjecturas famosas na matemática, acesse os links a seguir:

Conjectura de Goldbach: <http://www.uff.br/sintoniamatematica/grandestemaseproblemas/grandestemaseproblemas-html/audio-goldbach-br.html>. Acesso em: 14 dez. 2016.

Conjectura de Siracusa: <http://www.polbr.med.br/ano14/cpc0114.php>. Acesso em: 14 dez. 2016.

<http://www.ciencia-online.net/2013/05/famosa-conjectura-acerca-dos-numeros.html> Acesso em: 14 dez. 2016.

<http://www.somatematica.com.br/coluna/gisele/27102004.php>. Acesso em: 14 dez. 2016.

1. Redução ao absurdo (ou prova indireta)

Antes de explicarmos, com base nos símbolos matemáticos, vamos tentar compreender qual é a ideia básica da redução ao absurdo.

Lembre-se de que dentre os princípios básicos da lógica estão: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo e não existe um terceiro estado para uma proposição (ou ela é verdadeira ou é falsa). Este último é o princípio do terceiro excluído.

Suponha que precisemos demonstrar algum teorema. Ele afirma que certa conclusão é válida. Na técnica de demonstração por absurdo, adicionamos a negação desta conclusão como uma premissa adicional e buscamos alguma contradição (já que não é possível que nenhuma proposição seja verdadeira e falsa ao mesmo tempo nem que assuma um terceiro estado). Esta é a ideia básica por trás da redução ao absurdo.

Você se recorda do que já estudamos nas equivalências lógicas? Uma equivalência lógica notável existe entre as proposições $(p \to q)$ e $(p \wedge \sim q) \to F$. Assim, se tivermos que demonstrar a proposição $(p \to q)$, podemos, equivalentemente, demonstrar que $(p \wedge \sim q) \to F$. Ou seja, se assumirmos como verdadeiras as hipóteses p e a negação de q e buscamos por uma contradição (ou seja, um valor lógico falso) teremos, equivalentemente, demonstrado $(p \to q)$.

Uma forma mais genérica de se apresentar a demonstração indireta por redução ao absurdo consiste no seguinte: para se provar a validade de um argumento em que as proposições $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1} \wedge p_n$ implicam em p, utilizando a técnica de demonstração de redução ao absurdo, supomos a negação da conclusão $\sim p$ como uma premissa adicional e, então, buscamos uma contradição.

Exemplificando

Demonstre por absurdo que "se $11n+2$ for ímpar, então, n é ímpar".

Resolução:

Suponha por absurdo que n seja par. Então, n pode ser escrito na forma: $n=2k, k \in Z_+^*$.

Então: $11n+2=11(2k)+2=22k+2=2(11k+1)$ será, forçosamente, um número par (pois é multiplicado por 2).

Temos uma contradição, então, n é ímpar.

Reflita

Considere n um número inteiro. Demonstre, por redução ao absurdo, que nenhum inteiro pode ser par e ímpar ao mesmo tempo. Sugestão: como n é par, ele pode ser representado de uma forma específica. Como ele é impar, também pode ser escrito de uma forma específica. Busque uma contradição.

Uma questão importante é: quando usar demonstrações por absurdo?

Em situações em que queremos provar que não existe elemento que satisfaça uma determinada propriedade (ou seja, demonstrar que um conjunto é vazio) ou em situações em que queremos provar que existe um único elemento (provas de unicidade) que satisfaz determinada propriedade pode ser interessante tentar demonstrar por redução ao absurdo.

Pesquise mais

Uma demonstração por absurdo bastante conhecida é a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$. A ideia básica desta demonstração é supor que $\sqrt{2}$ seja racional. Daí, busca-se uma contradição. Você encontra essa demonstração e a demonstração para outras raízes não exatas em: <http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/numerosreais/incomensurabilidade.htm>. Acesso em: 15 dez. 2016.

Nesta subseção 1, tratamos da técnica de demonstração por absurdo. Na próxima subseção, veremos como usar a técnica de demonstração por absurdo quando a conclusão for uma condicional.

2. Prova indireta da forma condicional

Considere um argumento em que a conclusão é uma condicional $p \to q$. Para demonstrar a validade de argumentos com condicionais como conclusão, usando a demonstração indireta, negamos a condicional (usando-a como premissa provisória). Lembremos que vale a equivalência $\sim (p \to q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q)$, como também vale a equivalência: $\sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$. Adotamos como premissas provisórias:

Premissa provisória 1: p.

Premissa provisória 2: $\sim q$.

Pesquise mais

No artigo a seguir você pode conhecer um pouco mais sobre demonstrações:

MOTA, Marcos Coutinho; CARVALHO, Marcos Pavani de. Os diferentes tipos de demonstrações: uma reflexão para os cursos de licenciatura em Matemática. **Revista da Educação Matemática da UFOP**, v. 1. Semana de Matemática 11.; Semana de Estatística, 3. 2011. Disponível em: <http://wdz.eng.br/MetodosDemonstracao.pdf>. Acesso em: 28 nov. 2016.

Nesta subseção 2, tratamos da demonstração por absurdo quando nossa conclusão for uma condicional $p \to q$. Com esta técnica de demonstração, utilizamos p como premissa adicional e a negação de q e buscamos uma contradição.

Para ampliar nossa capacidade de expressão, na próxima subseção trataremos dos quantificadores existencial e universal.

3. Quantificadores

As proposições e os símbolos tais como os estudamos até aqui são restritos para expressar as afirmações matemáticas que encontramos nos teoremas. Para ampliar nossa capacidade de expressar as frases matemáticas, definiremos o quantificador universal (usa-se o símbolo $\forall$) e o quantificador existencial (usa-se o símbolo $\exists$). Com estes quantificadores, conseguiremos representar frases matemáticas como: "qualquer que seja x natural, x é maior que zero" ou "existe x racional que satisfaz a propriedade P".

Em primeiro lugar, veremos o que são sentenças abertas. Considere as proposições:

a) $p_1 : 5 + 6 > 32$.

b) $p_2 : 5x - 6 > 11$.

c) $p_3 : 1 + 1 = 3$.

d) $p_4 : 11$ é primo.

e) $p_5 : 4x - 5 = 16$.

f) $p_6 : x$ não é primo.

Podemos determinar o valor lógico das proposições p_1, p_3 e p_4, mas o valor lógico das proposições p_2, p_5 e p_6 depende do valor de x.

Assimile

Definição: de acordo com Alencar Filho (1975, p. 156), "chama-se sentença aberta com uma variável em um conjunto A ou apenas sentença aberta em A, uma expressão p(x) tal que p(a) é falsa ou verdadeira para todo $a \in A$".

Assim, a expressão p(x) assume valor lógico verdadeiro cada vez que substituímos x por algum valor do conjunto A. Em sentenças abertas, costuma-se utilizar x, y, z para representar as variáveis.

O conjunto A recebe o nome de conjunto universo. É o conjunto de todos os valores possíveis para a variável x assumir.

No caso da desigualdade $p_2 : 5x - 6 > 11$, nosso conjunto universo pode ser tomado como sendo o conjunto dos números naturais, dos inteiros, dos racionais ou ainda dos reais, ou mesmo um conjunto qualquer especificado por nós. Por exemplo, $A = \{14, 15, 23, 47, 101\}$. Dependendo do conjunto universo, uma inequação ou equação pode ter conjunto solução vazio.

Assimile

Definição: de acordo com Alencar Filho (1975, p. 156), "chama-se conjunto verdade de uma sentença aberta p(x) em um conjunto A, o conjunto de todos os elementos $a \in A$ tais que p(a) é uma proposição verdadeira".

Vejamos alguns exemplos de conjunto verdade.

Exemplo 1 (conjunto universo é o conjunto dos naturais)

Determine o conjunto verdade da sentença aberta $5x - 6 > 11,\ x \in \mathbb{N}$.

O conjunto verdade é dado por $V = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x > \frac{17}{5} \right\}$.

Exemplo 2 (conjunto universo é o conjunto dos racionais)

Determine o conjunto verdade da sentença aberta $5x - 6 > 11,\ x \in \mathbb{Q}$.

O conjunto verdade é dado por $V = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{17}{5} \right\}$.

Exemplo 3 (conjunto universo é o conjunto dos reais)

Determine o conjunto verdade da sentença aberta $5x - 6 > 11,\ x \in \mathbb{R}$.

O conjunto verdade é dado por $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{17}{5} \right\}$.

Observe que, para cada um dos exemplos anteriores, temos conjuntos verdade distintos. A mudança é sutil, mas relevante.

Exemplo 4

Determine o conjunto verdade da sentença aberta $x < -5, x \in \mathbb{N}$.

Como não existe nenhum número natural que seja negativo, este conjunto verdade é vazio: $V = \varnothing$. Observe que se o conjunto universo na sentença aberta fosse $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ o conjunto verdade não seria vazio.

Sentenças abertas também podem ser escritas com duas variáveis.

Exemplo: considere $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e o produto cartesiano $A \times B$. São exemplos de sentenças abertas em $A \times B$:

a) $y = sen(x)$.

b) $3x + 2y > 5$.

Após definir sentenças abertas com uma e duas variáveis e o conjunto-verdade sobre sentenças abertas, estamos em condições de introduzir os quantificadores universal e existencial.

Para expressarmos sentenças como "existe um número real que satisfaz a propriedade P" ou "qualquer que seja o número inteiro x, então, este inteiro é divisível por 2 ou divisível por 3" necessitamos de outros elementos além das proposições e conectivos que já estudamos. Necessitamos dos quantificadores e do que se denomina predicados.

3.1 O quantificador universal

O quantificador universal expressa frases como "para todo", "qualquer que seja". Utiliza-se o símbolo $\forall$ para representá-lo. Frases como: "qualquer que seja x que pertença ao conjunto A, então, x satisfaz a afirmação P sobre x" são escritas, simbolicamente, como $\forall x, P(x)$.

Considere a frase $\forall x \in \mathbb{Z}, x > 5$. Nela temos o quantificador universal $\forall$ e a propriedade $x > 5$ que qualifica os valores x. Esta propriedade dos números x recebe o nome de predicado.

Reflita

É importante que você busque estabelecer a conexão entre predicados na lógica matemática no que se chama Cálculo de Predicados e a análise sintática tal como você estudou no Ensino Fundamental e Médio. Converse com um professor de Língua Portuguesa, você verá a importante conexão entre lógica matemática e a língua natural.

Considere as frases:

a) "Qualquer que seja x número real, $5x - 6 > 11$" é representada simbolicamente da seguinte forma: $\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 6 > 11$. Esta sentença tem valor lógico falso.

b) "Qualquer que seja x número natural, então, x é número real" é representada simbolicamente da seguinte forma: $\forall x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

Novamente, destacamos que o valor lógico destas frases depende do domínio sobre o qual estamos tratando. Uma sentença matemática sobre x pode ser falsa se nosso domínio for o conjunto dos números naturais e pode ser verdadeira se o domínio for o conjunto dos números inteiros.

3.2 O quantificador existencial

Para representar frases como "existe x que satisfaz a propriedade P", "existe um número real que satisfaz a equação $3x + 5 = 10$", "existe professor x tal que x trabalha em duas escolas", usamos o quantificador existencial $\exists$. Esse quantificador é utilizado em frases que têm afirmações do tipo "existe", "algum x", "para algum x".

Veja os exemplos:

a) A frase "existe x número natural tal que $x^2 = \sqrt{2}$" é representada como $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = \sqrt{2}$. Observe que o predicado neste caso é $P(x): x^2 = \sqrt{2}$. Essa frase tem valor lógico falso.

b) A frase "existe x número real tal que $x+5<11$" é representada como $\exists x \in \mathbb{R}, x+5<11$. Essa frase tem valor lógico verdadeiro.

4. Operações lógicas sobre sentenças abertas

Para determinarmos o valor lógico de sentenças com quantificadores, devemos observar as regras a seguir.

Sentenças com o quantificador universal "para todo x, P(x)" assumem valor lógico verdadeiro se, e somente se, os conjuntos universo e verdade forem iguais. Considere o exemplo a seguir.

Exemplo: $\forall x \in U, x+2=5$. Considere o conjunto universo $U=\{3\}$. Então, como o conjunto verdade neste caso é $V=\{3\}$, temos que os conjuntos universo e verdade são iguais, o valor lógico de $\forall x \in U, x+2=5$ é verdadeiro. Contudo, se o conjunto universo for $U=\{3,4\}$, o valor lógico de $\forall x \in U, x+2=5$ será falso.

Uma sentença com o quantificador existencial "existe x, P(x)" assume valor lógico verdadeiro se, e somente se, o conjunto verdade de P(x) não for vazio, e assume valor lógico falso quando o conjunto verdade for vazio. Considere o exemplo a seguir.

Exemplo: $\exists x \in U, x<-\log(2)$. Considere o conjunto universo $U=\mathbb{R}$. O conjunto verdade neste caso é $V=\{x \in \mathbb{R} \mid x<-\log(2)\}$. Como o conjunto verdade é não vazio, o valor lógico de $\exists x \in U, x>\log(2)$ é verdadeiro. Contudo, se o conjunto universo for $U=\mathbb{N}$, o conjunto verdade será vazio (não existe nenhum número natural que seja menor que $-\log(2)$).

Para operar sobre sentenças abertas, uma questão importante na Matemática e na demonstração de teoremas é saber lidar com a negação de afirmações que apresentam quantificadores.

Considere a afirmação: "não existe número natural que seja negativo". Esta afirmação é representada simbolicamente como $\sim(\exists x \in \mathbb{N}, x<0)$. Esta afirmação é equivalente a: $\forall x \in \mathbb{N}, x>0$.

Em geral, a negação de uma afirmação com o quantificador existencial $\sim(\exists x \in U, P(x))$ será $\forall x \in U, \sim P(x)$.

Considere agora a afirmação com o quantificador universal: "nem todos os números racionais são inteiros". Esta afirmação pode ser escrita, simbolicamente, como: $\sim(\forall x \in \mathbb{Q}, x \text{ é inteiro})$. Esta afirmação é equivalente a $\exists x \in \mathbb{Q}, x \text{ não é inteiro}$. Em geral, vale que a afirmação $\sim(\forall x \in U, P(x))$ é equivalente a $\exists x \in U, \sim P(x)$.

Sem medo de errar

Retomemos a situação-problema exposta no início desta seção:

Você e seus dois colegas também professores de Matemática, depois de discutirem as questões levantadas pelos três primeiros alunos, decidiram desenvolver um trabalho de síntese entre as três questões, enfatizando o problema comum às três demonstrações solicitadas.

O que há de comum entre as três demonstrações solicitadas?

Os três alunos estavam interessados em demonstrar afirmações relacionadas com a não existência de um número (ou de dois números) que atendessem determinada propriedade.

Vejamos: na primeira questão, o aluno solicitou para demonstrar que nenhum inteiro pode ser par e ímpar ao mesmo tempo. Aqui, queremos provar que o conjunto dos números inteiros que é par e ímpar ao mesmo tempo é vazio.

Já o segundo aluno solicitou que se demonstrasse que existe no máximo um número real x tal que ax + b = 0. Poderíamos tentar demonstrar que é impossível que existam dois números x e y tais que ax + b = 0.

Por fim, o terceiro aluno solicitou que se demonstrasse que o conjunto dos números inteiros consecutivos, que são ambos pares, é vazio.

Como podemos sintetizar essas três demonstrações em um "princípio único" para facilitar a compreensão para os alunos?

Explicitando que em todas elas queremos demonstrar que um conjunto é vazio ou que queremos demonstrar a unicidade de um número é adequado tentar usar é adequado tentar usar a demonstração por absurdo.

Negamos a tese e buscamos uma contradição.

Vejamos como fazer isso no primeiro caso (nenhum número inteiro pode ser par e ímpar ao mesmo tempo).

Vamos negar a tese: vamos supor que existe um número x inteiro que seja par e ímpar. Então x pode ser escrito como $x = 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$. Como x, por hipótese, também é ímpar, x pode ser escrito como $x = 2k_2 + 1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Como x é igual a ele mesmo, temos: $x = 2k_1 = 2k_2 + 1$. Ou seja: $2k_1 - 2k_2 = 1$. Então: $2(k_1 - k_2) = 1$. Logo, $k_1 - k_2 = \frac{1}{2}$, mas isto é impossível. A diferença de dois números inteiros não pode ser um valor racional. Como chegamos a uma contradição, nosso erro foi na negação da tese. Portanto, não podemos negar que um número inteiro seja

par e ímpar ao mesmo tempo. Conclusão: é impossível que qualquer número inteiro seja par e ímpar ao mesmo tempo.

Vejamos a segunda questão, relacionada com a demonstração da unicidade do valor x tal que ax + b = 0, $a \neq 0$.

Para demonstrar esta unicidade, assumimos, por absurdo, que existam dois valores x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$ tais que ax + b = 0.

Temos que $ax_1 + b = 0$ e $ax_2 + b = 0$. Assim, vale que $ax_1 + b = 0 = ax_2 + b$. Portanto: $ax_1 = ax_2$.

Como estamos supondo $a \neq 0$, podemos dividir os dois lados da igualdade por a e, então, teremos que $x_1 = x_2$.

E a terceira questão, como você faria para demonstrar?

Essa ficará sob sua responsabilidade. Baseie-se nas demonstrações elaboradas até aqui e escreva uma demonstração para essa questão.

Avançando na prática

Negação de sentenças quantificadas

Descrição da situação-problema

Nesta nova situação-problema os alunos solicitaram auxílio para negar frases quantificadas.

Como exemplos de frases quantificadas apresentadas pelos alunos, temos:

"Alguns professores são dedicados" e "Todos os professores são dedicados".

Outro aluno trouxe a dúvida de como transferir este aprendizado para negar frases quantificadas com símbolos matemáticos. O exemplo apresentado pelo aluno foi:

como negar a afirmação $\forall x, \exists y, 3x + 2y = 18$?

Resolução da situação-problema

Lembremos da situação apresentada pelo aluno:

Como negar as frases "Alguns professores são dedicados" e "Todos os professores são dedicados"?

Traduzimos "alguns" pelo quantificador existencial $\exists$.

Vamos representar o conjunto universo dos professores por U.

Vamos "traduzir" estas frases em símbolos: na primeira frase "Alguns professores são dedicados", vamos substituir professor por x e a propriedade "dedicados" será representada por P(x). Assim, a frase fica:

$\exists x \in U : P(x)$.

Conforme vimos no texto da aula, a negação de uma frase com o quantificador existencial se dá da seguinte forma: $\sim(\exists x \in U : P(x))$ e é equivalente à $\forall x \in U : \sim P(x)$. Voltando para a Língua Portuguesa, temos: "qualquer que seja o professor, ele não é dedicado".

Traduzimos "todos" pelo quantificador universal $\forall$.

Temos $\forall x \in U : P(x)$. Vimos na aula que a negação de $\forall x \in U : P(x)$ é $\sim(\forall x \in U : P(x))$. Essa negação é equivalente à $\exists x \in U : \sim P(x)$. Voltando para a Língua Portuguesa, temos: "Existem professores que não são dedicados".

Vejamos agora como transferir esta aprendizagem para expressões matemáticas.

Para negar uma sentença da forma $\forall x, \exists y, P(x)$, utilizamos a equivalência $\sim(\forall x, \exists y, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \forall y, \sim P(x)$.

Assim, a negação de $\forall x, \exists y, 3x + 2y = 18$ é $\sim(\forall x, \exists y, 3x + 2y = 18)$, que é equivalente à $\exists x, \forall y, 3x + 2y \neq 18$.

Faça valer a pena

1. "Para mostrar que uma proposição da forma $\forall x \in A, p(x)$ é falsa, basta mostrar que sua negação $\exists x \in A$, $\sim p(x)$ é verdadeira, isto é, que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição falsa. Pois bem, o elemento $x_0 \in A$ diz-se um contraexemplo para a proposição $\forall x \in A, p(x)$." (ALENCAR Filho, 1975, p. 183)

A partir do texto-base, assinale a alternativa correta:

a) A proposição $(\forall n \in \mathbb{N}), \left(3^n > n^2\right)$ é verdadeira e o valor n = 4 é um contraexemplo.

b) A proposição $\left(\forall n \in \mathbb{R}\right), \left(\log(x) < 0\right)$ é falsa e o valor x = 10 é um contraexemplo.

c) A proposição $(\forall n \in \mathbb{N}), \left(3^n < n^2\right)$ é falsa e o valor n = 4 é um contraexemplo.

d) A proposição $(\forall x \in \mathbb{R}),(x^2 + 10 > 0)$ é verdadeira, sendo $n = 0$ um contraexemplo.

e) A proposição $(\forall x \in \mathbb{R}),(|\operatorname{sen}(x)| \leq 1)$ é falsa, sendo $x = 0$ um contraexemplo.

2. Lembre-se de que se p(x) for uma sentença aberta ela não tem valor lógico verdadeiro ou falso. Contudo, ao escrevemos $\exists x \in A, p(x)$, teremos uma proposição. Neste caso, a proposição $\exists x \in A, p(x)$ terá valor lógico verdadeiro se o conjunto verdade de p, simbolizado por $V_p \neq \varnothing$, e terá valor lógico falso se $V_p = \varnothing$.

Quando utilizamos o quantificador universal $\forall$, teremos que a proposição $\forall x \in A, p(x)$ terá valor lógico verdadeiro se $V_p = A$, e terá valor lógico falso se $V_p \neq A$.

A negação da sentença quantificada do tipo $\exists x \in U : P(x)$ é $\forall x \in U :\sim P(x)$.

Já a negação da sentença quantificada do tipo $\forall x \in U : P(x)$ é dada por $\exists x \in U :\sim P(x)$.

Por fim, a negação de sentenças do tipo $\forall x \in U, \exists y \in U : p(x, y)$ é dada por $\exists x \in U, \forall y \in U :\sim p(x, y)$.

Considere as proposições:

I. $(\forall x \in \mathbb{R}),(|x| < 0)$.

II. $(\exists x \in \mathbb{R}),(x^3 = x)$.

III. $(\forall x \in \mathbb{R}),(3x + 5 > 37) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}),(5x^4 - 2x = 0)$.

A negação de cada uma destas proposições é:

a)

I. $(\exists x \in \mathbb{R}),(|x| \geq 0)$.

II. $(\exists x \in \mathbb{R}),(x^3 > x)$.

III. $(\forall x \in \mathbb{R}),(3x + 5 \leq 37) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}),(5x^4 - 2x > 0)$.

b)

I. $(\exists x \in \mathbb{R}),(|x| \geq 0)$.

II. $(\forall x \in \mathbb{R}),(x^3 \neq x)$.

III. $(\exists x \in \mathbb{R}),(3x + 5 \leq 37) \vee (\forall x \in \mathbb{R}),(5x^4 - 2x \neq 0)$.

c)

I. $(\forall x \in \mathbb{R}),(|x| > 0)$.

II. $(\exists x \in \mathbb{R}),(x^3 < x)$.

III. $(\exists x \in \mathbb{R}),(3x + 5 \leq 37) \vee (\exists x \in \mathbb{R}),(5x^4 - 2x \leq 0)$.

d)

I. $(\forall x \in \mathbb{R}),(|x| = 0)$.

II. $(\exists x \in \mathbb{R}),(x^3 \neq x)$.

III. $(\forall x \in \mathbb{R}),(3x + 5 > 37) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}),(5x^4 - 2x \neq 0)$.

e)

I. $(\forall x \in \mathbb{R}),(|x| < 0)$.

II. $(\forall x \in \mathbb{R}),(x^3 = x)$.

III. $(\exists x \in \mathbb{R}),(3x + 5 \geq 37) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}),(5x^4 - 2x \geq 0)$.

3. A negação da sentença quantificada do tipo $\exists x \in U : P(x)$ é $\forall x \in U :\sim P(x)$.

Já a negação da sentença quantificada do tipo $\forall x \in U : P(x)$ é dada por $\exists x \in U :\sim P(x)$.

Por fim, a negação de sentenças do tipo $\forall x \in U, \exists y \in U : P(x, y)$ é dada por $\exists x \in U, \forall y \in U :\sim P(x, y)$.

Considere as sentenças:

I. Existe x tal que, para todo y, $5x - 3y < 12$.

II. Todo quadrilátero é um polígono.

III. Existe agricultor que é caçador.

A negação destas sentenças é, respectivamente:

a)

Negação da sentença I: Para todo y existe x, tal que $5x - 3y \geq 12$.

Negação da sentença II: Não existe quadrilátero que seja polígono.

Negação da sentença III: Todo caçador não é agricultor.

b)

Negação da sentença I: Para todo x existe y, tal que $5x - 3y \geq 12$.

Negação da sentença II: Existe quadrilátero que não é polígono.

Negação da sentença III: Todo agricultor não é caçador.

c)

Negação da sentença I: Não existe x para todo y, tal que $5x - 3y \geq 12$.

Negação da sentença II: Todo polígono é quadrilátero.

Negação da sentença III: Existe caçador que não é agricultor.

d)

Negação da sentença I: Para todo x existe y, tal que $5x - 3y < 12$.

Negação da sentença II: Nenhum quadrilátero é polígono.

Negação da sentença III: Nenhum caçador é agricultor.

e)

Negação da sentença I: Para todo y existe x, tal que $5x - 3y \leq 12$.

Negação da sentença II: Todo quadrilátero é polígono.

Negação da sentença III: Todo agricultor é caçador.

Seção 2.3

Indução matemática

Diálogo aberto

Nesta terceira situação-problema, você e seus dois colegas professores de Matemática prosseguirão na discussão sobre demonstrações. Um dos colegas professores trouxe algumas descobertas recentes que relacionam temas acessíveis para os alunos e pesquisas recentes em Matemática. Segundo Burton (2016, p. 54),

> foi provado em 2008 que existem progressões aritméticas finitas, mas arbitrariamente longas constituídas apenas por números primos (não necessariamente primos consecutivos). A maior progressão encontrada até hoje é formada por 23 números primos: $56211383760397 + 44546738095860n,\ 0 \leq n \leq 22$.

Esse é um exemplo de proposição aberta definida sobre os números naturais. Outro é o polinômio quadrático $g(n) = n^2 + n + 27941$, que produz números primos para 286.129 valores entre $0 \leq n \leq 10^6$. O polinômio quadrático, que é bem mais famoso que o anterior, $f(n) = n^2 + n + 41$, produziu menos primos neste mesmo intervalo: "apenas" 261.081 primos.

É importante lembrar: não é porque temos uma proposição $P(n)$ válida para um número finito de casos (mesmo que este número seja muito grande), que podemos afirmar que a proposição é válida para todos os naturais ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Veja que anteriormente temos afirmações realizadas sobre o conjunto dos números naturais. Para relacionar estas questões levantadas pelos alunos, vocês propuseram a eles como situação-problema a questão extraída de Gersting (2004, p. 86):

Demonstre que $2^{3n} - 1$ é divisível por 7, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nesta seção, será apresentada uma técnica de demonstração de teoremas que fazem afirmações a partir dos números naturais.

Por estar relacionado com esta técnica específica de demonstração, conversaremos sobre o binômio de Newton.

Depois da discussão dessa última temática, é o momento de reunir tudo o que foi tratado na Unidade 2 e preparar o texto do projeto de melhoramento de desempenho dos alunos nas olimpíadas escolares. Que tal fazer isso elaborando planos de aula para cada problema abordado, incluindo sugestões de como tratar os temas em sala de aula?

Não pode faltar

Nesta seção veremos uma ferramenta extremamente importante para a demonstração de teoremas sobre o conjunto dos números naturais: o princípio da indução finita. Antes de estudá-lo, que tal relembrarmos quais são os elementos do conjunto dos números naturais e algumas definições? Assim, podemos ter contato com algumas proposições envolvendo os números naturais. Por fim, podemos falar um pouco sobre o binômio de Newton e, então, estudaremos o que está proposto para essa seção.

Números naturais

Os números naturais provavelmente constituem o primeiro desenvolvimento matemático da humanidade.

Define-se o conjunto dos números naturais ao conjunto $\mathbb{N}= \{0,1,2,3,...\}$.

Para todo número natural n existe o sucessor de n, que é $n+1$.

Define-se um número $x \in \mathbb{R}$ como múltiplo de outro $y \in \mathbb{R}$ quando obtemos o primeiro pela multiplicação do segundo por um número natural.

A divisão euclidiana entre dois inteiros a e b produz um quociente (representado aqui pela letra q) e um resto (representado aqui pela letra r). Dados dois inteiros a e b, com $b \neq 0$, existem e são únicos inteiros q e r, tais que $a = qb + r$. O inteiro a recebe o nome de dividendo, o inteiro b recebe o nome de divisor, o inteiro q recebe o nome de quociente e r é denominado de resto.

Define-se por número primo todo número natural que contém, exatamente, dois divisores naturais. São números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,... O 2 é o único primo par. Os números naturais, maiores que 1, que não são primos podem ser representados como o produto de seus fatores primos.

A soma de dois números naturais resulta sempre em um número natural. No entanto, a diferença de dois números naturais nem sempre tem como resultado um número natural. Por exemplo, $3-5 \notin \mathbb{N}$.

O produto de dois números naturais sempre resulta em um número natural. Contudo, a divisão de dois naturais nem sempre é um número natural: $\frac{9}{2} \notin \mathbb{N}$.

O Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre dois ou mais naturais é o menor múltiplo entre estes números, comum a todos eles.

O Máximo Divisor Comum (MDC) entre dois ou mais naturais é o maior divisor comum aos números.

O produto entre dois naturais a e b é igual ao produto $MMC(a,b) \cdot MDC(a,b)$.

Proposições envolvendo números naturais

Na seção anterior, estudamos proposições com uma variável. De particular interesse na Matemática são as proposições definidas sobre o conjunto dos naturais.

Para você ter uma ideia da diversidade de proposições sobre os naturais, apresentamos a seguir exemplos de proposições sobre os números naturais (ao lado de cada uma delas você encontra a referência de onde tiramos cada proposição).

$n(n+1)$ é divisível por 2, $\forall n \in \mathbb{N}$ (IEZZI, 1985, p. 56).

$n(n^2+2)$ é divisível por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$ (IEZZI, 1985, p. 56).

$7^n + 2$ é divisível por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$ (LOPES, 1999, p. 3).

$1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + \ldots + n \cdot (n!) + = (n+1)! - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ (BURTON, 2016, p. 6).

$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$, é inteiro $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ (BURTON, 2016, p. 6).

$n^2 \geq 2n + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ (GERSTING, 2004, p. 85).

$n^2 \geq n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (GERSTING, 2004, p. 85).

$n^2 > 5n + 10$, $\forall n \in \mathbb{N}, n > 6$ (GERSTING, 2004, p. 85).

$2^n \geq n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ (GERSTING, 2004, p. 85).

$2^n < n! < n^n$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ (LOPES, 1999, p. 4)

Sugerimos que você consulte os textos referenciados para observar a variedade de proposições envolvendo números naturais que podem ser demonstradas utilizando a técnica de demonstração que veremos na próxima subseção: o princípio da indução finita. Com esta consulta, você terá seu repertório de proposições sobre os números naturais ampliado de forma significativa.

Princípio da indução finita

Uma conjectura é uma afirmação que ainda não foi demonstrada. Não sabemos se ela é verdadeira ou falsa. Enquanto não demonstrarmos, não saberemos se as proposições apresentadas na subseção anterior são verdadeiras ou falsas. O princípio da indução finita (PIF) possivelmente é o principal instrumento para se demonstrar que proposições definidas sobre os naturais são verdadeiras.

Podemos relacionar o PIF com aquelas brincadeiras de enfileirar dominós em pé. O que ocorre após o primeiro dominó cair? Se todo o conjunto de dominós estiver adequadamente montado, após a queda do primeiro dominó, cai o seguinte, o seguinte do seguinte, até que caiam todos os dominós. Se imaginarmos que temos infinitos dominós um após o outro, depois de derrubarmos o primeiro, cairão infinitos dominós.

Considere as sentenças matemáticas a seguir, tomadas para n um número natural.

a) $2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Como os quatro próximos exemplos utilizam o símbolo para somatório, vamos entender como utilizamos este símbolo: $\sum_{i=i_0}^{n} a_i$.

Onde:

a_i representa as quantidades que estão sendo somadas.

n representa o extremo superior da soma (até onde vamos somar).

i_0 representa o extremo inferior da soma (a partir de qual índice começamos a soma).

Ao invés de escrevemos $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, escrevemos: $\sum_{i=1}^{5} a_i$.

O extremo inferior do símbolo de somatório indica a partir de qual valor a soma deve ser feita. O extremo superior indica até qual valor a soma deve ser feita. Assim: $\sum_{i=8}^{12} a_i = a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$.

Se a soma for a seguinte: $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$, podemos escrever de forma mais compacta: $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

b) $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + ... + (2 \cdot n - 1) + = n^2$

(a soma dos n primeiros números ímpares é igual ao quadrado de n).

c) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

d) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

e) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

f) $P(n): n^3 - n$ é divisível por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.

g) Considere a sequência definida por $a_1 = 7$ e $a_k = 11a_{k-1}$, $k \geq 2$.

Então, vale que $P(n): a_n = 7 \cdot 11^{n-1}$.

h) $P(n): 5^{2n} + 7$ é divisível por 8, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Em todas as sentenças temos proposições definidas sobre os números naturais. Para demonstrar que proposições definidas sobre naturais são verdadeiras, a primeira ferramenta na sua "caixa de ferramentas de demonstrações" é o princípio da indução finita.

Os números primos constituem os "átomos" da Matemática. Eles constituem a "matéria básica" sobre a qual são construídos os números inteiros. As pesquisas com números primos seduzem os matemáticos desde tempos imemoriais. Nestas pesquisas está inserida a busca por uma fórmula que forneça todos os números primos.

Será que a propriedade $P(n): n^2 - n + 41$ resulta em números primos para todo n, número natural?

Se substituirmos o valor $n = 1$ nesta expressão, teremos:

$P(1): 1^2 - 1 + 41 = 41$. Assim, $P(1)$ retorna um número primo.

Se fizermos n = 2, teremos $P(2): 2^2 - 2 + 41 = 43$, também um número primo.

A pergunta natural é: será que para qualquer valor de n a expressão $P(n): n^2 - n + 41$ retorna um número primo?

Se você substituir $n = 3$ até $n = 40$ (você pode usar uma planilha eletrônica para auxiliá-lo nos cálculos) verá que $P(n): n^2 - n + 41$ retornará sempre números primos. Mas veja que uma proposição matemática não é demonstrada para qualquer valor de seu argumento se a verificarmos válida para um número finito deles (mesmo que seja um número muito grande). Por outro lado, basta um único contraexemplo para mostrarmos que uma afirmação matemática não é válida para todos os valores de seu argumento.

Se substituirmos $n = 41$ nesta expressão, teremos $P(41): 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, que não é um número primo. Assim, mostramos que $P(n): n^2 - n + 41$ não é válida para todo $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas fica a questão: como demonstrar que uma proposição é válida para todo $\forall n \in \mathbb{N}$?

A ferramenta para desenvolver estas demonstrações é denominada de princípio da indução matemática.

Teorema (primeiro princípio da indução matemática ou versão fraca do princípio da indução matemática):

Considere a sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ com $n \geq n_0 \in \mathbb{N}^*$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

Se

$P(n_0)$ for verdadeira para $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (denominada de base de indução).

Suponhamos que $P(k)$ for verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}^*, k \geq n_0$ e seja possível demonstrar que $P(k+1)$ também será verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}^*, k \geq n_0$ (denominada de hipótese de indução).

Então, a sentença $P(n)$ será verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Vamos reforçar dois pontos neste teorema.

Na primeira parte de qualquer demonstração utilizando o princípio da indução finita, verificamos se propriedade $P(n)$ é verdadeira para $n = n_0$. Esta primeira etapa recebe o nome de base de indução ou passo base.

A segunda parte de qualquer demonstração pelo princípio da indução finita recebe o nome de hipótese de indução ou passo indutivo. Nesta segunda parte, supomos que $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}^*, k \geq n_0$ e buscamos demonstrar que $P(k+1)$ também será verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}^*, k \geq n_0$.

Vejamos um exemplo de aplicação do princípio de indução finita.

Vamos provar que $1+3+5+7+...+(2n-1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ usando o PIF.

As demonstrações com o PIF são sempre constituídas de dois passos.

1º passo: devemos verificar que $P(1)$ é verdadeira (observe que, neste exemplo, temos $n_0 = 1$:

Como $(2.1-1) = 1 = 1^2$, então, $P(1)$ (a base de indução é verdadeira).

2º passo: supomos que $P(k)$, com $k \in \mathbb{N}^*$, é verdadeira (esta é a hipótese de indução) e tentaremos provar que $P(k+1)$ também é verdadeira.

Assumir que $P(k)$ é verdadeira, neste exemplo, corresponde a supor que vale:

$1+3+5+7+...+(2k-1) = k^2$.

Agora, queremos provar que vale

$P(k+1)$: $1+3+5+7+...+(2k-1)+(2.(k+1)-1) = (k+1)^2$.

Temos que $1+3+5+7+...+(2k-1)+(2.(k+1)-1) = 1+3+5+7+...+(2k-1)+(2k-1)+2$.

Como estamos supondo $P(k)$ verdadeira, vale que $1+3+5+7+\ldots+(2k-1)+(2k-1)+2=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

Assim, provamos que $P(k+1)$ também é verdadeira.

Assimile

O que fazemos no princípio da indução finita é, supondo que se a propriedade da qual estamos tratando é verdadeira para $k \in \mathbb{N}^*, k \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$, então, a propriedade também será verdadeira para $k+1$. Observe que não estamos supondo que a propriedade é verdadeira para todos os naturais (não estamos afirmando que $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}^*, k \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$).

No exemplo a seguir, vemos o que acontece quando usamos o PIF para demonstrar uma proposição falsa.

Demonstre que $P(n): 3+7+11+\ldots+(3+4n)=\frac{(n+1)(6+7n)}{2}$.

1º passo: verificamos se $P(0)$ é verdadeira:

$P(0): 3=\frac{(0+1)(6+7.0)}{2}=3$

2º passo: supomos que $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}^*$:

$P(k): 3+7+11+\ldots+(3+4k)=\frac{(k+1)(6+7k)}{2}$ e queremos demonstrar que $P(k+1)$ também é verdadeira.

Ou seja, queremos mostrar que

$P(k+1): 3+7+11+\ldots+(3+4(k+1))=\frac{((k+1)+1)(6+7(k+1))}{2}$.

Como estamos assumindo que $P(k)$ é verdadeira, então, podemos escrever:

$3+7+11+\ldots+(3+4(k+1))=3+7+11+\ldots+(3+4k+4)=$

$3+7+11+\ldots+(3+4k)+4=\frac{(k+1)(6+7k)}{2}+4$.

Segue então que: $3+7+11+\ldots+(3+4(k+1))=\frac{(k+1)(6+7k)+8}{2}=\frac{7k^2+13k+8}{2}$.

Observamos que: $\frac{((k+1)+1)(6+7(k+1))}{2}=\frac{(k+2)(7k+13)}{2}=\frac{7k^2+27k+26}{2}\neq\frac{7k^2+13k+8}{2}$

.

Assim, a proposição $P(n): 3+7+11+\ldots+(3+4n)=\frac{(n+1)(6+7n)}{2}$ não é válida.

Muitas vezes, uma proposição não é válida $\forall n \in \mathbb{N}^*$, mas apenas para $n \geq n_0$. Há outra versão do princípio da indução finita para atender a estas situações:

Reflita

Em quais casos aplica-se o PIF? É recomendável usar o PIF para demonstrar proposições que envolvem os números naturais ou asserções relacionadas com sequências que acreditamos que sejam válidas para todo $n \geq n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}^*$.

Teorema (segundo princípio da indução matemática ou princípio da indução matemática versão forte):

Considere a sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)\ n \geq n_0 \in \mathbb{N}^*$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

Se

i) $P(n_0)$ for verdadeira para $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (denominada de base de indução).

ii) Suponhamos que $P(i)$ é verdadeira para todo $i \in \mathbb{N}^*, n_0 \leq i \leq k$, então, será possível demonstrar que $P(i+1)$ também será verdadeira para todo $i \in \mathbb{N}^*, i \geq n_0$.

Vejamos um exemplo de aplicação do segundo princípio da indução matemática (adaptado de: GERSTING, 2004, p. 86).

Exemplificando

Inicialmente, lembremos o que é o fatorial de um número natural.

O fatorial de um número natural é definido por:

$0! = 1$

$n! = n \cdot (n-1)!, n \geq 1$

Assim, $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Mostre que é válida a sentença aberta $P(n): 2^n < n!, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

Resolução:

Observe que

$P(1): 2^1 < 1! = 1$ é falsa.	$P(2): 2^2 < 2! = 2$ é falsa.	$P(3): 2^3 < 3! = 6$ é falsa.

Os resultados anteriores (se verdadeiros ou falsos) são irrelevantes para o que pretendemos, pois queremos demonstrar a desigualdade para $n \geq 4$. Temos que:

$P(4): 2^4 = 16 < 4! = 24$ é verdadeira. Supomos que $2^k < k!$ tenha em mente que queremos mostrar que $2^{k+1} < (k+1)!$. Observamos que $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 < 2 \cdot k!$.

Veja que $2 < k+1$. Então, $2 \cdot k! < (k+1)k! = (k+1)!$.

Portanto: $2^n < n!, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

Pesquise mais

Em <http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf>. (Acesso em: 2 dez. 2016), você encontrará mais um material sobre o princípio da indução finita. O professor Abramo Hefez produziu este material para alunos de Ensino Médio que estão se preparando para as Olimpíadas de Matemática. O texto contém também um material sobre o problema da Torre de Hanoi, a Pizza de Steiner, as sequências de Fibonacci, o binômio de Newton e o Princípio da Casa dos Pombos de Dirichlet.

Binômio de Newton

O binômio de Newton é notável em função das múltiplas relações matemáticas que permite estabelecer. A mais notável delas é a distribuição dos coeficientes binomiais na famosa estrutura conhecida como triângulo de Pascal. O próprio triângulo de Pascal tem inúmeros padrões matemáticos relevantes por si só.

O binômio de Newton relaciona-se com o cálculo diferencial e integral e com a análise combinatória. Por meio dos coeficientes binomiais permite estabelecer a relação entre o binômio de Newton e a probabilidade.

Observe no Quadro 2.8 o padrão que surge ao elevarmos o binômio $(a+x)$ às potências 1, 2, 3 e 4:

Quadro 2.8 | Potências de $(a+x)$

$(a+x)^0$	1
$(a+x)^1$	$1 \cdot a + 1 \cdot x$
$(a+x)^2$	$1 \cdot a^2 + 2 \cdot ax + 1 \cdot x^2$
$(a+x)^3$	$1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2x + 3 \cdot ax^2 + 1 \cdot x^3$
$(a+x)^4$	$1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3x + 6 \cdot a^2x^2 + 4 \cdot ax^3 + 1 \cdot x^2$

Fonte: elaborado pelo autor.

Os coeficientes das potências de $(a+x)$ constituem um padrão tão notável na Matemática que recebem o nome de triângulo de Pascal. Observe, na Figura 2.2, a relação entre os coeficientes das potências do binômio $(a+x)$ e os números binomiais C_k^n.

Figura 2.2 | Triângulo de Pascal

1	C_0^0
1 1	C_0^1 C_1^1
1 2 1	C_0^2 C_1^2 C_2^2
1 3 3 1	C_0^3 C_1^3 C_2^3 C_3^3
1 4 6 4 1	C_0^4 C_1^4 C_2^4 C_3^4 C_4^4
1 5 10 10 5 1	C_0^5 C_1^5 C_2^5 C_3^5 C_4^5 C_5^5
1 6 15 20 15 6 1	C_0^6 C_1^6 C_2^6 C_3^6 C_4^6 C_5^6 C_6^6

Fonte: elaborada pelo autor.

Tanto os primeiros quantos os últimos elementos em cada linha do triângulo de Pascal são sempre iguais a 1.

Os números binomiais são definidos por $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n,k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Se a numeração de linhas e colunas no triângulo de Pascal começa do zero, o elemento da linha n e coluna k é o C_k^n.

A relação de Stifel permite obter um elemento em determinada linha do triângulo de Pascal a partir dos elementos da linha imediatamente acima.

Teorema (relação de Stifel): $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$

Por exemplo, somando os elementos da 1ª coluna e 4ª linha $C_0^4 = 1$ ao elemento da 2ª coluna e 4ª linha $C_1^4 = 4$, obtemos o elemento $5 = C_1^5 = C_0^4 + C_1^4 = 1 + 4$.

Até agora o que temos é a conjectura de que a potência n do binômio $(a+x)$ pode ser escrita como

$$(a+x)^n = \binom{n}{0}a^n x^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}x^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 x^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 x^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j x^{n-j}$$

Como podemos provar essa conjectura? Observe que esta é uma proposição sobre o conjunto dos números naturais. A sugestão aqui é utilizar o princípio da indução finita. A demonstração a seguir foi adaptada de (BURTON, 2016, p. 9).

Já mostramos que a expressão anterior é válida para $n = 1$ e iremos supor que também seja verdadeira para $n = k$. Pretendemos, com isso, prová-la para $n = k+1$. Da hipótese de indução temos que:

$$a(a+x)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j+1}x^j = \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}a^{k-j+1}x^j + a^{k+1}$$

Também temos que:

$$x(a+x)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}x^{j+1} = \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}a^{k+1-j}x^j + x^{k+1}$$

Somando as duas expressões:

$$(a+x)^{k+1} = a(a+x)^k + x(a+x)^k = a^{k+1} + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j+1}x^j + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}a^{k+1-j}x^j + x^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}a^{k+1-j}x^j$$

$$(a+x)^{k+1} = a(a+x)^k + x(a+x)^k = a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}a^{k-j+1}x^j +$$

$$\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}a^{k+1-j}x^j + x^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}a^{k+1-j}x^j$$

O que acontece se tomarmos $x = y = 1$ no binômio de Newton? Lembremos da expressão para o binômio de Newton:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n.$$

Fazendo $x = y = 1$, teremos:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n 1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}1^1 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^0 1^n =$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Esse resultado é conhecido como Teorema das linhas (pois corresponde à soma em uma das linhas do triângulo de Pascal). Verifique nas linhas do triângulo de Pascal que a soma de seus elementos é sempre uma potência de 2.

Reflita

(Teorema das colunas para o triângulo de Pascal): observe também que ao somarmos os elementos de uma diagonal, o resultado também está no triângulo:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}.$$

Demonstre o Teorema das colunas para o triângulo de Pascal.

Sem medo de errar

Para demonstrar que $2^{3n} - 1$ é divisível por 7, $\forall n \in \mathbb{N}$, devemos, em primeiro lugar, verificar que a proposição é verdadeira para $n = 1$.

$2^{3.1} - 1 = 8 - 1 = 7$, que é divisível por 7. Esta é a base de indução.

Supomos que $2^{3k} - 1$ é verdadeiro. Isto equivale a supor que existe um inteiro tal que $2^{3k} - 1 = 7a$. Ou ainda: $2^{3k} = 7a + 1$.

Queremos provar que $2^{3(k+1)} - 1$ é divisível por 7. Como $2^{3k} = 7a + 1$, multiplicando ambos os lados por 2^3, teremos:

$2^3 2^{3k} = 2^3(7a+1)$.

Onde: $2^{3(k+1)} = (7+1)(7a+1) = 7.7a + 7 + 7a + 1 = 7.(2.7a+1) + 1$.

Então: $2^{3(k+1)} - 1 = 7.(14a+1)$.

Portanto, $2^{3(n+1)} - 1$ é divisível por 7.

Agora, precisamos reunir o que foi discutido e os resultados obtidos nas Seções 2.1, 2.2 e 2.3 em um texto a ser entregue para a coordenadora pedagógica. Lembre-se de que nosso problema geral era o projeto de melhoramento do desempenho dos alunos em olimpíadas escolares.

Você pode desenvolver planos de aula para cada problema abordado, com sugestões de como tratar tais temas em sala.

Avançando na prática

PIF e os números complexos

Descrição da situação-problema

Depois de realizar uma aula na qual foram apresentadas várias das conjecturas para utilização do PIF na demonstração, um dos alunos questionou se existiria uma aplicação do PIF relacionada as divisões inteiras

Você propôs aos alunos que demonstrassem a fórmula:

$7^n + 2$ é divisível por 3 $\forall n \in \mathbb{N}$, n>=1é verdadeiro.

Você prometeu trazer a resposta detalhada ao problema na próxima aula. Agora, chegou a hora de preparar suas notas de aula para encontrar seus estudantes.

Resolução da situação-problema

Verificamos que $P(n)$ é verdadeiro para $n = 1$ (este é o passo base):

$7^1 + 2 = 9$, que é divisível por 3.

Agora, façamos a hipótese de indução.

Suponha que a proposição $P(k)$ é verdadeira para $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 1$.

Isso significa que $7^k + 2$ é divisível por 3. Ou seja, existe $a \in \mathbb{N}^*$ tal que $7^k + 2 = 3a$

.

Queremos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeiro para $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 1$.

Queremos mostrar que podemos escrever $7^{(k+1)} + 2 = 3b$ para algum $b \in \mathbb{N}^*$.

Vejamos: $7^{(k+1)} + 2 = 7^k \cdot 7 + 2 = (3a - 2) \cdot 7 + 2 = 21a - 12 = 3 \cdot (7a - 4)$.

Ou seja, é possível escrever $7^{(k+1)} + 2 = 3b$ para $b \in \mathbb{N}^*$. Na notação anterior, $b = 7a - 4$.

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeiro para $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 1$. Logo, $P(n)$ é verdadeiro $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$.

Com essas notas, você está pronto para encontrar seus estudantes na próxima aula, que certamente trarão muitas dúvidas sobre o exercício.

Faça valer a pena

1. O Princípio da Indução Finita (PIF) é utilizado para demonstrar conjecturas dadas por sentenças abertas $P(n)$ definidas sobre os números naturais.

Qualquer demonstração com o PIF é dividida em duas partes:

1) Demonstramos que a proposição $P(n)$ é válida para $n = n_0$ (base de indução).

2) Supomos que a proposição $P(n)$ é verdadeira para $n = k$ e demonstramos que $P(n)$ é verdadeira para $n = k + 1$ (hipótese de indução).

Considere as proposições envolvendo números naturais a seguir:

I. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

II. $2^{3n} - 1$ é divisível por 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

III. $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ é divisível por 17, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$

É correto afirmar que:

a) A base de indução não é verdadeira para a proposição III.

b) A hipótese de indução não é verdadeira para a proposição II.

c) A proposição I é válida apenas para $n \geq 3$.

d) Para mostrar a hipótese de indução para II, escrevemos $2^{3n} - 1$ como um múltiplo de 7.

e) A proposição III é válida apenas para $n \geq 5$.

2. O primeiro princípio da indução matemática afirma que, se $P(n)$ é uma sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N}$ e se,

i) $P(1)$ é verdadeira.

ii) E se supusermos que $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$, então, é possível demonstrar que $P(k+1)$ também será verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$.

Então, a sentença $P(n)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$.

É recomendável, quando queremos provar conjecturas definidas sobre o conjunto dos números naturais, tentar utilizar o princípio de indução matemática.

Considere provar, usando o PIF, que $0^2 + 1^2 + 2^2 + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

A respeito da demonstração com o PIF desta proposição, é correto afirmar que:

a) Na etapa da demonstração com o PIF, conhecida como base de indução, queremos provar que a conjectura é válida para $n = k + 1$.

b) Na etapa da demonstração com o PIF, conhecida como base de indução, supomos que a proposição é verdadeira para $n = k$.

c) Na etapa da demonstração com o PIF, conhecida como hipótese de indução, queremos provar que a proposição é válida para $n = k + 1$.

d) Para provar que a conjectura deste exercício é válida, usamos a identidade:

$0^2 + 1^2 + 2^2 + (k+1)^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6}$.

e) Não é possível demonstrar a conjectura deste exercício, pois não é verdade que $0^2 + 1^2 + 2^2 + (k+1)^2 = \frac{(2(k+1)+1)((k+1)+1)(k+1)}{6}$.

3. Com o binômio de Newton, conseguimos escrever o termo geral do desenvolvimento de $(a+x)^n$.

Associado ao binômio de Newton, temos o triângulo de Pascal com suas inúmeras propriedades.

Vimos que os coeficientes das potências de $(a+x)$ constituem um padrão notável, denominado triângulo de Pascal. Os coeficientes das potências de $(a+x)$ também podem ser expressos em termos dos números binomiais $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

Considere a afirmações a seguir.

I. A relação de Stifel afirma que $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$.

II. O teorema das colunas afirma que $C_n^n + C_n^{n+1} + C_n^{n+2} + \ldots + C_n^{n+k} = C_{n+1}^{n+k+1}$.

III. Se $n \geq 0$, então, $\binom{0}{n}+\binom{1}{n}+\binom{1}{n}+\ldots+\binom{n-1}{n}+\binom{n}{n}=2^n$.

A sequência correta de verdadeiro e falso é:

a) Verdadeiro; verdadeiro; falso.

b) Verdadeiro; verdadeiro; verdadeiro.

c) Verdadeiro; falso; falso.

d) Falso; falso; falso.

e) Falso; verdadeiro; falso.

Referências

ALENCAR Filho, Edgar de. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 1975.

BURTON, David M. **Teoria elementar dos números**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016,

DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e álgebra de Boole**. São Paulo: Editora Atlas, 1995.

GERSTING, Judith. **Matemática discreta para Ciência da Computação**. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

GYURICZA, Gyorgy Lazlo. **Lógica de argumentação (teoria e exercícios)**. São Paulo: Yalis Editora, 2009.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar.** 6. ed. v. 1. São Paulo: Editora Atual, 1985.

LOPES, Luis. **Manual de indução matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.

MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira et al. **Análise combinatória e probabilidade** (Coleção do Professor de Matemática). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

PAIXÃO, Walter. **Aprendendo a raciocinar**: lógica para iniciantes. São Paulo: Humanitas, 2007.

SCHEINERMAN, Edward R. **Matemática discreta**: uma introdução. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Edições BestBolso, 2014. 223 p.

Conjuntos e relações

Convite ao estudo

Caro aluno, seja bem-vindo a mais uma unidade da disciplina de Elementos da Matemática. Nas Unidades 1 e 2, vimos elementos da lógica matemática, validade das proposições, elementos de argumentação e silogismos, bem como técnicas dedutivas diretas e indiretas. Os últimos tópicos estudados foram o princípio da indução matemática e o binômio de Newton.

São objetivos específicos desta unidade: estudar as relações de pertinência e continência para conjuntos, operações entre conjuntos (união, intersecção, diferença entre conjuntos), complementar de um conjunto, estudar os conjuntos numéricos, o plano cartesiano, as relações no plano cartesiano, as propriedades das relações, as relações de equivalência e as relações inversas.

Utilizamos a teoria dos conjuntos no nosso dia a dia na organização de informações. Os biólogos utilizam os conceitos de teoria dos conjuntos na definição de Reino, Filo, Classe, Família e Gênero. Os bibliotecários classificam os livros e a produção bibliográfica usando um sistema internacional de classificação que separa cada área e subárea de conhecimento em conjuntos. A área de informática conhecida como banco de dados é fundamentada teoricamente na teoria dos conjuntos.

São habilidades importantes ao completar esta seção: aplicar os conceitos de teoria dos conjuntos para resolver problemas de raciocínio lógico, transferir os conceitos e a formalização de teoria dos conjuntos para problemas do dia a dia e utilizar o formalismo da teoria dos conjuntos para tratar situações-problema de forma rigorosa.

Na primeira seção desta unidade, estudaremos as relações de pertinência e continência para conjuntos e operações entre conjuntos. Ao longo desta unidade, esperamos que você desenvolva suas habilidades de leitura, interpretação, análise e criação de textos sobre teoria de conjuntos, simbologia associada, negação de sentenças, operações entre conjuntos, produto cartesiano e relações.

Imagine-se um profissional que trabalha em uma empresa que presta serviços de pesquisas de opinião que acaba de ser contratada pela prefeitura. Na Seção 3.1, você será incumbido de analisar resultados preliminares de uma pesquisa de opinião sobre um projeto a ser desenvolvido por uma prefeitura. Parte dos dados para resolução do problema apresentado são fornecidos. Para resolvê-lo, você utilizará os conceitos de conjunto, pertinência, continência, operações entre conjuntos e complementar de um conjunto.

Na Seção 3.2, você, ainda se colocando no lugar de um funcionário daquela mesma empresa, realizará a classificação de variáveis a serem utilizadas em um banco de dados. Esta classificação será realizada utilizando seus conhecimentos sobre conjuntos numéricos, naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais para resolver a situação.

Por fim, na Seção 3.3, você utilizará de conhecimentos sobre relações para apresentar os dados coletados na pesquisa de opinião em forma gráfica.

Seção 3.1

Teoria de conjuntos

Diálogo aberto

Na Unidade 1 desta disciplina já utilizamos conjuntos para resolver problemas de argumentação. Nestes problemas, apareciam as palavras "todo", "nenhum", "algum", "existe". Na Unidade 2, ao tratar de sentenças abertas, estudamos os quantificadores existencial e universal. Após este percurso, há a necessidade de uma abordagem mais sistematizada de teoria dos conjuntos, inclusive que possa preparar o estudo das funções, que faremos posteriormente.

Lembremos que na Seção 1.2, tratamos da lógica matemática e dos conectivos conjunção ($\wedge$) e disjunção ($\vee$). O conectivo conjunção é associado ao "e", relacionando-se com a intersecção de conjuntos, e o conectivo disjunção é associado ao "ou" e relaciona-se com a união de conjuntos.

Recordemos ainda que você está utilizando seus conhecimentos de teoria dos conjuntos no seu trabalho em uma empresa de pesquisas de opinião. Em uma pesquisa de opinião sobre um projeto a ser desenvolvido por uma prefeitura, foram entrevistadas 600 pessoas, sendo os resultados preliminares obtidos apresentados a seguir:

- 240 pessoas apoiam o projeto A.
- 280 pessoas apoiam o projeto B.
- 190 pessoas apoiam o projeto C.
- 46 pessoas apoiam os três projetos.
- 64 pessoas apoiam apenas os projetos A e B.
- 87 pessoas apoiam os projetos A e C.
- 93 pessoas apoiam os projetos B e C.

Determine:

- O número de pessoas que apoiam apenas o projeto A.
- O número de pessoas que apoiam apenas os projetos A e C.
- O número de pessoas que não apoiam o projeto B.

Quais subsídios você consegue fornecer para a empresa para contribuir na tomada de decisão por parte da prefeitura?

Devemos recomendar que a prefeitura adote ou não o projeto B?

Devemos recomendar que a prefeitura adote o projeto C?

Além dos números fornecidos, sabemos que o projeto B é aquele que apresenta os maiores custos ambientais e menores custos econômicos. O projeto A é o que apresenta menores custos ambientais. E o projeto C é aquele que apresenta resultados com maior inclusão social com menor custo econômico dentre os três projetos.

Para a prefeitura, é relevante se um projeto apresenta grande número de apoiadores ou opositores. Observe que para resolver o problema, precisamos determinar o número de pessoas que apoiam apenas o projeto A, aquelas que apoiam os projetos A e C e aquelas que não apoiam o projeto B.

Após resolvido o problema e determinado quantas pessoas apoiam cada projeto, apresente um relatório sucinto com suas sugestões que serão fornecidas à prefeitura.

Não pode faltar

1. Noções de conjunto

Para tratar da teoria dos conjuntos, admitiremos como conceitos não definidos, ou conceitos primitivos, a existência:

a) Do conjunto.

b) Do elemento.

c) Da relação de pertinência entre elemento e conjunto.

Para representar conjuntos, utilizamos chaves "{ " e " }" e uma letra maiúscula do nosso alfabeto para efetuar a identificação do conjunto. Assim, falamos nos conjuntos A, B, C, D, etc. Vejamos alguns exemplos de conjuntos:

i) Conjunto das vogais: A = {a, e, i, o, u}.

ii) Conjunto dos números naturais pares: B = {2, 4, 6, 8, 10, ...}.

iii) Conjunto das capitais de estados da região sudeste do Brasil: C = {São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Vitória }.

iv) Conjunto de meses do ano que começam com a letra "j": D = {janeiro, junho, julho}.

Os objetos que constituem um conjunto são denominados elementos deste conjunto. Exemplo:

O conjunto A possui os elementos: a, e, i, o, u. O conjunto B possui infinitos elementos: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... O conjunto C possui apenas quatro elementos: São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Vitória.

Pesquise mais

Sugestões de referência para esta primeira seção:

• Capítulos 1 e 2:

CASTRUCCI, Benedito. **Elementos de Teoria dos Conjuntos**. São Paulo: Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (G.E.E.M.), 1980, 192 p.

• Capítulo 1:

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 6. ed. São Paulo: Editora Atual, 1985, 333 p, v.1.

• Capítulo 1:

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Matemática Discreta**: Coleção Schaum. 3. ed. Bookman, 2013. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788565837781/cfi/10!/4/2@100:0.00>. Acesso em: 7 fev. 2017.

Após termos apresentado a noção de conjunto e elemento nesta primeira subseção, na próxima subseção, veremos as relações de pertinência e continência (estar contido) e que podemos descrever um conjunto de mais de uma forma. Além disso, aprenderemos sobre os conjuntos vazio, unitário e universo.

2. Pertinência e continência

2.1 Relação de pertinência

Para representar que o elemento x pertence ao conjunto A, utilizamos o símbolo

$\in$ (pertence), escrevemos $x \in A$ e lemos x pertence ao conjunto A. Caso o elemento x não pertença ao conjunto A, utilizamos o símbolo $\notin$ (não pertence). Escrevemos $x \notin A$ e lemos: x não pertence ao conjunto A.

Considere o conjunto $A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\}$. Para este conjunto, o elemento 10 pertence ao conjunto A e escrevemos $10 \in A$. Já o elemento 11 não pertence ao conjunto A e, nesse caso, escrevemos $11 \notin A$.

Descrição de um conjunto pela propriedade de seus elementos

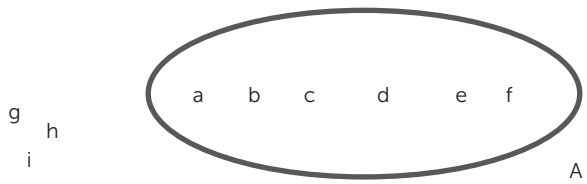
Podemos representar conjuntos listando seus elementos (como feito nos exemplos anteriores) ou por meio de uma propriedade que todos os elementos do conjunto atendam. Esta segunda alternativa de representação de conjuntos é particularmente útil para aqueles com um número muito grande ou infinito de elementos. Quando escrevemos $A = \{x \mid x \text{ possui a propriedade P}\}$, significa que A é o conjunto dos elementos x que possuem a propriedade P.

Exemplo: o conjunto dos números reais que são maiores ou iguais a $\sqrt{2}$: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2}\}$.

Representação de conjuntos com o diagrama de Euler-Venn

Podemos também representar conjuntos usando os diagramas de Euler-Venn. Esta representação permite visualizar os elementos que pertencem ao conjunto (são aqueles pontos interiores à linha) e aqueles que não pertencem ao conjunto (são aqueles pontos exteriores à linha). Na Figura 3.1, vemos a representação do conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Os elementos g, h e i não pertencem ao conjunto A.

Figura 3.1 | Representação de conjuntos com diagrama de Euler-Venn



Fonte: elaborada pelo autor.

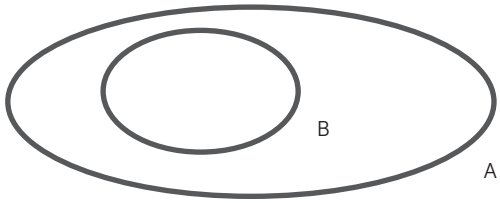
2.2 Relação de continência

Considere dois conjuntos A e B. Dizemos que o conjunto B está contido no conjunto A se todos os elementos do conjunto B pertencem ao conjunto A. Representamos a relação de continência utilizando o símbolo $\subset$. Para representar que o conjunto B está contido no conjunto A, escrevemos $B \subset A$.

Para representar que o conjunto B não está contido no conjunto A, usa-se o símbolo $\not\subset$ escrevendo $B \not\subset A$. Note que todo conjunto está contido nele mesmo $A \subset A$. Além disso, por definição, o conjunto vazio (aquele que não possui elementos) está contido em qualquer conjunto A: $\varnothing \subset A$.

Na Figura 3.2, vemos a representação com diagrama de Euler-Venn de que o conjunto B está contido no conjunto A.

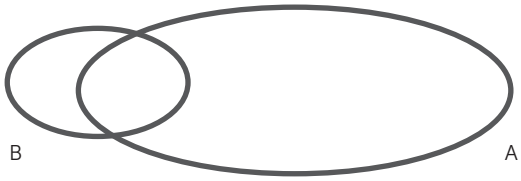
Figura 3.2 | Representação com diagrama de Euler-Venn de que $B \subset A$



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 3.3, vemos a representação com o diagrama de Euler-Venn de uma situação na qual o conjunto B não está contido em A, mesmo tendo uma região em comum.

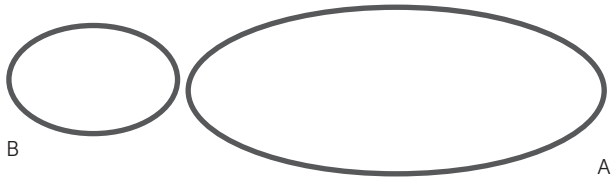
Figura 3.3 | Representação com diagrama de Euler-Venn de que $B \not\subset A$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 3.4, vemos outra possibilidade em que o conjunto B não está contido no conjunto A.

Figura 3.4 | Representação com diagrama de Euler-Venn de que $B \not\subset A$



Fonte: elaborado pelo autor.

Reflita

O que é correto e incorreto nas relações de pertinência e continência?

Para auxiliá-lo a refletir sobre a pergunta anterior, considere o conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$. É correto escrever que o elemento 4 pertence ao conjunto A: $4 \in A$. Mas é incorreto afirmar que o elemento 4 está contido no conjunto A. Assim, é incorreto escrever $4 \subset A$. É correto afirmar que o conjunto $\{4\}$ está contido no conjunto $\{1,2,3,4,5\}$. Podemos utilizar a palavra subconjunto para designar que um conjunto está contido em outro. Assim, o conjunto $\{4\}$ é subconjunto do conjunto $\{1,2,3,4,5\}$.

Um conjunto pode conter outros conjuntos como seus elementos. Podemos traduzir isto para o nosso dia a dia com a frase: "uma sacola de supermercado pode conter outras sacolas de supermercado", ou ainda, "uma caixa de compras pode conter outras caixas". Vamos traduzir para a simbologia matemática: se considerarmos o conjunto $B = \{1,2,3,\{4\},5\}$, então, é correto afirmar que $\{4\}$ pertence ao conjunto B, ou seja, $\{4\} \in B$. Por outro lado, não é correto afirmar que $\{4\}$ esteja contido no conjunto B. Observe que $\{4\}$ é um elemento do conjunto B e, como tal, dizemos que ele pertence ao conjunto B, contudo, o número 4 não é elemento de B. O elemento {4} pertencente a B, é um conjunto cujo único elemento é o número 4.

Considere agora o conjunto $C = \{1,\{2,3\},4,5\}$ e veja que o conjunto $\{2,3\}$ é um de seus elementos.

Assimile

A relação de pertinência sempre se refere à relação entre um elemento e um conjunto. Já a de continência, sempre se refere à relação entre dois conjuntos.

Dizemos que um conjunto A é subconjunto próprio do conjunto B se existe ao menos um elemento de B que não pertence ao conjunto A. Também dizemos que o conjunto B contém propriamente o conjunto A.

Conjunto unitário

Conjunto unitário é um conjunto que contém um único elemento. Exemplos:

i) O conjunto A dos números primos pares é um conjunto unitário: $A = \{2\}$.

ii) O conjunto B das raízes da equação $5x - 7 = 13$ é unitário: $B = \{4\}$.

Conjunto vazio

Denomina-se conjunto vazio, já mencionado anteriormente, aquele que não possui elementos. Podemos representar que o conjunto A é vazio de duas formas: $A = \varnothing$ ou $A = \{\ \}$. Destacamos que o conjunto $A = \{\varnothing\}$ não é vazio. Ele é um conjunto (unitário) que contém o conjunto vazio. Portanto, não é vazio! Suponha que uma sacola de supermercado contenha uma sacola vazia. Então a "sacola de fora" não é vazia, pois ela contém algo. Este algo é uma sacola vazia.

Exemplos:

a) O conjunto dos números reais cujo quadrado seja negativo é vazio: $A = \{x \in \mathbb{R} | \ x^2 < 0\}$ (não existem números reais tais que seu quadrado seja negativo).

b) $\{x \in \mathbb{N} | \ x = 2x + 1\} = \varnothing$.

Assimile

O conjunto vazio é o conjunto que não possui elementos. Podemos representar um conjunto vazio de duas maneiras: $A = \varnothing$ ou $A = \{\ \}$.

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto ou, em outras palavras, o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

Conjunto universo

O conjunto universo é o conjunto ao qual pertencem os elementos que pretendemos utilizar. Costuma-se utilizar a letra U para representar o conjunto universo. O conjunto solução de uma mesma equação, por exemplo, pode ser diferente dependendo do conjunto universo adotado.

Exemplos: considere o conjunto universo $U = \mathbb{R}$. Então, o conjunto $A = \{x \in U \mid -2 < x \leq 2\}$ possui infinitos elementos.

Se considerarmos como conjunto universo $U = \mathbb{N}^*$, então, o conjunto $A = \{x \in U \mid -2 < x \leq 2\}$ possui apenas dois elementos, a saber, os números 1 e 2.

Se considerarmos como conjunto universo $U = \mathbb{Z}$, então, o conjunto $A = \{x \in U \mid -2 < x < 2\}$ possui três elementos: –1, 0 e 1. Observe que este conjunto não possui o "menor ou igual" e "maior ou igual", diferentemente dos dois anteriores.

Conjunto das partes

Considere o conjunto $A = \{1,2,3\}$. O conjunto formado por todos os subconjuntos de A é denominado conjunto das partes de A, representado por $P(A)$. Nesse exemplo, o conjunto das partes de A é $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Observe que o conjunto das partes desse exemplo possui $8 = 2^3$ elementos.

Lembremos a definição de cardinalidade de um conjunto: cardinal de um conjunto A é a quantidade de elementos que pertencem ao conjunto A e escreve-se #A ou n(A).

A quantidade de elementos do conjunto das partes de um conjunto A é dado por $2^{\#A}$, ou seja, se A tem n elementos, ele terá 2^n subconjuntos. Em símbolos, escrevemos: $\#P(A) = 2^{\#A}$.

Na próxima subseção veremos a igualdade entre conjuntos e as operações de união, intersecção, diferença e diferença simétrica entre conjuntos.

3. Operações entre conjuntos

3.1 Igualdade entre conjuntos

Dizemos que os conjuntos A e B são iguais quando todos os elementos de A pertencem ao conjunto B e todos os elementos de B pertencem ao conjunto A, ou ainda, quando o conjunto A está contido no conjunto B e o conjunto B está contido em A: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$. Quando dois conjuntos não são iguais, escrevemos $A \neq B$ e dizemos que os conjuntos são diferentes.

Exemplos:

Considere A o conjunto formado pelas letras da palavra "alcateia": $A = \{a, l, c, a, t, e, i, a\}$ e o conjunto $B = \{a, l, c, t, e, i\}$. Os conjuntos A e B são iguais, pois não listamos repetições de elementos, ficando A = {a, l, c, t, e, i}.

Os conjuntos $C = \{5,7,9,11\}$ e $D = \{11,5,7,9\}$ são iguais. Nos conjuntos não importa a ordem em que os elementos estão escritos.

3.2 União de conjuntos

Considere A e B dois conjuntos. A união dos conjuntos A e B, representada por $A \cup B$, é dada pelos elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B, ou seja, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Observe a associação entre a união de conjuntos e o conectivo "ou" (operação de disjunção $\vee$) na lógica matemática. Reforçamos que este "ou" não é exclusivo, ou

seja, estão incluídos os elementos comuns.

Exemplo: sejam $A = \{5,10,15,20\}$ e $B = \{3,6,9,12,15,18\}$. A união destes dois conjuntos é o conjunto $A \cup B = \{3,5,6,9,10,12,15,18,20\}$.

Vale a propriedade comutativa para a união entre dois conjuntos: $A \cup B = B \cup A$.

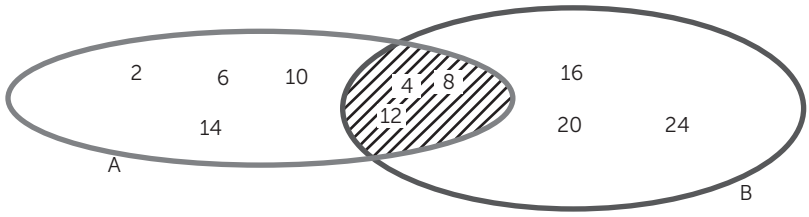
3.3 Intersecção de conjuntos

Considere dois conjuntos A e B. O conjunto intersecção $A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao mesmo tempo aos dois conjuntos, ou seja, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Observe a associação entre a intersecção de conjuntos e o conectivo "e" (operação de conjunção $\wedge$) na lógica matemática.

Exemplo: considere os conjuntos $A = \{2,4,6,8,10,12,14\}$ e $B = \{4,8,12,16,20,24\}$. O conjunto intersecção é dado por: $A \cap B = \{4,8,12\}$. Os elementos da intersecção $A \cap B$ estão destacados na região hachurada.

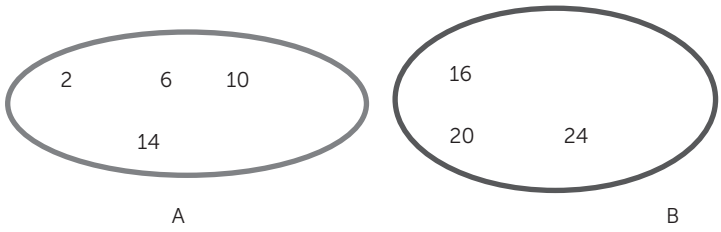
Figura 3.5 | Intersecção entre conjuntos



Fonte: elaborada pelo autor.

Quando o conjunto intersecção entre dois conjuntos é vazio, dizemos que os dois conjuntos são disjuntos. Exemplo: considere os conjuntos $A = \{2,6,10,14\}$ e $B = \{16,20,24\}$. O conjunto intersecção é dado por: $A \cap B = \varnothing$. Neste caso, dizemos que os conjuntos A e B são disjuntos.

Figura 3.6 | Conjuntos disjuntos



Fonte: elaborada pelo autor.

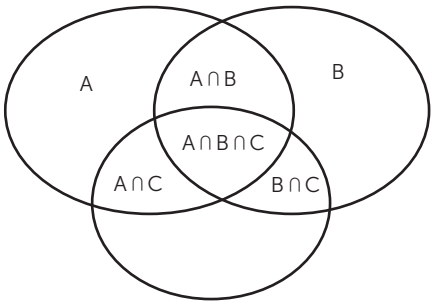
Uma questão bastante frequente é perguntar sobre o número de elementos da união de dois ou de três conjuntos. A quantidade de elementos da união de dois conjuntos A e B corresponde à soma das quantidades de elementos de A com B, mas devemos subtrair uma vez a quantidade de elementos da intersecção $A \cap B$. Em, símbolos, escrevemos $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Podemos generalizar essa expressão para três conjuntos:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

Na Figura 3.7, está representada a união de três conjuntos.

Figura 3.7 | Cardinalidade da união de três conjuntos



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que ao somarmos os elementos que pertencem aos conjuntos A e B, devemos descontar os elementos que pertencem à intersecção $A \cap B$. Isto corresponde a subtrair a quantidade $\#(A \cap B)$. Por outro lado, ao somarmos as quantidades dos elementos que pertencem aos conjuntos B e C, devemos subtrair os elementos que pertencem à intersecção $B \cap C$. Logo, devemos subtrair a quantidade $\#(B \cap C)$. Ao somarmos as quantidades de elementos que pertencem aos conjuntos A e C, devemos, ainda, subtrair aqueles que pertencem à intersecção $A \cap C$, o que nos obriga a subtrair a quantidade $\#(A \cap C)$. Suponha que a intersecção $A \cap B \cap C$ possua x elementos. Então, esta quantidade aparece ao somarmos as quantidades $\#(A), \#(B)$ e $\#(C)$. Esta quantidade é subtraída ao subtrairmos as quantidades $\#(A \cap B), \#(A \cap C)$ e $\#(B \cap C)$. Assim, ela não estaria sendo "contada", então, devemos adicionar a quantidade $\#(A \cap B \cap C)$.

Agora, vejamos um problema em que usamos a expressão para a cardinalidade da união de três conjuntos.

Exemplificando

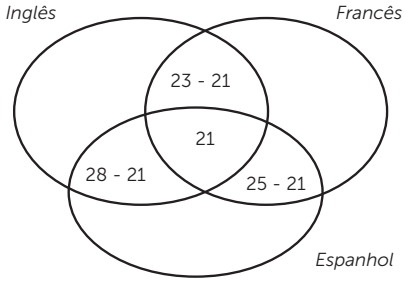
Considere que em uma escola de idiomas temos 57 alunos que cursam Inglês, 42 que cursam Francês e 37 que cursam Espanhol. Sabemos que 21 alunos estudam Inglês, Francês e Espanhol; 23 estudam Inglês e

Francês; 25 estudam Francês e Espanhol; e 28 estudam Inglês e Espanhol. Determine o total de alunos da escola e quantos alunos estudam exclusivamente Francês e Espanhol.

Resolução:

Resolvemos a questão começando da intersecção dos três conjuntos. Observe o diagrama de Venn a seguir.

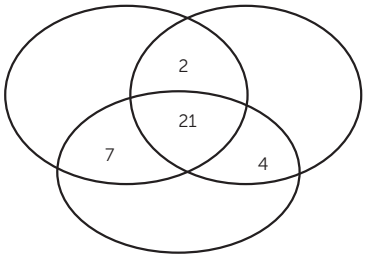
Figura 3.8 | Distribuição dos alunos de Inglês, Francês e Espanhol (passo 1)



Fonte: elaborada pelo autor.

Efetuando os cálculos temos:

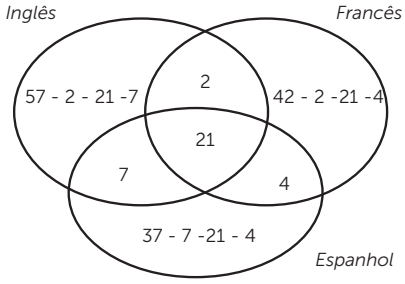
Figura 3.9 | Distribuição dos alunos de Inglês, Francês e Espanhol (passo 1)



Fonte: elaborada pelo autor.

Prosseguindo com as quantidades que estudam inglês, francês e espanhol temos:

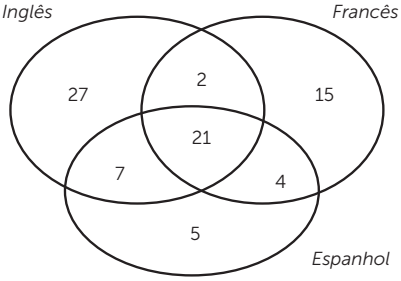
Figura 3.10 | Distribuição dos alunos de Inglês, Francês e Espanhol (passo 3)



Fonte: elaborada pelo autor.

Logo,

Figura 3.11 | Distribuição dos alunos de Inglês, Francês e Espanhol (passo 4)



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, o total de alunos matriculados é 27+7+2+21+4+15+5=81 e 25 alunos cursam exclusivamente francês e espanhol.

Também é relevante destacarmos as propriedades distributivas para conjuntos a seguir.

Sejam A, B e C três conjuntos. Então valem as distributivas:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Também vale a comutativa para a intersecção entre conjuntos: $A \cap B = B \cap A$.

3.4 Diferença entre conjuntos

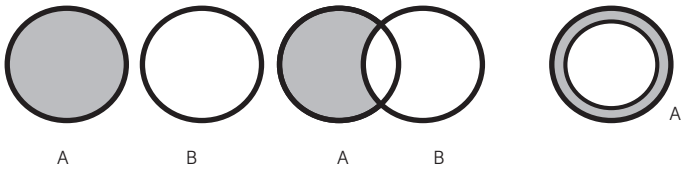
Considere dois conjuntos A e B. O conjunto diferença $A - B$ é dado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B: $A - B = \{x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Exemplo: considere os conjuntos $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ e $B = \{8,9,10,11,12,13\}$.

Então, $A - B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $B - A = \{11,12,13\}$.

Destacamos que $A - B \neq B - A$, ou seja, não vale a propriedade comutativa para a diferença entre conjuntos. Na Figura 3.12, vemos a ilustração de três situações distintas de diferença entre conjuntos. Quando A e B são disjuntos (na extremidade esquerda da figura); quando A e B não são disjuntos, mas nenhum dos conjuntos está contido no outro (no centro da figura); e na extremidade direita da figura, quando o conjunto B está contido no conjunto A.

Figura 3.12 | Diferença entre conjuntos



Fonte: elaborado pelo autor.

Se o conjunto A está contido no conjunto B, então, a diferença é vazia, ou seja, $A - B = \varnothing$.

3.5 Diferença simétrica

Sejam A e B dois conjuntos. O conjunto diferença simétrica é o conjunto dos elementos que pertencem à união de A e B e não pertencem à intersecção. Para representar a diferença simétrica, utiliza-se a letra grega delta (Δ).

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$$

A seguir, veremos a definição de complementar de um conjunto.

4. Complementar de um conjunto

Considere dois conjuntos A e B tais que $B \subset A$. Define-se como complementar de B em relação a A o conjunto $A - B$. Representa-se o complementar de B em relação a A por $C_A^B = A - B$.

Exemplo: sejam $A = \{x, y, z, w, p, q, r\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Então, $C_A^B = A - B = \{w, p, q, r\}$.

Para se representar o complementar de B também se usa a notação B^C.

Leis de De Morgan para conjuntos

i) O complementar da união de dois conjuntos é igual à intersecção dos complementares:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

ii) O complementar da intersecção de dois conjuntos é igual à união dos complementares: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Sejam A e B dois conjuntos tais que $B \subset A$. Valem as seguintes propriedades de

complementar de um conjunto:

i) $C_A^A = \varnothing$.

ii) $C_A^{\varnothing} = A$.

Nesta seção, tratamos de conjuntos, como representá-los, estudamos as relações de pertinência e continência, o que são os conjuntos unitário, vazio e universo. Também estudamos as operações entre conjuntos: união, intersecção e complementar de conjunto.

Um problema que aparece frequentemente em concursos públicos e avaliações de seleção é o apresentado no exemplo para determinar o total de estudantes da escola de idiomas e quantos deles estudam exclusivamente Francês e Espanhol. Reforçamos que este tipo de problema merece uma atenção especial. Além disso, também destacamos a relação entre a teoria dos conjuntos e os conectivos da lógica matemática "e" e "ou".

Sem medo de errar

Lembre-se de que você está utilizando seus conhecimentos de teoria dos conjuntos no seu trabalho em uma empresa de pesquisas de opinião. Destacamos que atualmente é cada vez mais frequente que matemáticos e outros profissionais da área de Exatas trabalhem em empresas de pesquisa de opinião, seguros (análise de risco), previdência privada e área financeira (bancos e bolsas de valores).

Você foi chamado para resolver um problema que lhe apresentamos no item Diálogo aberto. Relembremos os dados fornecidos:

Foram entrevistadas 600 pessoas.

Os resultados obtidos foram:

- 240 pessoas apoiam o projeto A.

- 280 pessoas apoiam o projeto B.

- 190 pessoas apoiam o projeto C.

- 46 pessoas apoiam os três projetos.

- 64 pessoas apoiam apenas os projetos A e B.

- 87 pessoas apoiam os projetos A e C.

- 93 pessoas apoiam os projetos B e C.

Determine:

- O número de pessoas que apoiam apenas o projeto A.

- O número de pessoas que apoiam apenas os projeto A e C.

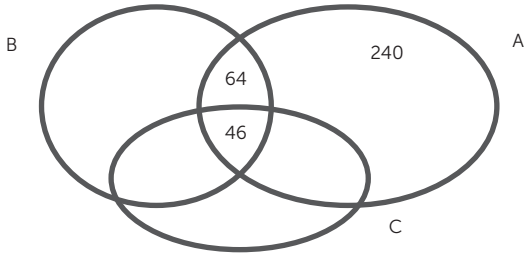
- O número de pessoas que não apoiam o projeto B.

Observe que as 240 pessoas que apoiam o projeto A não o apoiam exclusivamente.

Este valor inclui aqueles que apoiam exclusivamente o projeto A, aqueles que apoiam apenas o projeto A e o projeto B, aqueles que apoiam apenas o projeto A e o projeto C e aqueles que apoiam simultaneamente os três projetos.

Preenchemos o diagrama de Euler-Venn com os dados disponíveis:

Figura 3.13 | Resolução da situação-problema, passo 1

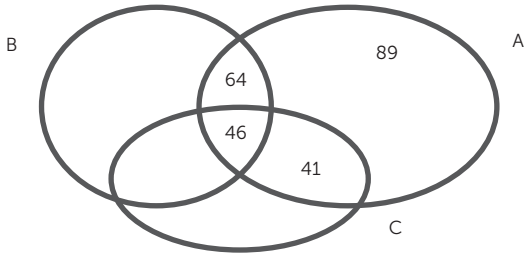


Fonte: elaborado pelo autor.

Como o enunciado forneceu que 87 pessoas apoiam os projetos A e C, e temos que 46 apoiam os projetos A, B e C, então, $87 - 46 = 41$ apoiam exclusivamente os projetos A e C.

Como temos que 240 pessoas apoiam o projeto A, descontando os 64 que apoiam os projetos A e B, os 46 que apoiam os três projetos e os 41 que apoiam os projetos A e C, temos que $260 - 64 - 46 - 41 = 89$ apoiam exclusivamente o projeto A.

Figura 3.14 | Resolução situação-problema, passo 2



Fonte: elaborado pelo autor.

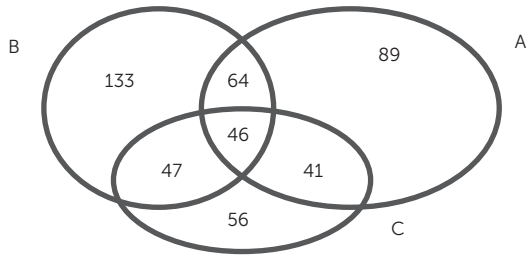
Como 93 pessoas apoiam os projetos B e C, e 46 pessoas apoiam os três projetos, então, $93 - 46 = 47$ pessoas apoiam exclusivamente os projetos B e C.

Como 290 pessoas apoiam o projeto C, descontando as 64 que apoiam exclusivamente os projetos A e B, as 46 que apoiam os três projetos e as 47 que apoiam exclusivamente os projetos B e C, então, $290 - 64 - 46 - 47 = 133$ pessoas que apoiam exclusivamente o projeto B.

Finalmente, $190 - 41 - 46 - 47 = 56$ apoiam exclusivamente o projeto C.

Ainda, $600 - (133 + 46 + 47 + 41 + 56 + 64 + 90) = 124$ pessoas não apoiam nenhum dos três projetos.

Figura 3.15 | Resolução da situação-problema, passo final



Fonte: elaborado pelo autor.

Respondendo às questões, temos:

- 89 pessoas apoiam apenas o projeto A.

- 41 pessoas apoiam apenas os projetos A e C.

O número de pessoas que não apoiam o projeto B é $600 - 133 = 467$.

Lembremos que o projeto B é aquele que apresenta maiores custos ambientais. Das 600 pessoas entrevistadas, 467 não apoiam o projeto B. Então, recomendamos à prefeitura que não adote o projeto B.

Por outro lado, por meio do diagrama de Venn, podemos determinar que 144 pessoas apoiam o projeto C, 290 apoiam o projeto B e 240 apoiam o projeto A.

Assim, a maior quantidade de apoio é para o projeto C. Ao mesmo tempo, este é o projeto com maior inclusão social e mais barato economicamente. Recomendamos à prefeitura que adote o projeto C.

Agora, basta você montar o relatório a ser endereçado à prefeitura com suas conclusões.

Avançando na prática

Pesquisa sobre alimentação

Descrição da situação-problema

Suponha que você esteja trabalhando em uma empresa de pesquisas de opinião. Foi realizada uma pesquisa sobre alimentação com funcionários de uma empresa do setor automotivo. Esta tem interesse em reduzir os gastos do plano de saúde corporativo com ações de Medicina Preventiva. Para isso, ela pretende conhecer os hábitos de alimentação dos funcionários.

Na pesquisa sobre alimentação com esses funcionários, foram realizadas duas questões:

1) Você come frutas todos os dias?

2) Você come verduras todos os dias?

- 18% dos entrevistados responderam "sim" apenas para a primeira questão.

- 73% dos entrevistados responderam "sim" à segunda questão.

- 39% dos entrevistados responderam "sim" às duas questões.

Faça uma análise dos resultados da pesquisa e determine a porcentagem daqueles que:

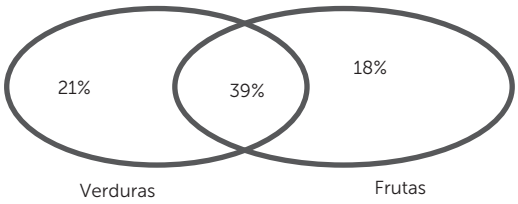
a) Responderam "não" às duas questões.

b) Responderam "não" à segunda questão.

Resolução da situação-problema

Como 18% dos entrevistados responderam "sim" apenas à primeira questão, e 39% disseram "sim" às duas questões, então, $39\% - 18\% = 21\%$ disseram "sim" apenas à segunda questão.

Figura 3.16 | Pesquisa sobre alimentação, passo 1



Fonte: elaborado pelo autor.

a) O total de entrevistados é 100%. Descontando aqueles que responderem "sim" a qualquer uma das perguntas, teremos $100\% - 18\% - 21\% - 39\% = 22\%$ que responderam "não" às duas questões, sendo o complementar de quem respondeu "sim" à primeira e à segunda questão.

b) Somando os 22% que responderam "não" a ambas as questões com os 18% que responderam "sim" exclusivamente à primeira questão, teremos os 40% que responderam "não" à segunda questão.

Conclusão: aproximadamente um quinto dos funcionários (22%) responderam "não" a ambas as questões, e 40% responderam "não" à segunda questão.

Com base nestas respostas, a empresa pode iniciar uma campanha de reeducação alimentar junto aos funcionários, objetivando que eles incrementem sua alimentação com frutas e verduras. A mudança destes hábitos alimentares, necessariamente, passa pela reeducação alimentar desenvolvida nas residências dos funcionários. Assim, uma campanha também deveria atingir os familiares.

Faça valer a pena

1. A união dos conjuntos A e B, representada por $A \cup B$, é o conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B. Já o conjunto intersecção $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$. O conjunto diferença $A - B$ que é dado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B:

$A - B = \{x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Considerando os conjuntos $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A \cap B = \{5,6\}$ e $A - B = \{1,2,3\}$, é correto concluir que:

a) $B = \{5,6\}$.

b) $B = \{1,2,3\}$.

c) $B = \{4,5,6,7,8,9\}$.

d) $B = \{4,7,8,9\}$.

e) $B = \varnothing$.

2. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então, vale que:

$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$

e $\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

O símbolo $\#(A)$ representa a cardinalidade (quantidade de elementos do

conjunto A).

Considere os conjuntos A e B tais que $\#A = 30$, $\#(A \cap B) = 8$ e $\#(A \cup B) = 72$. Então, o número de elementos do conjunto B é:

a) 20.

b) 30.

c) 40.

d) 50.

e) 60.

3. Dados dois conjuntos A e B quaisquer, a diferença simétrica entre eles é dada pela união das diferenças $A - B$ e $B - A$.

Tratando-se do complementar do conjunto B em relação ao conjunto A, detonamos com C_A^B.

Considere $A = \{3,6,9,12,15,18,21\}, B = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$ e $C = \{9,12,15,18\}$. Então, é correto afirmar que:

a) $A \Delta B = \{2,3,4,8,9,10,14,15,16,20,21\}$.

b) $C_A^B = \varnothing$.

c) $A - C = \{9,12,15,18\}$.

d) $B - A = \{3,6,9,15,21\}$.

e) $B - C = \{3,6,15\}$.

Seção 3.2

Conjuntos numéricos

Diálogo aberto

Lembre-se de que na seção anterior estudamos conjuntos, as relações de pertinência e continência entre conjuntos, operações entre conjuntos (igualdade, união, intersecção, diferença, diferença simétrica) e complementar de um conjunto. Na seção anterior, você estava desenvolvendo um projeto em uma empresa de pesquisa de opinião contratada por uma prefeitura. Este projeto continua nesta seção. Agora, você trabalhará com um questionário relacionado ao planejamento urbano e tratamento de resíduos (incluindo lixo residencial e resíduos industriais e hospitalares) que envolve vários dados numéricos: idade, altura, renda média dos proprietários dos lotes urbanos, intervalo de duração de um processo de filtragem de resíduos industriais e hospitalares e determinação da diagonal de terrenos urbanos para fins de investimentos em rede elétrica e de esgoto. Você foi chamado pois estes dados devem ser tratados pela área de informática da empresa e cadastrados em um banco de dados. O pessoal de informática solicitou, em função da exigência técnica tanto da linguagem de programação quanto do banco de dados adotado por eles, que você informe quais destes valores são números naturais, quais são valores inteiros, quais são números racionais e quais são números reais.

Assim, você deverá classificar a qual conjunto pertence as grandezas a seguir:

i) Idade (medida em valores inteiros de anos).

ii) Altura (medida em valores inteiros de centímetros).

iii) Renda média (medida em R$/ano).

iv) Intervalo de tempo médio de duração de processos de filtragem de resíduos industriais e hospitalares (para alguns resíduos este tempo pode ser considerado infinito).

v) Suponha que todos os lotes são retangulares. Para definição das redes de esgoto e elétrica será necessário determinar, a partir da largura e comprimento de cada lote, a diagonal dos lotes.

vi) Indicadores de acidez (pH) do solo.

Para responder a estas questões, precisaremos estudar conjuntos numéricos. Vamos lá?

Não pode faltar

Os conjuntos numéricos são resultado de uma longa aprendizagem humana ao longo da história. Existem diversos artefatos descobertos por arqueólogos e antropólogos que evidenciam a crescente sofisticação nos processos de contagem da humanidade: o osso de Ishango na África, os quipos peruanos, as tabletas de argila dos babilônios, entre outros. É claro que nestes diversos períodos antigos estes grupamentos humanos não estavam preocupados com a definição precisa de "conjuntos numéricos", mas é nesses períodos que a história da contagem e dos símbolos matemáticos se inicia.

Os gregos já haviam se colocado frente ao obstáculo epistemológico que são os números irracionais ao tentar calcular a diagonal de um quadrado de lado unitário. Um momento de ruptura parece ser o Renascimento italiano: com a crescente sofisticação bancária, tornou-se necessário registrar por escrito os lançamentos contábeis de débitos e créditos. Isto levou-nos a estender o conjunto dos naturais para os números inteiros. Outro aspecto a destacar é que a História da Ciência (e da Matemática, em particular) não é linear. É nesta longa trajetória do conhecimento humano que você está imerso.

Pesquise mais

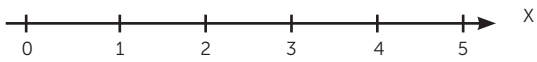
Para saber mais sobre o osso de Ishango, quipos peruanos e tabelas babilônias, sugerimos que você acesse: <https://www.ime.usp.br/~dpdias/2014/MAT1514%20-%20SistemasNumeracao(Texto%20MariaElisa).pdf>. Acesso em: 17 fev. 2017.

1. Conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais é formado pelos números $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Para representar o conjunto dos números naturais sem o zero, escrevemos $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Como a adição e a multiplicação de números naturais sempre resultam em um número natural, dizemos que as operações de adição e multiplicação são fechadas em $\mathbb{N}$. Contudo, se dividirmos $\frac{3}{2}$ o resultado não é um número natural. Assim, a operação de divisão não é fechada em $\mathbb{N}$. A operação de subtração também não é fechada em $\mathbb{N}$, pois se subtrairmos $10 - 12$ o resultado não é um número natural. Observe também que, dado um número natural n qualquer, não existe o número natural simétrico de n: –n.

Para ampliar o conjunto dos números naturais para que a operação de subtração, ao menos, seja fechada neste novo conjunto, definimos o conjunto dos números inteiros. Veja na figura a seguir a representação do conjunto dos números naturais na reta.

Figura 3.17 | Representação do conjunto dos números naturais na reta



Fonte: elaborada pelo autor.

2. Conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros surgiu da necessidade de se representar valores negativos, por exemplo, as dívidas em empréstimos bancários. O conjunto dos números inteiros é formado pelos números $\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$. Para representar este conjunto, utiliza-se a letra $\mathbb{Z}$. De onde vem este $\mathbb{Z}$? Da palavra alemã zahlen, que significa número ou contar. A primeira letra desta palavra foi adotada para representar o conjunto dos números inteiros.

Os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$ são usuais:

$\mathbb{Z}_{-} = \{0,-1,-2,-3,-4,...\}$: conjunto dos números inteiros não positivos.

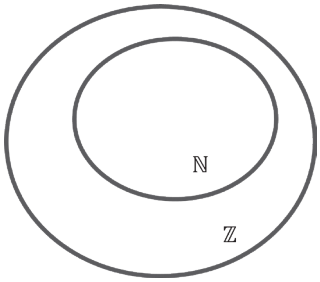
$\mathbb{Z}_{+} = \{0,1,2,3,4,...\}$: conjunto dos números inteiros não negativos.

$\mathbb{Z}_{-}^{*} = \{-1,-2,-3,-4,...\}$: conjunto dos números inteiros negativos.

$\mathbb{Z}_{+}^{*} = \{1,2,3,4,...\}$: conjunto dos números inteiros positivos.

O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números inteiros. Podemos escrever $\mathbb{Z}_{+} = \mathbb{N}$. Veja na Figura 3.18 a representação com diagrama de Venn de que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

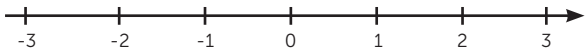
Figura 3.18 | O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números inteiros



Fonte: elaborada pelo autor.

O conjunto dos números inteiros pode ser representado graficamente na reta. Veja na Figura 3.19 a seguir.

Figura 3.19 | Representação do conjunto dos números inteiros na reta



Fonte: elaborada pelo autor.

Entre dois números inteiros quaisquer nem sempre existe outro número inteiro. Já entre dois números racionais quaisquer sempre é possível encontrar outro número racional. Mas, mesmo assim, não conseguimos medir todos os segmentos da reta apenas com o conjunto dos racionais.

A distância entre -1 e 1 é de duas unidades de comprimento. A distância entre 1 e 3 também é de duas unidades de comprimento. Já a distância entre -2 e 2 é de quatro unidades de comprimento.

Existe um conceito na Matemática associado com a noção de distância entre números inteiros: é o módulo de um número inteiro. É o veremos logo a seguir.

2.1 Módulo de um número inteiro

O módulo de um número inteiro é um conceito associado à distância entre números. Vejamos a seguir a definição de módulo de um número inteiro.

Assimile

O módulo de um número, que também é chamado de valor absoluto, é a distância deste número até a origem da reta. Denota-se o módulo de x como $|x|$. Temos que $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

Vejamos alguns exemplos sobre módulo de números inteiros a seguir.

Exemplificando

Vejamos alguns exemplos de cálculos com módulos:

a) $|-5| + |5| = 5 + 5 = 10$.

b) $-2 \cdot |3| + 3 \cdot |-3| - |-4| \cdot |-1| = -2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = -6 + 9 - 4 = -1$.

c) Determine o valor de $|2x - 5|$ quando $x = -3$: $|2 \cdot (-3) - 5| = |-6 - 5| = |-11| = 11$.

3. Conjunto dos números racionais

Com os conjuntos dos números naturais e inteiros não conseguimos representar frações ou partes de um todo. Para representar estas quantidades, é necessário considerar o conjunto dos números racionais. Como a divisão de números racionais é um número racional, dizemos que a operação de divisão é fechada sobre $\mathbb{Q}$, excetuando-se a divisão por zero.

Assimile

Denomina-se número racional qualquer número que possa ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com p e q números inteiros e q não nulo.

Exemplificando

Exemplos de números racionais: $\frac{5}{2}$, $\frac{2}{5}$, $-\frac{8}{7}$, $0{,}3$ (pois $0{,}3=\frac{3}{10}$), 0,28 (pois $0{,}28=\frac{7}{25}$), 0,777... (pois $0{,}777...=\frac{7}{9}$), $-\frac{\sqrt{16}}{7}$ (pois $\sqrt{16}=4$ e temos a divisão de dois números inteiros).

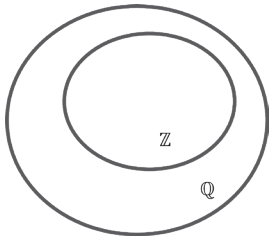
Vejamos alguns exemplos de números que não são racionais. O número $\frac{\sqrt{2}}{2}$ não é racional, pois não conseguimos representá-lo como razão entre dois números inteiros. Veja outro exemplo:

O número $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{7}-5}$ também não é racional. Não é possível representá-lo como razão entre dois números inteiros, mas cuidado! O número $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ é um número racional, já que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$. Veja que é possível representar números racionais como razão de números que não são racionais.

Usa-se a letra $\mathbb{Q}$ para representar o conjunto dos números racionais, podendo representá-lo também da seguinte forma: $\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

Como todo número inteiro p pode ser escrito da forma $\frac{p}{1}$, todo número inteiro também é número racional. Assim, o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais. Veja o diagrama de Venn na Figura 3.20.

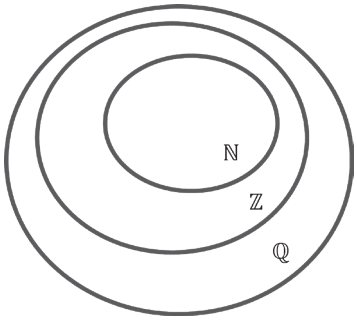
Figura 3.20 | O conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais



Fonte: elaborada pelo autor.

Já mostramos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Então, vale a Figura 3.21 a seguir:

Figura 3.21 | $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$



Fonte: elaborada pelo autor.

De forma similar aos conjuntos dos números naturais e dos números inteiros, também para os números racionais escrevemos: $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$ **e** $\mathbb{Q}^*$. Temos, então:

$\mathbb{Q}_-$: conjunto dos números racionais não positivos.

$\mathbb{Q}_+$: conjunto dos números racionais não negativos.

$\mathbb{Q}^*_-$: conjunto dos números racionais negativos.

$\mathbb{Q}^*_+$: conjunto dos números racionais positivos.

Pesquise mais

A Sociedade Brasileira de Matemática publicou o livro A construção dos números, do professor Jamil Ferreira. Este livro apresenta, de forma rigorosa, a construção dos conjuntos numéricos estudados desde o ensino fundamental, suas propriedades e relaciona os conjuntos numéricos com outras áreas da Matemática.

3.1 Fração geratriz de uma dízima periódica

Existem números que não possuem representação decimal finita e são números racionais, ou seja, podem ser representados na forma p/q com p e q números inteiros, q não nulo. Estes números são conhecidos como dízimas periódicas. Tais números possuem uma quantidade infinita de casas decimais e, em sua representação decimal, temos, a partir de alguma casa decimal, a repetição de um ou mais algarismos.

Exemplos de dízimas periódicas:

$x = 0,222...$

$y = 0,363636...$

$z = 0,0678678678...$

$w = 95,73982982982...$

No caso do número x, como temos um único algarismo que se repete (o "2") dizemos que esta dízima possui período 1. No caso do número y, temos dois algarismos que se repetem (o "36"). Assim, esta dízima apresenta período 2. No caso do número z, a repetição é do "678". Assim, z é uma dízima periódica com período 3.

É possível representar qualquer dízima periódica na forma de fração $\frac{p}{q}$ com p e q números inteiros. Vejamos isto por meio de alguns exemplos:

Exemplo 1

Considere $x = 0,222...$

Passo 1: multiplique por 10 (o período é 1).

$10x = 2,222...$

Passo 2: como $2,222... = 2 + 0,222...$ e $x = 0,222...$, então, $10x = 2 + x$. Desse modo, $9x = 2$.

Passo 3: isolamos x: $x = \frac{2}{9}$.

Exemplo 2

Considere agora $y = 0,363636...$

Passo 1: multiplique por 100 (o período é dois).

$100y = 36,363636...$

Passo 2: Como $36,363636... = 36 + 0,363636 = 36 + y$, temos que $100y = 36 + y$. Desse modo, $99y = 36$.

Passo 3: isolamos y: $y = \frac{36}{99}$.

Exemplo 3

Vejamos o caso $z = 0,0678678678...$

Como a parte periódica se inicia apenas a partir da segunda casa decimal, multiplicamos por 10 para aplicar os procedimentos explicados anteriormente: $10z = 0,678678678...$

Escrevemos $a = 0,678678678...$

Então, multiplicamos por 1000 (a parte periódica possui período três):

$1000a = 678,678678678... = 678 + a$.

Então, $999a = 678$. Portanto, $a = \frac{678}{999}$. Substituindo $a = \frac{678}{999}$ em $10z = 0,678678678...$ teremos que $z = \frac{a}{10} = \frac{678}{99900}$.

Exemplo 4

Finalmente, vamos considerar $w = 95,73982982982...$

Passo 1: separamos a parte periódica da não periódica: $w_1 = 95,73$ e $w_2 = 0,00982982982...$

Podemos representar a parte não periódica facilmente como fração: $w_1 = \frac{9573}{100}$.

Passo 2: aplicamos os procedimentos anteriores à parte não periódica. Em primeiro lugar, devemos deslocar a vírgula: $w_2 = 0,00982982982...$

Como a parte periódica só se inicia duas casas decimais após a vírgula, escrevemos: $w_3 = 100w_2 = 0,982982982...$

Neste caso, como o período é 3, multiplicamos w_3 por 1000: $1000w_3 = 1000 \cdot (100w_2) = 1000 \cdot 0,982982982... = 982 + 0,982982982... = 982 + w_3$.

Portanto, $999w_3 = 982$. Logo, $w_3 = \frac{982}{999}$.

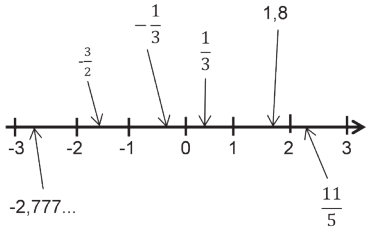
Como $w_3 = 100w_2$, temos que $w_2 = \frac{982}{99900}$ ou $w_2 = \frac{982}{99900}$.

Como $w = w_1 + w_2$, temos $w = \frac{9573}{100} + \frac{982}{99900} = \frac{956440900}{9990000}$.

Representação dos números racionais na reta

Assim como fizemos com os números naturais e os números inteiros, também podemos representar os números racionais na reta. Veja a Figura 3.22.

Figura 3.22 | Representação dos números racionais na reta



Fonte: elaborada pelo autor.

Até onde temos documentado na História da Matemática, provavelmente foram os pitagóricos (grupo de estudiosos cujo fundador teria sido o filósofo e matemático grego Pitágoras) que primeiro identificaram a dificuldade de se representar a diagonal de um quadrado de lado unitário como razão entre números inteiros. Lembre-se de que, no teorema de Pitágoras, se os lados de um quadrado tiverem medida igual a 1, sua diagonal será igual a $\sqrt{2}$. Não é possível representar $\sqrt{2}$ como razão entre números inteiros. Esta impossibilidade representou um enorme desafio para aqueles pensadores gregos e obriga-nos a "ampliar" o conjunto dos números racionais. O tratamento matematicamente moderno desta questão dá ensejo ao conjunto dos números irracionais. É o que veremos no tópico seguinte.

4. Conjunto dos números reais

O conjunto dos números reais (usa-se a letra $\mathbb{R}$ para representá-lo) é constituído pela união de dois conjuntos disjuntos: o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números que não são racionais, mais conhecido como conjunto dos números irracionais (representado aqui por I). O conjunto dos números irracionais também pode ser representado como $\mathrm{I} = C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^C$. Em símbolos, escrevemos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$. Observe ainda que $\mathbb{Q} \cap \mathrm{I} = \varnothing$ (a intersecção do conjunto dos números racionais com os irracionais é vazia pelo princípio da não contradição: não é possível um número poder e não poder simultaneamente ser escrito como fração de inteiros).

De forma inteiramente similar ao que apresentamos para os outros conjuntos numéricos, também para o conjunto dos números reais vale a notação a seguir.

$\mathbb{R}_-$: conjunto dos números reais não positivos.

$\mathbb{R}_+$: conjunto dos números reais não negativos.

$\mathbb{R}_-^*$: conjunto dos números reais negativos.

$\mathbb{R}_+^*$: conjunto dos números reais positivos.

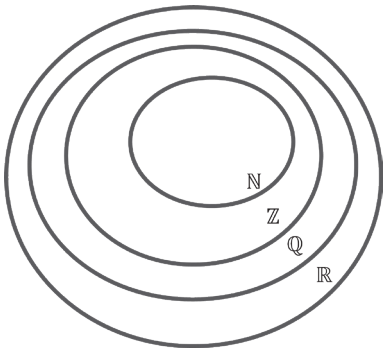
Pesquise mais

No seu mestrado profissional, Carlos Eduardo de Lima Duarte apresenta um texto sobre conjuntos numéricos e as necessidades sociais humanas para a construção de novos números. O título do trabalho é **Conjuntos Numéricos** e faz parte do Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional ProfMat. O texto pode ser encontrado em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/17017/1/CarlosELD_DISSERT.pdf>. Acesso em: 1 fev. 2017.

4.1 Conjunto dos números irracionais

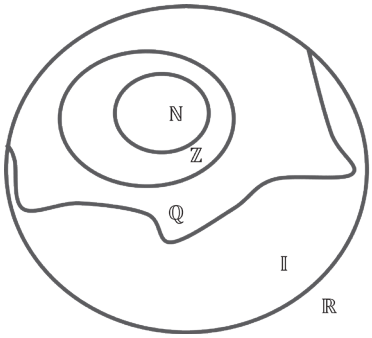
Continuando com a representação em diagramas de Venn para os conjuntos numéricos, veja as Figuras 3.23 e 3.24 a seguir.

Figura 3.23 | $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.24 | O conjunto dos números reais é a união dos racionais com os irracionais



Fonte: elaborada pelo autor.

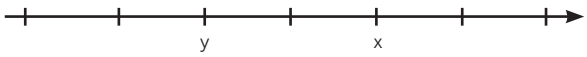
Reflita

Considere um número racional $\frac{p}{q}$. Podemos concluir que $\sqrt{\frac{p}{q}}$ é um número racional? Podemos concluir que $\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$ não é um número racional?

4.2 Intervalos reais

Considere dois números reais x e y. Apenas uma das três possibilidades poderá ocorrer: ou $x > y$ (x é maior que y), ou $x < y$ (x é menor que y), ou $x = y$ (x é igual a y). Se $x > y$, então, a representação na reta de x e y apresentará x à direita de y.

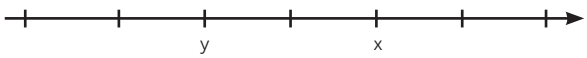
Figura 3.25 | Representação gráfica de $x > y$



Fonte: elaborada pelo autor.

Se $x < y$, a representação na reta de x e y apresentará x à esquerda de y.

Figura 3.26 | Representação gráfica de $x < y$



Fonte: elaborada pelo autor.

Se $x = y$, os valores x e y são coincidentes.

Assimile

Denomina-se intervalo aberto com extremos inferior a e extremo superior b ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Este conjunto também pode ser representado como $]a;b[$.

Destacamos que em alguns textos utiliza-se a representação $(a;b)$ para intervalo aberto nos dois extremos.

Denomina-se intervalo fechado com extremos inferior a e extremo superior b ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Este conjunto também pode ser representado como $[a;b]$.

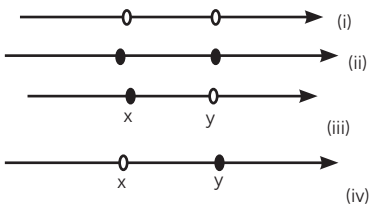
Denomina-se intervalo aberto à esquerda e fechado à direita com extremo inferior a e extremo superior b ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$. Este conjunto também pode ser representado como $]a;b]$. Utilizando-se a notação mencionada acima (com parênteses), o intervalo aberto à esquerda $]a;b]$ também pode ser representado como $(a;b]$.

Denomina-se intervalo aberto à direita e fechado à esquerda com extremo inferior a e extremo superior b ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Este conjunto também pode ser representado como $[a;b[$.

Na Figura 3.27, temos a representação na reta real dos intervalos aberto (i), fechado (ii), fechado à esquerda e aberto à direita (iii) e fechado à direita e aberto à esquerda (iv).

Figura 3.27 | Representação na reta real de intervalos reais



Fonte: elaborada pelo autor.

Também podem ser definidos intervalos ilimitados na reta. Temos cinco possibilidades:

i) $]-\infty;a[=\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$.

ii) $]-\infty;a]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq a\}$.

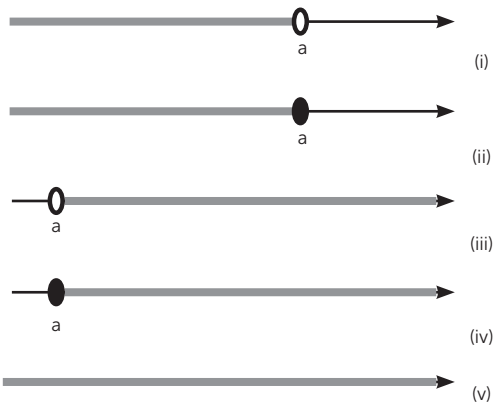
iii) $]a;\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$.

iv) $[a;\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq a\}$.

v) $]-\infty;\infty[=\mathbb{R}$.

Sobre o uso dos colchetes na notação de intervalo, como mostrado anteriormente, destacamos que sempre que um dos extremos for infinito (∞ **ou** $-\infty$) aquela extremidade do intervalo será sempre aberta: não é possível "incluir" o infinito.

Figura 3.28 | Intervalos reais infinitos



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Para resolver exercícios de união e intersecção de intervalos de números reais, é recomendável construirmos a representação gráfica dos intervalos, um abaixo do outro. Suponha que tenhamos dois intervalos reais, A e B. Trace retas verticais entre todas as representações de intervalos feitas e construa uma última reta real abaixo das representações dos intervalos de seu exercício. Se a intersecção entre os intervalos de números reais A e B for vazia, não teremos retas verticais passando por ambos os conjuntos.

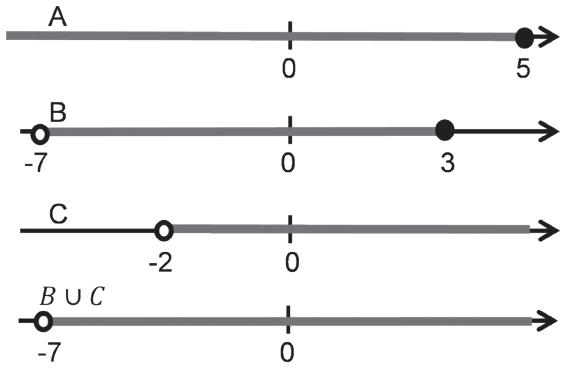
Considere os intervalos reais:

$A =]-\infty; 5], B =]-7; 3], C =]-2; \infty[$

Então, $B \cup C =]-7; \infty[$

Resolvemos este exercício usando a representação gráfica de cada um dos conjuntos e a operação apresentada em cada item.

Figura 3.29 | Conjuntos A, B, C e $B \cup C$



Fonte: elaborada pelo autor.

A união dos conjuntos B e C é dada pelos elementos que pertencem a B e a C. Assim, $B \cup C =]-7; \infty[$.

Nesta seção, você estudou os conjuntos numéricos: os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e o conjunto dos números reais. Também aprendeu sobre as relações de continência entre estes conjuntos, como construir a fração geratriz de uma dízima periódica e trabalhar com intervalos numéricos.

Sem medo de errar

Lembre-se de que você atua em uma empresa de pesquisa de opinião. Foi realizado um levantamento de campo no qual várias grandezas foram colhidas e serão armazenadas em um banco de dados. Estas grandezas eram:

i) Idade (medida em anos).

ii) Altura (medida em centímetros).

iii) Renda média (medida em R$/ano).

iv) Intervalo de tempo médio de duração de processos de filtragem de resíduos industriais e hospitalares (para alguns resíduos este tempo pode ser considerado infinito).

v) Para definição das redes de esgoto e elétrica será necessário determinar, a partir da largura e comprimento de cada lote, a diagonal dos lotes.

vi) Indicadores de acidez (pH) do solo.

O pessoal de informática procurou você para saber a qual conjunto numérico pertence cada um desses dados.

Você apresentou a seguinte resposta:

i) Idade (medida em anos).

A idade, medida em anos, será um número natural. Nunca teremos uma idade "negativa". Usualmente, ninguém fala que sua idade é de 36,72 anos. Para crianças pequenas, na nossa linguagem do cotidiano, falamos que um bebê tem um ano e oito meses. Já para adultos, costumamos falar que nossa idade é 36 anos, sem mencionar frações de idade. Estamos supondo que este banco de dados não terá dados de menores de idade. Assim, seguindo este costume, não vamos armazenar a variável idade com casas decimais. Será um número inteiro.

ii) Altura (medida em centímetros).

De forma similar à idade, não costumamos informar que nossa altura é de 173,45 centímetros. Costumamos informar nossa altura em uma quantidade inteira de centímetros. Altura aqui será um valor inteiro. Observe que, na nossa linguagem do dia a dia, falamos que uma pessoa tem 1 metro e oitenta de altura. Contudo, dados para serem registrados em um banco de dados, muito provavelmente serão posteriormente utilizados para tratamentos estatísticos. Neste caso, considerar as alturas em centímetros facilita o tratamento da informação.

iii) Renda média (medida em R$/ano).

Como a renda média é obtida por uma divisão, é usual representarmos a renda média com uma ou duas casas decimais. Por exemplo R$ 1685,27/ano. Assim, vamos considerar que renda média é um número racional.

iv) Intervalo de tempo médio de duração de processos de filtragem de resíduos industriais e hospitalares (para alguns resíduos este tempo pode ser considerado infinito).

Como estamos falando de um intervalo com infinitas possibilidades de tempo de duração dos processos de filtragem (inclusive com a possibilidade de tempos infinitos), vamos considerar esta variável como um número real.

v) Todos os lotes são retangulares. Para definição das redes de esgoto e elétrica será necessário determinar, a partir da largura e comprimento de cada lote, a diagonal dos lotes.

A diagonal de um lote poderá ser um número irracional. Por exemplo, se o terreno possuir um lado igual a 100 metros e os outros lados iguais a 200 metros, pelo teorema de Pitágoras, sua diagonal será $\sqrt{100^2 + 200^2} = \sqrt{50000} = 100\sqrt{5}$, que é um número irracional. Assim, nossa representação no computador será sempre uma aproximação do valor real obtido em campo. Vamos considerar este valor como um número real.

vi) Indicadores de acidez (pH) do solo.

O índice de acidez é obtido usando-se a função logaritmo. Em geral, este valor será um número real.

Observemos que, por causa da memória finita das calculadoras ou dos computadores, qualquer número representado em tais dispositivos sempre é um número racional. Nos computadores, acabamos trabalhando com aproximações com boa precisão dos números reais "originais". Quanto mais casas decimais, melhor será a aproximação, mas sempre teremos um número finito de casas decimais (ou seja, sempre será um número racional). Para não perder a relação com o valor da "realidade", os profissionais de informática acabam categorizando estas variáveis como dupla precisão ou real (dependendo da linguagem de programação), e não como inteiros ou racionais.

Agora que concluímos a resolução da situação-problema, a equipe de TI poderá ser informada por meio de um relatório das respostas que obtivemos anteriormente (itens de *i* a *vi*).

Avançando na prática

O conjunto solução depende do conjunto universo

Descrição da situação-problema

Suponha que você atua em uma empresa de georreferenciamento e foi inserido na equipe de desenvolvimento de um software para automatizar os processos de cálculos de áreas dos terrenos e lotes. Este conjunto de medidas deverá ser armazenado em um banco de dados e processado numericamente em outro software especializado em tratamento de informação. Algumas das medidas obtidas neste levantamento deram origem a equações definidas sobre alguns conjuntos numéricos. Você foi chamado a apresentar o conjunto solução de tais equações que estão relacionadas aos tamanhos dos lotes. Um dos problemas específicos tem o seguinte detalhamento:

Suponha que um lote seja quadrado, com lados de comprimento L. Qual será este comprimento L se a área do terreno é igual a 1000 metros quadrados? O pessoal de informática quer saber como resolver este problema se definirmos o valor L como real no programa de computador que vai tratar os dados da pesquisa. Eles também querem saber o que muda se definirmos L como racional. Será que faz diferença definir L como inteiro?

Resolução da situação-problema

Queremos definir o conjunto solução da equação $L^2 = 1000$ quando $L \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{Q}$ e $L \in \mathbb{Z}$.

Resolver a equação $L^2 = 1000$ significa determinar L tal que $L = \sqrt{1000}$. Este valor é um número real.

Portanto, o conjunto solução da equação $L^2 = 1000$, com $L \in \mathbb{R}$, é: $S = \left\{\sqrt{1000}\right\} = \left\{\sqrt{10^3}\right\} = \left\{\sqrt{10^2 \cdot 10}\right\} = \left\{\sqrt{10^2} \cdot \sqrt{10}\right\} = \left\{10\sqrt{10}\right\}$.

Mas este não é um número racional (não pode ser expresso como a razão de dois números inteiros). Assim, o conjunto solução da equação $L^2 = 1000$, com $L \in \mathbb{Q}$, é vazio.

Também não existe número inteiro tal que $L^2 = 1000$. Assim, o conjunto solução de $L^2 = 1000$, com $L \in \mathbb{Z}$, é vazio.

Agora, após ter concluído os cálculos, você organizará estas informações em um relatório técnico e o enviará para o seu cliente. Neste relatório, você destacará que, dependendo do conjunto sobre o qual sua equação está definida, o conjunto solução poderá ser vazio ou não.

Faça valer a pena

1. Sabemos que a soma e o produto de dois números naturais sempre é um número natural. A soma e o produto de dois números inteiros também é sempre um número inteiro.

Se a e b são dois números racionais, então é verdade que $a+b, a-b, a\cdot b, \frac{a}{b}$ são números racionais. Outras afirmações similares podem ser feitas envolvendo números racionais e irracionais.

Assinale a alternativa que julgar correta.

a) Todo número racional possui um número finito de casas decimais.

b) O produto de números irracionais é sempre irracional.

c) Sejam a um número racional e b um número irracional. Então, $3a-2b$ é racional.

d) Se a e b forem dois números irracionais, com b não nulo, então, a/b é irracional.

e) Se a e b forem dois números irracionais, então, a - b pode ser racional.

2. Para determinar a fração geratriz de dízimas periódicas, separamos a parte periódica da não periódica do número. Depois, multiplicamos por potências de 10, tais que o expoente da potência é igual ao comprimento do período.

Seja $a = 16,3474747...$

É correto afirmar que:

a) $a > 16,4$.

b) O numerador da fração geratriz de a é 161840.

c) $a^2 + a < 200$.

d) O número $a = 16,3474747...$ não é real.

e) O número $a = 16,3474747...$ é irracional.

3. No conjunto dos números reais existem subconjuntos denominados intervalos. Um intervalo aberto com extremos a e b é um conjunto A de números reais, tal que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =]a; b[$.

Um intervalo fechado com extremos a e b é um conjunto A de números reais, tal que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a; b]$.

Podem existir ainda os intervalos semiabertos: abertos à esquerda e fechados à direita ou abertos à direita e fechados à esquerda.

Um intervalo aberto à esquerda e fechado à direita é um intervalo da forma $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =]a; b]$.

Um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita é um intervalo da forma $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a; b[$.

Considere os intervalos reais $A =]3; 10]$ e $B = [-4; 6]$. Então, é correto afirmar que:

a) $A \cap B = \varnothing$.

b) $A \cap B =]6; 10]$.

c) $B \cup A =]3; 6[$.

d) $B - A = [-4; 3]$.

e) $A - B =]-4; 3]$.

Seção 3.3

Produto cartesiano e relações

Diálogo aberto

Lembre-se de que nas seções anteriores você estudou noções gerais sobre a teoria de conjuntos e alguns conjuntos numéricos. Além disso, esses conteúdos foram muito adequados para a realização de suas tarefas na empresa de pesquisa de opinião na qual você vem trabalhando e que está prestando serviços para a prefeitura da cidade.

Na última tarefa a ser realizada a pedido da prefeitura foi solicitado o tratamento gráfico de dados coletados por agentes municipais de saúde e de outros fornecidos pelo departamento de infraestrutura do mesmo município. Os dados são apresentados nas tabelas seguintes:

Quadro 3.1 | Valores em reais direcionados ao saneamento básico, por pessoa, por ano

Ano	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
R$ / pessoa	100	100	200	300	400	500	600

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 3.2 | Número de consultas registradas mensalmente nos postos de saúde com diagnóstico de doenças relacionadas ao saneamento básico

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Nº de consultas	700	700	500	400	400	300	200

Fonte: elaborado pelo autor.

A prefeitura deseja saber se houve impacto na saúde de seus habitantes considerando os investimentos realizados nos últimos anos em saneamento básico. O investimento que, até o ano de 2010, era de R$ 100,00 por habitante, por ano, foi intensificado gradualmente nos anos seguintes, passando para R$ 600,00 por habitante, em 2015.

Para realizar sua atividade investigativa, considere que os médicos do município tenham lhe informado que os resultados na saúde sofrem impacto no ano seguinte ao que houve o investimento em saneamento e que, geralmente, o indicativo de uma população sadia é o menor número de consultas nos postos de saúde. Além disso,

o resultado de sua investigação deve ser um relatório contendo uma representação gráfica da relação entre o investimento em saneamento e a saúde dos habitantes. Incremente esse relatório com percentuais de redução/aumento na incidência de consultas com diagnóstico de doenças relacionadas ao saneamento básico.

Qual é a maneira mais adequada de relacionar os dados? Quais representações podem compor o relatório de modo a explicitar a informação que a prefeitura deseja saber?

Para resolver este problema, você necessita de conhecimentos acerca de relações. Veja esse assunto no item *Não pode faltar*.

Não pode faltar

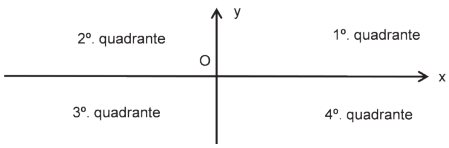
Foi o matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650) quem primeiro introduziu o conceito de plano cartesiano. Sem a noção de plano cartesiano seria impossível o estudo de funções como vem sendo realizado desde então.

Até que se diga o contrário, todos os conjuntos mencionados nesta seção são supostos não vazios.

1. Plano cartesiano e produto cartesiano

Vamos considerar dois eixos x e y perpendiculares entre si, que se encontram em um ponto O, origem dos dois eixos. Considere um ponto P pertencente ao plano α determinado por estes eixos. O eixo horizontal (eixo x) é denominado eixo das abscissas e o eixo vertical (eixo y) é denominado eixo das ordenadas, sendo que os dois eixos dividem o plano em quatro quadrantes, como é apresentado na Figura 3.30 a seguir.

Figura 3.30 | Plano cartesiano e quadrantes

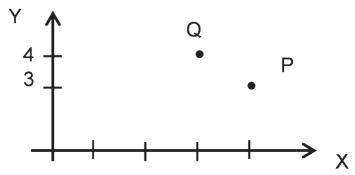


Fonte: elaborada pelo autor.

Como cada eixo está associado ao conjunto dos números reais, temos o que se denomina de sistema de coordenadas cartesianas (ou plano cartesiano). Assim, é possível localizar cada ponto do plano cartesiano por meio de um par de números, conhecido como coordenadas, sendo um desses números no eixo x e o outro no eixo y. Quando formos representar um ponto qualquer do plano cartesiano, escrevemos

em primeiro lugar o valor do eixo x e em segundo lugar o valor do eixo y (lembre-se: esta ordem é importante!). Na Figura 3.31, a primeira coordenada (ou coordenada x) do ponto P é igual a 4 e a segunda coordenada (ou coordenada y) deste ponto P é igual a 3. Veja que o ponto Q possui coordenada $x = 3$ e coordenada $y = 4$. Assim, a ordem das coordenadas é relevante para identificarmos os pontos no plano cartesiano.

Figura 3.31 | Pontos P e Q no plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor.

1.1 Par ordenado

Em um conjunto, não temos um elemento que "vem antes" e outro que "vem depois". Os elementos não estão ordenados em um conjunto. Um conjunto é como uma sacola de supermercado. Os produtos da sua compra no supermercado estão na sacola ou não estão na sacola, mas não seguem nenhuma ordem. O conjunto $A = \{açúcar, manteiga, macarrão\}$ é igual ao conjunto $B = \{macarrão, manteiga, açúcar\}$. Um exemplo de objeto matemático em que a ordem na qual os elementos aparecem tem que ser levada em conta é o par ordenado. Apresentaremos a noção de par ordenado como um conceito primitivo seguindo a apresentação desenvolvida por Castrucci (1980, p. 64): representa-se um par ordenado por (a,b), em que a é o primeiro elemento e b é o segundo elemento. Observamos que para pares ordenados vale a propriedade de igualdade: $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

1.2 Produto cartesiano

Apresentaremos o produto cartesiano a partir do próximo exemplo.

Considere os conjuntos $X = \{3,4,5\}$, $Y = \{5,9\}$ e o conjunto constituído pelos pares ordenados (x,y), para os quais o primeiro elemento pertence ao conjunto X e o segundo, ao conjunto Y. Este conjunto é $\{(3,5),(3,9),(4,5),(4,9),(5,5),(5,9)\}$. Como os números 4 ou 6 não pertencem ao conjunto Y, não podem ser formados os pares $(3,4)$, $(4,4)$, $(5,4)$, $(3,6)$, $(4,6)$ nem $(5,6)$.

O conjunto $\{(3,5),(3,9),(4,5),(4,9),(5,5),(5,9)\}$ recebe o nome de produto cartesiano dos conjuntos X e Y, e escreve-se: $X \times Y = \{(3,5),(3,9),(4,5),(4,9),(5,5),(5,9)\}$.

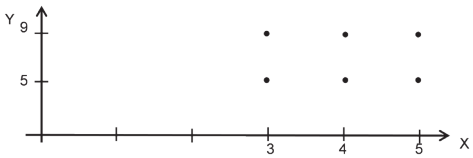
Para destacar como a ordem é importante, o produto cartesiano $Y \times X$ é dado por $Y \times X = \{(5,3),(9,4),(5,5),(9,3),(5,4),(9,5)\}$.

Assimile

Definição: sejam X e Y dois sejam X e Y dois conjuntos, denomina-se produto cartesiano produto cartesiano de X por Y e representa-se $X \times Y$ ao conjunto formado pelos pares ordenado, de modo que o primeiro elemento pertence ao conjunto X e o segundo elemento pertence ao conjunto Y.

O produto cartesiano de um conjunto X pelo conjunto vazio é igual ao vazio. Também é vazio o produto cartesiano do vazio com um conjunto X qualquer. Em símbolos: $X \times \varnothing = \varnothing$ e $\varnothing \times X = \varnothing$. Podemos representar graficamente um produto cartesiano no plano cartesiano. Veja na Figura 3.32.

Figura 3.32 | Representação do produto cartesiano $X \times Y$ no plano cartesiano

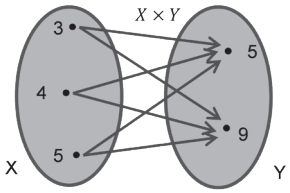


Fonte: elaborado pelo autor.

Considere um conjunto X com n elementos e um conjunto Y com m elementos. Da Figura 3.32 podemos concluir facilmente que o produto cartesiano $X \times Y$ terá $m \cdot n$ elementos.

Também podemos representar graficamente um produto cartesiano por meio de diagramas de flechas ligando os dois conjuntos. Considere os conjuntos já utilizados: $X = \{3,4,5\}$ e $Y = \{5,9\}$, e observe a Figura 3.33.

Figura 3.33 | Representação do produto cartesiano com diagramas de Euler-Venn



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

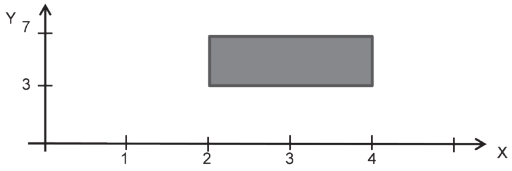
O produto cartesiano não satisfaz a propriedade comutativa: o conjunto $X \times Y$ é diferente do conjunto $Y \times X$. Por quê?

Vejamos a seguir um exemplo de produto cartesiano entre intervalos de números reais.

Exemplificando

Sejam os conjuntos $A = [2,4]$ e $B = [3,7]$. O produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto $A \times B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 4, 3 \leq y \leq 7\}$. A representação gráfica de $A \times B$ é dada na Figura 3.34 a seguir.

Figura 3.34 | Representação do produto cartesiano *A x B*



Fonte: elaborada pelo autor.

O conceito que acabamos de estudar nesta subseção, produto cartesiano, relaciona-se com o conceito que estudaremos na próxima subseção: relações no plano cartesiano.

2. Relações no plano cartesiano

Caro aluno, para estudar o assunto "Relações no plano cartesiano", supomos que os conjuntos X e Y a seguir sejam não vazios.

2.1 Relações no plano cartesiano.

Denomina-se relação de X em Y qualquer subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$ e escreve-se $R : X \to Y$.

Exemplificando

Sejam os conjuntos $X = \{3,7\}$ e $Y = \{1,3,5\}$, O produto cartesiano $X \times Y$ é o conjunto $X \times Y = \{(3,1),(3,3),(3,5),(7,1),(7,3),(7,5)\}$. Os conjuntos R, S e T a seguir são exemplos de relações de X em Y, pois são subconjuntos do produto cartesiano $X \times Y$:

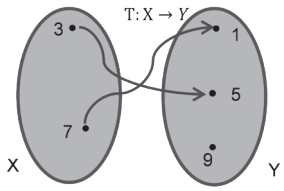
$R = \{(3,1),(3,3),(3,5),(7,3)\}$.

$S = \{(7,5)\}$.

$T = \{(3,5),(7,1)\}$.

Podemos representar relações por meio de um diagrama de flechas. Veja na Figura 3.35 a seguir.

Figura 3.35 | Representação de relação por meio de diagrama de flechas



Fonte: elaborada pelo autor.

Relações podem ser definidas por alguma expressão matemática. Por exemplo:

Considere os conjuntos $X = \{4,5,6,7,8\}$ e $Y = \{3,4,5,6,7,8,9\}$.

i) $R = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = x + 1\} = \{(4,5),(5,6),(6,7),(7,8),(8,9)\}$.

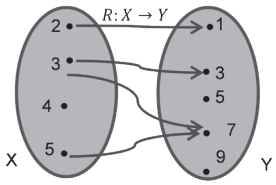
ii) $R = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = 2x\} = \{(4,8)\}$.

iii) $R = \{(x,y) \in X \times Y \mid y < x\} = \{(4,3),(5,3),(6,3),(7,3),(8,3),(5,4),(6,4),(7,4),(8,4),(6,5),$
$(7,5),(8,5),(7,6),(8,6),(8,7),(9,7),(9,8)\}$

2.2 Domínio e imagem

Considere R uma relação entre os conjuntos $X = \{2,3,4,5\}$ e $Y = \{1,3,5,7,9\}$ dada por $R = \{(2,1),(3,3),(3,7),(5,7)\}$.

Figura 3.36 | Domínio e imagem para a relação $R = \{(2,1),(3,3),(3,7),(5,7)\}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Na relação representada na Figura 3.36, o elemento 2 do conjunto X está associado ao elemento 1 do conjunto Y, o elemento 3 está associado aos elementos 3 e 7 do conjunto Y e o elemento 5 de X está associado ao elemento 7 de Y.

Dizemos que o elemento 1 de Y é imagem do elemento 2 de X, o elemento 3 de Y é imagem do elemento 3 de X e o elemento 7 é imagem de dois elementos de X: 3 e 5.

O elemento 4 de X não está associado a nenhum elemento de Y. Na figura, não vemos nenhuma flecha partindo do elemento 4. Não há nenhum elemento de X associado aos elementos 5 e 9 de Y. Não há nenhuma flecha apontando para esses dois elementos. Os elementos 5 e 9 não são imagens de nenhum elemento de X. A seguir, apresentamos as definições formais de conjunto Domínio e conjunto Imagem de uma relação.

Assimile

Definição (Domínio da relação $R: X \to Y$): o domínio de uma relação $R: X \to Y$ é o conjunto de todos os elementos de X para os quais existe associação com ao menos um elemento do conjunto Y. Representa-se o conjunto domínio por $D(R)$ ou $Dom(R)$.

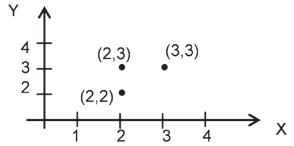
Definição (Imagem da relação $R: X \to Y$): a imagem de uma relação $R: X \to Y$ é o conjunto de todos os elementos de Y que são imagens de ao menos um elemento do conjunto X. Representa-se o conjunto Imagem de R por $\mathrm{Im}(R)$.

No exemplo da figura 3.36, o conjunto Domínio é $D(R) = \{2,3,5\}$ e o conjunto Imagem é $\mathrm{Im}(R) = \{1,3,7\}$.

Em uma relação $R: X \to Y$, denomina-se o conjunto X de conjunto de partida e o conjunto Y de contradomínio (ou conjunto de chegada). Pode ocorrer de o domínio ser igual ao conjunto de partida e a imagem ser igual ao conjunto de chegada, mas, sem exceções, o domínio é subconjunto do conjunto de partida e a imagem é, sem exceções, subconjunto do conjunto de chegada.

Podemos representar relações no plano cartesiano. Considere os conjuntos $X = \{2,3,4\}$ e $Y = \{0,1,2,3\}$. Considere a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\}$. Esta relação corresponde ao conjunto $R = \{(2,2),(2,3),(3,3)\}$.

Figura 3.37 | Representação no plano cartesiano da relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\}$



Fonte: elaborada pelo autor.

3. Propriedades das relações e relações de equivalência

3.1 Propriedades das relações

Ao estudar relações, podemos identificar propriedades relevantes. Vejamos a seguir a definição de algumas propriedades de relações. Em todas as definições, consideramos R uma relação definida sobre um conjunto A.

Se um par ordenado (x,y) pertence a uma relação R, escreve-se xRy (x se relaciona com y por meio da relação R).

Assimile

Definição (reflexiva): relações R para as quais para todo $x \in A$ vale que xRx são denominadas relações reflexivas.

Na definição a seguir, o símbolo $x \sim Ry$ significa que x não se relaciona com y pela relação R. A seguir, apresentamos a definição de relação simétrica.

Assimile

Definição (simétrica): sejam $x, y \in A$. Se xRy, então, yRx. Dizemos que R é uma relação simétrica.

Por fim, vejamos a definição de relação transitiva.

Assimile

Definição (transitiva): sejam $x, y, z \in A$. Se xRy e yRz, então xRz. Dizemos que R é uma relação transitiva.

Apresentamos nos exemplos a seguir, as propriedades da relação de igualdade entre números reais e da relação maior ou igual entre números reais.

Exemplificando

Exemplo 1:

Considere a relação de igualdade entre números reais, representada pelo símbolo $=$.

Todo número real é igual a ele mesmo: $x = x$. Assim, a relação de igualdade, definida sobre os números reais, é um exemplo de relação reflexiva.

Também vale para todo número real que se $x = y$, então, $y = x$. Ou seja: a relação de igualdade entre números reais é uma relação simétrica.

Se um número real x é igual a um número real y, temos que $x = y$. Se o número real y é igual ao número real z, temos $y = z$. Então, vale que o número x é igual ao número z: $x = z$. Portanto, a relação de igualdade entre números reais é transitiva.

Exemplo 2:

Considere agora a relação maior ou igual, definida sobre os números reais. Para representá-la usa-se o símbolo $\geq$.

Temos que $x \geq y$ não implica em $y \geq x$. Assim, a relação $\geq$ não é simétrica.

A relação $\geq$ é reflexiva: para qualquer número real vale que $x \geq x$.

A relação $\geq$ é transitiva, pois se $x \geq y$ e $y \geq z$, então vale que $x \geq z$.

Dizemos que um número natural divide outro número natural se o resto da divisão for zero. Pode-se definir a relação | (divide) sobre o conjunto dos números naturais. Considere os números naturais a e b. Temos que $a \mid b$ não implica que $b \mid a$, ou seja, a relação divide, definida sobre os números naturais, não é simétrica.

Reflita

As relações $>$ e $<$ definidas sobre o conjunto dos números reais não são simétricas. Por quê?

3.2 Relações de equivalência

Considere R uma relação definida em um conjunto A.

Assimile

Definição: de acordo com Schneirman (2003, p. 84), "dizemos que R é uma relação de equivalência se R é reflexiva, simétrica e transitiva".

Vejamos exemplos de relações de equivalência.

Exemplo 1: considere a relação de semelhança entre triângulos. O triângulo ABC é semelhante ao próprio triângulo ABC. Portanto, a relação de semelhança entre triângulos é reflexiva. Se um triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF, então, o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC. Assim, a semelhança de triângulos é simétrica. Por último, se o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF e o triângulo DEF é semelhante ao triângulo GHI, então, o triângulo ABC é semelhante ao triângulo GHI. Portanto, a relação de semelhança entre triângulos é transitiva. Logo, como a

relação de semelhança de triângulo é reflexiva, simétrica e transitiva, é uma relação de equivalência.

Exemplo 2: a relação denominada de congruência módulo n é muito importante na Teoria dos Números. Considere n um número inteiro positivo e os inteiros a e b. Os inteiros a e b são denominados congruentes módulo n se $n \mid (a-b)$. Representa-se que a é congruente a b módulo n por $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$. Podemos entender a relação de congruência observando que a diferença $a-b$ é um múltiplo de n.

Assim, $2 \equiv 14(\mathrm{mod}\, 6)$, pois $2-14=-12$ é múltiplo de 6. Já $19 \not\equiv 10(\mathrm{mod}\, 2)$, pois a diferença $19-10=9$ não é múltiplo de 2.

A relação de congruência módulo n é uma relação de equivalência, pois é reflexiva, simétrica e transitiva.

Reflita

A relação de congruência módulo n é simétrica?

4. Relações inversas

Considere R uma relação binária de X em Y. Considere o conjunto $R^{-1}=\{(y,x) \in Y \times X \mid (y,x) \in R\}$. Temos que o conjunto R^{-1} é subconjunto de $Y \times X$. Logo, R^{-1} é uma relação binária de Y em X. Esta relação recebe o nome de relação inversa de R.

Exemplificando

Sejam os conjuntos $X=\{5,7,9\}$ e $Y=\{6,8,10,12\}$. Considere a relação $R=\{(x,y) \in X \times Y \mid y=x+3\}$.

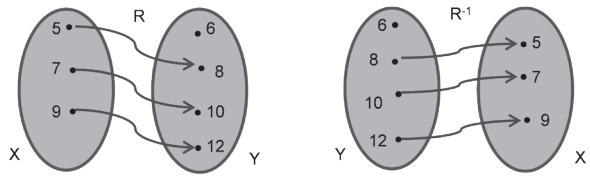
Temos que $R=\{(5,8),(7,10),(9,12)\}$.

Então, $R^{-1}=\{(8,5),(10,7),(12,9)\}$.

Podemos usar os diagramas em flechas para representar relações inversas.

Considere a relação do exemplo anterior. Veja na Figura 3.38 a representação de R e R^{-1}.

Figura 3.38 | Representação da relação inversa R^{-1}



Fonte: elaborada pelo autor.

Para as relações inversas valem as seguintes propriedades:

i) O domínio da relação R^{-1} é igual à imagem da relação R. Em símbolos, escrevemos que: $Dom\left(R^{-1}\right) = \mathrm{Im}(R)$.

ii) A imagem da relação R^{-1} é igual ao domínio da relação R, que pode ser escrita em símbolos como: $\mathrm{Im}\left(R^{-1}\right) = Dom(R)$.

iii) A inversa da relação inversa R^{-1} é a própria relação R. Em símbolos: $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

Pesquise mais

Veja mais sobre o assunto dessa seção em:

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Matemática discreta**: Coleção Schaum. 3. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788565837781/cfi/32!/4/4@0.00:0.00>. Acesso em: 24 fev. 2017.

Sem medo de errar

Vamos retomar o problema proposto no item Diálogo aberto. Você deve relacionar os dados de investimento em saneamento básico e os de consultas com diagnóstico de doenças relacionadas ao saneamento básico. Tais dados estão armazenados nos Quadros 3.1 e 3.2.

Em primeiro lugar, veja que temos duas relações explícitas:

Valores em reais direcionados ao saneamento básico, por pessoa, por ano: R = {(2009, 100), (2010, 100), (2011, 200), (2012, 300), (2013, 400), (2014, 500), (2015, 600)}.

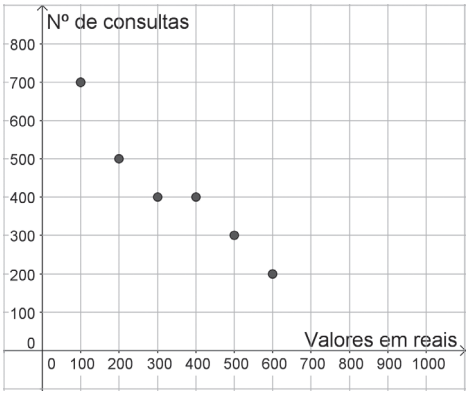
Número de consultas registradas mensalmente nos postos de saúde com diagnóstico de doenças relacionadas ao saneamento básico: S = {(2010, 700), (2011, 700), (2012, 500), (2013, 400), (2014, 400), (2015, 300), (2016, 200)}.

Veja, contudo, que não faz sentido relacionarmos os dados de R e S fazendo a correspondência direta dos anos de cada ocorrência, pois, como destacou o médico do município, os resultados na saúde ocorrem no ano seguinte ao investimento em saneamento. Logo, faz mais sentido relacionar: o valor gasto com saneamento do ano de 2009 com o número de consultas registradas em 2010; o valor gasto com saneamento do ano de 2010 com o número de consultas registradas em 2011; e assim por diante. Com isso, podemos estabelecer a relação T como segue:

Valores em reais direcionados ao saneamento básico, por pessoa, por ano, e o número de consultas registradas mensalmente nos postos de saúde com diagnóstico de doenças relacionadas ao saneamento básico: T = {(100, 700), (100, 700), (200, 500), (300, 400), (400, 400), (500, 300), (600, 200)}.

Como você aprendeu nesta seção, realizamos a representação gráfica dessa relação em um plano cartesiano, incluindo no eixo horizontal os primeiros valores dos pares ordenados e, no eixo vertical, os segundos valores dos pares ordenados, conforme Figura 3.39.

Figura 3.39 | Representação gráfica da relação *T*



Fonte: elaborado pelo autor.

Você pode incluir em seu relatório, que será endereçado à prefeitura, que há, visivelmente, uma tendência de queda no número de consultas conforme o investimento em saneamento aumenta, indicando que a saúde da população aumentou.

Para incrementar o relatório, você pode, por exemplo, calcular os percentuais de redução do número de consultas ano a ano, partindo de 2011, visto que não é possível obter o percentual de 2010, uma vez que os dados fornecidos não apresentam as quantidades de consultas de 2009. Para determinar os percentuais, considere x o número de consultas do ano ao qual se deseja calcular, w o número de consultas do ano anterior e y o percentual de redução no número de consultas. Temos por regra de três:

Percentual (%)		Número de consultas
100	----------	w
y	----------	x−w

Realizando a multiplicação cruzada, temos:

$$y \cdot w = 100 \cdot (x - w) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{100 \cdot (x - w)}{w}.$$

Agora que explicitamos a forma de relacionar o número de consultas (e, consequentemente, o ano) aos percentuais de redução, podemos calculá-los:

Quadro 3.3 | Ano e redução percentual do número de consultas com relação ao ano anterior

Ano	Nº de consultas	Percentual de redução
2010	700	-
2011	700	$y = \frac{100 \cdot (700 - 700)}{700} = \frac{100 \cdot 0}{700} \approx 00{,}00$
2012	500	$y = \frac{100 \cdot (500 - 700)}{700} = \frac{100 \cdot (-200)}{700} \approx -28{,}57$
2013	400	$y = \frac{100 \cdot (400 - 500)}{500} = \frac{100 \cdot (-100)}{500} \approx -20{,}00$
2014	400	$y = \frac{100 \cdot (400 - 400)}{400} = \frac{100 \cdot 0}{400} \approx 00{,}00$
2015	300	$y = \frac{100 \cdot (300 - 400)}{400} = \frac{100 \cdot (-100)}{400} \approx -25{,}00$
2016	200	$y = \frac{100 \cdot (200 - 300)}{300} = \frac{100 \cdot (-100)}{300} \approx -33{,}33$

Fonte: elaborado pelo autor.

Com esses dados, já é possível compor parte do relatório que lhe foi solicitado, mas essa não é a única maneira de relacionar os dados fornecidos. Quais outras formas você considera que seriam interessantes?

Avançando na prática

Exemplos de relações e linhas de ônibus

Descrição da situação-problema

Considere a relação entre pares de municípios e as linhas de ônibus que relacionam tais municípios.

Considere o conjunto M de municípios: M = {Rio de Janeiro (RJ), São Paulo (SP), Belo Horizonte (MG), Rio Branco (AC), Londrina (PR), Feira de Santana (BA)}. Suponha que existam linhas de ônibus que liguem Rio de Janeiro aos municípios de São Paulo, Belo Horizonte e Feira de Santana; linhas de ônibus ligando São Paulo a Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Rio Branco, Londrina e Feira de Santana; linhas de ônibus ligando Belo Horizonte a Rio de Janeiro, São Paulo e Londrina;

linhas de ônibus ligando Rio Branco a São Paulo; linhas de ônibus ligando Londrina a São Paulo e linhas de ônibus ligando Feira de Santana a Rio de Janeiro e São Paulo.

Pergunta-se:

Qual é o conjunto R da relação apresentada anteriormente?

Qual é o significado de afirmar que esta relação entre os municípios listado seja uma relação reflexiva? Você acha que chamaria a atenção se esta relação não fosse reflexiva?

Como podemos interpretar o significado desta relação ser simétrica?

Esta relação é transitiva?

Resolução da situação-problema

Vamos escrever o conjunto R. Para facilitar nossa escrita, vamos representar Rio de Janeiro por RJ, São Paulo por SP, Belo Horizonte por BH, Rio Branco por RB, Londrina por LD, Feira de Santana por FS.

O conjunto M fica: M={RJ,SP,MG,RB,LD,FS}. A relação será a seguinte: R = {(RJ, SP), (RJ, BH), (RJ, FS), (SP, RJ), (SP, BH), (SP, RB), (SP, LD), (SP, FS), (BH, RJ), (BH, SP), (BH, LD), (RB, SP), (LD, SP), (FS, RJ), (FS, SP)}.

Listamos todos os pares de cidades ligados por linhas de ônibus.

Esta relação não é reflexiva, pois não existe linha de ônibus ligando um município a ele mesmo.

Não existe nenhum par do tipo (RJ,RJ) ou (FS,FS). Observe que, para este exemplo, não faz nenhum sentido que esta relação seja reflexiva.

Esta relação é simétrica, pois se existir uma linha de ônibus ligando o município x ao município y, terá de existir a linha que faz a volta: liga o município y ao município x. Não faria nenhum sentido prático se existissem apenas linhas de ônibus "de ida", não é verdade?

Por fim, a relação não é transitiva: não é por que existem linhas de ônibus ligando um município x a um município y, e que existem linhas que liguem o município y ao município z, que podemos assegurar que há linhas de ônibus ligando o município x ao município z. Contudo, isso não impede que o usuário faça uma viagem de x a z, dado que ele pode fazer uma conexão em y.

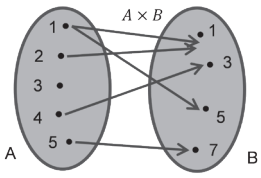
Faça valer a pena

1. Uma relação $R: A \to B$ é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Podemos representar uma relação utilizando um diagrama de flechas ligando os conjuntos A e B, ou no plano cartesiano, associando os elementos do conjunto A ao eixo x e os elementos do conjunto B ao eixo y.

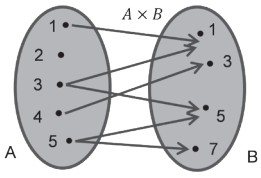
Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{1,3,5,7\}$.

A representação utilizando o diagrama de flechas para a relação $R = \{(1,1),(2,3),(3,1),(4,5)\}$ é aquela apresentada na alternativa:

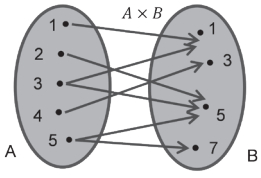
a)



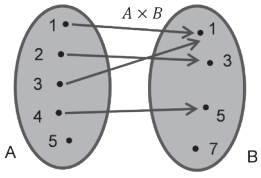
b)



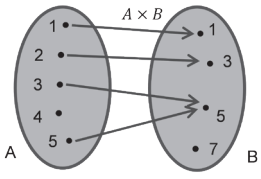
c)



d)



e)



2. Seja R uma relação binária de X em Y. O conjunto $R^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (y,x) \in R\}$ é subconjunto de $Y \times X$. Assim, R^{-1} é uma relação binária de Y em X. Esta relação recebe o nome de relação inversa de R.

Considere a relações R_1 e R_2 definidas por: $R_1 = \{(2,3),(3,5),(4,6),(7,9)\}$ e $R_2 = \{(x,y) \mid x \in [1,5], y \in [3,15], y = 3x\}$.

A alternativa que apresenta as relações inversas R_1^{-1} e R_2^{-1} é:

a) $R_1^{-1} = \{(2,3),(3,5),(4,6),(7,9)\}$ e $R_2^{-1} = \{(x,y) \mid x \in [3,15], y \in [1,5], y = 3x\}$.

b) $R_1^{-1} = \{(3,2),(5,3),(6,4),(9,7)\}$ e $R_2^{-1} = \{(x,y) \mid x \in [1,5], y \in [3,15], y = x + 3\}$.

c) $R_1^{-1} = \{(2,2),(3,3),(4,4),(7,7)\}$ e $R_2^{-1} = \{(x,y) \mid x \in [3,15], y \in [1,5], y = x - 3\}$.

d) $R_1^{-1} = \{(3,2),(5,3),(6,4),(9,7)\}$ e $R_2^{-1} = \{(x,y) \mid x \in [3,15], y \in [1,5], y = \frac{x}{3}\}$.

e) $R_1^{-1} = \{(3,4),(4,6),(5,7),(8,10)\}$ e $R_2^{-1} = \{(x,y) \mid x \in [1,5], y \in [3,15], y = \frac{x}{3}\}$.

3. Lembremos a definição de domínio e imagem de uma relação:

O domínio de uma relação $R: X \to Y$ é o conjunto de todos os elementos de X para os quais existe associação com ao menos um elemento do conjunto Y.

A imagem de uma relação $R: X \to Y$ é o conjunto de todos os elementos de Y que são imagens de ao menos um elemento do conjunto X.

Considere $X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ e $Y = \{3,4,5,6,7,8,9\}$ e a relação $R = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = 2x\}$.

O domínio e a imagem da relação R são:

a) $D(R) = \{4,5,6\}$ e $\text{Im}(R) = \{5,6,7\}$.

b) $D(R) = \{2,4,6\}$ e $\text{Im}(R) = \{5,7,9\}$.

c) $D(R) = \{0,1\}$ e $\text{Im}(R) = \{3,5,7\}$.

d) $D(R) = \{0,1,2,3,4\}$ e $\text{Im}(R) = \{3,4,5,6,7,8\}$.

e) $D(R) = \{2,3,4\}$ e $\text{Im}(R) = \{4,6,8\}$.

Referências

CASTRUCCI, Benedito. **Elementos de Teoria dos Conjuntos**. São Paulo: Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (G.E.E.M.), 1980, 192 p.

FACCHINI, Walter. **Matemática**. São Paulo: Editora Saraiva, 1996, 624 p.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 6. ed. São Paulo: Editora Atual, 1985, 333 p, v.1.

MACHADO, Nilson José. **Matemática por assunto**: volume 1 lógica, conjuntos e funções. São Paulo: Scipione, 1988. 240 p.

MORAIS, José Luiz de. **Matemática e lógica para concursos**. Editora Saraiva: São Paulo, 2012, 544 p.

SCHEINERMAN, Edward R. **Matemática discreta**: uma introdução. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003, 532 p.

Funções Elementares

Convite ao estudo

Esta é a quarta e última unidade da disciplina Elementos de Matemática.

Nas unidades anteriores estudamos os princípios da lógica matemática, proposições, conectivos lógicos, elementos de argumentação, silogismos e técnicas dedutivas diretas e indiretas. Também estudamos o Princípio da Indução Finita, o Binômio de Newton, noções de Teoria dos Conjuntos, conjuntos numéricos e relações, relações inversas e relações de equivalência.

Com tais habilidades e competências já desenvolvidas, prosseguiremos nosso estudo dos Elementos da Matemática dando continuidade com o estudo de funções: veremos a definição de função, o que é domínio, contradomínio, imagem e gráfico de uma função; conheceremos as funções constante, linear, afim, quadrática, polinomial e racional, zeros e extremos de funções; fechando a unidade com composição de funções, injetividade, sobrejetividade, bijetividade de funções e funções inversas.

Vamos conhecer qual será o contexto no qual você estará inserido nesta unidade?

Em busca de novos desafios profissionais, você solicitou transferência da empresa de pesquisa de opinião para outra empresa do mesmo grupo. Nesta nova companhia, você será responsável por desenvolver e analisar modelos matemáticos que relacionam duas variáveis numéricas e, em cada seção, escrever relatórios gerenciais sucintos explicando como utilizar tais modelos.

Com o propósito de permitir avaliações de qualidade de tais modelos matemáticos, estudaremos nesta unidade o tópico funções. Na primeira

seção desta unidade veremos o que é uma função matemática, o domínio, contradomínio, imagem e gráfico de uma função e conheceremos as funções constante, linear e afim. Você será convidado a avaliar matematicamente um problema relacionado ao custeio de produção.

Na Seção 4.2, você deverá identificar valores para os quais funções polinomiais e racionais assumem valores máximos e mínimos. Qual é a importância desse estudo na área de inteligência de mercado? Tais valores extremos permitem a modelagem e a investigação matemática do lucro máximo ou do custo mínimo?

Na Seção 4.3, você prestará consultoria a uma empresa especializada em pintura de asas de aviões. Para esse desafio, precisará entender conceitos de composição de funções e função inversa.

Esteja ciente de que nas suas atividades de consultoria, a empresa que você está trabalhando requer que seja gerado um relatório com a análise de cada problema tratado, incluindo nele a solução obtida.

Vamos estudar funções?

Seção 4.1

Funções

Diálogo aberto

As funções matemáticas são utilizadas nas mais diversas áreas do conhecimento: biólogos utilizam funções trigonométricas para representar comportamentos periódicos ou funções exponenciais para representar o crescimento de colônias de bactérias. Economistas utilizam funções para representar crescimento ou decrescimento na economia. Engenheiros utilizam funções para representar pressões sobre pilares de pontes ou viadutos ou tensões sobre a fuselagem de um avião. No nosso dia a dia, também utilizamos funções, muitas vezes até sem ter uma percepção clara disso. A forma de se calcular a conta de água da sua casa ao final do mês (ou da conta de luz) pode ser representada por uma função. Uma simples corrida de táxi também pode ser representada por uma função.

Na unidade anterior, você estava atuando em uma empresa de pesquisa de opinião que faz parte de um conglomerado. Uma das empresas do grupo presta serviços de consultoria na área de métodos quantitativos para gestão de negócios e você foi transferido para essa empresa. No portfólio dela constam o desenvolvimento de modelos matemáticos para previsão de demanda de vendas em shoppings centers, modelos matemáticos para previsão de usuários dos futuros aeroportos no Brasil, Equador, Peru, Nigéria e Angola e modelos matemáticos para avaliação de sistemas tributários.

A empresa que você está trabalhando agora está avaliando vários modelos de custo de produção industrial, sendo que estes supõem uma combinação de custos fixos e custos variáveis. Considere que você foi convidado a participar da equipe que produzirá o relatório de avaliação desses modelos de custos de produção.

Em uma indústria de produtos eletrônicos, para a qual vocês estão dando consultoria, apurou-se, sob determinadas condições de produção, um modelo de custos no qual o custo de produção por peça é de R$ 15,20 fixos, mais um custo variável de R$ 0,50 por peça produzida. Denominou-se esse modelo de produção de Modelo A.

Sabe-se que sob um outro processo industrial de fabricação já estabelecido nesse mercado, o custo fixo por produção de peça é de R$ 1,07 e o custo variável é de R$ 0,57. Esta outra condição de produção foi denominada de Modelo B.

Você e sua equipe deverão responder no relatório às questões:

a) Quais são os modelos matemáticos dessas duas situações de produção?

b) Quais são os gráficos dessas duas funções?

c) É possível identificar se para níveis bastante elevados de produção é mais interessante trabalhar na condição do Modelo A ou do Modelo B de produção? Qual é a recomendação que a equipe de modelagem matemática apresenta para essa indústria que contratou os seus serviços de consultoria matemática?

Não pode faltar

As funções matemáticas são aplicadas em diversas áreas, como Economia, Física, Química, Biologia, Geologia e até mesmo na datação por Carbono-14 de obras artísticas. Essa enorme abrangência evidencia a relevância desse tema para a Matemática e outras áreas do conhecimento, o que justifica o estudo detalhado dessa seção. Veja na sequência a definição de função, domínio, imagem e gráfico, entre outros detalhes sobre o assunto.

1. Definição de função

Suponha um terreno com largura de x metros e comprimento de 30 metros. A área (A) desse terreno depende da largura (x) e pode ser representada pela expressão $\text{área} = A(x) = 30 \cdot x \text{ m}^2$. Cada valor x de largura corresponde a um único valor de área. Não temos dois valores de área associado a um valor x de largura. A partir deste exemplo, apresentamos a definição de função:

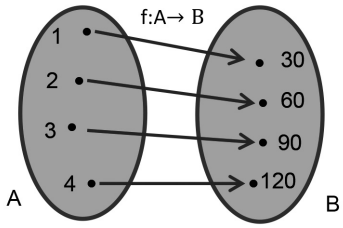
Assimile

Considere A e B dois conjuntos não vazios. Uma função é uma relação de A para B tal que para todo elemento de A associa-se um único elemento de B.

Note, por essa definição, que toda função é uma relação, mas observe que nem toda relação é uma função.

Veja na Figura 4.1 o diagrama de flechas com alguns valores de x para a função $A(x) = 30 \cdot x$.

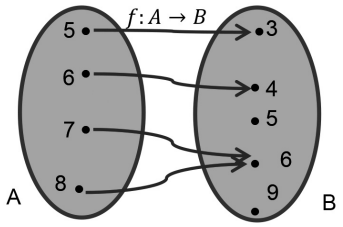
Figura 4.1 | Diagrama de flechas para a função $A(x) = 30 \cdot x$, valores escolhidos para x



Fonte: elaborada pelo autor.

Nem todos os elementos do conjunto de chegada B precisam estar associados a algum elemento do conjunto de partida A para que a relação R seja função. Ilustramos essa observação na Figura 4.2.

Função 4.2 | Exemplo de uma relação $R : A \to B$ que é função

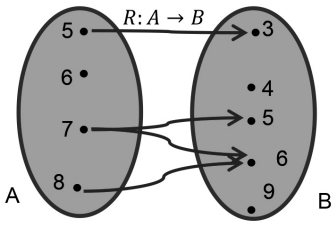


Fonte: elaborada pelo autor.

Para a Figura 4.2, temos que $f = \{(5,3),(6,4),(7,6),(8,9)\}$. Destacamos que como f é um tipo especial de relação, f é um conjunto de pares ordenados.

Destacamos que nem toda relação é função. Vejamos diagramas de flechas que são exemplos de relações que não são funções. Na Figura 4.3, a relação $R : A \to B$ não é função, pois existe ao menos um elemento do domínio para o qual não está associado nenhum elemento da imagem. R é relação de A em B, mas não é função, pois temos elementos de A para os quais não saem flechas.

Figura 4.3 | Nem toda relação é função, exemplo 1

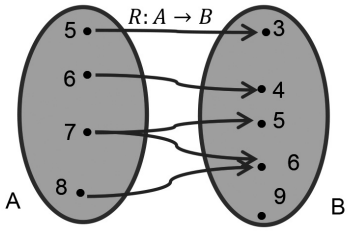


Fonte: elaborada pelo autor.

Já na Figura 4.4, vemos um exemplo de relação que não é função, pois temos mais de um elemento da imagem associado a um elemento do domínio.

Na Figura 4.4, R é a relação de A em B, mas não é função, pois temos mais de uma flecha saindo de ao menos um elemento de A.

Figura 4.4 | Nem toda relação é função, exemplo 2



Fonte: elaborada pelo autor.

Notação de função

Lembre-se: uma função é uma relação de um conjunto A em um conjunto B tal que para todo elemento $x \in A$ existe um único elemento $y \in B \,|\, (x,y) \in f$. Para denotar uma função f é usual escrever $y = f(x)$, com $x \in D(f)$ e $y \in \text{Im}(f)$. Assim, a função f é caracterizada pelo conjunto $f = \{(x,y), x \in D(f), y \in \text{Im}(f), y = f(x)\}$. Outra forma de se denotar uma função é

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Para caracterizar uma função não basta conhecer a lei de formação. Uma função só estará caracterizada ao definir seu domínio, contradomínio e imagem. É o que estudaremos na sequência.

2. Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Seja uma função $f : A \to B$.

Assimile

O domínio de uma função $f : A \to B$ é o conjunto dos primeiros elementos dos pares ordenados $(x, y) \in f$, para os quais existe um elemento $y \in B$.

Uma função só está definida quando apresentamos sua lei de formação e seu domínio.

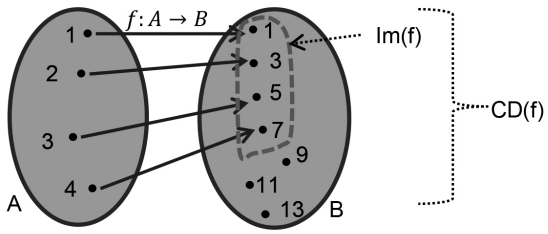
Apresentamos a definição do conjunto contradomínio de uma função a seguir.

Assimile

O conjunto contradomínio da função $f : A \to B$ é o conjunto dos elementos $y \in B$, que podem ser ou não imagem de algum elemento $x \in A$ pela função f.

Representa-se o conjunto contradomínio de f por $CD(f)$. O conjunto contradomínio de uma função é o conjunto de chegada da função $f : A \to B$. Observemos que nem todos os elementos do contradomínio estão associados a algum elemento x do conjunto domínio da função. Um exemplo disso está apresentado no diagrama de flechas na Figura 4.5. Neste exemplo, os valores 9, 11 e 13 pertencem ao contradomínio, mas não pertencem à imagem da função f.

Figura 4.5 | Nem sempre todos os elementos do contradomínio de f pertencem ao conjunto imagem de f



Fonte: elaborada pelo autor.

Aqueles que estão associados constituem o conjunto imagem de f. Vejamos, na sequência, a definição de conjunto imagem.

Assimile

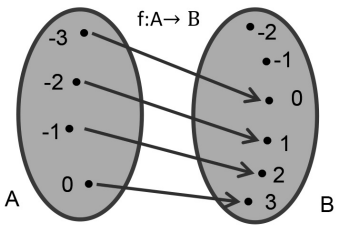
O conjunto imagem de função $f : A \to B$ é o conjunto dos elementos $y \in B$, de modo que existe $x \in A$ para os quais o par ordenado $(x, y) \in f$.

Assim, o conjunto imagem é sempre um subconjunto do contradomínio: $\text{Im}(f) \subset CD(f)$.

Exemplos:

a) Considere os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e a função $f(x): A \to B$ definida por $f(x) = x + 3$. O conjunto f é $f = \{(-3, 0), (-2, 1), (-1, 2), (0, 3)\}$. O conjunto domínio é $D(f) = \{-3, -2, -1, 0\}$, o conjunto contradomínio é $CD(f) = B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e o conjunto imagem de f é $\text{Im}(f) = \{0, 1, 2, 3\} \subset CD(f)$. O diagrama de flechas para essa função é dado pela Figura 4.6.

Figura 4.6 | Diagrama de flechas para a função $f(x): A \to B$, $y = f(x) = x + 3$



Fonte: elaborada pelo autor.

b) Considere a função $y = f(x) = 3x + 8$. Como não há restrição de nenhum tipo para se multiplicar um número real x por 3 e, em seguida, adicionar 8, o domínio dessa função é todo o conjunto dos números reais.

Como qualquer elemento do conjunto dos números reais pode ser obtido por meio da função $y = f(x) = 3x + 8$, o conjunto imagem, nesse caso, é todo o conjunto dos números reais $(\mathbb{R})$.

c) Considere a função $y = f(x) = \sqrt{x}$: não é possível determinar a raiz quadrada de números reais negativos. Assim, o domínio dessa função tem de ser o conjunto $\mathbb{R}_+$ ou um subconjunto dele.

Com essa função não é possível obtermos valores negativos. Assim, o conjunto imagem é $\mathbb{R}_+$.

d) Considere a função $y = f(x) = \frac{1}{x}$. Podemos efetuar a divisão de 1 por qualquer número real, exceto o zero. Assim, o domínio dessa função é $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

O resultado da função $y = f(x) = \frac{1}{x}$ será qualquer número real positivo para $x > 0$.

O resultado da função $y = f(x) = \frac{1}{x}$ será qualquer número real negativo para $x < 0$. O único valor que nunca será atingido pela função $y = f(x) = \frac{1}{x}$ é o zero. Assim, o conjunto imagem é $\mathbb{R} - \{0\}$.

Reflita

Considere a função $f(x) = \sqrt{x-3}$. Como podemos usar uma calculadora (ou um computador) para investigar os conjuntos domínio e imagem dessa função? Qual é a mensagem que a calculadora informa se tentarmos calcular $f(1)$?

Após termos estudado o domínio, contradomínio e imagem de uma função nesta subseção, na próxima veremos como representar graficamente uma função no plano cartesiano. Também veremos como identificar o domínio e a imagem de uma função a partir de seu gráfico.

3. Gráfico de uma função

De forma similar ao que podemos fazer com as relações, também podemos representar as funções em gráficos no plano cartesiano. O procedimento mais elementar (mas por vezes mais trabalhoso) para se construir o gráfico de uma função é construir uma tabela associando os valores x do domínio da função aos valores y do conjunto imagem da função. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo: considere os conjuntos $A = \{2,3,4,5\}$ e $B = \{0,1,2,3\}$ e a função $f : A \to B$ tal que $y = f(x) = x - 2$. Vamos construir a tabela que associa elementos $x \in A$ a elementos $y = f(x) = x - 2 \in B >$.

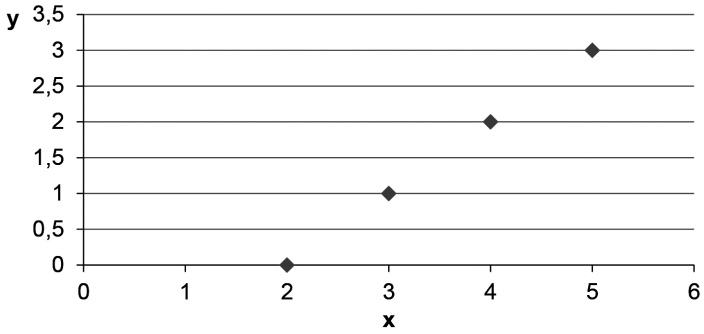
Quadro 4.1 | Tabela de valores $y = f(x) = x - 2$

x	$y = f(x) = x - 2$
2	$y = f(2) = 2 - 2 = 0$
3	$y = f(3) = 3 - 2 = 1$
4	$y = f(4) = 4 - 2 = 2$
5	$y = f(5) = 5 - 2 = 3$

Fonte: elaborada pelo autor.

Na figura 4.7, apresentamos os pontos (x, y) no plano cartesiano.

Figura 4.7 | Gráfico de $y = f(x) = x - 2$



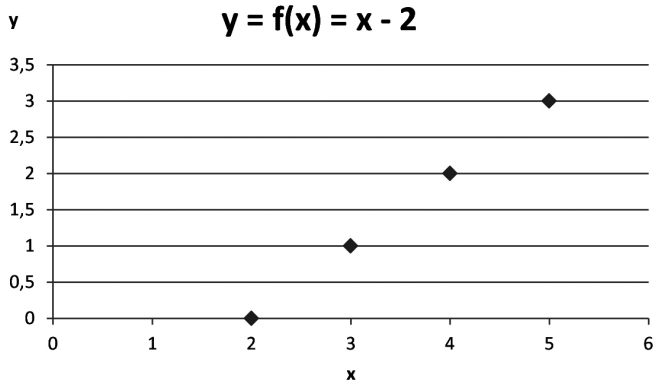
Fonte: elaborada pelo autor.

Por que não unimos os pontos nesse gráfico? Por que não traçamos uma reta no gráfico? A resposta para isto está relacionada aos conjuntos de partida e chegada que foram definidos para essa função: os conjuntos $A = \{2,3,4,5\}$ e $B = \{0,1,2,3\}$.

Observe que o conjunto de partida contém apenas os pontos do conjunto $A = \{2,3,4,5\}$ enquanto o conjunto de chegada contém apenas os pontos do conjunto $B = \{0,1,2,3\}$. No conjunto A, não temos nenhum valor entre 2 e 3 ou entre 3 e 4 nem entre o 4 e o 5. Esses valores simplesmente não existem no conjunto A. Assim, não temos flechas saindo de nenhum valor intermediário entre 2 e 3, 3 e 4 ou 4 e 5. Como só existem flechas saindo dos pontos 2, 3, 4 e 5, aparecerão no gráfico de f unicamente as associações (ou seja, as flechas) que existem. Não vão aparecer as flechas que não existem.

Agora, se os conjuntos de partida e de chegada são intervalos do conjunto dos números reais, então, nesse caso, teremos todos os valores intermediários entre os extremos do intervalo, neste caso, "ligamos os pontos". No exemplo anterior, se tivéssemos definido $A = [2,4]$ e $B = [0,3]$, nosso gráfico seria o apresentado na Figura 4.8.

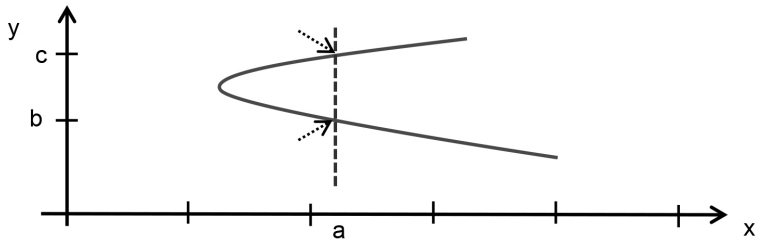
Figura 4.8 | Gráfico da função $y = f(x) = x - 2$



Fonte: elaborada pelo autor.

É possível identificar se uma relação $R : A \to B$ é uma função ou não a partir do gráfico. Lembremos que para que uma relação seja uma função não podemos ter mais de uma flecha saindo de cada elemento x do domínio. Se traçarmos retas verticais no gráfico de uma relação no plano cartesiano e essa reta vertical cruzar o gráfico em mais de um ponto, então, a relação não será função: na Figura 4.9, o elemento $a \in D(R)$ do domínio está associado a dois elementos da imagem: $b \in \mathrm{Im}(R)$ e $c \in \mathrm{Im}(R)$. Assim, a relação representada na Figura 4.9 não é uma função.

Figura 4.9 | Traçando retas verticais para identificar se uma relação é função



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Como são as funções matemáticas da sua conta de água ou de luz? Pesquise na internet como são cobradas essas contas de consumo e apresente seus gráficos para dados de uma residência hipotética.

Após estudarmos aspectos gerais de funções, iniciaremos o estudo de algumas famílias de funções: as funções constantes, as funções lineares e as funções afim.

4. Funções constante, linear e função afim

Nesta subseção, veremos três funções fundamentais para inúmeras aplicações. A função afim é, muitas vezes, o modelo matemático mais simples (e útil) em inúmeras situações práticas. Para ficar apenas em uma delas, lembremos da força de restauração linear de uma mola (conhecida como Lei de Hooke): $f(x) = -kx$ onde k é a constante da mola. Este é um exemplo de importância prática em inúmeras subáreas da Engenharia.

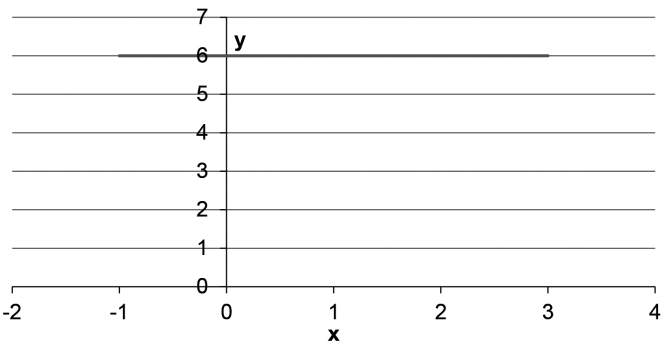
4.1 Função constante

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função constante se, para todo $x \in \mathbb{R}$, é associado sempre o mesmo número real c. Escrevemos: $f(x) = c$. O gráfico de uma função constante gera pontos alinhados horizontalmente, com $y = c$.

O domínio da função constante é o conjunto dos números reais. A imagem da função constante é $\text{Im}(f) = \{c\}$.

Exemplo 1: considere a função constante $f(x) = 6$. Na Figura 4.10, vemos o gráfico dessa função.

Figura 4.10 | Exemplo de função constante ($f(x) = 6$)



Fonte: elaborada pelo autor.

O domínio dessa função é o conjunto dos números reais e sua imagem é $Im(f) = \{6\}$.

4.2 Função linear

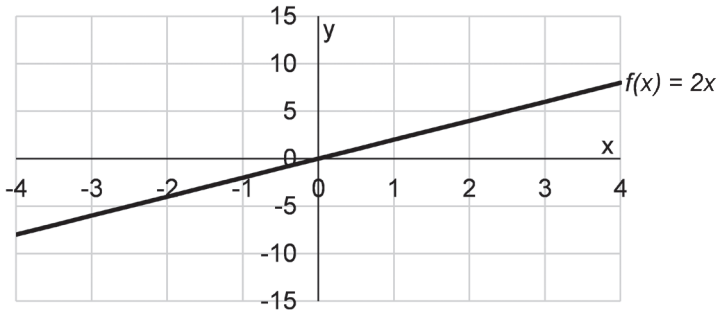
As funções lineares podem ser escritas como $f(x) = ax, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. O gráfico de qualquer função linear é uma reta. O coeficiente a recebe o nome de coeficiente angular e está associado com o ângulo de inclinação que essa reta faz com o eixo x.

Domínio e imagem

O domínio da função linear é o conjunto dos números reais ou um subconjunto dele, ou seja, não há restrição para os valores de x. A imagem função linear também poderá ser o conjunto dos números reais, mas isso dependerá do domínio escolhido.

Exemplo 1: seja a função linear $f(x) = 2x$. O gráfico dessa função está apresentado na Figura 4.11.

Figura 4.11 | Gráfico de $f(x) = 2x$

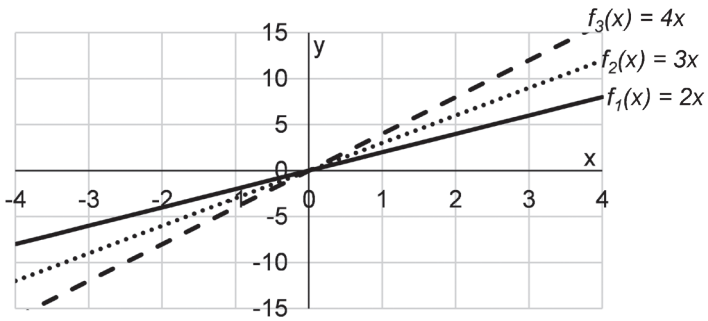


Fonte: elaborada pelo autor.

O sinal do coeficiente angular das funções lineares está associado ao comportamento da função linear: o coeficiente angular de uma função linear será positivo se, e somente se, a função for crescente; e o coeficiente angular será negativo se, e somente se, a função linear for decrescente. Observe os gráficos das Figuras 4.12 e 4.13 na sequência. Lembremos que na definição de função linear estamos supondo $a \neq 0$.

Exemplo 2: sejam as funções lineares $f_1(x) = 2x, f_2(x) = 3x, f_3(x) = 4x$. O gráfico dessas funções está apresentado na Figura 4.12. Observe que quanto maior o coeficiente angular mais rapidamente a função linear cresce (para valores positivos do coeficiente angular).

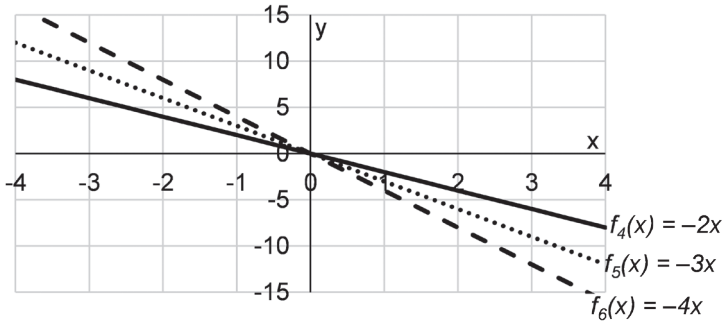
Figura 4.12 | O valor do coeficiente angular de uma função linear está associado com a taxa de crescimento da função por unidade de x



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplo 3: sejam as funções lineares $f_4(x) = -2x, f_5(x) = -3x, f_6(x) = -4x$. O gráfico dessas funções está apresentado na Figura 4.13. Se o coeficiente angular for negativo, o gráfico da função linear é decrescente e, quanto mais negativo, mais rapidamente a função decresce.

Figura 4.13 | O valor do coeficiente angular está associado à inclinação das funções lineares



Fonte: elaborada pelo autor.

4.3 Função afim

Uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é denominada de função afim se a cada x pertencente a $\mathbb{R}$ associa um elemento $y = f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. O gráfico da função afim é sempre uma reta.

Como exemplos de funções afim temos:

i) $f(x) = 5x - 3, a = 5$ e $b = -3$.

ii) $f(x) = 5 - 3x, a = -3$ e $b = 5$.

iii) $f(x) = 3{,}57x, a = 3{,}57$.

O coeficiente a da função afim (o valor numérico que multiplica a variável x) recebe o nome de coeficiente angular, e o coeficiente b (o valor numérico que não é multiplicado pela variável) recebe o nome de coeficiente linear, termo independente ou intercepto.

O coeficiente angular a da função afim está associado com o gráfico da função afim da seguinte forma:

Se $a > 0$, então, a função afim é crescente.

Se $a < 0$, então, a função afim é decrescente.

Já o coeficiente b indica a altura do ponto onde o gráfico intercepta o eixo y.

Se f for uma função afim com $b = 0$, então, f é da forma $f(x) = ax$. Ou seja: funções lineares são exemplos de funções afim com termo independente nulo.

Gráfico das funções afim

Teorema: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim se, e somente se, seu gráfico é uma reta.

Como o gráfico de funções afim é sempre uma reta, basta identificarmos dois pontos para traçar seu gráfico.

Exemplificando

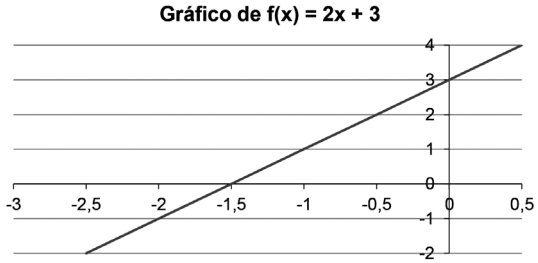
Exemplo 1: seja $f(x) = 2x + 3$.

Nesse caso, $a = 2$ e $b = 3$. Como o termo independente dessa função é $b = 3$, então, se $x_0 = 0$, $f(x_0) = 3$. Assim, o gráfico de f passa, no eixo y, pelo ponto $(0,3)$. Temos o primeiro ponto.

O segundo ponto é a raiz da equação $f(x) = 0$.

Fazemos $2x + 3 = 0$. Então, $x = -\frac{3}{2}$. Assim, se $x = -\frac{3}{2}, f(x) = 0$. O gráfico de f passa pelo ponto $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Figura 4.14 | Gráfico da função afim $f(x) = 2x + 3$



Fonte: elaborada pelo autor.

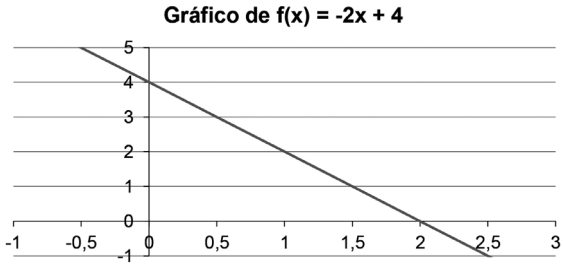
Exemplo 2: seja $f(x) = -2x + 4$.

Nesse caso, $a = -2$ e $b = 4$. Observe que agora $a < 0$. Como o termo independente dessa função é $b = 4$, se $x_0 = 0$, então, $f(x_0) = 4$. Assim, o gráfico de f passa, no eixo y, pelo ponto $(0,4)$.Temos o primeiro ponto.

O segundo ponto é a raiz da equação $f(x) = -2x + 4 = 0$.

Fazemos $-2x + 4 = 0$. Então, $x = \frac{(-4)}{(-2)} = 2$. Assim, se $x_0 = 2$, então, $f(x_0) = 0$. O gráfico de f passa pelo ponto $(2,0)$.

Figura 4.15 | Gráfico da função afim $f(x) = -2x + 4$



Fonte: elaborada pelo autor.

O termo independente b indica o valor no eixo y no qual o gráfico da função afim intercepta este eixo.

Domínio e imagem da função afim

O domínio de funções $f(x) = ax + b, a \text{ e } b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

A imagem de funções $f(x) = ax + b, a \text{ e } b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Pesquise mais

Para conhecer mais aplicações sobre funções lineares consulte

THOMAS, George B; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**: volume 1. 12. Ed. São Paulo: Pearson, 2012. Disponível em: <http://anhanguera.bv3.digitalpages.com.br/users/publications/9788581430867/pages/1>. Acesso em: 6 mar. 2017.

O primeiro capítulo desse livro trata de funções e aplicações.

Sem medo de errar

Recordemos os dois modelos de produção. Para o modelo A, temos: custo fixo de R$ 15,20 e custo variável de R$ 0,50/peça. No modelo B, temos custo fixo de R$ 1,07 e custo variável de R$ 0,57/peça.

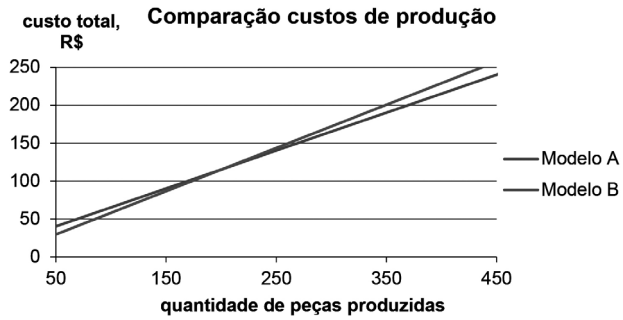
a) Inicialmente identificamos que para modelar matematicamente cada situação de produção precisamos usar uma função afim.

O custo fixo em cada modelo corresponde ao termo independente de uma função afim. Como no caso do modelo de produção A o custo é de R$ 0,50 para cada peça produzida, denotando por x a quantidade de peças produzidas, para determinar o custo variável devemos efetuar a multiplicação $0,5 \cdot x$. Para incluir o componente fixo do custo, devemos adicionar a este valor a quantia de R$ 15,20. Portanto, no caso do modelo A, a função custo de produção é: $f_A(x) = a_1x + b_1 = 0,5x + 15,2$.

No caso do modelo B, temos: $f_B(x) = a_2x + b_2 = 0,57x + 1,07$.

b) Os gráficos estão apresentados na figura 4.16 a seguir:

Figura 4.16 | Comparação custos de produção



Fonte: elaborada pelo autor.

Para responder à última questão podemos observar o gráfico anterior. Veja que, para uma quantidade de 150 peças produzidas, o modelo B apresenta custo total de produção menor do que o modelo A. Se a quantidade de peças produzidas for acima de 250, devemos adotar o modelo A de produção: este é o que apresenta menor custo total de produção nesta faixa de produção.

Na vida real, não podemos nos restringir apenas ao custo total de produção. Podemos ter um custo total de produção mais baixo, mas a proporção de peças produzidas com defeito pode ser bem elevada no modelo de menor custo.

Lembre-se de que você deverá produzir um relatório gerencial com suas conclusões para esse problema. Ao final das próximas seções, você também deverá produzir outros relatórios. Ao final desta unidade, você realizará a entrega de todos os relatórios.

Avançando na prática

Descrição da situação-problema

Você foi chamado por uma indústria de amortecedores de automóveis para construir o modelo matemático adequado para um determinado tipo de amortecedor produzido por eles.

A empresa que o contratou forneceu a seguinte tabela de dados:

Tabela 4.1 | Dados de deformação do amortecedor

Deformação (em cm)	Peso (em Newtons)
0,59	0,18
0,68	0,21
0,8	0,24
0,92	0,27
1,0	0,31
1,2	0,34

Fonte: elaborada pelo autor

A empresa que o contratou deseja saber: qual é o modelo matemático adequado para representar esse conjunto de dados?

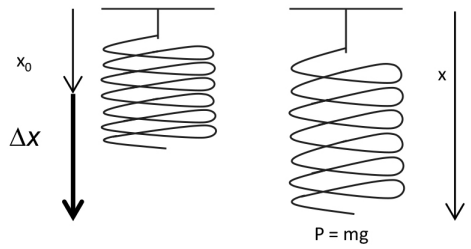
Como eles devem apresentar o resultado de seu trabalho para outras gerências dentro da empresa que não são especializadas em questões matemáticas, eles solicitaram que, se possível, você utilize informações gráficas para o auxiliar na justificativa do modelo adotado.

Resolução da situação-problema

Você se lembrou de que em um amortecedor a deformação é proporcional à força aplicada. Essa relação também vale para a Lei de Hooke, para molas. A lei de Hooke diz que se F for a força aplicada e Δx for o deslocamento associado, então, eles estão relacionados da seguinte forma: $F = -k\Delta x$, onde k é a constante da mola que representa o fator de proporcionalidade entre a força e a deformação.

No nosso caso, temos uma força peso $P = -F$, então, $-P = -k\Delta x$, ou seja, teremos $P = k\Delta x$. Na figura 4.17, temos a ilustração da deformação da mola.

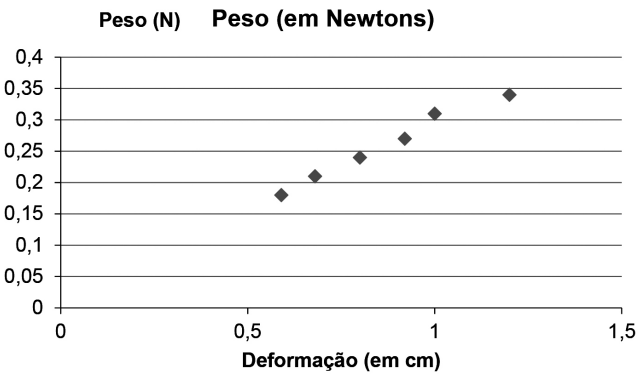
Figura 4.17 | Deformação da mola



Fonte: elaborada pelo autor.

Com os dados da Tabela 4.1, você construiu o seguinte diagrama de dispersão (Figura 4.18).

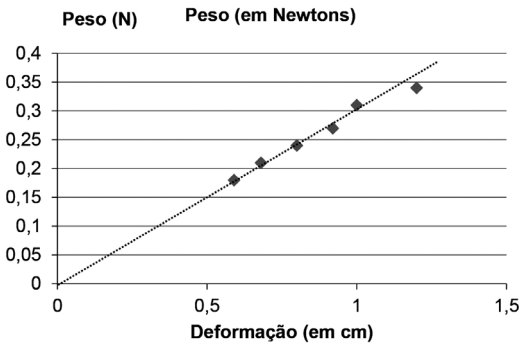
Figura 4.18 | Gráfico do peso em função da deformação



Fonte: elaborada pelo autor.

Esses dados parecem estar distribuídos praticamente alinhados. Efetuando o prolongamento dos dados até a origem, podemos perceber que temos, praticamente, uma reta passando pela origem. Isto sugere uma função linear para representar a relação entre o peso e a deformação: uma função do tipo $P = a \cdot \Delta x$. Assim, se for possível descobrir o valor de a (que é a constante k da mola), teremos construído o modelo para o amortecedor.

Figura 4.19 | Prolongamento dos pontos até a origem



Fonte: elaborada pelo autor.

Após especular sobre a natureza linear do conjunto de dados fornecidos, você buscou determinar o coeficiente angular da função $P = k\Delta x$. Você incluiu uma coluna nos dados fornecidos pela indústria de amortecedores, efetuando a divisão $k = \dfrac{P}{\Delta x}$. O resultado dos seus cálculos está na Tabela 4.2 (valores aproximados):

Tabela 4.2 | Resultados dos ensaios de deformação

Deformação (em cm)	Peso (em Newtons)	$k = \dfrac{P}{\Delta x}$
0,59	0,18	0,3050
0,68	0,21	0,3088
0,8	0,24	0,3000
0,92	0,27	0,2934
1,0	0,31	0,3100
1,2	0,34	0,2833

Fonte: elaborada pelo autor.

O valor médio de todos os valores de k foi $k_{médio} = 0,30011\,\text{N/cm}$.

Com esses resultados, você apresenta como constante da mola para seu cliente o valor $k = 0,300$ N/cm e o gráfico que você apresentará para seus clientes é o da Figura 4.19.

Conclusão: com os dados fornecidos pelo cliente, o modelo matemático para representar esse amortecedor foi $P = 0,3 \cdot \Delta x$.

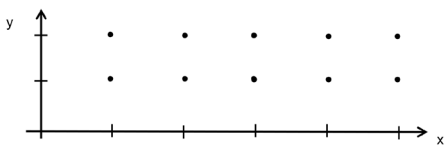
Faça valer a pena

1. Uma relação R de um conjunto A em um conjunto B é um subconjunto do produto cartesiano. Uma função f de um conjunto A em um conjunto B é uma relação em que, qualquer que seja o elemento do conjunto A, este elemento possui uma imagem associada no conjunto B e, para cada elemento do conjunto A, não existe mais do que um elemento associado no conjunto B. Assim, nem toda relação é função.

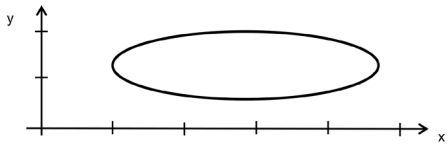
É possível representar relações e funções graficamente usando diagramas de flechas ou o plano cartesiano.

Lembrando-se da distinção entre relações e funções, assinale a alternativa que apresenta uma relação que é função.

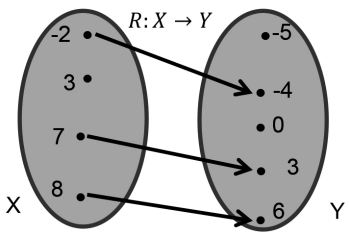
a)



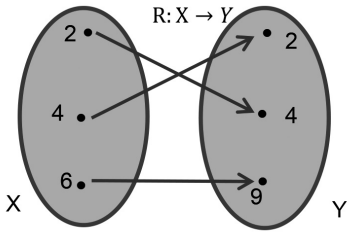
b)



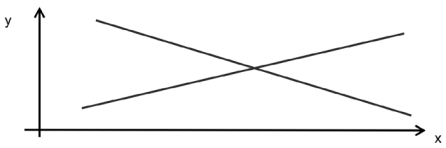
c)



d)



e)



2. O domínio de uma função $f : A \to B$ é o conjunto dos primeiros elementos dos pares ordenados $(x, y) \in f$ para os quais existe um elemento $y \in B$.

Já o conjunto imagem da função $f : A \to B$ é o conjunto dos elementos $y \in B$, tais que existe $x \in A$ para os quais o par ordenado $(x, y) \in f$.

Por fim, o conjunto contradomínio da função $f : A \to B$ é o conjunto dos elementos $y \in B$, tais que podem ser ou não imagem de algum elemento $x \in A$ pela função f.

Considere a função $f(x) = \dfrac{5x - 7}{x + 3}$. O domínio desta função pode ser:

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

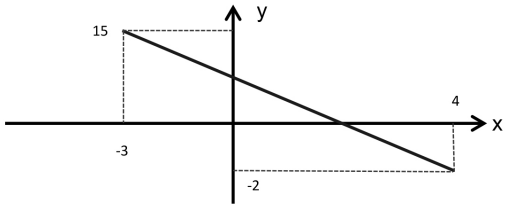
c) $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$.

d) $D(f) = \mathbb{R}$.

e) $D(f) = \mathbb{R}^*$.

3. O gráfico de uma função afim é sempre uma reta. Se temos o gráfico de uma função que seja uma reta é porque essa função é uma função afim. Uma estratégia para se obter a expressão de uma função afim é, a partir do gráfico, resolver o sistema de duas equações e duas incógnitas associadas ao gráfico.

Considere a função afim representada pelo gráfico.



Podemos escrever essa função como:

a) $f(x) = -\frac{3}{7}x + 4$.

b) $f(x) = -7x + 6$.

c) $f(x) = -4x + \frac{15}{7}$.

d) $f(x) = -\frac{17}{7}x + \frac{54}{7}$.

e) $f(x) = -\frac{3}{7}x + \frac{11}{7}$.

Seção 4.2

Zeros e extremos de uma função

Diálogo aberto

Você se lembra de que na seção anterior atuou como consultor matemático para uma indústria de produtos eletrônicos? A empresa aprovou seu trabalho e nesta seção você continuará atuando como consultor matemático para essa mesma empresa, modelando situações relacionadas à determinação do lucro máximo e custo mínimo.

Após estudos de seu processo de produção, a empresa estimou que a função $CustoTotal$ como função da quantidade de unidades vendidas é $CustoTotal(x) = 1000 + 4x$. O preço de venda de cada unidade está relacionado com a quantidade vendida pela função demanda $p = 700 - 5x$. A empresa contratou a consultoria em que você trabalha para responder às seguintes questões:

a) Qual é a quantidade de unidades que deve ser produzida para que se atinja o lucro máximo?

b) Qual é o valor do lucro máximo?

c) Para quais quantidades produzidas há prejuízo?

d) Se a produção aumentar das atuais 50 unidades para 100 unidades, teremos lucro? Qual é o percentual de aumento no lucro?

Você deverá produzir um relatório sintético respondendo a essas questões. Para isto, deveremos conhecer mais sobre zero (máximo e mínimo) das funções. É o que faremos nesta seção.

Não pode faltar

As funções quadráticas, polinomiais e racionais constituem uma das caixas de ferramentas para modelar matematicamente situações da vida real. Problemas de Matemática Financeira ou de custos médios são apenas alguns dos exemplos de tais aplicações.

1. Zero e extremos de função

Você já se perguntou como as empresas fazem para planejar como serão suas vendas nos próximos dois anos? Como elas fundamentam a tomada de decisão para ampliar uma fábrica ou instalar uma nova fábrica? Esta é uma das situações práticas em que as funções são bastante utilizadas.

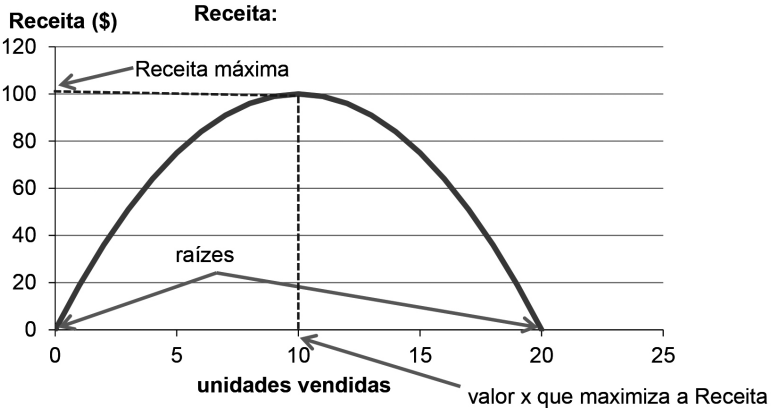
Vamos partir de um exemplo. Imagine que a demanda x (em unidades) por um certo produto esteja relacionada com o preço p do produto pela função $p = 20 - x$ e que o custo de produção seja modelado pela função $C(x) = 30 + x$.

A função Receita R(x) é obtida pelo produto entre o preço de venda unitário e a quantidade de unidades vendidas. Assim, $R(x) = p \cdot x = (20 - x) \cdot x$. Já a função lucro é obtida pela diferença entre a receita e o custo:

$$L(x) = R(x) - C(x) = (20 - x) \cdot x - (30 + x) = 20x - x^2 - 30 - x = -x^2 + 19x - 30.$$

Uma das perguntas mais importantes na gestão de negócios é: qual é a quantidade de produtos que deve ser vendida para que a receita (ou o lucro) sejam máximos?

Figura 4.20 | Gráfico da função receita $R(x) = (20 - x) \cdot x$



Fonte: elaborada pelo autor.

Neste gráfico vemos que se forem vendidas x = 10 unidades, a receita será máxima e igual a 100 unidades monetárias. Existem dois valores de unidades vendidas para os quais a função receita é nula: $x = 0$ e $x = 20$. Esses valores são conhecidos como zeros (ou raízes) da função receita $R(x)$.

O valor da função receita é igual a R$ 100,00, sendo seu maior valor assumido em um intervalo aberto em torno do ponto $x = 10$. Esse valor é chamado de valor extremo. Veja a seguir a definição de pontos de máximo e de mínimo.

Assimile

De acordo com Morettin (2003, p. 52), "se f é uma função definida em um domínio D, chamamos o ponto x_0 de ponto de máximo relativo (ou apenas ponto de máximo) quando existir um intervalo aberto A que contém o valor x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in A \cap D$ f(x)".

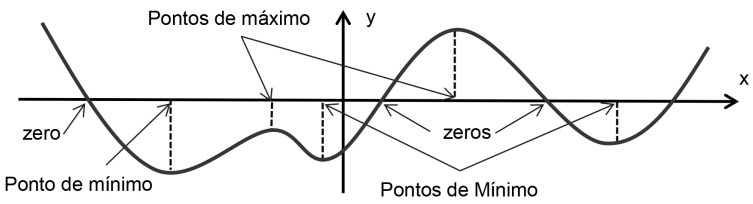
De forma similar, define-se como ponto de mínimo relativo ou, mais simplesmente, ponto de mínimo, "se existir um intervalo aberto A, com centro em x_0, tal que $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in A \cap D$" (MORETTIN, 2003, p. 52).

Os valores de $f(x_0)$ associados aos pontos de máximo ou de mínimos são denominados, respectivamente, de valores máximos e valores mínimos de f.

Você já ouviu falar em ponto de equilíbrio? Lembre-se de nossa função lucro $L(x) = R(x) - C(x) = -x^2 + 19x - 30$. O ponto de equilíbrio é quando a receita é igual ao custo. Em outras palavras, é o valor x de unidades a serem vendidas para que a receita obtida com as vendas "empate" com os custos. É o valor de x tal que $L(x) = 0$. Ao estudarmos funções, o valor x tal que $f(x) = 0$ recebe o nome de zero ou raiz da função f.

Graficamente, os zeros de uma função são aqueles valores para os quais o gráfico de f corta o eixo x. Veja na figura 4.21 um exemplo de uma função genérica.

Figura 4.21 | Máximos, mínimos e zeros de uma função



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função que não apresenta descontinuidade (ou seja, conseguimos traçar seu gráfico sem levantar o lápis do papel), então, se essa função possuir dois pontos de máximo, necessariamente terá ao menos uma raiz entre os dois pontos? Faça gráficos, eles te ajudarão.

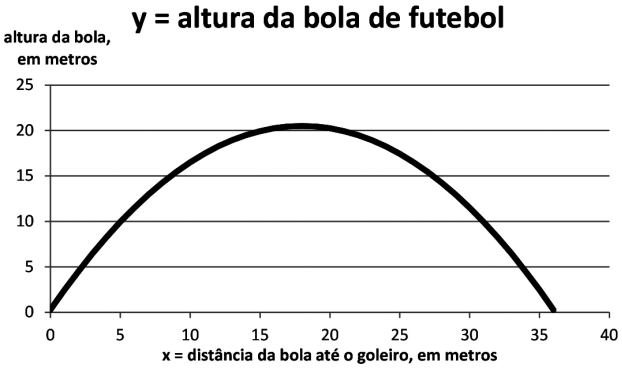
Agora que vimos o que são máximos, mínimos e zeros de uma função, estudaremos três tipos de funções: as quadráticas, as polinomiais e as racionais.

2. Funções quadráticas

Onde aparecem funções quadráticas? Nos campos de futebol, por exemplo. Um goleiro de futebol chuta a bola para o meio do campo. Se a bola descrever uma trajetória parabólica, a altura da bola, em metros, pode ser representada por uma função com a lei $y = f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{4}$, por exemplo.

Na figura 4.22, podemos observar o gráfico dessa função. Algumas questões bastante frequentes são: qual é a altura máxima atingida pela bola? A que distância a bola vai cair? Como responder a essas questões? É o que veremos nesta subseção.

Figura 4.22 | Trajetória de uma bola de futebol



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que para cada x do domínio associa y na imagem, segundo a lei $y=ax^2+bx+c, a,b,c\in\mathbb{R}, \text{ com } a\neq 0$, sendo chamada de função do 2º grau ou função quadrática.

São exemplos de funções de 2º grau:

a) $y=5x^2-2x+0{,}27, \text{ com } a=5, b=-2, c=0{,}27$.

b) $y=5-\frac{3}{7}x^2, \text{ com } a=-\frac{3}{7}, b=0, c=5$.

c) $y=-\sqrt{2}x^2, \text{ com } a=-\sqrt{2}, b=0, c=0$.

O sinal do discriminante indica se a função $y=f(x)=ax^2+bx+c$ possui dois zeros reais e distintos, dois zeros reais iguais ou se não possui zeros reais.

Os zeros da função de 2º grau são dados pela expressão: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$, representada pela letra grega maiúscula delta e recebe o nome de discriminante.

Com respeito ao sinal do discriminante, temos três possibilidades:

i) $\Delta>0 \Rightarrow$ existem dois zeros reais distintos (ou seja, o gráfico da função $y=f(x)=ax^2+bx+c$ corta o eixo x em dois locais distintos, x_1 e x_2).

ii) $\Delta=0 \Rightarrow$ existem dois zeros reais iguais (ou seja, o gráfico da função $y=f(x)=ax^2+bx+c$ corta o eixo x em apenas um ponto: $x_1 = x_2$).

iii) $\Delta<0 \Rightarrow$ não existem zeros reais (ou seja, o gráfico da função $y=f(x)=ax^2+bx+c$ não corta o eixo x em nenhum local).

O gráfico de uma função de 2º grau é sempre uma parábola e seu ponto de máximo ou de mínimo é denominado vértice da parábola, cujas coordenadas são $V=(x_v,y_v)=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Até podemos esboçar o gráfico de uma função de 2º grau por meio de uma tabela em que atribuímos valores a x e escrevemos, lado a lado, os correspondentes valores de y. No entanto, é muito mais prático construir gráficos de funções de 2º grau

observando os seguintes aspectos:

i) O sinal do coeficiente a indica se a concavidade da parábola está voltada para cima (quando $a > 0$) ou para baixo (se $a < 0$).

ii) O termo independente de x, que é o valor de c, indica o valor do eixo y que é interceptado pela parábola.

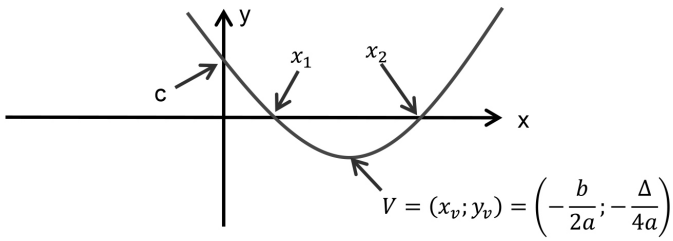
iii) Observando o sinal de $\Delta = b^2 - 4ac$, sabemos em quantos pontos o gráfico de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ corta o eixo x.

iv) Determinamos os zeros da função $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ usando a expressão $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

v) Determinamos as coordenadas do vértice.

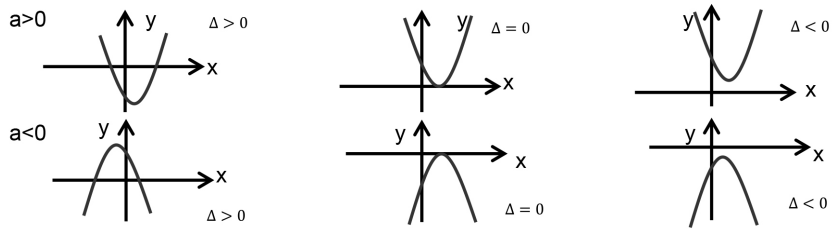
Na Figura 4.23, destacamos as raízes x_1 e x_2, o intercepto, dado pelo valor c e o vértice da parábola. Na sequência, na Figura 4.24, apresentamos um quadro-resumo geral com possibilidades para o gráfico de uma função de segundo grau.

Figura 4.23 | Raízes, intercepto e vértice da função de 2º grau



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.24 | Quadro-resumo relacionando o sinal do discriminante e sinal do a



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Faça o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ determinando: as raízes, o intercepto com o eixo y e as coordenadas do vértice.

Inicialmente, precisamos identificar os coeficientes a, b e c. Nesse exemplo, $a = 1, b = -5$ e $c = 6$. Como o valor de a é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima. Como $c = 6$, esta parábola intercepta o eixo y no ponto de coordenadas $(0,6)$. Calculamos o discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6) = 25 - 24 = 1 > 0$. Como o discriminante é positivo, essa função tem duas raízes reais distintas. Os valores das raízes são: $x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5+1}{2} = 3$ e

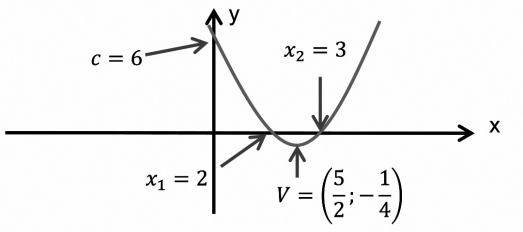
$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5-1}{2} = 2$.

As coordenadas do vértice são:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{-5}{2 \cdot 1}; -\frac{1}{4 \cdot 1} \right) = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4} \right).$$

O gráfico está apresentado na figura 4.25.

Figura 4.25 | Gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$



Fonte: elaborada pelo autor.

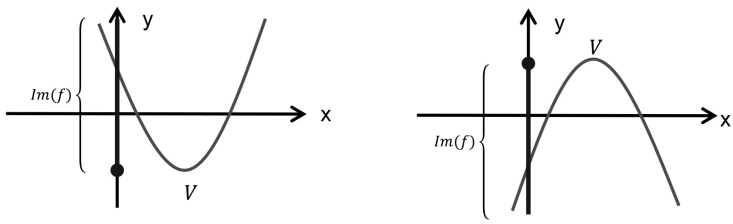
Observado novamente o gráfico anterior, podemos perceber que o domínio de uma função de 2º grau pode ser todo o conjunto dos números reais. O vértice de uma parábola constitui um ponto de destaque. Quando a concavidade é voltada para cima, o vértice é o ponto mínimo da parábola, e quando a concavidade é voltada para baixo o vértice é o ponto máximo da parábola. Além disso, a partir desses valores de máximo e mínimo da parábola, podemos identificar o conjunto imagem da parábola.

Se $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima e seu valor mínimo será dado pela coordenada y do vértice: $y_v = -\frac{\Delta}{4 \cdot a}$. O conjunto imagem será $\text{Im}(f) = [-\frac{\Delta}{4 \cdot a}; +\infty[$.

Se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo e seu valor máximo será dado pela coordenada y do vértice: $y_v = -\frac{\Delta}{4 \cdot a}$. O conjunto imagem será $\text{Im}(f) =]-\infty; -\frac{\Delta}{4 \cdot a}]$.

Essas duas situações estão apresentadas na figura 4.26.

Figura 4.26 | O vértice da parábola e o conjunto imagem



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Para conhecer questões de vestibular relacionadas com trajetória parabólica, acesse o link: <http://fisicaevestibular.com.br/novo/mecanica/cinematica/lancamento-obliquo/exercicios-de-vestibulares-resolvidos-sobre-lancamento-obliquo/>. Acesso em: 27 fev. 2017.

Já estudamos as funções de 1º e 2º grau. O que vem depois? Funções de 3º grau, 4º grau? Sim. São as chamadas funções polinomiais, das quais as funções de 1º e 2º graus são casos particulares.

3. Funções polinomiais

Você já estudou juros compostos? Considere que um depósito inicial igual a *Depósito* seja efetuado em um investimento que apresenta rendimento mensal igual a i%. A cada mês, um novo depósito de valor igual a *Depósito* é realizado nessa conta-investimento. Para facilitar a escrita das fórmulas a seguir, usaremos *D* para representar *Depósito*.

- O capital depositado (***Depósito***) e reajustado após o primeiro mês é igual a $D+\frac{i}{100}D=\left(1+\frac{i}{100}\right)D$. Escrevemos $x=1+\frac{i}{100}$. Assim, reescrevemos o capital ajustado como $\left(1+\frac{i}{100}\right)\cdot D=x\cdot D$. Com o ***Depósito*** adicional, teremos que o saldo ao final do primeiro mês será igual a $\text{Saldo}_1=x\cdot D+D$

- No segundo mês, será efetuado novo depósito de valor igual a ***Depósito***, ficando: $\text{Saldo}_2=D+x\cdot\text{Saldo}_1=D+x\cdot\left(x\cdot D+D\right)=x^2\cdot D+x\cdot D+D$.
- No terceiro mês o saldo será: $\text{Saldo}_3=D+x\cdot\left(x^2\cdot D+x\cdot D+D\right)=x^3\cdot D+x^2\cdot D+x\cdot D+D$.
- Ao fim de n meses, teremos a função Saldo_n, que pode ser escrita como: $\text{Saldo}_n=x^n\cdot D+x^{n-1}\cdot D+\ldots+x\cdot D+D$.

Este é um exemplo de função polinomial. Veja que esse exemplo é bastante particular, pois todos os coeficientes são iguais a ***Depósito***. Veja a seguir a definição formal de função polinomial:

Assimile

Uma função polinomial pode ser escrita como $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$, onde $n\in\mathbb{N}$ e $a_n\neq 0$ e $a_n,a_{n-1},\ldots,a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}$.

O maior expoente n em um polinômio recebe o nome de grau do polinômio e os valores constantes $a_n,a_{n-1},\ldots,a_2,a_1,a_0$ são chamados de coeficientes do polinômio.

Uma função polinomial de grau n pode cortar o eixo x até um máximo de n vezes. Os valores x, tais que a função polinomial $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x^1+a_0=0$, são as raízes da função polinomial. Além disso, entre dois zeros reais consecutivos de uma função polinomial sempre existe uma valor extremo (um valor máximo ou um valor mínimo).

Quando somamos ou subtraímos funções potências, obtemos as funções polinomiais. Mas e quando dividimos funções polinomiais, o que obtemos? Obtemos as funções racionais, tema da próxima subseção. Vamos lá?

4. Funções racionais

Vejamos a definição de função racional:

Assimile

Considere duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, com $g(x)$ não identicamente nula.

A função definida por $r(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ é denominada de função racional.

São exemplos de funções racionais:

a) $r(x)=\frac{3x-7}{x^2-11x+19}$

b) $r(x)=\frac{9-2x}{7-5x}$

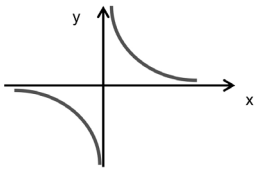
c) $r(x)=\frac{7x^8}{x^5-3x+2}$

Uma função racional de particular destaque é a função $r(x)=\frac{1}{x}$. Vejamos seu domínio, imagem e gráfico.

O domínio da função $r(x)=\frac{1}{x}$ é $D(r)=\mathbb{R}-\{0\}$, pois não podemos ter divisão por zero.

Para valores de x cada vez mais próximos do zero, positivos, os valores de $r(x)=\frac{1}{x}$ ficam cada vez maiores e positivos. Já para valores de x cada vez mais próximos de zero, mas negativos, os valores de $r(x)=\frac{1}{x}$ ficam cada vez mais negativos. Para valores de x cada vez maiores, positivos, o valor de $r(x)=\frac{1}{x}$ se aproxima de zero, com valores positivos. Para valores de x cada vez mais negativos, os valores de $r(x)=\frac{1}{x}$ ficam cada vez mais próximos de zero, com valores negativos. Por meio dessas observações, temos o gráfico de $r(x)=\frac{1}{x}$ na Figura 4.27.

Figura 4.27 | Gráfico da função $r(x)=\frac{1}{x}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinar o conjunto imagem, traçamos retas horizontais. O conjunto imagem é constituído por todos aqueles valores que interceptam o gráfico de $r(x)=\frac{1}{x}$ e o eixo y. Como o valor 0 nunca é atingido pela função $r(x)=\frac{1}{x}$, o zero não pertence ao conjunto $\text{Im}(r)$. Temos então que o conjunto imagem dessa função é $\text{Im}(r)=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[=\mathbb{R}-\{0\}$.

As raízes de uma função racional $r(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ são as mesmas que as raízes da função que consta do numerador. Assim, determinar as raízes de $r(x)$ é o mesmo que determinar as raízes de f(x).

Sem medo de errar

Recordemos que uma indústria de eletrônicos contratou os serviços de modelagem matemática da empresa em que você trabalha para que vocês fizessem a determinação da quantidade de unidades a serem vendidas para que o lucro seja máximo e para determinar o valor desse lucro máximo.

Os dados do problema são: $CustoTotal(x)=1000+4x$.

Função demanda: $p=700-5x$.

A função receita será $R(x)=p\cdot x=(700-5x)\cdot x=700x-5x^2$.

A função lucro será $L(x)=R(x)-C(x)=700x-5x^2-1000-4x=-5x^2+696x-1000$.

Esta é uma função de 2º grau, cujos coeficientes são $a=-5;b=696;c=-1000$.

Vamos responder os itens a) , b), c) e d) da questão.

a) A quantidade de unidades a serem vendidas para ser obtido o lucro máximo é dada pela coordenada x do vértice: $x_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{696}{2\cdot(-5)}=69,6$.

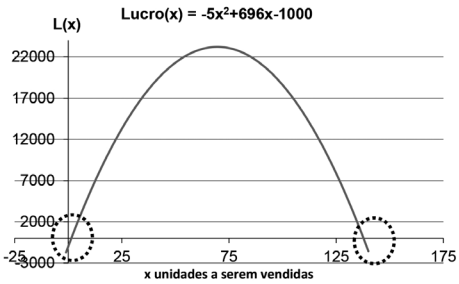
b) O valor do lucro máximo é dado pelo $y_v=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{464416}{4\cdot(-5)}=23220,8$ unidades monetárias.

c) Para quais quantidades produzidas há prejuízo?

O que é o prejuízo? Ocorre prejuízo quando a função lucro é negativa: $L(x)=-5x^2+696x-1000<0$. Veja na Figura 4.28 a região no eixo x para a qual a função lucro é negativa. As figuras são úteis para você visualizar para quais valores de x temos prejuízo, mas não determinamos os valores numéricos de x para os quais

temos prejuízo a partir dessas figuras. Para esta determinação numérica, efetuamos o cálculo das raízes da função de 2º grau.

Figura 4.28 | Visualização das regiões em que há prejuízo: $L(x) < 0$



Fonte: elaborada pelo autor.

Observamos que o lucro será negativo para $x < 0$ e para algum valor de x entre 125 e 175.

Para determinar, precisamente, esses valores, precisamos resolver a inequação:

$$L(x) = -5x^2 + 696x - 1000 < 0 .$$

Para isso, determinamos as raízes da função lucro:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-696 + \sqrt{464416}}{2 \cdot (-5)} = 137{,}74$$

E

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-696 - \sqrt{464416}}{2 \cdot (-5)} = 1{,}45$$

Assim, teremos prejuízo (a função lucro será negativa) se forem vendidas menos do que 1,45 unidades ou mais do que 137,74 unidades.

d) Se aumentar a produção das atuais 50 unidades para 100 unidades, teremos lucro? Qual é o percentual de aumento no lucro?

Vamos determinar o valor da função lucro quando são produzidas 50 unidades:

$$L(50) = -5 \cdot (50)^2 + 696 \cdot (50) - 1000 = 21300 .$$

Agora, vamos determinar o valor da função lucro quando são produzidas 100 unidades:

$$L(100) = -5 \cdot (100)^2 + 696 \cdot (100) - 1000 = 18600 .$$

Você deve ter se perguntado: mais unidades foram produzidas e o lucro caiu? Como isto pode acontecer?

Em algumas situações econômicas, temos respostas que vão contra a intuição. Nesse caso, como temos uma função lucro que não é linear, não é porque aumentamos a produção que o lucro responderá proporcionalmente. Isto é importantíssimo em inúmeras áreas que usam modelos matemáticos como auxílio à tomada de decisão.

A porcentagem de variação do lucro foi:

$\frac{18600}{21300} = 0,8732 = 87,32\%$. Ou seja, quando dobramos a produção de 50 para 100 unidades, o lucro teve uma redução de $100\% - 87,32\% = 12,67\%$. Se você se lembrar da resposta do item anterior, se a produção for superior a 137,74 unidades, passamos a ter prejuízo.

Não se esqueça: você deve produzir um relatório gerencial sucinto com suas conclusões desse problema. Esse relatório deverá ser, posteriormente, entregue junto com os outros relatórios (das Seções 4.1 e 4.3).

Avançando na prática

Assíntotas verticais de uma função racional

Descrição da situação-problema

Os valores de x para os quais a função do denominador de $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ se anula não pertencem ao domínio da função $r(x)$. Nesses valores, teremos o que se chamam as assíntotas verticais da função $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Vejamos um exemplo da Macroeconomia. Na empresa de consultoria em que você trabalha um cliente fez a seguinte questão relacionada com a área de Macroeconomia: como deve ficar a procura por moeda para fins especulativos se supusermos que a taxa de juros é conhecida?

Para respondê-lo, você se lembrou do trabalho do economista inglês John Maynard Keynes, no qual ele propôs que a procura (ou demanda) por moeda para fins especulativos depende da taxa de juros. Vamos supor que, nas condições apresentadas pela empresa/cliente, a função demanda por moeda para fins especulativas seja f(x) = 8/(x – 6) (suponha x > 6), onde x representa a taxa anual de juros, em porcentagem.

A empresa/cliente solicitou que você respondesse o seguinte:

a) Podemos substituir qualquer valor de taxa de juros nessa função?

b) Quais são os resultados possíveis de demanda que podemos obter a partir dessa função?

c) Determine a demanda por moeda especulativa se a taxa de juros anual for 8,5%, 7,5% e 6,5%.

d) Apresente o gráfico dessa função.

e) A partir do gráfico, explique como deve se comportar a demanda por moeda especulativa se a taxa de juros for cada vez maior.

Resolução da situação-problema

a) Esta é uma forma de se perguntar o domínio da função. Essa função modela o fenômeno de demanda por moeda especulativa apenas quando a taxa de juros anual for maior que 6%. O domínio dessa função é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 6\}$. Veja que devemos distinguir o domínio do ponto de vista da situação real que essa função pretende modelar e o que se chama de domínio maximal (o máximo domínio admissível por aquela função).

Agora, se considerarmos a função f(x) = 8/(x-6) (sem relacionarmos com alguma aplicação) o maior domínio possível que poderíamos definir para essa função é o conjunto $D(f) = \mathbb{R} - \{6\}$.

Observe que o domínio de uma função pode ser um quando estamos estudando algum problema aplicado e pode ser outro quando estudamos a função exclusivamente do ponto de vista matemático.

b) Esta pergunta é equivalente a perguntarmos qual é o conjunto imagem da função. Para valores de x > 6, temos que x – 6 é sempre positivo. A divisão de 8 por um valor positivo será sempre um valor positivo. Assim, o conjunto imagem é $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$.

c) Basta substituirmos os valores dados:

f(8,5) = 3,2 unidades de moedas especulativas.

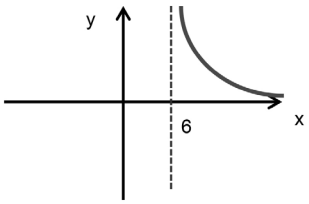
f(7,5) = 5,333... unidades de moedas especulativas.

f(6,5) = 16 unidades de moedas especulativas.

Note que à medida que a taxa de juros se aproxima de x = 6, a quantidade de moeda especulativa demandada cresce cada vez mais.

d) O gráfico da função é dado a seguir.

Figura 4.29 | Função demanda por moeda especulativa



Fonte: elaborada pelo autor.

Poderíamos ter determinado o domínio traçando retas verticais que cruzassem o gráfico de f. O conjunto de pontos do eixo x que também fosse atingido por tais retas constituem o domínio da função. Poderíamos ter determinado o conjunto imagem trançando retas horizontais que interceptem o gráfico de f. O conjunto de pontos do eixo y que também fosse atingido por tais retas constitui o conjunto imagem de f.

e) Do gráfico anterior vemos que, se os valores de x tornarem-se cada vez maiores, a demanda por moeda especulativa cai cada vez mais, aproximando-se do zero (sem nunca atingi-lo).

Faça valer a pena

1. Funções demanda relacionam o preço de venda de um produto à procura (ou seja, à demanda) por aquele produto. A função receita é obtida a partir de funções demanda multiplicando-se o preço unitário de venda pela quantidade x de unidades vendidas.

Se for conhecida a função $CustoTotal$, em termos de quantidade de unidades vendidas, poderemos construir a função lucro escrevendo: $Lucro(x) = R(x) - CustoTotal(x)$.

Uma empresa realizou pesquisas de mercado e conseguiu determinar, como função demanda para um de seus produtos, a expressão $p = 160 - 2x$. Sua função $CustoTotal$ é $CustoTotal = 300 + 3x$.

Assinale a alternativa que apresenta a função lucro e determine a que preço deve ser vendido o produto para maximizar essa função.

a) $L(x) = -3x^2 + 83x - 450; p = 123,7$ unidades monetárias.

b) $L(x) = -5x^2 + 35,1x - 241; p = 45$ unidades monetárias.

c) $L(x) = -4x^2 + 314x - 600; p = 163$ unidades monetárias.

d) $L(x) = -2x^2 + 157x - 300; p = 81,5$ unidades monetárias.

e) $L(x) = -x^2 + 78,5x - 150; p = 39,25$ unidades monetárias.

2. O domínio de uma função é o conjunto de pontos do conjunto de partida para os quais podemos efetuar o cálculo dado pela função.

No caso de funções racionais $r(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, o domínio é obtido identificando-se os valores de x para os quais o denominado é nulo e excluindo-se tais valores do domínio.

Considere a função $f(x)=\frac{3}{\left(x^2-16\right)\left(x+2\right)}$, assinale a alternativa que apresenta o conjunto domínio de f.

a) $D(f)=\mathbb{R}$.

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{-4;4;-2\}$.

c) $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$.

d) $D(f)=\mathbb{R}-\{4;-2\}$.

e) $D(f)=\mathbb{R}-\{4;2\}$.

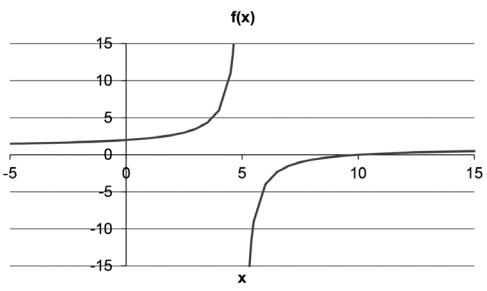
3. Cada família de funções está associada a um determinado padrão de gráficos. Assim, os gráficos de funções lineares e afim são retas, os gráficos de funções quadráticas são parábolas, os gráficos de funções polinomiais podem cruzar o eixo x até um número máximo de vezes, que é determinado pelo seu grau, e os gráficos de funções racionais, quando o denominador contém um fator do tipo $\left(x-a\right)$, apresentam uma assíntota vertical para $x=a$.

Considere a função a seguir:

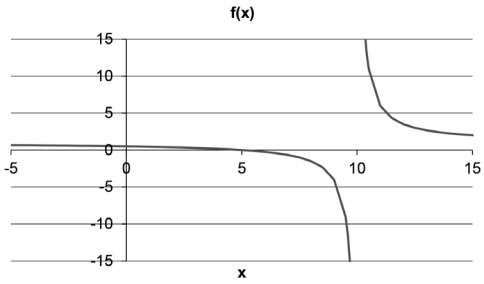
$f(x)=\frac{x-10}{x-5}$.

A partir desta lei de formação, julgue qual das alternativas apresenta o gráfico dessa função.

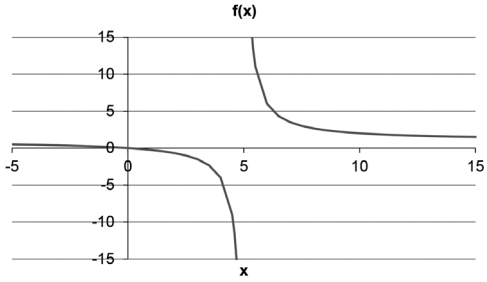
a)



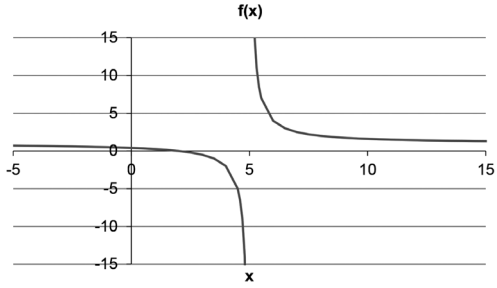
b)


f(x)
15
10
5
0
-5
-10
-15
-5
0
5
10
15
x

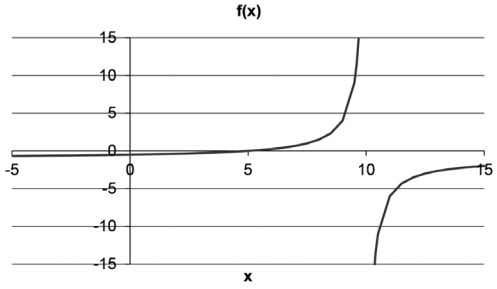
c)


f(x)
15
10
5
0
-5
-10
-15
-5
0
5
10
15
x

d)


f(x)
15
10
5
0
-5
-10
-15
-5
0
5
10
15
x

e)


f(x)
15
10
5
0
-5
-10
-15
-5
0
5
10
15
x

Seção 4.3

Inversa de uma função e composição

Diálogo aberto

Na seção anterior, você prestou serviços de modelagem matemática a uma indústria de produtos eletrônicos. A solicitação agora vem de uma empresa que atua em uma área completamente diferente: é uma empresa especializada em pintura de asas de aviões. Para facilitar a contabilização dos custos de pintura industrial, essa empresa subdivide as asas dos aviões em pequenos quadrados de uma certa área (em metros quadrados).

A quantidade de quadrados necessários para pintar as asas depende do modelo de avião. No momento a empresa está com três contratos em análise: aviões modelos A, B e C.

Contudo, o tamanho dos quadrados, bem como seu custo, é função do modelo do avião. Assim, os quadrados para o avião modelo A têm custo unitário de R$ 1,30, os quadrados para aviões do modelo B têm custo unitário de R$ 1,80 e os quadrados para os aviões modelo C apresentam custo unitário de R$ 2,10. Cada modelo de quadrado tem lados representados por L_A, L_B e L_c.

A empresa também disponibilizou para você o quadro a seguir, relacionando os modelos de fuselagem e a área total a ser pintada.

Quadro 4.2 | Modelo do avião versus área total a ser pintada

Modelo do avião (em metros quadrados)	Área total a ser pintada
A	350
B	500
C	800

Fonte: elaborado pelo autor.

A empresa de pintura de asas solicitou as seguintes informações:

a) Apresente, para cada um dos modelos de aviões, as respectivas funções que fornecem o número de quadrados necessários para pintar as asas em função do lado de cada tipo de quadrado.

b) Apresente as funções, para cada tipo de avião, que fornecem os custos de pintura como função do número de quadrados necessários.

c) Apresente as funções, para cada tipo de avião, que fornecem os custos de pintura como função dos lados dos quadrados respectivos.

d) Apresente as funções, para cada tipo de avião, que fornecem os lados dos quadrados como função dos custos de pintura.

Para apresentar essas informações serão utilizados os conceitos de composição de funções e de função inversa.

Não pode faltar

Você já reparou que o cálculo do imposto de renda é função da renda do indivíduo? A renda, por sua vez, é função do número de horas trabalhadas. Esta é uma situação em que calculamos uma imagem segundo uma lei de formação e, em seguida, substituímos o resultado desse primeiro cálculo, na lei de outra função. Essa situação bastante real dá origem a um conceito em Matemática chamado de composição de funções. Vamos estudá-lo?

1. Composição de funções

Qual é a ideia por trás da composição de funções? Estamos fazendo uma conta com o resultado de outra. Por exemplo: você mora em um condomínio com uma caixa d´água com dimensões de 5 metros de largura, 3 metros de altura e 10 metros de comprimento. O volume desse reservatório é de $5 \times 3 \times 10 \text{ m}^3 = 150 \text{ m}^3$ = 150.000 litros de água. Suponha que inicialmente o reservatório esteja vazio e a água é despejada no reservatório a uma taxa constante de 2 centímetros por segundo. Assim, a função que representa como varia a altura da lâmina d´água como função do tempo é $H(t) = 2t$. Como varia o volume de água no reservatório como função do tempo?

A função volume é $V = \text{base} \times \text{altura} \times \text{largura}$. Como a altura da lâmina de água é dada pela função $H(t) = 2t$, então, temos $V(t) = \text{base} \times \text{largura} \times 2t = 5 \times 10 \times 2t = 100t$.

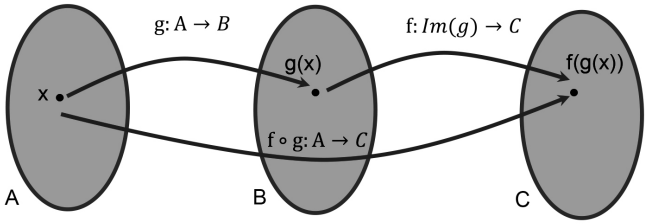
Vejamos a definição formal de função composta.

Assimile

Sejam f e g duas funções, com $g : A \to B$ e $f : \text{Im}(g) \to C$. Denomina-se função composta de f e g a função $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ (lemos f "bola" g). Chama-se a função $h(x) = f(g(x))$ de função composta f com g.

Na Figura 4.30, vemos em um diagrama de flechas a representação de composição da função f com a função g.

Figura 4.30 | Composição da função f com a função g



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Para saber mais sobre composição de funções, acesse: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap71s2.html> (acesso em: 4 mar. 2017) e <http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/funcao-composta.html> (acesso em 4 mar. 2017). No segundo link, você tem um exemplo de composição de funções apresentado em Flash. Vale a pena conhecer esse exemplo.

Devemos chamar a atenção para o fato de que, ao efetuarmos a composição de duas funções f e g na forma $f \circ g$, o contradomínio da função g deve estar contido no domínio da função f: $CD(g) \subset D(f)$. Vamos exemplificar esse ponto com o exemplo a seguir.

Exemplo: considere as funções $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Apresente as expressões para as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

A composta $f \circ g$ é dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 5 = 3\sqrt{x-2} + 5$. O domínio dessa função é dado pelos $x \in \mathbb{R}$ tais que $x - 2 \geq 0$. Portanto, $D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$.

A composta $g \circ f$ é dada por $(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x) - 2} = \sqrt{3x + 5 - 2} = \sqrt{3x + 3}$. O domínio dessa função é dado pelos $x \in \mathbb{R}$ tais que $3x + 3 \geq 0$. Portanto, $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

Reflita

Símbolos "parecidos" podem nos levar ao engano. O símbolo $f(x) \cdot g(x)$ representa o produto da função f pela função g. Você poderia apresentar um exemplo em que o produto das funções $f(x) \cdot g(x)$ seja igual à composição $(f \circ g)(x)$?

Muitas vezes, os conceitos matemáticos são apresentados sem entendermos como surgiram. Os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora estão associados com o conceito de função inversa.

Vamos imaginar que você seja motorista de táxi. Suponha que para cada corrida você receba um valor fixo de R$ 5,00 mais o número de quilômetros rodados vezes o valor do quilômetro: R$ 0,40.

Para modelar essa situação, temos uma função que associa ao número x de quilômetros rodados o valor y da corrida. O que seria a função inversa nesse caso?

Seria uma função que associa para cada valor y da corrida um valor x de quilômetros rodados.

Veja como é bastante natural o conceito de função inversa: é quando invertemos a pergunta.

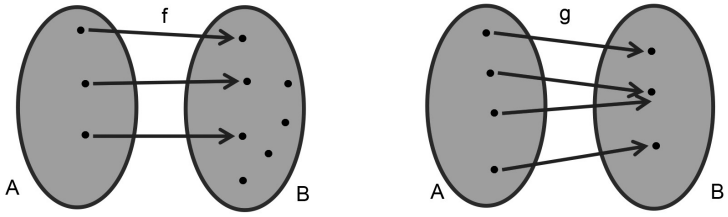
Para que possamos definir a função inversa do problema, precisamos definir os conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijetividade. É o que faremos na próxima subseção.

2. Injetividade e sobrejetividade

Considere os diagramas de flechas apresentado na Figura 4.31.

Observe que, no máximo, chega uma flecha nos elementos da imagem da função f. Por outro lado, no conjunto imagem da função g existe ao menos um elemento que é atingido por mais de uma flecha, por esse motivo dizemos que a primeira função é injetora e a segunda não é injetora.

Figura 4.31 | Diagrama de flechas: f é função injetora e g não é injetora



Fonte: elaborada pelo autor.

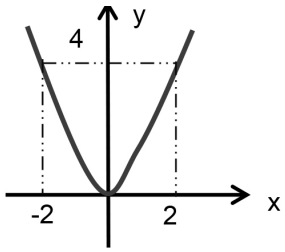
Assimile

Seja $f : A \to B$. Dizemos que f é injetora se, para todos $x, y \in D(f), x \neq y$, temos que $f(x) \neq f(y)$.

A função $f(x) = \frac{5}{x}$ é injetora. O domínio dessa função é $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ e sua imagem é $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Suponha $x, y \in D(f), x \neq y$. Então, como vale que $f(x) = \frac{5}{x} \neq \frac{5}{y} = f(y)$, temos que essa função é injetora.

A função $f(x) = x^2$ não é injetora. Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e seu conjunto imagem é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$. Basta tomarmos um par de valores distintos do domínio dessa função, por exemplo, $x = 2$ e $y = -2$ e observamos que $f(x) = f(2) = 2^2 = (-2)^2 = f(-2) = f(y)$. Veja, na Figura 4.32, que temos um único valor associado a $x = 2$ e $x = -2$, que é igual a 4.

Figura 4.32 | Gráfico da não injetividade da função $f(x) = x^2$



Fonte: elaborada pelo autor.

Apresentamos a seguir a definição de função sobrejetora.

Assimile

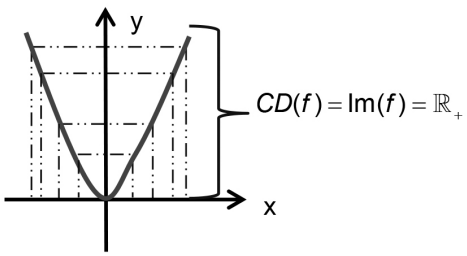
Seja $f : A \to B$. Dizemos que f é sobrejetora se o conjunto imagem de f é igual ao contradomínio: $CD(f) = \text{Im}(f)$.

Em outras palavras: se f é uma função sobrejetora, "não sobra" nenhum elemento do contradomínio de f sem flecha.

Considere novamente a Figura 4.31 já apresentada. A função f não é sobrejetora (pois existem elementos no contradomínio de f para os quais não chega nenhuma flecha do domínio). Já a função g é sobrejetora, pois existe flecha em cada um dos elementos do contradomínio de g (o contradomínio é igual ao conjunto imagem da função g).

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \ \ f(x) = x^2$ é sobrejetora, pois para qualquer valor $y \in CD(f)$ esse valor pertence ao conjunto imagem de f. Veja na Figura 4.33 a seguir que todos os valores do contradomínio são atingidos por valores do domínio.

Figura 4.33 | $f(x) = x^2$ é sobrejetora.



Fonte: elaborada pelo autor.

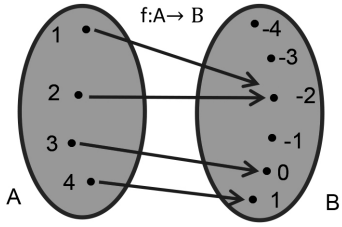
A função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$ também é sobrejetora, pois para qualquer elemento $y \in \mathbb{R}^*$ existe um elemento $x \in \mathbb{R}^*$ tal que $y = \frac{1}{x}$.

Uma função pode ser ao mesmo tempo não injetora e não sobrejetora? Sim, pode. Veja o exemplo a seguir.

Na Figura 4.34, temos um exemplo de uma função que não é nem injetora nem sobrejetora.

A função f não é injetora, pois existe ao menos um elemento na imagem de f para o qual chegam duas flechas (é o -2). E não é sobrejetora, pois existe ao menos um elemento da imagem de f que não é atingido por flecha alguma (são os elementos -4, -3 e -1).

Figura 4.34 | Exemplo de função que não é nem injetora nem sobrejetora



Fonte: elaborada pelo autor.

Se definirmos a função $f(x) = x^2$ com $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, ou seja: função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então, essa função não será sobrejetora, pois os valores reais negativos não serão atingidos por f. Este é um exemplo de função que não é nem injetora nem sobrejetora.

Após definirmos injetividade e sobrejetividade, veremos funções que são injetoras e sobrejetoras: as bijetoras.

3. Bijetividade

Uma função $f : A \to B$ é chamada de bijetora se for injetora e sobrejetora. Quando temos uma função bijetora, dizemos que temos uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B. Como exemplos de funções bijetoras, temos:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 7 - 2x$ (na verdade qualquer função afim é bijetora).

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 5$.

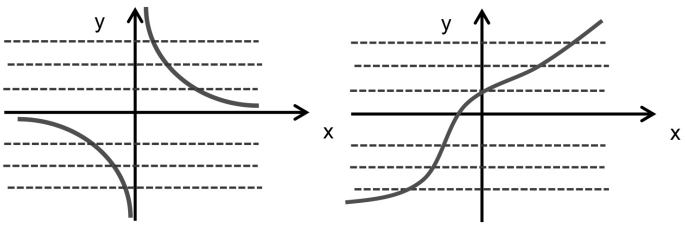
Identificação de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras graficamente

Também é possível identificar pelo gráfico de uma função se a função é injetora ou sobrejetora.

Considere $f : A \to B$. Traçamos retas paralelas ao eixo x.

i) Se as retas traçadas encontram o gráfico de f em no máximo um ponto, então, a função é injetora. Podem existir retas que não encontram o gráfico de f, mas isto não "estraga" a injetividade da função. Veja na Figura 4.35 duas funções injetoras.

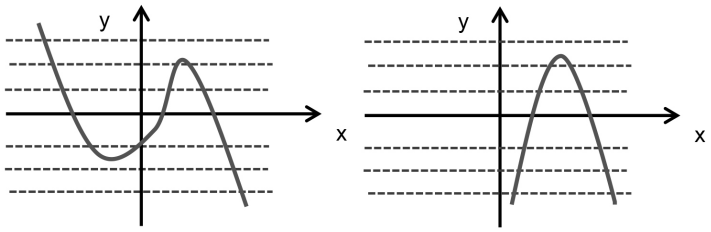
Figura 4.35 | Retas horizontais para identificar funções injetoras



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 4.36, vemos dois exemplos de funções não injetoras.

Figura 4.36 | Dois exemplos de funções não injetoras



Fonte: elaborada pelo autor.

ii) Se as retas traçadas encontram o gráfico de f em ao menos um ponto, então, a função f é sobrejetora.

iii) Por fim, se as retas traçadas encontram o gráfico de f em apenas um único ponto, então, a função f é bijetora.

Quando temos uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B (ou seja, quando temos uma função bijetora entre A e B), os dois conjuntos podem ser intercambiados e podemos apresentar a correspondência inversa entre B e A. Essa correspondência inversa é chamada de função inversa, $f^{-1}: B \to A$>. É o que estudaremos na próxima subseção.

4. Função inversa

Vamos apresentar o conceito de função inversa a partir do seguinte exemplo: suponha que você tem um valor em dinheiro para ser investido em uma aplicação financeira, com uma taxa de juros fixada. Uma pergunta que vamos chamar aqui

de direta é a seguinte: qual é a quantia a ser investida na aplicação para que você tenha uma quantia pré-determinada daqui a 12 meses? Contudo, podemos inverter a pergunta, não é verdade? Vamos chamar essa segunda pergunta de inversa: se temos uma determinada quantia em dinheiro, quanto tempo teremos de aguardar para que o valor acumulado seja um valor pré-definido? Em inúmeras situações temos uma pergunta que podemos chamar de direta e a pergunta que podemos chamar de inversa. Isto nos leva, naturalmente, ao conceito de função inversa. Lembre-se de você mesmo pensando no financiamento do seu carro ou na compra de um imóvel: efetuamos diversas simulações nos sites dos bancos e lojas fazendo essas perguntas "diretas" e as "inversas", concorda? Até que você consiga estabelecer diversos cenários alternativos para subsidiar sua decisão. Em outras palavras: as pessoas trabalham com o conceito de função inversa, embora não utilizem esse nome.

Veja que o conceito de função inversa está associado com respondermos a perguntas "ao contrário".

Veja a seguir a definição de função inversa.

Assimile

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora que a cada elemento $x \in A$ associa um elemento $y \in B$. Chama-se função inversa da função f e denota-se por f^{-1} a função que, se $f(x) = y$, então, $f^{-1}(y) = x$ para $y \in B$ e $x \in A$.

Se f^{-1} é a função inversa de f, como os valores da imagem de f são elementos do domínio de e os valores do domínio de f são a imagem de f^{-1}, então, $D(f) = \text{Im}(f^{-1})$ e $\text{D}(\text{f}^{-1}) = \text{Im}(f)$.

Veja a seguir um exemplo de como se obter a inversa de uma função f.

Exemplificando

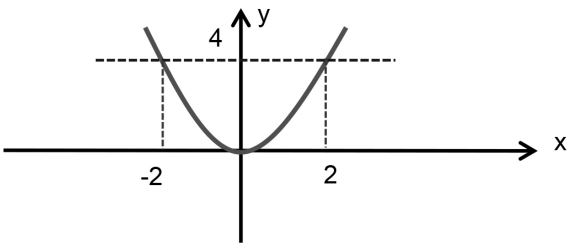
Seja $f(x) = 7x + 2$. Para determinar a função inversa de f, escrevemos $y = 7x + 2$, trocamos y por x e x por y: $x = 7y + 2$. Agora, escrevemos y como função de x: $y = \dfrac{x-2}{7}$. A função inversa de f é $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{7}$.

É possível verificar se uma função inversa foi corretamente determinada. Se g é a inversa da função f, então, vale que $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$. Veja no exemplo:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(\frac{y-2}{7}\right) = 7 \cdot \frac{(y-2)}{7} + 2 = y - 2 + 2 = y.$$

Podemos verificar se uma função é invertível graficamente. Para isto, traçamos retas horizontais no plano cartesiano que inclui o gráfico de f e verificamos se essas retas interceptam o gráfico de f em mais de um ponto. Se uma das retas interceptar o gráfico de f em mais de um ponto, então, a função f não é bijetora e não possui inversa. O exemplo mais simples é a função de 2º grau $f(x) = x^2$. Veja a Figura 4.37 a seguir. Como $f(2) = 4$ e $f(-2) = 4$ não é possível determinar o valor $f^{-1}(4)$. Não temos como saber se é 2 ou -2.

Figura 4.37 | Verificação gráfica que a função $f(x) = x^2$ não possui inversa

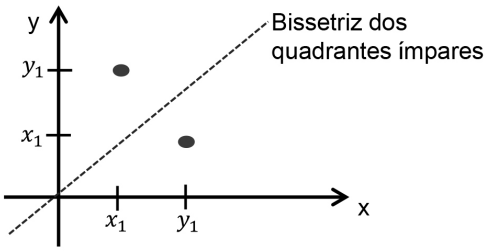


Fonte: elaborada pelo autor.

Obtenção do gráfico de f^{-1} a partir do gráfico de f

Seja uma função $f(x)$ tal que $f(x_1) = y_1$. Então, a função inversa f^{-1} é tal que $f^{-1}(y_1) = x_1$. Vamos traduzir essa informação na Figura 4.38.

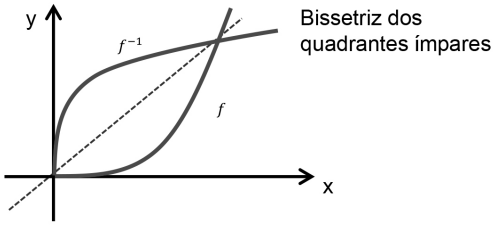
Figura 4.38 | Simetria para funções inversas



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 4.39, apresentamos um exemplo genérico de obtenção do gráfico da função inversa a partir do gráfico de f.

Figura 4.39 | Gráfico de f^{-1} e f



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesta seção, estudamos o que são funções compostas, as funções injetoras, sobrejetoras, bijetoras e as funções invertíveis. Note que os conceitos de funções compostas, injetoras, sobrejetoras, bijetoras e funções inversas estão diretamente associados à resolução de problemas concretos. Na situação-problema, veremos como tais conceitos são aplicados nas situações propostas.

Sem medo de errar

Releia o item Diálogo Aberto e recorde-se de que temos que montar funções que forneçam o número de quadrados necessários para pintar as asas de um avião como função do lado desses quadrados e determinar o lado do quadrado como função de um valor de custo admitido. É uma situação em que queremos resolver um problema e o problema inverso. Observe como o conceito de função inversa é utilizado na prática.

Também temos de apresentar funções para os custos de pintura em função dos lados dos quadrados. Ou seja, estamos tratando de funções compostas.

Vamos responder cada questão?

a) O número de quadrados necessários para pintar as asas como função do lado dos quadrados é resultado da divisão da área total a ser pintada pela área de cada quadrado.

No caso do avião modelo A, a área a ser pintada é de $350m^2$. A área de cada quadrado é L_A^2. Assim, o número de quadrados necessários para pintar os aviões do modelo A é $N_A(L_A) = \frac{350}{L_A^2}$. Construímos o quadro a seguir:

Quadro 4.3 | Modelo do avião versus função número de quadrados

Modelo do avião	Função número de quadrados necessários para pintar o avião em função do lado dos quadrados
A	$N_A(L_A) = \frac{350}{L_A^2}$
B	$N_B(L_B) = \frac{500}{L_B^2}$
C	$N_C(L_C) = \frac{800}{L_C^2}$

Fonte: elaborada pelo autor.

b) Vejamos agora as funções, por tipo de avião, que apresentam os custos de pintura como função do número de quadrados necessários para a pintura.

O custo unitário por quadrado do modelo A é de R$ 1,30. Assim, a função custo para o avião modelo A é $Custo_A(L_A) = 1,30 \cdot N_A$. Temos o quadro a seguir.

Quadro 4.4 | Modelo do avião versus função custo

Modelo do avião	Função custo de pintura de cada modelo de avião em função do número de quadrados necessários
A	$Custo_A(L_A) = 1,30 \cdot N_A$
B	$Custo_B(L_B) = 1,80 \cdot N_B$
C	$Custo_c(L_C) = 2,10 \cdot N_C$

Fonte: elaborada pelo autor.

c) Já temos as funções construídas nos itens a e b. Basta substituir as funções do item a nas respectivas funções do item b. Por exemplo, no caso do modelo A, fica muito mais prático escrever diretamente $Custo_A(L_A) = 1,30 \cdot \frac{350}{L_A^2} = \frac{455}{L_A^2}$. Observe que estamos usando composição de funções.

Montamos o quadro a seguir:

Quadro 4.5 | Modelo do avião versus função custo de pintura com dependência do lado dos quadrados

Modelo do avião	Função custo de pintura de cada modelo de avião em função do lado dos quadrados
A	$Custo_A\left(L_A\right)=1{,}30\cdot\frac{350}{L_A^2}=\frac{455}{L_A^2}$
B	$Custo_B\left(L_B\right)=1{,}80\cdot\frac{500}{L_B^2}=\frac{900}{L_B^2}$
C	$Custo_C\left(L_C\right)=2{,}10\cdot\frac{800}{L_C^2}=\frac{1680}{L_C^2}$

Fonte: elaborada pelo autor.

d) Neste item, o que fazemos é inverter cada uma das funções do item anterior. Ficamos com o quadro a seguir.

Quadro 4.6 | Modelo do avião versus Função Lado do quadrado

Modelo do avião	Função Lado do quadrado como função dos Custos de pintura
A	$L_A=\sqrt{\frac{455}{Custo_A}}$
B	$L_B=\sqrt{\frac{900}{Custo_B}}$
C	$L_C=\sqrt{\frac{1680}{Custo_C}}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, temos as funções que associam os lados dos quadrados para cada modelo de avião aos custos e as respectivas funções inversas que associam os custos de pintura aos lados dos quadrados. Inserido no contexto do problema, usamos a composição de funções. Basta, agora, sintetizar suas considerações em um documento para entregar sua análise para a empresa contratante.

Avançando na prática

Descrição da situação-problema

Uma das áreas de aplicação de funções é no estudo de poluição, acúmulo de poluentes (em um lago, por exemplo) ou como se dá a dispersão de poluentes em um estuário. Suponha que o acúmulo de poluentes em um lago da região Sudeste do Brasil, medido em $\frac{mg}{mm^3}$, seja modelado matematicamente como função do tempo por uma função do tipo $P(t) = \frac{t}{3795,43} + 0,028$, com t medido em anos.

Os biólogos envolvidos em uma Organização Não Governamental (ONG) que monitora o acúmulo de poluentes neste lago gostariam de saber, dadas várias concentrações de poluentes, quais são os valores de tempo associados. Eles encaminharam essa questão para a empresa de consultoria matemática para a qual você trabalha.

Agora eles estão aguardando sua resposta.

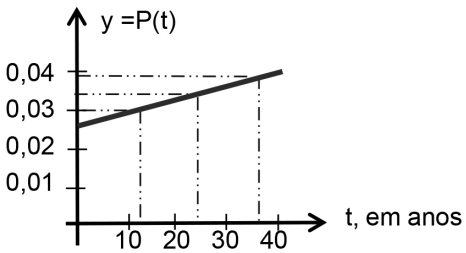
Resolução da situação-problema

Para responder a essa questão, queremos inverter a função apresentada.

Escrevemos $y = P(t) = \frac{t}{3795,43} + 0,028$.

Vejamos o gráfico de y a seguir.

Figura 4.40 | Gráfico de $y = P(t) = \frac{t}{3795,43} + 0,028$



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que para cada valor de t no domínio de definição da função $y = P(t)$ existe um único valor y associado. Assim, a função $y = P(t)$ estabelece uma relação biunívoca entre os valores t, em anos, e os valores y da sua imagem, portanto, essa função é bijetora.

Isolamos y:

$y = 3795,43(t - 0,028)$.

A função inversa fica: $t = P^{-1}(y) = 3795,43(y - 0,028)$.

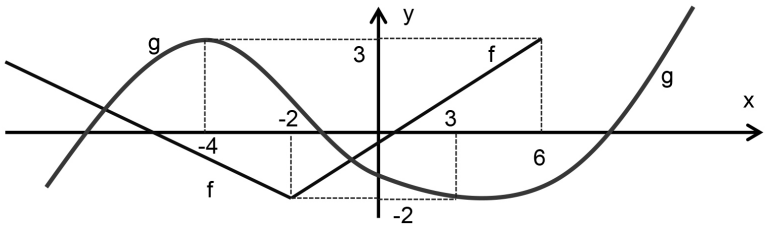
Escreva agora suas conclusões para encaminhar aos seus clientes.

Faça valer a pena

1. Quando efetuamos a composição de duas funções f e g, com $g : A \to B$ e $f : \text{Im}(g) \to C$, efetuando $(f \circ g)(x)$ primeiro obtemos o valor $g(x)$. Em seguida, substituímos esse valor na função f. Se a composição for $(g \circ f)(x)$, então, em primeiro lugar, obtemos o valor de f(x) e depois substituímos na função g.

Em geral, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Na figura a seguir temos os gráficos das funções f e g.



Fonte: elaborada pelo autor.

O valor de $(-3) \cdot f(g(3)) + 5 \cdot g(f(6))$ é:

a) $(-3) \cdot f(g(3)) + 5 \cdot g(f(6)) = -4$.

b) $(-3) \cdot f(g(3)) + 5 \cdot g(f(6)) = 0$.

c) $(-3) \cdot f(g(3)) + 5 \cdot g(f(6)) = 2$.

d) $(-3) \cdot f(g(3)) + 5 \cdot g(f(6)) = 5$.

e) $(-3) \cdot f(g(3)) + 5 \cdot g(f(6)) = -3$.

2. Usamos funções compostas quando temos um cálculo "dentro" de outro, ou seja, quando usamos uma função e, na sequência, a partir do valor obtido por essa função (que pertence ao seu conjunto imagem), usamos alguma lei de formação (que até pode ser igual à primeira) para levar o valor obtido a um novo valor resposta.

Considere as funções $f(x)=3x^2-5$ e $g(x)=9x-2$.

Assinale a alternativa que apresenta a função composta $(f\circ g)(x)$.

a) $(f\circ g)(x)=512x^2-96x+14$.

b) $(f\circ g)(x)=39x^2-54x+31$.

c) $(f\circ g)(x)=96x^2-27x+81$.

d) $(f\circ g)(x)=243x^2-108x+7$.

e) $(f\circ g)(x)=256x^2-64x+49$.

3. Se $f:A\to B$ é uma função bijetora, para todo $a\in A$ associa $b\in B$, segundo a lei $b=f(a)$, então, a função $g:B\to A$ que para todo $b\in B$ associa $a\in A$, segundo a lei $g(b)=a$, é denominada de inversa da função f, e escrevemos $g=f^{-1}$.

Para funções inversas f e $g=f^{-1}$, vale que $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$.

Considere a função $f(x)=2x^3+5$. A alternativa que apresenta a função inversa desta função é:

a) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{5}}$.

b) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{2}}$.

c) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+5}{2}}$.

d) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}}+5$.

e) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-5}-2$.

Referências

CONNALLY, Eric; HUGHES-HALLETT, Deborah; GLEASON, Andrew M. et al. **Funções para modelar variações (uma preparação para o cálculo)**. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 6. ed. São Paulo: Editora Atual, 1985. 333 p, v. 1.

MACHADO, Nilson José. **Matemática por assunto**: lógica, conjuntos e funções. São Paulo: Scipione, 1988. 240 p, v. 1.

MORAIS, José Luiz de. **Matemática e lógica para concursos**. Editora Saraiva: São Paulo, 2012.

MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton. **Cálculo (funções de uma e várias variáveis)**. São Paulo: Saraiva, 2003.

NERY, Chico; TROTTA, Fernando. **Matemática para o Ensino Médio (volume único)**. São Paulo: Editora Saraiva, 2001.

VERAS, Lilia Ladeira. **Matemática Aplicada à Economia**. São Paulo: Editora Atlas, 1991.

ISBN 978-85-522-0040-6