



# Dinâmica de corpos rígidos



# Dinâmica de corpos rígidos

Carlos Sato Baraldi

Oswaldo Luiz dos Santos Pereira

© 2017 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

**Presidente**

Rodrigo Galindo

**Vice-Presidente Acadêmico de Graduação**

Mário Ghio Júnior

**Conselho Acadêmico**

Alberto S. Santana

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Cristiane Lisandra Danna

Danielly Nunes Andrade Noé

Emanuel Santana

Grasiele Aparecida Lourenço

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Paulo Heraldo Costa do Valle

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

**Revisão Técnica**

André Luís Delvas Fróes

Marcio J. Cuccolo Rosaes

**Editorial**

Adilson Braga Fontes

André Augusto de Andrade Ramos

Cristiane Lisandra Danna

Diogo Ribeiro Garcia

Emanuel Santana

Erick Silva Griep

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

Dias, Carlos Sato Baraldi

D541d Dinâmica de corpos rígidos / Carlos Sato Baraldi Dias,

Oswaldo Luiz dos Santos Pereira. – Londrina : Editora e

Distribuidora Educacional

S.A., 2017.

232 p.

ISBN 978-85-8482-813-5

1. Engenharia mecânica. 2. Dinâmica dos corpos rígidos.

Mecânica do corpo rígido. I. Pereira, Oswaldo Luiz dos

Santos. II. Título.

CDD 531.3

---

2017

Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza

CEP: 86041-100 – Londrina – PR

e-mail: editora.educacional@kroton.com.br

Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

# Sumário

<b>Unidade 1   Cinemática planar de corpos rígidos</b>	<b>7</b>
Seção 1.1 - Cinemática no plano	9
Seção 1.2 - Análise de movimento absoluto	25
Seção 1.3 - Análise de movimento relativo	41
<b>Unidade 2   Dinâmica planar de corpos rígidos</b>	<b>59</b>
Seção 2.1 - Corpos rígidos, inércia e massa	61
Seção 2.2 - Translação de corpos rígidos	79
Seção 2.3 - Rotações de corpos rígidos	95
<b>Unidade 3   Princípios de conservação (energia, momentos e trabalho)</b>	<b>113</b>
Seção 3.1 - Métodos de energia e quantidade de movimento	115
Seção 3.2 - Momento angular e momento linear	132
Seção 3.3 - Trabalho e a conservação de energia	148
<b>Unidade 4   Movimentos de corpos em três dimensões</b>	<b>170</b>
Seção 4.1 - Noções vetoriais no espaço tridimensional	172
Seção 4.2 - Conceitos gerais do espaço tridimensional	191
Seção 4.3 - Exemplos de movimentos de corpos rígidos	208



# Palavras do autor

Seja bem-vindo. Neste livro aprenderemos a descrever movimentos de corpos rígidos, seja se movendo em uma reta ou girando, no plano ou no espaço tridimensional. Os conhecimentos adquiridos aqui serão importantes para sua vida profissional, pois na indústria, engenheiros comumente precisam desenvolver mecanismos móveis e, para isso, precisam descrever com grau de precisão seus movimentos. Por exemplo, um giroscópio em um navio ou aeronave, utilizado como mecanismo de navegação, ou um pistão de um motor de automóvel, ou um eixo diferencial de um carro.

Você compreenderá que as competências desenvolvidas neste livro didático são valorizadas no mercado de trabalho, que está sempre em busca de pessoas com excelência técnica e capacidade analítica e de raciocínio crítico, capazes de solucionar problemas complexos, ou mesmo tornar mais eficientes e efetivas, soluções já existentes. Em particular, o objetivo deste estudo é que você compreenda e aplique os conhecimentos necessários para descrição dos movimentos como translação, rotação e precessão de corpos rígidos.

Na primeira unidade, você será apresentado à cinemática planar, aprenderá a trabalhar com vetores e movimentos sem levar em consideração forças. Na segunda unidade, você aprenderá sobre a dinâmica no plano, lidando com forças e suas consequências, aplicando as Leis de Newton para rotação e translação. Na terceira unidade, trataremos sobre os métodos de energia e trabalho, conservação de energia, momento linear e angular. Na quarta unidade serão apresentados conceitos de dinâmica de corpos rígidos no espaço tridimensional.



# Cinemática planar de corpos rígidos

## Convite ao estudo

Estamos prontos para iniciar mais uma etapa na sua formação, aprendendo a descrever movimentos de corpos rígidos. Nosso objetivo principal é que você aprenda mais sobre as ferramentas necessárias para descrever como corpos rígidos se comportam, realizando diversos tipos de movimento e levando em conta referenciais móveis. Ao fim da unidade, você será capaz de descrever movimentos de corpos rígidos no plano euclidiano e descrever as suas equações cinemáticas.

O conceito de corpo rígido é uma idealização que físicos e engenheiros criaram para descrever melhor o movimento de máquinas e mecanismos. Em um corpo rígido, quando tomamos distâncias entre dois pontos de corpos extensos e os submetemos a estresse como movimentos, rotações, forças e torques, essa distância permanece inalterada, ou seja, o corpo não é deformado. Ao contrário das partículas, que têm suas dimensões desprezadas, pois o comprimento de sua trajetória é muito grande em relação às próprias dimensões do corpo, quando falamos em corpos rígidos precisamos levar em consideração o seu tamanho.

Na indústria, geralmente são construídos mecanismos móveis, com partes móveis, formando sistemas e máquinas complexos, que precisam ser constantemente avaliados se estão em funcionamento dentro das especificações. Para isso, é necessário dominar a linguagem de dinâmica de corpos rígidos, para analisar os possíveis cenários aos quais essas máquinas podem estar sujeitas, como aplicação de forças externas, vibrações, rotações etc.

Nesta unidade, vamos nos colocar no lugar de um projetista que trabalha em uma indústria que constrói atrações para parques de diversões, cujo objetivo, em seu trabalho, é modelar matematicamente o movimento de alguns dos brinquedos mais

utilizados, para alimentar um software que realiza simulações computacionais, compara com os dados reais de movimento e emite relatórios sobre a segurança e bom funcionamento desses brinquedos, emitindo avisos regulares para os clientes.

Um grande parque de diversões, cliente antigo de sua empresa, acaba de adquirir uma nova roda gigante, e você precisa descrever matematicamente seus movimentos, verificando posição, velocidade e aceleração. O software também receberá as informações reais da roda gigante, quanto à velocidade, aceleração angular e à quantidade de voltas que a roda gigante dá por dia. Assim, o cliente receberá regularmente relatórios completos, incluindo o planejamento de revisões e trocas de peças, engrenagens e motor, de acordo com o tempo de vida médio dos mesmos.

Para ser possível realizar essa tarefa, na primeira seção aprenderemos sobre sistemas de referências, sistemas de coordenadas e sobre como representar os movimentos de corpos rígidos nesses sistemas por meio do cálculo vetorial. Na segunda seção, aplicaremos os conceitos da primeira seção em referenciais onde o movimento de corpos rígidos é absoluto, descrevendo rotações, translações e a composição dos dois tipos de movimento. Na terceira seção, aplicaremos conceitos de sistemas de referenciais para movimentos relativos, onde a origem dos sistemas também se movimenta, e comporemos os movimentos dos corpos rígidos em relação a esses sistemas em movimentos.

# Seção 1.1

## Cinemática no plano

### Diálogo aberto

Nesta seção, você estudará a cinemática de corpos rígidos: aprenderemos, primeiramente, como descrever esses movimentos, em termos das trajetórias desses corpos rígidos e seu equacionamento. Para isso, iremos consolidar os conceitos de vetores, sistemas de referências, sistemas de coordenadas; e como representar a posição, velocidade e aceleração desses corpos rígidos no Plano Euclidiano e no espaço de três dimensões.

Esses temas que mencionamos são muito importantes, especialmente na indústria, nas empresas de tecnologia, automotivas, automação, nas empresas de monitoramento de geolocalização e nas empresas de tecnologia aérea, pois muitos mecanismos utilizados nessas indústrias precisam de equações de movimento para descrever o comportamento de suas partes móveis.

Lembre-se: vamos nos colocar no lugar de um projetista que trabalha em uma empresa que constrói atrações para parques de diversões. Você precisa descrever matematicamente o funcionamento da roda gigante a partir das equações de movimento. Assim, você poderá construir um modelo computacional da roda gigante no software da empresa, marcando a posição dos bondinhos em função do tempo.

Leia o texto com atenção e anote suas dúvidas, procure refletir com paciência sobre os conceitos abordados e, se for necessário, releia o texto, busque outras referências ou mesmo tutoria para retirar suas dúvidas. Após essa leitura e reflexão cuidadosa, procure exercitar e testar seu entendimento conceitual, trabalhando individualmente nos exercícios propostos e resolvendo os exemplos sem observar a solução. É imprescindível que essa estratégia seja levada a sério e seja executada com cuidado e paciência, pois há muitos conceitos abstratos que precisam ser discutidos para serem

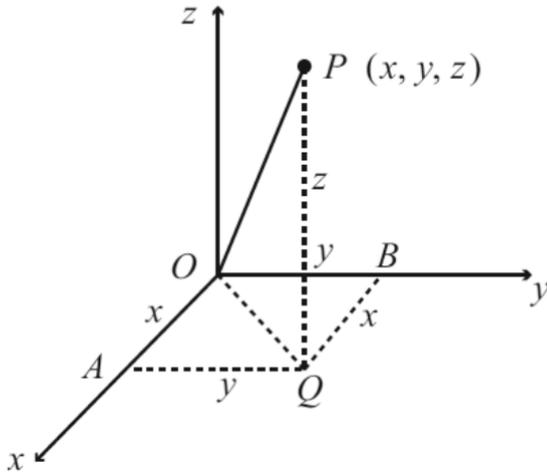
de fato compreendidos. É muito importante realizar todas as tarefas e atividades propostas, tais como ler o livro didático e recorrer à bibliografia sugerida.

## Não pode faltar

Quando estudamos Física, precisamos representar as grandezas, pois as medidas são muito importantes; só podemos fazer ciência e tecnologia com elementos e experimentos que podem ser medidos de alguma forma. Temos grandezas físicas que precisam apenas de uma unidade de grandeza para que sejam completamente descritas. São as grandezas **escalares**. Por exemplo, se no laboratório você verifica a massa de uma componente em uma balança e precisa informar a outra pessoa, irá dizer algo como: "esta componente tem uma massa de 100 kg."; ou se você cronometrar o tempo que um carro leva para percorrer um trajeto vai falar o tempo em horas, minutos ou segundos. Como você já sabe, há também grandezas que precisam de um pouco mais de especificação, e nesta seção trataremos delas; são as grandezas **vetoriais**. Elas precisam de magnitude (ou módulo, ou comprimento), direção e sentido para serem completamente descritas. Nesta seção iremos utilizar esses conceitos no contexto dos corpos rígidos, desenvolvendo ainda mais nossa intuição geométrica, aplicando a álgebra dos vetores de forma sistemática.

Um vetor  $\vec{v}$  qualquer sobre o plano cartesiano pode ser representado por meio da combinação linear dos vetores da base canônica  $\vec{i} = (1; 0)$  e  $\vec{j} = (0; 1)$ , que representam um deslocamento de módulo 1 na direção positiva dos eixos x e y, respectivamente. Os versores da base canônica em três dimensões, ou espaço euclidiano tridimensional, são  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0; 1; 0)$  e  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ . Como pode ser visto na Figura 1.1, vemos que o vetor  $\vec{OP} = (x; y; z)$  pode ser representado na base canônica do espaço euclidiano da seguinte forma:  $\vec{OP} = (x; y; z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

Figura 1.1 | Espaço euclidiano de três dimensões



Fonte: elaborada pelo autor.

Além das já conhecidas operações com vetores que foram estudadas em outros cursos, como soma vetorial e combinação linear, podemos também aplicar operações do cálculo diferencial e integral, ou seja, as componentes dos vetores podem ser funções bem-comportadas (contínuas e diferenciáveis).



### Exemplificando

Seja a seguinte função vetorial,  $\vec{r}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t\text{g}(t))$ , que representa o vetor posição do centro de massa (CM) de um corpo rígido no espaço de três dimensões como função do tempo. Encontre a função que descreve a velocidade desse ponto do corpo rígido.

#### Solução:

A posição varia com o tempo, e para encontramos a velocidade desse corpo rígido, basta derivar o vetor posição em relação ao tempo:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-\text{sen}(t), \cos(t), \text{sec}^2(t)).$$

Note que derivamos cada componente do vetor posição individualmente, compondo, assim, o novo vetor velocidade.

Mas o plano e o espaço euclidiano não servem apenas para representar vetores em geral, em Física, eles são utilizados para descrever equações de movimento de corpos (rígidos ou não) e partículas, por meio dos chamados **sistemas de referências**, ou simplesmente **referenciais**, que podem ser ou referenciais inerciais ou referenciais não inerciais. Os **referenciais inerciais** se comportam como corpos em equilíbrio estático, ou em equilíbrio cinético. Já os **referenciais não inerciais** se movem com aceleração, constante ou não. Quando o referencial é inercial e se encontra em equilíbrio estático, o movimento dos corpos rígidos é chamado **movimento absoluto**, pois não há efeito de velocidade relativa entre observador e corpo rígido observado (cada um constituindo individualmente um referencial).

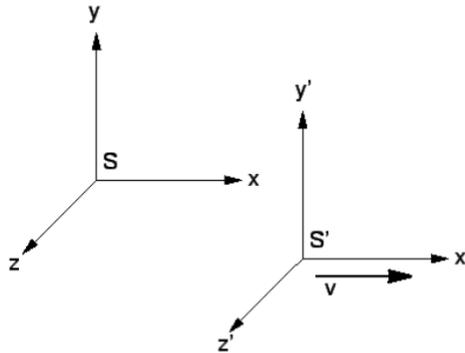


### Assimile

Escolher um sistema de referências em geral envolve a escolha de uma origem, uma direção para os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e, em alguns casos, também um instante de tempo  $t$ .

Um exemplo prático de referencial inercial é um carro se movimentando com velocidade constante. Coloque-se dentro desse carro. Se você não olhar para fora, não perceberá que está em movimento. Imagine agora que você olha pela janela e vê postes de luz se movimentando em relação a você. Em um referencial inercial, não conseguimos distinguir se nós estamos nos movendo em relação ao que observamos ou se o objeto que observamos está se movimentando em relação a nós. É claro que na vida real você sabe que quem está se movendo é o seu carro, mas em termos de teoria física, essa impossibilidade de distinção é muito importante.

Figura 1.2 | Exemplo de referenciais inerciais em equilíbrio cinético (movimento relativo)



Fonte: elaborada pelo autor.

No caso do sistema referencial inercial em movimento relativo, as equações de movimento obedecem as chamadas transformações de Galileu. No exemplo da Figura 1.2 existe um movimento uniforme na direção do eixo  $x$ . No referencial  $S$ , algum ponto de um corpo rígido possui coordenadas  $(x, y, z, t)$ . Para o referencial  $S'$  esse corpo rígido teria as coordenadas  $(x', y', z', t') = (x - vt, y, z, t)$ , e a relação entre as coordenadas dos dois referenciais são as chamadas transformações de Galileu.

Compreenda: para o referencial  $S$  (por exemplo, uma pessoa em repouso na calçada) um determinado ponto do corpo rígido possui coordenadas  $(x, y, z, t)$ . Para uma pessoa no carro, o corpo rígido parece se afastar, com velocidade igual à do carro no sentido oposto (negativo, portanto  $-v$ ), e assim a coordenada do ponto é  $(x', y', z', t') = (x - vt, y, z, t)$ .

Isso fica ainda mais evidente quando realizamos a derivada da coordenada  $X'$  em relação ao tempo, obtendo a chamada lei de composição de movimentos:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \rightarrow V_{S'} = V_S - v$$

Note que estamos tratando de um caso bastante geral. O corpo rígido não precisa estar em repouso, portanto  $\frac{dx}{dt} = V_S$ , que pode ou não ser zero, constante, ou mesmo uma função do tempo.

Independentemente do estado do corpo rígido, a resposta fornecida pelo equacionamento apresentado estará correta.

Além do movimento relativo de translação, podemos imaginar outro referencial  $S'$  que gira com velocidade angular  $|\vec{\omega}| = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ , com  $f$  representando a frequência, e  $T$  o período da rotação. A unidade relevante é radianos por segundo.

Seja  $\vec{R}$  o vetor posição desse referencial em relação ao referencial  $S$  estático. Nesse caso, a posição de um objeto qualquer no referencial  $S$  está relacionada com a posição do objeto no referencial  $S'$  pela equação a seguir:

$$\vec{r}_S = \vec{r}_{S'} + \vec{R}.$$

Note que basta somar a posição observada no referencial  $S'$  com a posição da própria origem do referencial  $S'$  com relação ao observador parado (referencial estático).

Note que o referencial  $S'$  está girando, de modo que o vetor  $\vec{R}$  não é constante. Para um observador sobre esse referencial, o referencial  $S$  está em movimento circular (lembre-se, se você começar a girar, terá a impressão de que o ambiente à sua volta estará girando). Essa relação é bem descrita por senos e cossenos da seguinte maneira:

$$\vec{R}(t) = R \cdot \cos(\omega t) \hat{i} + R \cdot \text{sen}(\omega t) \hat{j},$$

onde  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$  é o vetor constante velocidade angular. Como esse vetor varia com o tempo? Podemos descobrir realizando uma derivada:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -\omega \cdot R \cdot \text{sen}(\omega t) \hat{i} + \omega \cdot R \cdot \cos(\omega t) \hat{j}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times (R \cdot \cos(\omega t) \hat{i} + R \cdot \text{sen}(\omega t) \hat{j}) = \vec{\omega} \times \vec{R}.$$

Mostre você mesmo o último passo da demonstração acima. Note que o que está dentro dos parênteses maiores é justamente o vetor posição  $\vec{R}(t)$ .

A interpretação física e geométrica desta fórmula é um conceito

muito importante em Dinâmica. A relação nos diz que a velocidade linear é sempre tangente à curva descrita pelo ponto de interesse. O produto vetorial resulta sempre em um vetor perpendicular aos dois vetores que estão sendo multiplicados vetorialmente, isso quer dizer que a velocidade tangencial não está na direção da velocidade angular, nem do vetor posição.



### Refleta

Refleta sobre o que o produto vetorial representa geometricamente. Na fórmula  $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{R}$  o vetor resultante não aponta na direção de  $\vec{\omega}$  nem de  $\vec{R}$ , mas em outra direção, perpendicular a essas duas direções. Tente, por meio de desenhos e utilizando a regra da mão direita, entender e encontrar essa direção perpendicular.

Derivando  $\vec{r}_s = \vec{r}_s + \vec{R}$  em relação ao tempo, chegamos ao seguinte resultado:

$$\frac{d\vec{r}_s}{dt} = \frac{d\vec{r}_s}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{r}_s}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{R}.$$

E como seria o caso mais geral possível, levando em consideração um referencial que realiza tanto uma translação quanto uma rotação, ao mesmo tempo? E descrever o movimento de um determinado ponto de um corpo rígido qualquer, levando em consideração tanto a translação quanto a rotação do referencial? Basta compormos os dois movimentos!

$$\vec{v}_s = \vec{v} + \vec{v}_s + \vec{\omega} \times \vec{R}.$$

Para descrever a cinemática de um corpo rígido, precisamos também encontrar sua aceleração. Sabemos que a derivada segunda da posição resulta em uma aceleração. Se derivarmos duas vezes em relação ao tempo, a lei de composição de posição do movimento do corpo rígido, temos a seguinte relação:

$$\frac{d\vec{v}_s}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}_s}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}).$$

Aplicando a regra da cadeia na última derivada da relação anterior, temos que:

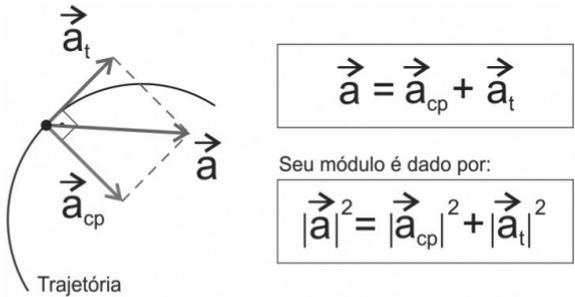
$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt}.$$

Lembrando que  $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{R}$  e que a aceleração angular é dada por  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ , temos que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}).$$

Onde  $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{R}$  é a chamada aceleração tangencial e  $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$  é a aceleração normal, ou mais conhecida como aceleração centrípeta. A soma vetorial das duas acelerações compõe a aceleração total de rotação. Na Figura 1.3, podemos ver a decomposição da aceleração nas componentes tangencial e centrípeta.

Figura 1.3 | Figura que ilustra as componentes tangencial e centrípeta da aceleração total

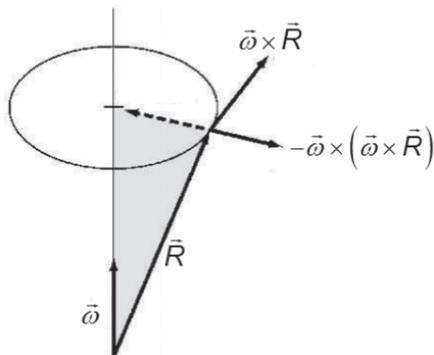


Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, a lei de composição de acelerações tem sua forma geral dada por:

$$\vec{a}_s = \vec{a} + \vec{a}_s + \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}).$$

Figura 1.4 | Ilustração das componentes de movimento de rotação de um corpo rígido



Fonte: elaborada pelo autor.

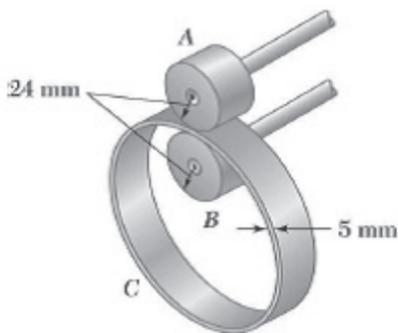
Na Figura 1.4, vemos um movimento de rotação de um determinado ponto do corpo rígido: a velocidade tangencial ( $\vec{\omega} \times \vec{R}$ ), velocidade angular ( $\vec{\omega}$ ), vetor posição ( $\vec{R}$ ) e a aceleração normal ( $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$ ).



### Exemplificando

A Figura 1.5 mostra um disco A que gira com velocidade angular constante. Não há deslizamento entre o disco A, o anel C e o disco B. Como mostra na figura, os discos A e B possuem o mesmo raio  $R_A = R_B$ , e o disco C possui raio da abertura  $R_C$  e uma pequena espessura  $e$ . Determine a relação entre as três velocidades angulares  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ , e  $\omega_C$ .

Figura 1.5 | Mecanismo composto de dois discos circulares e um anel



Fonte: Beer (2009).

### Solução:

Sabemos que quando discos e anéis estão girando em contato, neste ponto a velocidade tangencial dos corpos rígidos são iguais. Como temos a relação  $v = \omega \cdot r$ , se igualarmos essa relação para os dois corpos rígidos em contato, para o disco A e para o anel C, temos:

$$\omega_A \cdot R_A = \omega_C \cdot (R_C + e),$$

onde  $e$  é a espessura do anel C (que precisamos somar ao raio da abertura interna do anel), e os índices representam os corpos. A partir dessa relação, podemos afirmar que  $\omega_A > \omega_C$ , pois  $R_A < R_C + e$ .

Da mesma forma, temos a seguinte relação, se analisarmos o disco B, e o anel C:

$$\omega_B \cdot R_B = \omega_C \cdot R_C.$$

Repare que, como o disco B se encontra dentro do anel, devemos descontar a espessura do raio. Podemos afirmar que  $\omega_B > \omega_C$ , pois  $R_B < R_C$ .

Dividindo a relação  $\omega_A \cdot R_A = \omega_C \cdot (R_C + e)$  por  $\omega_B \cdot R_B = \omega_C \cdot R_C$ :

$$\frac{\omega_A \cdot R_A}{\omega_B \cdot R_B} = \frac{\omega_C \cdot (R_C + e)}{\omega_C \cdot R_C}.$$

Simplificando a relação anterior, lembrando que  $R_A = R_B$ , temos que:

$$\omega_A = \left(1 + \frac{e}{R_C}\right) \cdot \omega_B.$$

Como o fator entre parênteses é maior do que 1, então  $\omega_A > \omega_B$ . Assim, temos a seguinte relação entre as velocidades angulares:

$$\omega_A > \omega_B > \omega_C.$$

Já aprendemos o que são referenciais, como o movimento entre eles afeta as equações de movimento, como representar trajetórias de corpos rígidos nesses sistemas de referência utilizando vetores, além de fazermos tudo isso utilizando coordenadas cartesianas. Agora, vamos aprender como utilizar coordenadas curvilíneas. Vimos que para vetores  $(x, y, z)$ , cada coordenada é representada por um versor, ou seja,  $(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , onde  $\hat{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{j} = (0, 1, 0)$  e  $\hat{k} = (0, 0, 1)$ . Em breve, vamos utilizar novos sistemas de coordenadas e aprender como fazer mudanças de um sistema para outro. Então, aproveitamos o momento para lembrar brevemente alguns sistemas de coordenadas importantes.

Em duas dimensões, temos as **coordenadas polares**  $(r, \theta)$ , que se correlacionam com as cartesianas da seguinte maneira:  $x = r \cdot \cos \theta$  e  $y = r \cdot \text{sen} \theta$ .

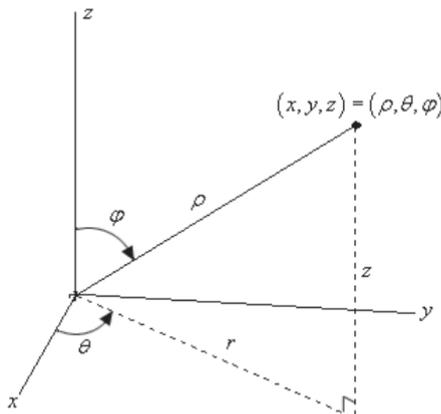
Em três dimensões, podemos estender as coordenadas polares para as **cilíndricas**:

$$(x, y, z) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \text{sen} \theta, z)$$

E temos também as **coordenadas esféricas**:

$(x, y, z) = (\rho \cdot \text{sen} \theta \cdot \cos \phi, \rho \cdot \text{sen} \theta \cdot \text{sen} \phi, \rho \cdot \cos \theta)$ , onde representamos o raio da esfera como  $\rho$ .

Figura 1.6 | Ilustração das coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas e esféricas



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 1.6, é possível ver a representação geométrica entre os sistemas de coordenadas cartesiano e esférico.



### Faça você mesmo

Sabemos que  $(x, y) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \text{sen} \theta)$  para as coordenadas polares no plano. Mostre que a relação inversa, polares  $\leftrightarrow$  cartesianas, é dada por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$



### Pesquise mais

Aprofunde-se no tema! Leia o capítulo 15 da referência:

BEER, F. P.; JOHNSTON, R.; CORNWELL, P. J. **Mecânica vetorial para engenheiros**: dinâmica. 9. ed. Porto Alegre: MGH, 2009.

Lembre-se, você tem acesso gratuito ao livro fazendo login em sua área do estudante e depois acessando o link disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580551440/cfi/337!/4/4@0.00:11.5>>. Acesso em: 6 out. 2016.

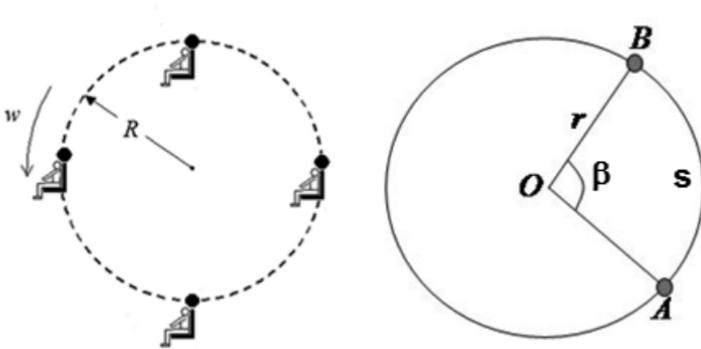
## Sem medo de errar

Você deve se lembrar de que iremos nos colocar no papel de um projetista que trabalha para uma empresa que constrói atrações para parques de diversões, além de alimentarmos o software da empresa com informações a respeito da roda gigante, que tem um raio de 20 m e completa uma volta a cada 100 s. Você precisa equacionar e inserir no software o vetor posição de cada bondinho.

### Resposta:

Para resolver este problema prático, vamos considerar a roda gigante como um corpo rígido em formato de disco, com raio  $R$ . O seu centro será o referencial absoluto (inercial e parado), porém, em suas bordas, se encontram bondinhos, nos quais os passageiros passeiam, logo, será um referencial em movimento circular uniforme.

Figura 1.7 | Esquematisação de uma roda gigante - nas imagens à esquerda e à direita, ilustração da relação entre arco, ângulo e raio



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos definir a posição angular em função do arco de comprimento. Observando na Figura 1.7, na imagem da direita, temos um círculo de raio  $r$ , e  $s$  é o comprimento do arco AB, relacionado ao ângulo  $\beta$ . Esse ângulo é relacionado com o arco e o raio pela seguinte relação:

$\beta(t) = \frac{s}{r}$ , onde  $r$  é o raio do círculo. Dessa forma, podemos descrever a posição angular de cada bondinho  $\theta(t)$  pela relação  $s(t) = R \cdot \theta(t)$ , onde a posição angular, considerando um bondinho que inicialmente está localizado em  $\theta_0 = 0$ , será  $\theta(t) = \omega t$ .

O vetor posição para cada bondinho é dado por:

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos(\omega t) \hat{i} + R \cdot \text{sen}(\omega t) \hat{j}.$$

O projetista verifica que um dos modos de giro da roda gigante é de um giro completo a cada 100 segundos, ou seja, a frequência de rotação é  $f(t) = 0,01 \text{ s}^{-1}$ , de forma que a velocidade angular será  $\omega(t) = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 0,01 \approx 0,0628 \text{ rad/s}$ . Daí:

$$\vec{r}(t) = 20 \cdot \cos(0,0628 \cdot t) \hat{i} + 20 \cdot \text{sen}(0,0628 \cdot t) \hat{j}$$

Agora, você inseriu as informações no sistema de sua empresa, e as primeiras simulações já podem ser produzidas. Para descrever a posição de todos os bondinhos, o projetista só precisa contar quantos bondinhos há na roda gigante e dividir  $2\pi$  pela quantidade

N de bondinhos. Considerando um bondinho qualquer em  $\phi = 0$ , basta somar a fase para cada um. Dessa maneira, se tivermos 10 bondinhos, para o segundo bondinho a posição será dada por:

$$\vec{r}(t) = 20 \cdot \cos(0,0628 \cdot t + \pi / 5) \hat{i} + 20 \cdot \text{sen}(0,0628 \cdot t + \pi / 5) \hat{j}.$$

Para o terceiro bondinho:

$$\vec{r}(t) = 20 \cdot \cos(0,0628 \cdot t + 2\pi / 5) \hat{i} + 20 \cdot \text{sen}(0,0628 \cdot t + 2\pi / 5) \hat{j}.$$

E assim sucessivamente...

Numerando os bondinhos a partir daquele que se encontra na origem da marcação do ângulo no instante inicial, como bondinho  $i=1$ , até o último, bondinho  $i = 10$ , temos a posição descrita por:

$$\vec{r}_i(t) = 20 \cdot \cos(0,0628 \cdot t + (i - 1) \cdot \pi / 5) \hat{i} + 20 \cdot \text{sen}(0,0628 \cdot t + (i -$$

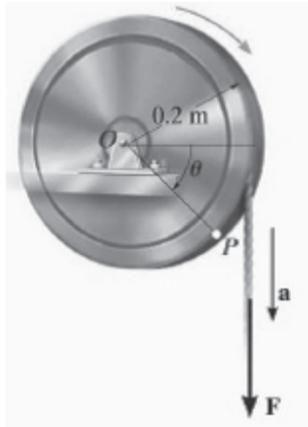
## Avançando na prática

### Sistema corda + roldana (corpo rígido)

#### Descrição da situação-problema

Na Figura 1.8, você pode ver a figura que ilustra um sistema corda + roldana. Uma corda é amarrada ao redor de uma roldana, de raio igual a  $0,2m$ , que se encontra inicialmente em repouso. Uma força  $\vec{F}$  foi aplicada à corda, dando a ela uma aceleração linear, cuja lei obedece a seguinte relação  $a(t) = 4t$ , onde o tempo é medido em segundos. Encontre a velocidade e a aceleração angular da roldana em função do tempo no instante  $t = 3s$ .

Figura 1.8 | Ilustração de um sistema corda + roldana



Fonte: Hibbeler (2012, p. 255).

### Resolução da situação-problema

O enunciado nos disse que após a força ser aplicada, a aceleração linear da extremidade da roldana obedece a seguinte relação:  $a(t) = 4t$ . Sabemos que  $a = \alpha \cdot R$ , onde  $\alpha$  é a aceleração angular e  $R$  é o raio do corpo rígido circular. O raio da roldana possui 0,2 m, dessa maneira, podemos encontrar a lei da aceleração angular:

$$\alpha(t) = \frac{a(t)}{R} = \frac{4 \cdot t}{0,2} = 20 \cdot t.$$

Para encontrarmos a função que descreve a velocidade angular, devemos integrar a relação que encontramos anteriormente para a aceleração angular:

$$\omega(t) = \int \alpha(t) dt = 20 \cdot \frac{t^2}{2} + C = 10 \cdot t^2 + C.$$

A roldana parte do repouso, de modo que  $C = 0$ . Assim:  $\omega(t) = 10 \cdot t^2$ .

No instante 3s, teremos:  $\omega = 10 \cdot (3)^2 = 90 \text{ rad/s}$ .

### Faça valer a pena

**1.** Um engenheiro precisa realizar análises sobre o movimento de um corpo rígido e apresentar essas análises em um relatório para seu gestor.

O corpo rígido possui um ponto A e um ponto B, e o vetor posição que liga os dois pontos é  $\vec{R}_{A/B} = (1;0;1)$  e sua velocidade angular descrita pelo vetor  $\vec{\omega} = (1;0;0)$ , onde as unidades de grandeza se encontram no sistema internacional (SI).

Selecione a alternativa que contém o vetor velocidade (tangencial) do corpo rígido.

- a) (1;4;3).
- b) (1;2;1).
- c) (0;-1;0).
- d) (2;0;5).
- e) (3;-1;2).

**2.** Uma haste rígida tem dois pontos marcados A e B, e o vetor posição que liga A e B é dado por  $\vec{R}_{A/B} = (-1;1;2)$  e a haste gira com velocidade angular descrita pelo vetor  $\vec{\omega} = (3;4;0)$ . Onde os sistemas de unidade se encontram no SI.

Selecione a alternativa que contém o vetor aceleração normal do corpo rígido.

- a) (28;-21;-50).
- b) (-15;41;10).
- c) (32;43;25).
- d) (-12;19;23).
- e) (-31;45;20).

**3.** Uma haste rígida tem a posição de um ponto A em seu comprimento descrita pelo vetor  $\vec{R}_A = (-1;1;-2)$ , e um vetor posição de um ponto B dado por  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  em relação a um referencial fixo. A haste gira ao redor do ponto A com velocidade angular descrita por  $\vec{\omega} = (1;0;4)$ . O raio é dado em metros e a velocidade angular em  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Calcule o módulo da velocidade tangencial do corpo rígido e selecione a alternativa correta.

- a) 7,280 m/s.
- b) 4,583 m/s.
- c) 5,110 m/s.
- d) 10,817 m/s.
- e) 3,269 m/s.

# Seção 1.2

## Análise de movimento absoluto

### Diálogo aberto

Caro estudante, chegamos à segunda seção da primeira unidade. Já descobrimos o que são referenciais e sistemas de coordenadas, além de saber sobre como usar vetores para representar movimentos de corpos rígidos. Agora, aplicaremos esses conceitos em relação a um referencial fixo, ou seja, parado em relação à Terra, descrevendo o movimento absoluto em relação a esses referenciais.

Você deve se lembrar que vamos nos colocar no lugar de um projetista que trabalha com atrações para parques de diversões, e seu trabalho é alimentar o software da empresa com a descrição matemática do movimento dos brinquedos, para que ele realize simulações computacionais e emita regularmente ao cliente relatórios sobre a segurança e o bom funcionamento.

Você agora precisa avançar com sua análise da roda gigante, calculando a velocidade tangencial de um bondinho. Você também precisa testar o software, verificando se ele emite um alerta quando a velocidade do bondinho varia em mais de 5% do valor recomendado, o que aumenta o desgaste das peças e gera desconforto aos clientes.

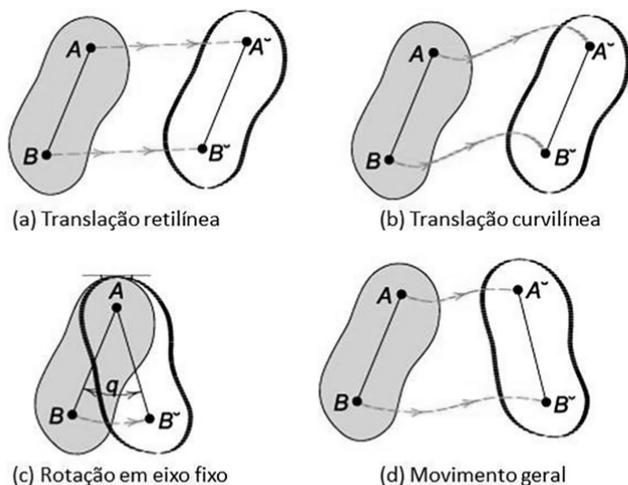
Leia o texto com cuidado e procure refletir sobre todos os conceitos apresentados nesta seção, pois eles serão de muita importância para adquirir novos conhecimentos nas unidades posteriores. Faça os exercícios, e sempre busque se aprimorar na bibliografia sugerida.

### Não pode faltar

Em um corpo rígido, a distância entre quaisquer dois pontos sempre permanecerá inalterada, independentemente de que tipo de movimento ou força que estiver atuando sobre o corpo.

Estudaremos referenciais absolutos, analisando apenas os movimentos de translação em relação a um observador fixo ou de rotação em torno de um ponto fixo, o que resulta no movimento geral do corpo rígido para referenciais absolutos, como pode ser visto na Figura 1.9.

Figura 1.9 | Exemplos de movimentos de corpos rígidos no plano



Fonte: Merian e Kraige (2009, p. 240).

**Translação:** esse tipo de movimento ocorre quando uma linha traçada entre dois pontos do corpo permanece paralela durante o movimento, ou seja, o movimento para os dois pontos é sempre paralelo. A translação pode ser retilínea, como mostra o item (a) da Figura 1.9, ou curvilínea como mostra o item (b) da Figura 1.9.

**Rotação em eixo fixo:** quando um corpo rígido rotaciona em torno de um eixo fixo, todos os pontos do corpo percorrem um movimento circular, exceto aquele que se encontra preso ao eixo fixo do sistema, como mostra o item (c) da Figura 1.9.

**Movimento geral no plano:** é o movimento resultante da combinação entre os movimentos de translação, que acontece em relação a um sistema fixo de coordenadas, e rotação, que acontece em torno de um eixo fixo no próprio corpo rígido, como mostra o item (d) da Figura 1.9.

Por sinal, agora é um excelente momento para introduzir uma nova notação para versores. Faremos isso porque pode ser necessário trabalhar com diversos sistemas de coordenadas, e não somente com as coordenadas cartesianas. Uma notação mais geral é utilizar  $\hat{\mathbf{e}}$ , seguido de um subscrito que representa a coordenada à qual ele se refere.



Pesquise mais

Os movimentos possíveis para um corpo rígido sobre um plano estão indicados na figura 1.9: **Translação retilínea**, **translação curvilínea** ou **rotação em torno de um eixo fixo**. A combinação de tais movimentos resulta em um **movimento geral**.

Por exemplo, utilizaremos  $\hat{\mathbf{e}}_x$  ao invés de  $\hat{\mathbf{j}}$ , onde  $\vec{\mathbf{e}}$  representará o vetor direção, o subscrito representará a coordenada a qual se refere (no caso a direção x) e o chapéu representa que o vetor é unitário (módulo igual a 1).

Quando falamos de translações em relação a um referencial fixo, temos que fixar um vetor posição  $\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\hat{\mathbf{e}}_x + y(t)\hat{\mathbf{e}}_y + z(t)\hat{\mathbf{e}}_z$  do centro de massa ou de qualquer outro ponto de interesse de um corpo rígido. No caso  $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$ , são os versores que formam a base do espaço euclidiano, ou seja, são três vetores que, combinados, permitem a construção de qualquer outro vetor tridimensional. A velocidade é dada pela derivada da função posição em relação ao tempo:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy}{dt}(t)\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dz}{dt}(t)\hat{\mathbf{e}}_z .$$

A aceleração de um ponto do corpo rígido é dada pela segunda derivada da função posição em relação ao tempo, ou seja, a derivada da velocidade em função do tempo:

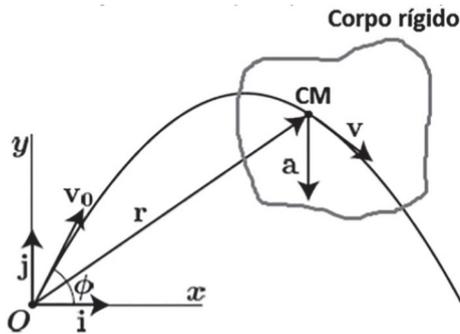
$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{d^2z}{dt^2}(t)\hat{\mathbf{e}}_z .$$

A seguir, veja um exemplo de movimento absoluto no plano.



Os conhecimentos de física básica continuam sendo úteis no contexto dos corpos rígidos, pois o centro de massa de um corpo rígido qualquer sempre se move como se fosse uma partícula lançada nas mesmas condições e com a mesma massa total. Na Figura 1.10 podemos ver um corpo rígido no contexto de um lançamento oblíquo, onde o centro de massa percorre a trajetória parabólica. O corpo rígido pode realizar movimentos mais complexos, como girar, mas isso não afeta a trajetória do seu centro de massa.

Figura 1.10 | Trajetória de um lançamento oblíquo representado no plano



Fonte: elaborada pelo autor.

O sistema de referências escolhido é gerado pelos versores  $\{\bar{e}_x, \bar{e}_y\}$ . A origem  $(0,0)$  se encontra em repouso em relação à Terra. O corpo rígido, que pode ser uma bala de canhão, por exemplo, que foi disparado em um teste, com uma velocidade  $\vec{v}$ , em uma direção que faz um ângulo  $\phi$ , em relação à horizontal. As coordenadas são dadas pelas funções:

$$x(t) = x_0 + (v_0 \cdot \cos \phi) \cdot t \qquad y(t) = y_0 + (v_0 \cdot \sin \phi) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

As velocidades são dadas por:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cdot \cos \phi \qquad v_y = \frac{dy(t)}{dt} = v_0 \cdot \sin \phi - gt.$$

E as acelerações são dadas por:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0 \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g.$$

Quando pensamos em rotações, utilizamos as já conhecidas equações de movimento circular. Na Figura 1.11, podemos ver um corpo rígido em formato de disco girando no plano. Tomamos um ponto em sua borda e vamos escrever as equações de movimento para o ponto.

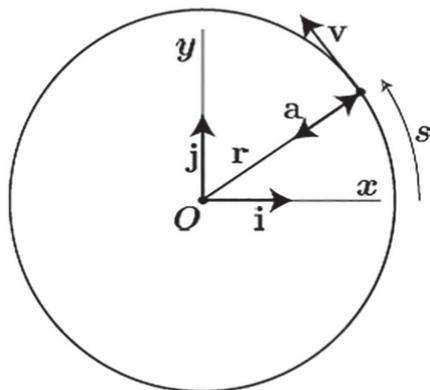
A posição angular é definida pelo ângulo formado pelo vetor posição  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$  com o eixo horizontal, e, para descrever movimento circular, utilizamos o conceito de deslocamento angular  $\theta(t)$  e definimos a velocidade angular  $\omega(t)$  como a taxa de variação do deslocamento angular em relação ao tempo, dado pela seguinte relação:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}(t).$$

Lembrando que podemos representar a derivada temporal por um ponto, ou seja, podemos representar a velocidade angular por  $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}(t) = \dot{\theta}(t)$ . Da mesma forma, podemos definir a aceleração angular  $\alpha(t)$  em relação à segunda derivada do deslocamento angular e em relação ao tempo, da seguinte forma (usando também notação de ponto para derivada temporal):

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = \ddot{\theta}(t).$$

Figura 1.11 | Movimento circular de corpo rígido



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 1.11, vemos o vetor posição  $\vec{r}(t)$ , a velocidade tangencial  $\vec{v}(t)$ , a aceleração centrípeta (ou radial)  $\vec{a}(t)$  e o deslocamento circular  $\vec{s}(t)$ .



### Refleta

Você consegue pensar em outros exemplos de movimentos em relação a um referencial fixo? Tente pensar em um movimento de rotação e um de translação.

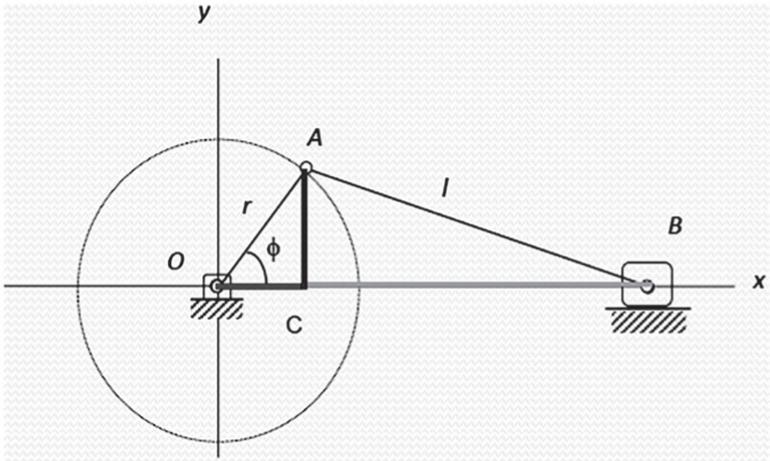
A seguir, vamos analisar um exemplo prático.



### Exemplificando

Um engenheiro está analisando o movimento de uma manivela, como mostrado na Figura 1.12. A haste  $\overline{OA}$  (de comprimento  $r$ ) gira com velocidade angular constante  $\vec{\omega}$ , de modo que o ponto A gira sobre o círculo, formando um ângulo  $\phi$  com a horizontal, que inicialmente é zero. O segmento  $\overline{AB}$  (de comprimento  $l$ ) acompanha o movimento do ponto A, onde o ponto B está sobre o centro de um deslizador, que só pode se mover sobre o eixo x.

Figura 1.11 | Movimento circular de corpo Figura 1.12 | Manivela que gira com velocidade angular constante presa a um deslizador rígido



Fonte: elaborada pelo autor.

O engenheiro pretende descrever os movimentos dos pontos A e B, ou seja, determinar os vetores posição e velocidade no caso mais geral, como funções do tempo, e também sua condição no instante inicial, no caso específico onde  $l = 5\text{ m}$ ,  $r = 1\text{ m}$ , e que  $\omega = 0,2\text{ rad/s}$ .

### Solução

Primeiramente, o engenheiro selecionou um sistema de referências fixo, com origem no centro da manivela circular, com versores  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ , que dão as direções dos eixos.

O vetor posição do ponto A pode ser encontrado através de relações geométricas, no círculo trigonométrico. Na seção anterior, revisamos como escrever um movimento circular com senos e cossenos:

$$\vec{r}_A(t) = r \cdot \cos(\omega \cdot t) \hat{e}_x + r \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \hat{e}_y.$$

Note que no eixo x temos o comprimento de  $\overline{OC} = r \cdot \cos(\omega \cdot t)$  e no eixo y temos o comprimento de  $\overline{CA} = r \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$ .

Para determinar velocidades e acelerações do ponto A na manivela, e do deslizador em B, basta derivar em relação ao tempo, os vetores posição:

$$\vec{v}_A(t) = \frac{d\vec{r}_A}{dt}(t) = \omega \cdot r \cdot [-\text{sen}(\omega \cdot t) \hat{e}_x + \text{cos}(\omega \cdot t) \hat{e}_y].$$

Agora, precisamos determinar o vetor posição do deslizador B, e o engenheiro vai utilizar outras relações geométricas, pois deve determinar a distância entre a origem e o deslizador B, portanto,  $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB}$ .

Vimos que  $\overline{OC} = r \cdot \text{cos}(\omega \cdot t)$ .

O comprimento  $\overline{CB}$  pode ser determinado pelo teorema de Pitágoras. Observe novamente o desenho 1.12. Podemos desenhar um triângulo formado pela haste  $\overline{AB}$  (hipotenusa) e os catetos  $\overline{CB}$  e  $\overline{CA}$ . Portanto, o teorema mostra que  $\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2$ .

Sabemos que  $\overline{CA} = r \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$  e que  $\overline{AB} = l$  então:

$$l^2 = \overline{CB}^2 + r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t), \text{ de onde tiramos que:}$$

$$\overline{CB} = \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)}.$$

e agora, temos em mãos todas as informações necessárias para descrever o vetor posição para o deslizador B:

$$\vec{r}_B(t) = \overline{OC} + \overline{CB} = \left[ r \cdot \text{cos}(\omega \cdot t) + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)} \right] \hat{e}_x.$$

Note que ele está preso ao eixo x, não há movimento na direção de  $\hat{e}_y$ .

Falta ainda a velocidade e a aceleração para o deslizador B. Sabemos que a derivada do  $\text{cos}(\omega \cdot t)$  é  $-\omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$  mas e para  $\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)}$ ? Uma das maneiras de resolver essa derivada é usando a regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)}} \cdot (-2r^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)) \cdot (\omega \cdot \text{cos}(\omega \cdot t)).$$

Simplificando o lado direito:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)} = - \frac{2 \cdot \omega \cdot r^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \text{cos}(\omega \cdot t)}{2 \cdot \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)}}.$$

Lembrando-se das relações trigonométricas de soma de arcos:

$$2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \text{cos}(\omega \cdot t) = \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t).$$

Finalmente, temos que:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega \cdot r^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t)}{\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)}}$$

E, por fim, encontramos a derivada da velocidade de B, somando as derivadas de cada uma das funções  $\cos(\omega \cdot t)$  e  $\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)}$ :

$$\vec{v}_B(t) = \frac{d\vec{r}_B}{dt}(t) = \left[ -\omega \cdot r \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) - \frac{1}{2} \frac{\omega \cdot r^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t)}{\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)}} \right] \hat{e}_x$$

Supondo que  $l = 5\text{m}$ ,  $r = 1\text{m}$  e que  $\omega = 0,2\text{rad/s}$ , para o instante inicial  $t = 0$ , temos, em unidades do SI:

$$\vec{r}_A(t) = 1 \cdot \cos(0,2 \cdot 0) \hat{e}_x + 1 \cdot \text{sen}(0,2 \cdot 0) \hat{e}_y = 1 \cdot \hat{e}_x ;$$

$$\vec{v}_A(t) = 0,2 \cdot 1 \cdot \left[ -\text{sen}(0,2 \cdot 0) \hat{e}_x + \cos(0,2 \cdot 0) \hat{e}_y \right] = 0,2 \cdot \hat{e}_y ;$$

$$\vec{r}_B(t) = \left[ 1 \cdot \cos(0,2 \cdot 0) + \sqrt{5^2 - 1^2 \cdot \text{sen}^2(0,2 \cdot 0)} \right] \hat{e}_x = \left[ 1 \cdot 1 + \sqrt{5^2 - 0} \right] \hat{e}_x = 6 \hat{e}_x$$

$$\vec{v}_B(t) = \left[ -0,2 \cdot \text{sen}(0,2 \cdot 0) - \frac{0,1 \cdot \text{sen}(0,1 \cdot 0)}{\sqrt{25 - \text{sen}^2(0,2 \cdot 0)}} \right] \hat{e}_x = 0 \cdot \hat{e}_x$$

Nunca aceite um resultado sem antes refletir sobre o seu significado, ainda mais em um caso onde muitos cálculos e passos foram necessários. Observe: no instante inicial, o ponto A encontra-se exatamente no ponto (1 m; 0), como seria de se esperar, e sua velocidade é positiva em y, já que o ângulo aumenta no sentido anti-horário.

O ponto B encontra-se localizado exatamente a 6 m da origem, pois os segmentos  $\overline{OA}$  e  $\overline{AB}$  estão exatamente alinhados sobre a horizontal, e seus comprimentos são 1m e 5m respectivamente. A velocidade é nula, pois o deslizador está invertendo seu sentido de movimento, pronto para retornar no sentido negativo de x, uma vez que o ponto A se moverá ao longo do círculo. Tente imaginar o movimento.

Os resultados obtidos são um bom indicativo de que nossos cálculos estão corretos. Sempre faça verificações assim, antes de entregar uma prova ou um relatório ou um projeto para seus gestores ou clientes no mercado de trabalho.

Da mesma forma que descrevemos os movimentos de um ponto em relação a um referencial fixo, podemos descrever os movimentos de um referencial que se move em relação a um referencial fixo! Supondo um raio vetor  $\vec{r} = r \cdot \cos\theta \hat{e}_x + r \cdot \text{sen}\theta \hat{e}_y$  qualquer, onde  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$  são os versores de nosso referencial fixo, e esse raio vetor parametriza um movimento circular, exatamente como é mostrado na Figura 1.10. Podemos definir um referencial móvel  $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$  a partir do vetor posição, desta maneira:

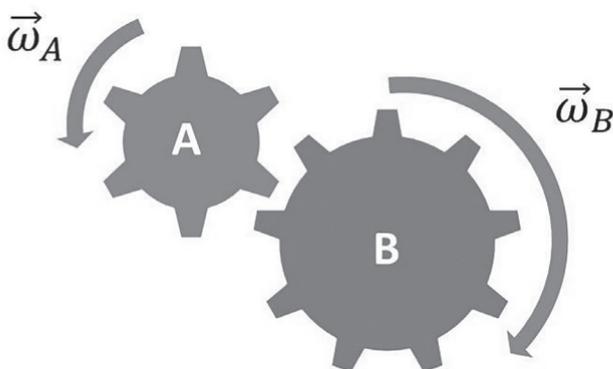
$$\hat{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\theta \hat{e}_x + \text{sen}\theta \hat{e}_y, \quad \hat{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r \cdot \text{sen}\theta \hat{e}_x + r \cdot \cos\theta \hat{e}_y$$

A seguir, veja outro exemplo de aplicação dos conceitos que apresentamos até então:

### Exemplicando

Na Figura 1.13, vemos duas engrenagens, que se encontram encaixadas e fazem parte de um mecanismo. As duas engrenagens se movem juntas, pois quando uma gira transfere seu movimento para a outra.

Figura 1.13 | Duas engrenagens funcionando simultaneamente em movimento de rotação no plano



Fonte: elaborada pelo autor.

Chamaremos as duas engrenagens de A e B, sendo que elas possuem raios distintos  $R_A$  e  $R_B$ . Iremos determinar a relação entre as frequências angulares  $\omega_A$  e  $\omega_B$ . Verificando as especificações do mecanismo, você

verificou que a engrenagem A possui um raio de  $R_A = 0,25m$  e que a engrenagem B possui um raio  $R_B = 0,5m$ .

### Solução

Como as engrenagens estão em contato, e supondo que giram sem deslizar, então a velocidade tangencial na extremidade é igual para as duas, ou seja, temos que  $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ . Utilizando a relação da velocidade tangencial,  $\vec{v} = \omega R \hat{e}$ , onde  $\hat{e}$  é o versor que dá a direção da velocidade, temos que  $\omega_A R_A \hat{e}_A = \omega_B R_B \hat{e}_B$ , e temos a seguinte relação entre os versores direção:  $\hat{e}_A = -\hat{e}_B$ , isso quer dizer que uma engrenagem se move no sentido horário e a outra se move no sentido anti-horário, daí o sinal negativo, para indicar sentidos diferentes. Temos a seguinte relação entre as frequências angulares:

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = -\frac{R_B}{R_A}.$$

Ou seja, se a engrenagem B se move no sentido horário com uma velocidade angular  $\omega$ , então a engrenagem A se move no sentido contrário (anti-horário), com velocidade angular que obedece a razão entre seus raios.

Dessa forma, o engenheiro calcula a relação entre as frequências angulares das duas engrenagens:

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = -\frac{R_B}{R_A} = -\frac{0,5}{0,25} = -2.$$



Pesquise mais

Que tal uma dica de onde pesquisar um pouco mais sobre o assunto?

Leia o capítulo 16 do livro *Dinâmica: mecânica para engenharia*.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Person, 2012.

## Sem medo de errar

Você deve se lembrar de que iremos nos colocar no papel de um projetista que trabalha para uma empresa que constrói atrações para

parques de diversões, além de alimentarmos o software da empresa com informações a respeito da roda gigante, que tem um raio de 20m e completa uma volta a cada 100s. O projetista, agora, deve calcular a velocidade e a aceleração dos bondinhos, além de inserir essas informações no software da empresa em que trabalha, para que seja possível averiguar o bom funcionamento da roda gigante.

## Solução

Na seção anterior, vimos que a posição angular do corpo rígido é dada por:

$$\vec{r}(t) = 20 \cdot \cos(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{i} + 20 \cdot \text{sen}(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{j}.$$

Derivando a relação anterior, temos a velocidade:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = -1,256 \cdot \text{sen}(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{i} + 1,256 \cdot \cos(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{j}.$$

Note que o módulo da velocidade é  $|\vec{v}(t)| = 1,256 \text{ m/s}$ , a máxima velocidade tangencial que cada bondinho da roda gigante pode ter.

Agora que o projetista já possui informações suficientes para modelar o movimento da roda gigante, ele pode inserir essas funções no software, e modelar o movimento da roda gigante, e acompanhar através do software se o brinquedo está em bom funcionamento. Para isso, ele irá medir, através do sistema, a velocidade, posição e aceleração em cada instante, e comparar com o modelo. Caso haja um desvio de  $\pm 5\%$  do valor medido, então um alerta é feito para que uma equipe de técnicos visite o local e verifique se há algum problema com o funcionamento da atração. O software monitora também a quantidade de voltas que a roda gigante dá, e faz o cruzamento dessa informação com a especificação das engrenagens e mecanismos da roda gigante, além de disparar um alarme quando o número máximo de rotações for atingido, dessa forma, a equipe de reparos deve visitar o local e realizar os reparos e trocas das engrenagens e mecanismos da roda gigante.

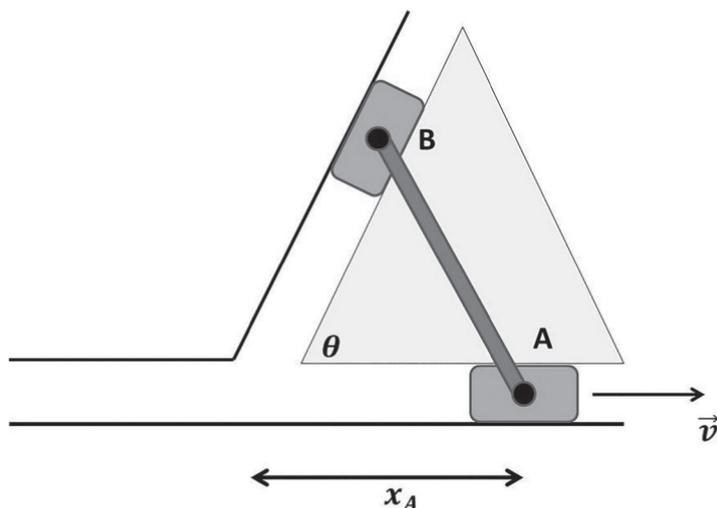
A velocidade máxima que a roda gigante pode ter é de 1,256 m/s, dentro de margem de erro de **5%**. O projetista monitorava o software e, quando averiguou valores maiores que 1,319 m/s e menores do que 1,193 m/s, o sistema disparou o alerta como esperado.

### Descrevendo movimento de um sistema de deslizadores

#### Descrição da situação-problema

Na Figura 1.14, vemos um sistema de deslizadores (A e B), conectados por uma barra rígida de comprimento  $L = |\overline{AB}|$ . O deslizador B se move em uma cunha com angulação  $\theta$ , enquanto que o deslizador A se move horizontalmente. Determine a velocidade angular da barra, em função da posição linear  $x_A$  do deslizador A.

Figura 1.14 | Sistema de deslizadores



Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

Vamos analisar o problema de forma geométrica. Note que o deslizador B se move sobre a cunha, com um ângulo  $\theta$  com a horizontal. E o deslizador A se move horizontalmente. Dessa forma, podemos enxergar um triângulo, considerando o comprimento da barra, o deslocamento do deslizador A e o deslocamento do deslizador B, ou seja, existe um vínculo entre os movimentos dos deslizadores e da barra. Podemos obter a relação entre esses movimentos a partir de semelhança de triângulos. Utilizando a lei dos senos, podemos encontrar:

$$\frac{x_A}{\text{sen}\alpha} = \frac{L}{\text{sen}\theta} \rightarrow x_A = \left( \frac{L}{\text{sen}\theta} \right) \cdot \text{sen}\phi.$$

onde o ângulo  $\phi$  é aquele considerado entre a barra e o deslocamento do deslizador B, ou seja, a função de posição angular da barra, que queremos determinar. A partir da relação anterior, temos o deslocamento de A em função da posição angular da barra. Note que a posição  $x_A$  do deslizador A varia com o tempo, ou seja, é uma função do tempo,  $x_A = x_A(t)$ . Como mencionamos anteriormente, os movimentos da barra e dos dois deslizadores possuem um vínculo, que acabamos de encontrar, ou seja, podemos descrever o movimento da barra em relação a algo que conhecemos, e conseguimos medir facilmente, a posição do deslizador A, através da função  $x_A = x_A(t)$ . Podemos inverter a relação encontrada e definir a posição angular  $\phi$  como uma função dos dados do problema:

$$\phi(t) = \arcsen \left[ \frac{\text{sen}\theta}{L} \cdot x_A(t) \right].$$

Note que encontramos uma fórmula para a posição angular em função do tempo  $\phi = \phi(t)$ . Para encontrar a velocidade, devemos derivar a função  $\phi$ , mas uma maneira mais fácil de calcular é simplesmente derivar  $x_A(t) = \left( \frac{L}{\text{sen}\theta} \right) \cdot \text{sen}[\phi(t)]$  em relação ao tempo, em ambos os lados da igualdade. Assim, temos que:

$$v = \dot{x}_A = \left( \frac{L}{\text{sen}\theta} \right) \cdot \cos\phi \cdot \dot{\phi}.$$

Lembrando da primeira relação, temos que:

$$\cos\phi = \sqrt{1 - \text{sen}^2\phi} = \sqrt{1 - \frac{x_A^2 \cdot \text{sen}^2\theta}{L^2}}.$$

E inserindo na fórmula que derivamos em relação ao tempo, temos que:

$$v = \dot{x}_A = \left( \frac{L}{\text{sen}\theta} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{x_A^2 \cdot \text{sen}^2\theta}{L^2}} \cdot \dot{\phi}.$$

Dessa forma, finalmente chegamos à velocidade angular  $\dot{\phi}$  da barra, em função da posição linear  $x_A$  do deslizador A:

$$\dot{\phi}(x_A) = \frac{v \cdot \text{sen}\theta}{\sqrt{L^2 - x_A^2 \cdot \text{sen}^2\theta}}.$$

Agora que já encontramos uma forma analítica para a velocidade angular da barra, vamos fazer alguns cálculos. Vamos supor que o deslizador A se mova com velocidade constante,  $v = 0,1 \text{ m/s}$ , dessa forma, sua posição é simplesmente um movimento uniforme, dado pela relação  $x_A(t) = 0,1 \cdot t$ . Vamos supor que o ângulo  $\theta$  da cunha seja de  $45^\circ$ , e que a barra tenha um comprimento de  $L = 10 \text{ m}$ . Substituindo na função da velocidade angular, temos:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{0,07}{\sqrt{100 - 0,01 \cdot t^2}}.$$

Vamos calcular a velocidade angular para o tempo igual a 5 segundos:

$$\dot{\phi}(t = 5) = \frac{0,07}{\sqrt{100 - 0,01 \cdot 5^2}} = \frac{0,07}{9,98} \approx 0,007 \text{ rad/s}^2.$$

## Faça valer a pena

**1.** Um engenheiro precisa fazer análises em um sistema mecânico em uma indústria de automação. Verificando uma das partes móveis de um dispositivo, percebe que a velocidade de um ponto sobre o corpo rígido é dada pela seguinte função vetorial:  $\mathbf{v}(t) = \cos(t)\hat{i} + \text{sen}(t)\hat{j}$ . A partir da velocidade, determine a função posição do ponto sobre o corpo rígido, considerando que ele parte da origem, e selecione a alternativa correta.

- a)  $(1 + \text{sen}(t))\hat{i} + \cos(t)\hat{j}$ .
- b)  $\text{sen}(t)\hat{i} - (1 - \cos(t))\hat{j}$ .
- c)  $\text{sen}(t)\hat{i} + (1 - \cos(t))\hat{j}$ .

d)  $(1 - \text{sen}(t))\hat{i} - \text{cos}(t)\hat{j}$ .

e)  $-\text{cos}(t)\hat{i} - \text{sen}(t)\hat{j}$ .

**2.** Imagine que você está analisando o movimento de um determinado ponto de um mecanismo móvel que gira, preso em um ponto fixo, com aceleração angular  $\alpha(t)$ , dada pela relação:

$$\alpha(t) = 20 \cdot e^{-0,6t}.$$

Considere que a unidade de grandeza é dada pelo sistema internacional (SI).

Calcule a velocidade angular do corpo rígido para o instante  $t = 3\text{s}$  e selecione a alternativa correta, considerando que sua velocidade angular inicial era zero.

a) 27,8 rad/s.

b) 9,8 rad/s.

c) 3,5 rad/s.

d) 15,6 rad/s.

e) 57,3 rad/s.

**3.** Um engenheiro está analisando o movimento de um determinado corpo rígido, cujo centro de massa gira ao redor de um eixo com aceleração tangencial de módulo igual a  $a_t = 4\text{m/s}^2$ , e aceleração normal com módulo igual a  $a_n = 3\text{m/s}^2$ , em relação a um referencial fixo.

Calcule o módulo da aceleração total do corpo rígido e assinale a alternativa correta.

a) 25m/s<sup>2</sup>.

b) 16m/s<sup>2</sup>.

c) 4m/s<sup>2</sup>.

d) 5m/s<sup>2</sup>.

e) 9m/s<sup>2</sup>.

# Seção 1.3

## Análise de movimento relativo

### Diálogo aberto

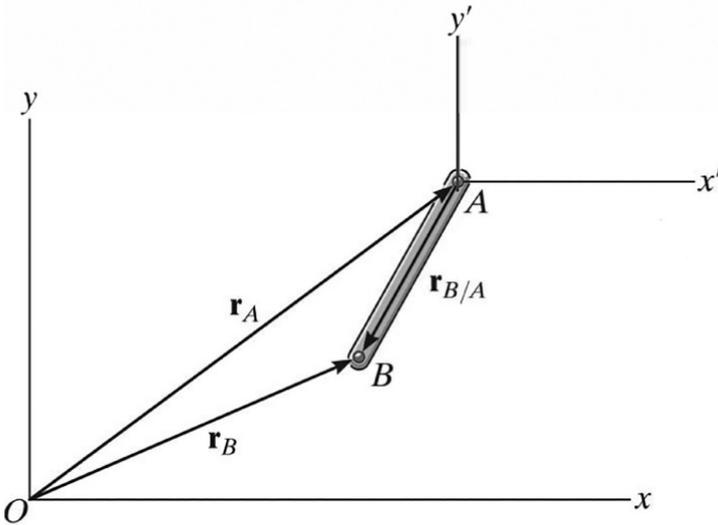
Na seção anterior, estudamos movimentos de corpos rígidos em referenciais absolutos parados em relação ao solo. Nesta seção, estudaremos o movimento de corpos rígidos em relação a referenciais acelerados e o importante conceito de centro instantâneo de velocidade nula.

Vamos nos colocar no lugar de um projetista que trabalha em uma empresa que constrói atrações para parques de diversões. Você deve inserir informações referentes ao movimento da roda gigante no software da empresa, que faz simulações e emite avisos automaticamente para o cliente, em situações de alerta ou avisando sobre a necessidade da realização de testes de segurança e possíveis trocas de peças. Agora, você obterá a força sentida pelo conector de cada bondinho com a estrutura principal da roda gigante. Essa informação é necessária para que o software possa avaliar a segurança do brinquedo com base na resistência dos componentes utilizados na construção da atração. Você está chegando ao fim do projeto, portanto, precisa informar ao seu gestor tudo o que foi realizado por meio de um relatório, pois o cliente é importante e seu gestor quer acompanhar de perto tudo o que foi feito.

### Não pode faltar

Caro aluno, como já tivemos a oportunidade de estudar, o movimento geral no plano de um corpo rígido é dado por uma combinação de translação e rotação. Uma técnica muito utilizada para simplificar a descrição de tal movimento é a análise do movimento relativo, que é formulada através da utilização de uma referência fixa (sistema de coordenadas  $x, y$ ), que indica a posição absoluta de dois pontos A e B, e de uma referência móvel (sistema de coordenadas  $x', y'$ ), que acompanha o ponto A e se move em relação à referência fixa. A Figura 1.15 ilustra esta análise, onde A e B são dois pontos no interior de um ponto rígido.

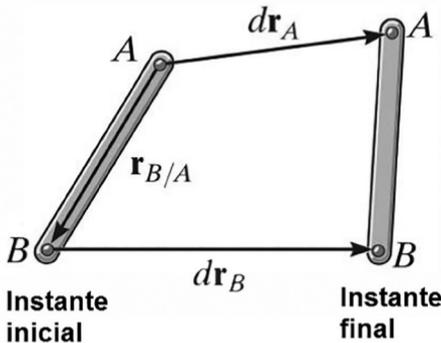
Figura 1.15 | Análise do movimento relativo



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 250).

talvez, inicialmente você não compreenda a razão de definir dois sistemas de referências. Espero que agora a vantagem disso possa ficar clara. Observe a Figura 1.16; ela mostra o complicado movimento realizado pela barra através do espaço. O ponto  $A$  desloca-se em  $\overline{dr}_A$  enquanto que o ponto  $B$  desloca-se em  $\overline{dr}_B$ . Cada um dos outros infinitos pontos que compõe a barra, os quais nós podemos estar interessados em conhecer a posição, sofrerão deslocamentos diferentes e únicos, que precisariam ser calculados.

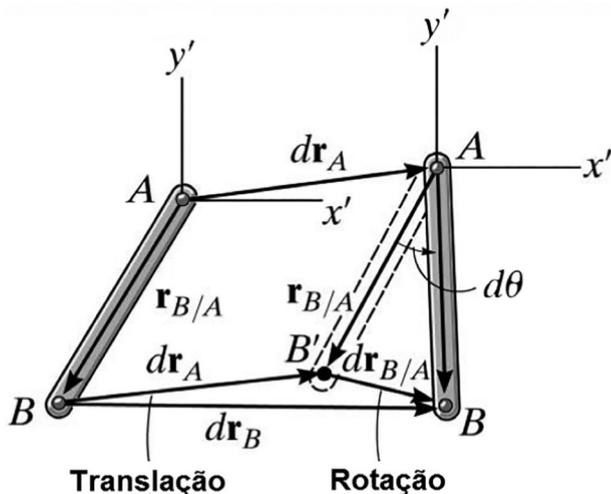
Figura 1.16 | Movimento de uma barra



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 250).

Tomando por base o referencial móvel fixo em A, entretanto, temos que toda a barra simplesmente sofre um movimento de rotação em torno do eixo fixo, como observamos na Figura 1.17. Assim, com relação a esse sistema de coordenadas, podemos calcular uma velocidade angular, descobrir facilmente a posição de todos os pontos da barra usando a velocidade angular e a distância do ponto de interesse ao ponto A.

Figura 1.17 | Separação dos movimentos de translação e rotação



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 250).

A partir da análise do movimento relativo, é possível determinarmos a posição do ponto B. Utilizando a Figura 1.15, tem-se que a posição de B, dada pelo vetor  $\vec{r}_B$ , é dada pela soma dos vetores posição de A, chamado de  $\vec{r}_A$ , e o vetor posição relativa, intitulado de  $\vec{r}_{B/A}$ , que indica a localização do ponto B em relação ao ponto A. Portanto, tem-se que:  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$ .

Assim, o movimento completo pode ser descrito como uma translação do ponto A, realizando um deslocamento  $d\vec{r}_A$  da referência móvel em relação à referência fixa. O ponto B da barra, por sua vez, sofre um movimento de rotação em torno do referencial móvel, em torno do ponto A, girando uma quantidade angular  $d\theta$ , fazendo com que o ponto B' sofra um deslocamento relativo  $d\vec{r}_{B/A}$ , movendo-se até a sua posição final B. Finalmente,

tem-se que o deslocamento do ponto B, que, devido à translação e rotação, é dado pela soma dos deslocamentos  $d\vec{r}_A$  (devido à translação) e  $d\vec{r}_{B/A}$  (devido à rotação, com módulo  $r_{B/A} \cdot d\theta$ ):

$$d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + d\vec{r}_{B/A}.$$

As velocidades dos pontos A e B são determinadas a partir da derivada temporal da equação de posição, dada por:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}.$$

Tem-se que a velocidade absoluta do ponto A é dada por  $\vec{v}_A = d\vec{r}_A/dt$  e a velocidade absoluta do ponto B é dada por  $\vec{v}_B = d\vec{r}_B/dt$ . A velocidade relativa  $\vec{v}_{B/A}$  é dada em função de uma velocidade angular  $\vec{\omega}$ , ou seja, ela representa a velocidade do ponto B em relação ao ponto A, observada a partir do referencial  $x', y'$ . Tem-se que  $\vec{v}_{B/A} = d\vec{r}_{B/A}/dt = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ .

Finalmente:  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ .

Podemos também encontrar as acelerações de dois pontos A e B a partir da diferenciação de  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$  em relação ao tempo. Portanto, tem-se:  $\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_{B/A}}{dt}$ . Como vimos na primeira seção, a aceleração do ponto B pode ser dividida em suas componentes, radial e tangencial, resultando em:  $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$ .

A análise do movimento relativo para o cálculo da velocidade e da aceleração com um referencial móvel, que translada em relação à referência fixa, é útil para definir o movimento de dois pontos A e B contidos em um mesmo corpo rígido, ou para o movimento de pontos contidos em vários corpos diferentes, conectados por pinos. Nesta análise, desconsideramos o deslizamento relativo entre as conexões.



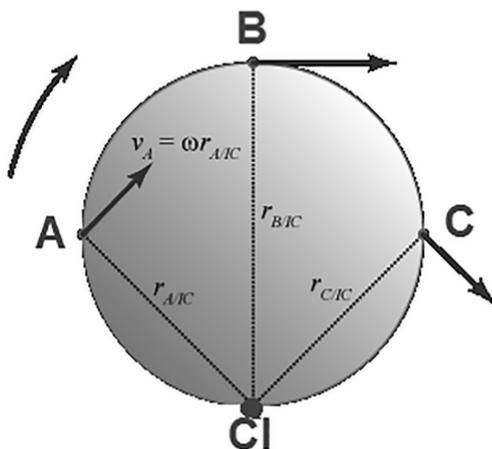
### Refleta

Você compreende bem qual é o referencial fixo e o que é o referencial móvel? Lembre-se sempre do exemplo do automóvel: o que um observador parado na rua vê, quando olha o automóvel? O que um observador sentado no banco do carro vê, quando olha pela janela?

## Centro instantâneo de velocidade nula

Vamos, agora, apresentar mais uma técnica importante da cinemática de corpos rígidos. Imagine uma roda de bicicleta que gira sem deslizar sobre uma superfície. Se ela não desliza, o ponto onde a roda encosta no chão necessariamente está parado. Todos os outros pontos da roda giram ao redor desse ponto, que chamamos de centro instantâneo de velocidade nula (IC), visualizado na Figura 1.18.

Figura 1.18 | Centro instantâneo de velocidade nula (CI) de uma roda que gira sem deslizar



Fonte: adaptada de <[http://www.sdcpublications.com/multimedia/978-1-58503-767-4/files/krb/krb\\_ic\\_page1.htm](http://www.sdcpublications.com/multimedia/978-1-58503-767-4/files/krb/krb_ic_page1.htm)>. Acesso em: 31 out. 2016.

Nós sabemos que todos os pontos da roda giram ao redor do eixo de rotação da própria roda, mas precisamos nos lembrar que a bicicleta está em movimento. A composição das velocidades do eixo de rotação da roda (referencial móvel) com relação ao eixo fixo, somado com a rotação da extremidade da roda com relação ao referencial móvel (eixo central da roda), resulta em um ponto CI momentaneamente parado para o observador externo.

A velocidade de um ponto A pode ser obtida de uma maneira simplificada, utilizando-se do pressuposto que o ponto CI tenha uma velocidade nula em um instante de tempo qualquer que será analisado. Assim, a equação da velocidade se resume a  $\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/CI}$ . Da mesma maneira,  $\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/CI}$  e  $\vec{V}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_{C/CI}$ .

ou seja, os pontos A, B e C se deslocam momentaneamente em relação ao ponto CI.



### Pesquise mais

Sabendo que a velocidade de um ponto é sempre perpendicular ao vetor posição relativa do CI para o ponto, podemos encontrar a localização do CI. Para saber mais sobre as possibilidades encontradas para localizar o CI e sobre o procedimento para análise, pesquise no livro *Dinâmica: Mecânica para engenharia*.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. p. 281-282.

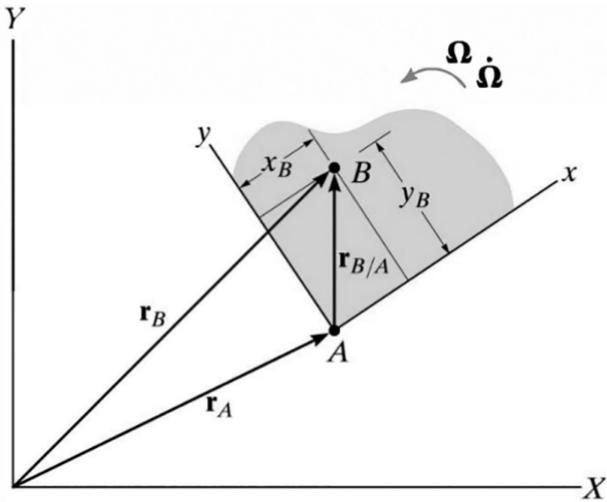
## Rotação de sistemas de coordenadas

Considere agora um corpo rígido realizando um movimento de rotação, além de uma translação. Nesse caso, pode ser interessante definir um referencial móvel que, por si só, realiza uma rotação acompanhando o movimento do corpo rígido. Assim, para um observador movendo-se junto com o referencial móvel, o corpo rígido está parado.

Por acaso você já foi para um parque de diversões, onde existem brinquedos que giram em alta velocidade? Quando você está no interior do brinquedo, parece que o piso e o banco do brinquedo estão em repouso e que o resto do universo está girando, não é mesmo? Essa é a ideia do referencial móvel que estamos estudando.

Podemos definir referenciais girantes para casos muito mais gerais do que o descrito. Para a análise cinemática de mecanismos com deslizamento, utilizamos uma referência móvel que translada e rotaciona em relação à uma referência fixa. Esta análise é útil para descrever o movimento de um ponto no interior do corpo rígido com relação a um ponto fora dele, estudando a cinemática do movimento de uma partícula em deslocamento ao longo de uma trajetória em rotação.

Figura 1.19 | Análise do movimento relativo utilizando um sistema de eixos em rotação



Fonte: Hibbeler (2012, p. 302).

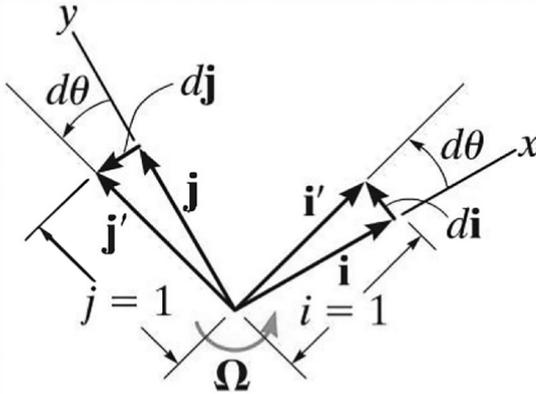
Observe a Figura 1.19. A posição de dois pontos A e B é especificada pelos vetores  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$ , respectivamente, que são calculados em relação ao sistema de coordenadas fixo X, Y, Z. Nesta análise, o ponto A é a origem do sistema de coordenadas x, y, z que tem movimento de translação e rotação em relação ao sistema X, Y, Z.

A posição de B é obtida realizando a adição vetorial dos vetores apresentados na Figura 1.19:  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$ . A posição relativa de B em relação a A é determinada pelo vetor posição relativa  $\vec{r}_{B/A}$ . Em relação ao sistema móvel x, y, o ponto B tem as coordenadas  $(x_B, y_B)$ , portanto:

$$\vec{r}_{B/A} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}.$$

Note que os versores  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  são constantes no referencial móvel, entretanto, para o observador na origem do referencial fixo, os versores estão girando, como mostra a Figura 1.20. Isso significa que, ao contrário do que estamos acostumados, esses versores são variáveis no tempo, e sua derivada não é zero.

Figura 1.20 | Vetores do referencial móvel com relação ao referencial fixo



Fonte: Hibbeler (2012, p. 303).

A velocidade do ponto B é determinada derivando-se  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$  em relação ao tempo:

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}.$$

O termo  $d\vec{r}_{B/A} / dt$  é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_B \vec{i} + y_B \vec{j}) = \frac{dx_B}{dt} \vec{i} + x_B \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt} \vec{j} + y_B \frac{d\vec{j}}{dt} \\ &= \left( \frac{dx_B}{dt} \vec{i} + \frac{dy_B}{dt} \vec{j} \right) + \left( x_B \frac{d\vec{i}}{dt} + y_B \frac{d\vec{j}}{dt} \right). \end{aligned}$$

A partir da Figura 1.19, observando que a velocidade angular da referência x, y, z, calculada a partir da referência X, Y, Z é  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$ , podemos representar as derivadas dos vetores  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  como:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} (\vec{j}) = \Omega \vec{j} = \vec{\Omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} (-\vec{i}) = -\Omega \vec{i} = \vec{\Omega} \times \vec{j}.$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto vetorial e os resultados acima na equação de  $d\vec{r}_{B/A} / dt$ , tem-se que

$$\frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + \vec{\Omega} \times (x_B \vec{i} + y_B \vec{j}) = (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}.$$

Na equação acima, o termo  $(\vec{v}_{B/A})_{xyz}$  denota a velocidade do ponto B em relação ao ponto A, observada a partir da referência em rotação x, y, z. Portanto, a equação para o cálculo da velocidade do ponto B torna-se:  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A} + (\vec{v}_{B/A})_{xyz}$ .

A aceleração do ponto B, observada a partir da referência fixa X, Y, Z, é dada a partir do seu movimento em relação ao sistema x, y, z em rotação, derivando-se a equação acima:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_B}{dt} &= \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\vec{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\vec{v}_{B/A})_{xyz}}{dt}. \end{aligned}$$

A aceleração angular do sistema x, y, z, dada por  $\dot{\vec{\Omega}}$ , mede apenas a variação na intensidade de  $\vec{\Omega}$ . Portanto, tem-se que  $\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A})$ .

E o último termo da equação da aceleração do ponto B é calculado fazendo-se a derivada temporal de  $(\vec{v}_{B/A})_{xyz}$ :

$$\frac{d(\vec{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[ \frac{d(v_{B/A})_x}{dt} \vec{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt} \vec{j} \right] + \left[ (v_{B/A})_x \frac{d\vec{i}}{dt} + (v_{B/A})_y \frac{d\vec{j}}{dt} \right] = (\vec{a}_{B/A})_{xyz} + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz}.$$

Finalmente, tem-se que a aceleração do ponto B, observada a partir da referência fixa X, Y, Z, é dada por:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}) + 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + (\vec{a}_{B/A})_{xyz}$$



**Assimile**

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}) + 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + (\vec{a}_{B/A})_{xyz}$$

Nesta equação tem-se que  $\vec{a}_B$  é a aceleração absoluta do ponto B, observada a partir do sistema X, Y, Z;  $\vec{a}_A$  é a aceleração absoluta da origem

do sistema  $x, y, z$ , observada a partir do sistema  $X, Y, Z$ ; o termo  $\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/A}$  é o efeito de aceleração angular causado pela rotação do sistema  $x, y, z$ , observado a partir do sistema  $X, Y, Z$ ; o termo  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A})$  é o efeito da velocidade angular causado pela rotação do sistema  $x, y, z$ , observado a partir do sistema  $X, Y, Z$ ; o termo  $2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz}$  é o efeito combinado do ponto B deslocando-se em relação ao sistema  $x, y, z$  e da rotação do sistema  $x, y, z$ ; e  $(\vec{a}_{B/A})_{xyz}$  é a aceleração do ponto B em relação ao ponto A, observado a partir do sistema  $x, y, z$ .

## Forças newtonianas e forças não inerciais

Embora estejamos falando de Cinemática, não custa notar que multiplicando a aceleração obtida acima pela massa do corpo, podemos definir uma força efetiva  $\vec{F}_{efetiva} = m \cdot \vec{a}_B$ . De forma que:

$$\vec{F}_{efetiva} = m \cdot \vec{a}_A + m \cdot \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/A} + m \cdot \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}) + m \cdot 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + m \cdot (\vec{a}_{B/A})_{xyz}$$

As leis de Newton são válidas somente em referenciais inerciais que estejam fixas ou se movendo com velocidade constante em relação ao solo. Em referenciais inerciais as forças são ditas newtonianas. Quando o referencial se move de forma acelerada, ou transladando, ou girando, ou a composição desses dois movimentos, temos a presença de forças chamadas não newtonianas, temos:

$$\vec{F}_{efetiva} = (\text{Forças Newtonianas}) + (\text{Forças não Newtonianas})$$

Vamos evidenciar duas **forças não newtonianas** muito importantes:

- $m \cdot \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A})$ : é conhecida como **força centrípeta**.
- $m \cdot 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz}$ : é conhecida como **força de Coriolis**.

Vamos mostrar agora um exemplo de aplicação da força centrípeta:



### Exemplificando

Um mecanismo metálico tem formato de disco e gira com velocidade angular constante de 2 rad/s no sentido positivo (anti-horário). Será fixado sobre ele um sensor de massa 100 g, a uma distância de 1,25 m

do centro do disco. Para decidir de que modo o sensor será fixado sobre o mecanismo, o engenheiro responsável precisa saber a que força ele estará submetido.

A equação da força efetiva é dada pela seguinte relação, considerando o ponto A o centro do disco e o ponto B o local de instalação do sensor:

$$\vec{F}_{efetiva} = m \cdot \vec{a}_A + m \cdot \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/A} + m \cdot \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}) + m \cdot 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + m \cdot (\vec{a}_{B/A})_{xyz}$$

Considerando o referencial fixo com o solo e o referencial não inercial como sendo o mecanismo girante, o centro seria a origem do sistema, que permanece fixa, sem transladar. Como a velocidade angular é constante, isso significa que  $\dot{\vec{\Omega}} = \mathbf{0}$ . Como o centro do mecanismo está fixo, isso significa que  $\vec{a}_A = \mathbf{0}$ , assim como  $\vec{v}_{B/A} = \mathbf{0}$  e  $(\vec{a}_{B/A})_{xyz} = \mathbf{0}$ .

Dessa forma, temos:  $\vec{F}_{efetiva} = m \cdot \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A})$ .

Para  $\vec{\Omega} = 2\hat{k}$  e  $\vec{r}_{B/A} = 1,25\hat{i}$  (note que a posição angular exata do sensor não foi informada, mas não afeta o resultado final, então, definimos arbitrariamente a posição inicial na direção do eixo x), temos:

$$\vec{F}_{efetiva} = 0,1 \cdot 2\hat{k} \times (2\hat{k} \times 1,25\hat{i}) = (-0,5\hat{i}) N$$

Assim, o observador externo verifica que existe uma força centrípeta atuando sobre o sensor, mantendo-o na trajetória circular sobre o mecanismo no formato de disco.

## Sem medo de errar

Você deve se lembrar de que iremos nos colocar no papel de um projetista que trabalha para uma empresa que constrói atrações para parques de diversões, além de realizar testes nos mecanismos de uma roda gigante, para verificar possíveis desgastes em engrenagens, e nos certificar de que a atração é segura para visitação do público. Ainda, criaremos um modelo computacional de rodas gigantes, com o objetivo de desenvolver atualizações e melhorias.

### Resposta

Nas seções anteriores, resolvemos este problema, fazendo a aproximação da roda gigante por um disco circular, de raio

R conhecido, e velocidade angular  $\vec{\omega}$  conhecida. A roda gigante tem bondinhos que ficam presos em sua borda. Encontramos que a posição dos bondinhos é dada por:

$$\vec{r}_i(t) = 20 \cdot \cos(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{i} + 20 \cdot \sin(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{j} .$$

A velocidade tangencial do bondinho é calculada derivando-se a relação anterior:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = -1,36 \cdot \sin(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{i} + 1,36 \cdot \cos(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{j} .$$

O bondinho, apesar de preso na borda da roda gigante, sente o efeito da rotação dela. A velocidade angular é dada pela relação:  $\vec{\Omega} = 0,0628 \hat{k}$ .

Vamos calcular a aceleração que cada bondinho sofre, a partir da relação:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}) + 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + (\vec{a}_{B/A})_{xyz} .$$

Considerando o referencial fixo como o solo, e o referencial não inercial como sendo o mecanismo girante, o centro seria a origem do sistema, que permanece fixa, sem transladar. Como a velocidade angular é constante, isso significa que  $\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$ . Como o centro do mecanismo está fixo, isso significa que  $\vec{a}_A = \vec{0}$ , assim como  $\vec{v}_{B/A} = \vec{0}$  e  $(\vec{a}_{B/A})_{xyz} = \vec{0}$ .

$$\vec{a}_B = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}) .$$

$$\vec{a}_B = 0,0628 \hat{k} \times (0,0628 \hat{k} \times 20 \cdot \cos(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{i} + 20 \cdot \sin(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{j}) .$$

$$\vec{a}_B = 0,0628 \hat{k} \times (1,36 \cdot \cos(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{j} - 1,36 \cdot \sin(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{i}) .$$

$$\vec{a}_B = -0,079 \cos(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{i} - 0,079 \sin(0,0628 \cdot t + (i-1) \cdot \pi / 5) \hat{j} .$$

Agora, o projetista pode compor o relatório para seu gestor e agendar novas verificações e manutenções, tendo as informações das equações de movimento, frequência angular e quantidade média de voltas por dia.

### Sistema haste + deslizador

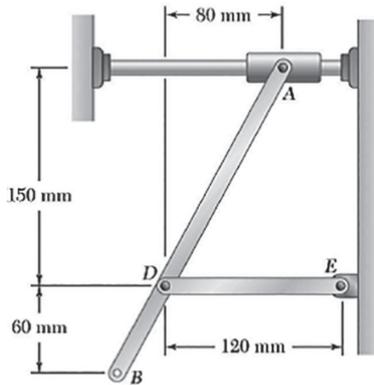
#### Descrição da situação-problema

Na Figura 1.21, vemos a ilustração de uma haste de comprimento  $L = |\overline{BA}|$ . No ponto A, a haste está conectada a um deslizador, que se move sem atrito. No ponto D, a haste está conectada a outra haste fixa, de comprimento  $|\overline{ED}| = 120 \text{ mm}$ . Sabendo que neste instante, a velocidade do deslizador A tem módulo igual a  $|\vec{v}_A| = 900 \text{ mm/s}$ .

(a) Calcule a velocidade angular da haste ADB, no instante mostrado na figura.

(b) Analisando os dados do problema, encontre a razão entre os módulos dos vetores posição  $\vec{r}_{D/A}$ , o segmento que liga o ponto D ao ponto A, e  $\vec{r}_{B/A}$ , ou seja, o segmento que liga o ponto B ao ponto A.

Figura 1.21 | Sistema haste + deslizador



Fonte: Beer, Johnston, Cornwell (2009, capítulo 15, exercício 15.15).

#### Resolução da situação-problema

(a) Primeiramente, vamos definir um referencial fixo, que se encontra parado em relação ao chão. A direção horizontal e a vertical são respectivamente denotadas pelos versores  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ . Dessa forma, a velocidade do ponto A é denotada por  $\vec{v}_A = -(900 \text{ mm/s})\vec{e}_x$ . O outro referencial que escolhermos será móvel, tendo sua origem localizada

no ponto D, notando que este referencial se move, em relação ao ponto A e ao referencial fixo. Vamos determinar o vetor posição  $\vec{r}_{D/A}$ , que liga o ponto D ao ponto A. Pela Figura 1.16, podemos ver que a distância horizontal é dada por **80mm**, enquanto que a distância vertical é dada por **150mm**, ou seja, é o segmento:

$$\vec{r}_{D/A} = \overline{DA} = (0,0) - (80,150) = -80\vec{e}_x - 150\vec{e}_y.$$

Segundo a teoria, a equação de velocidade para a haste ABD é dada pela relação:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{D/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{D/A} \times \vec{r}_{D/A}.$$

Agora, vamos calcular  $\vec{\omega}_{D/A} \times \vec{r}_{D/A}$ , onde a incógnita de nosso problema é a velocidade angular de D em relação a A, ou seja,  $\vec{\omega}_{D/A} = (0,0,\omega_{D/A}) = \omega_{D/A} \vec{e}_z$ , lembrando que a velocidade angular é um vetor sempre apontando para fora, ou para dentro da folha de papel (ou tela do computador), dependendo da orientação do giro do corpo rígido. Aponta para fora, quando o giro é no sentido horário, e para dentro, quando o giro é no sentido anti-horário:

$$\vec{\omega}_{D/A} \times \vec{r}_{D/A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \omega_{D/A} \\ -80 & -150 & 0 \end{vmatrix} = -\omega_{D/A} \cdot (150\vec{e}_x + 80\vec{e}_y).$$

O ponto D se movimenta apenas na vertical, já que está conectado à outra haste rígida e fixa. Dessa maneira, temos que a velocidade em D é dada por  $\vec{v}_D = v_D \vec{e}_y$ . Inserindo as relações encontradas na equação geral da velocidade para o ponto D, temos que:

$$\begin{aligned} \vec{v}_D &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_{D/A} \times \vec{r}_{D/A}, \\ 0\vec{e}_x + v_D \vec{e}_y &= -900\vec{e}_x - 150 \cdot \omega_{D/A} \vec{e}_x - 80 \cdot \omega_{D/A} \vec{e}_y, \\ 0\vec{e}_x + v_D \vec{e}_y &= (-900 - 150 \cdot \omega_{D/A})\vec{e}_x - 80 \cdot \omega_{D/A} \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Para que a igualdade seja verdadeira, devemos igualar as componentes:

$$\begin{cases} -900 - 150 \cdot \omega_{D/A} = 0 \\ -80 \cdot \omega_{D/A} = v_D \end{cases}.$$

Da primeira relação, encontramos que  $\omega_{D/A} = -900 / 150 = -6 \text{ rad / s}$ .

(b) do item (a), encontramos que:

$$\vec{r}_{D/A} = \overline{DA} = (0,0) - (80,150) = -80\vec{e}_x - 150\vec{e}_y.$$

Da mesma forma, vamos proceder para encontrar o vetor  $\vec{r}_{B/A} = \overline{BA}$ . Agora, vamos utilizar um pouco de geometria, mais precisamente semelhança de triângulos. Note que temos um triângulo retângulo de hipotenusa AD, altura  $150\text{mm}$ , e base  $80\text{mm}$ . E temos também um triângulo de hipotenusa BA e altura  $(60+150)\text{mm} = 210\text{mm}$ ; por semelhança de triângulos:

$$\frac{\vec{r}_{D/A}}{150} = \frac{\vec{r}_{B/A}}{210} \rightarrow \vec{r}_{B/A} = \frac{210}{150} \vec{r}_{D/A}.$$

Assim, tirando o módulo, encontramos que:  $\frac{|\vec{r}_{B/A}|}{|\vec{r}_{D/A}|} = \frac{210}{150} = 1,40$ .

## Faça valer a pena

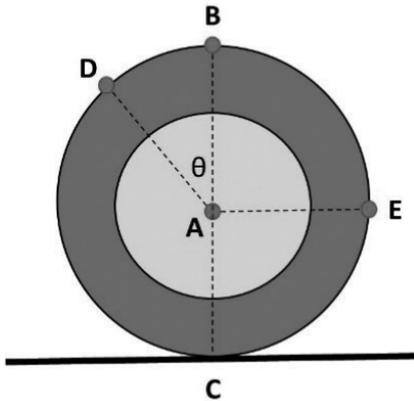
**1.** Considere a Figura 1.19, onde A é a origem do referencial relativo que realiza um movimento de translação e rotação com relação a outro referencial, e que o ponto B é um ponto de interesse no interior de um corpo rígido que também possui movimento próprio. Considere que a velocidade do ponto B em relação ao referencial fixo XY pode ser obtida a partir da expressão  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A} + (\vec{v}_{B/A})_{xyz}$ , que o ponto B não tem liberdade de movimento com relação ao ponto A e que  $\vec{v}_A = 2\hat{i}$ ,  $\vec{\Omega} = 1\hat{k}$ ,  $\vec{r}_{B/A} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$  em unidades do SI.

Encontre a velocidade do ponto B no referencial XY, em unidades do SI.

- a)  $6\hat{i} - 2\hat{j}$ .
- b)  $2\hat{j}$ .
- c)  $2\hat{i}$ .
- d)  $3\hat{i} + 6\hat{j}$ .
- e)  $-3\hat{i} + 6\hat{j}$ .

**2.** Na Figura 1.22, vemos a ilustração de uma roda de um carro, que se move para a direita com velocidade constante. A roda possui raio de comprimento R, e o ponto A é o seu centro. Na ilustração temos cinco pontos distintos, A, B, C, D, E. No instante que aparece na imagem, o ponto D faz um ângulo  $\theta$  com a vertical. Suponha que não há deslizamento da roda.

Figura 1.22 | Ilustração de uma roda de um carro, com cinco pontos distintos



Fonte: elaborada pelo autor.

O carro se move para a direita com velocidade constante  $V = 10 \text{ m/s}$  em relação a um observador de pé na calçada, e a roda possui raio de comprimento  $R = 0,3\text{m}$ . Calcule a velocidade do ponto A.

- a) 45 m/s.
- b) 100 m/s.
- c) 15 m/s.
- d) 10 m/s.
- e) 25 m/s.

**3.** Leia atentamente a afirmação a seguir, que possui algumas lacunas:  
O ..... , ou centro instantâneo de rotação é definido como um ponto fixo (ou referencial) em um corpo rígido, em movimento planar, que possui velocidade ..... em um determinado instante de tempo. Leia o texto anterior, e assinale a alternativa que completa as lacunas do texto corretamente.

- a) centro instantâneo de velocidade nula – diferente de zero.
- b) centro de massa – diferente de zero.
- c) centro instantâneo de velocidade nula – nula.
- d) centro de massa – nula.
- e) referencial móvel – variável.

# Referências

ARFKEN, G. **Métodos matemáticos para engenharia e física**. Rio de Janeiro: Campus Elsevier, 2007.

BEER, F. P.; JOHNSTON, R.; CORNWELL, P. J. **Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: MGH, 2009.

BOULOS, P.; de CAMARGO, I. de. **Geometria analítica: um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Pearson Education, 2005.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica: mecânica para engenharia**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

MERIAN, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para engenharia: dinâmica**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

SDC PUBLICATIONS. **Instantaneous center of zero an known velocities**. Disponível em: <[http://www.sdcpublications.com/multimedia/978-1-58503-767-4/files/krb/krb\\_ic\\_page1.htm](http://www.sdcpublications.com/multimedia/978-1-58503-767-4/files/krb/krb_ic_page1.htm)>. Acesso em: 31 out. 2016.



# Dinâmica planar de corpos rígidos

## Convite ao estudo

Caro aluno, seja bem-vindo a mais uma etapa de sua formação. Na unidade anterior estudamos a cinemática dos corpos rígidos e finalizamos, com um breve comentário, o conceito de força, já familiar para você no contexto de uma ou mais partículas. O objetivo aqui é generalizar seu conhecimento, permitindo a aplicação das diversas regras que você aprendeu sobre o tema corpos rígidos. Você estará um passo mais perto de compreender a dinâmica de mecanismos reais, seja ele um simples pêndulo ou um braço mecânico com suas engrenagens e pistões.

Na Seção 2.1, iremos compreender de maneira mais aprofundada os conceitos de Momento de Inércia e Centro de Massa aplicados a corpos rígidos, utilizando ferramentas do cálculo diferencial e integral. Em seguida, na Seção 2.2, veremos como um corpo rígido se comporta sobre a ação de forças externas, para assim entender a dinâmica de translação do corpo rígido no plano, ou seja, sem considerar a rotação do corpo rígido. Por fim, na Seção 2.3, finalizaremos nossos estudos de dinâmica introduzindo o efeito da rotação de corpos rígidos, o que possibilitará definir a dinâmica geral de um corpo rígido aplicável a qualquer mecanismo.

Nesta unidade, continuaremos a acompanhar os desafios de um projetista que trabalha em uma indústria que constrói atrações para parques de diversões. Iremos, agora, estudar os conceitos para elaborar um brinquedo conhecido como carrinho bate-bate. Seu chefe acaba de receber uma nova encomenda do brinquedo e escolheu você como o responsável. Ele solicitou uma análise completa do carrinho em termos de equilíbrio e de sua dinâmica de movimento na pista. Com isso, ele espera ter um relatório da situação

atual do carrinho para futuros desenvolvimentos. Como em toda empresa, o mercado é muito dinâmico e seu chefe lhe deu poucos dias para a análise, você precisa então trabalhar rapidamente para se adaptar e atender às demandas do cliente.

# Seção 2.1

## Corpos rígidos, inércia e massa

### Diálogo aberto

Nesta primeira seção, iniciaremos nossos estudos aplicando alguns conhecimentos que adquirimos em mecânica geral sobre corpos rígidos, com o objetivo de sermos capazes de efetivamente aplicá-los em problemas realistas de engenharia. Iniciaremos estudando os conceitos de momento de inércia e centro de massa, que são intimamente ligados à forma e à maneira como a massa se distribui nos corpos rígidos. A resposta de um sistema a forças externas é proporcional não só à aceleração, mas também às massas envolvidas.

O conceito de corpo rígido permite compreender melhor o movimento de mecanismos. No entanto, a dinâmica de um corpo rígido também deve considerar a distribuição de massa em sua extensão. Um ponto especial em nosso estudo é o centro de massa do corpo rígido, que pode ser considerado, para efeitos de cálculo, o local onde a massa de seus componentes se concentra. Além disso, é preciso considerar que o movimento de cada componente pode afetar o equilíbrio do mecanismo como um todo.

O momento de inércia de um corpo rígido com um formato qualquer pode ser obtido utilizando as ferramentas do cálculo diferencial e integral. No caso de formatos simples, já sabemos de cursos anteriores que podemos consultar equações tabeladas para calcular o momento de inércia. Com ele, podemos descrever a dinâmica das rotações dos corpos rígidos.

Como um projetista que trabalha construindo atrações para parques de diversões e estando encarregado de projetar a atração conhecida como carrinho bate-bate, o primeiro passo de seu trabalho será o de projetar o carrinho isoladamente e determinar a distribuição de peso, devido ao motor e ao(s) passageiro(s) do carrinho, garantindo assim uma melhor estabilidade possível.

Reflita sobre os conceitos apresentados aqui, tente resolver os exemplos e exercícios, e sempre procure a bibliografia sugerida.

## Não pode faltar

Conceitos como momento de inércia e centro de massa não devem ser uma novidade para você. Em suas aulas de física básica, você já definiu essas grandezas para uma partícula, um conjunto destas e também para corpos rígidos de formatos simples. Agora, nesta seção, iremos expandir esses conceitos, aplicando-os ao desenvolvimento de mecanismos mecânicos e para objetos em formatos variados, utilizando o cálculo diferencial e integral.

Antes de mais nada, é preciso compreender a relação entre massa ( $m$ ), densidade ( $\rho$ ) e volume ( $V$ ), que, quando aplicadas a um corpo rígido, se relacionam da seguinte forma:

$$m = \int_V \rho(x, y, z) dV.$$

Lembre-se que uma integral nada mais é que a soma de pequenos pedaços, sendo assim, na integral acima, estamos somando pequenos cubinhos de volume ( $dV$ ), cada um com um valor de densidade dado por  $\rho(x, y, z)$ . Nesse caso, podemos definir que a massa de cada cubinho é igual a  $\rho \cdot dV$  e que a integral funciona como uma somatória (lembra-se da integral de Riemann do cálculo?).

Seguindo essa lógica, quando a densidade  $\rho$  é constante,  $m = \int_V \rho dV = \rho \int_V dV$ , o que nos faz somar todos os pedaços que compõem nosso volume até formar o volume total, ou seja,  $m = \rho \int_V dV = \rho \cdot V$ . Em muitos casos realistas, a densidade de uma peça é homogênea ou constante.

A representação escolhida é bastante geral e exemplifica bem situações de densidade não homogênea, quando o corpo é composto por diferentes materiais com diferentes densidades, então, a densidade resultante do corpo é uma função qualquer  $\rho(x, y, z)$ .

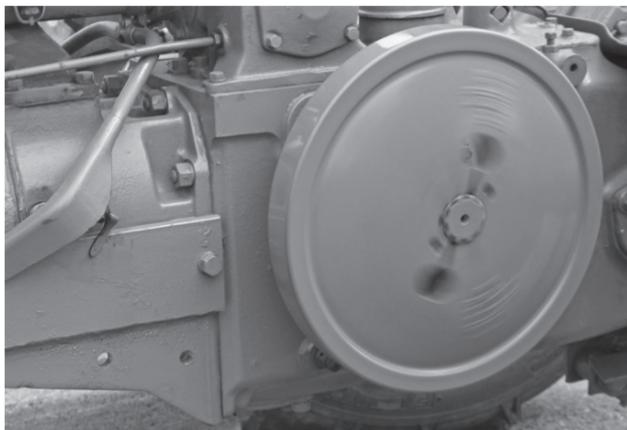
Para corpos rígidos finos, como chapas e lâminas, a integral de volume pode ser simplificada a uma integral de área e, nesse caso, devemos trabalhar uma grandeza denominada densidade de área (ou densidade superficial)  $\sigma(x, y): m = \int_A \sigma(x, y) dA$ . Analogamente, para corpos de uma dimensão, como fios e barras, usamos a grandeza denominada densidade linear  $\lambda(x): m = \int_x \lambda(x) dx$ .



## Exemplificando

Um volante de inércia é um dispositivo mecânico usado para armazenar energia rotacional por meio de um grande momento de inércia e serve, por exemplo, como um tipo de amortecedor dos impulsos dos pistões sobre o virabrequim em motores a combustão. Ele pode ser simplificado como um disco composto por um material menos denso envolto por um anel de material mais denso.

Figura 2.1 | Volante de inércia de um trator



Fonte: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Green\\_tractor\\_flywheel.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Green_tractor_flywheel.jpg)>. Acesso em: 23 nov. 2016.

Calcule a massa de um volante de inércia composto por um disco de alumínio ( $\rho = 2,70 \text{ g/cm}^3$ ), raio 10 cm e espessura 1 cm; e um anel de chumbo ( $\rho = 11,36 \text{ g/cm}^3$ ) de raio interno 10 cm, raio externo 12 cm e espessura 1 cm.

O cálculo da massa será feito por:

$$m = \int_V \rho(x, y, z) dV.$$

Devido à simetria do objeto, devemos utilizar um sistema de coordenadas cilíndricas. Nesse caso, o diferencial de volume  $dV$  pode ser substituído por  $r dz dr d\theta$ :

$$m = \int_V \rho(r) r dz dr d\theta.$$

Note que  $\rho(x, y, z)$  é função do raio, apenas, e constante, no que diz respeito a  $z$  ou  $\theta$ . Com isso, podemos quebrar a integral em três integrais independentes e analisar cada variável separadamente:

$$m = \int_z dz \int_\theta d\theta \int_r \rho(r) r dr.$$

A integral em  $z$  será:

$$\int_z dz = \int_0^{10} dz = z \Big|_0^{10} = 10 - 0 = 10.$$

A integral em  $\theta$  será:

$$\int_\theta d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

A integral em  $r$  será:

$$\int_r \rho(r) r dr = \int_0^{10} \rho_{Al} r dr + \int_{10}^{12} \rho_{Pb} r dr = \rho_{Al} \int_0^{10} r dr + \rho_{Pb} \int_{10}^{12} r dr,$$

$$\int_r \rho(r) r dr = \rho_{Al} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{10} + \rho_{Pb} \frac{r^2}{2} \Big|_{10}^{12} = \rho_{Al} \cdot \frac{10^2 - 0^2}{2} + \rho_{Pb} \cdot \frac{12^2 - 10^2}{2}$$

Substituindo os valores para a densidade do alumínio ( $\rho = 2,70 \text{ g/cm}^3$ ) e do chumbo ( $\rho = 11,36 \text{ g/cm}^3$ ):

$$m = 10 \cdot 2\pi \cdot (\rho_{Al} \cdot 50 + \rho_{Pb} \cdot 22) = 24,2 \times 10^3 \text{ g} = 24,2 \text{ kg}.$$

## Momento de inércia

Com essa relação entre massa e densidade, podemos adaptar os conceitos de momento de inércia e centro de massa. Sabemos

que, para uma partícula, o momento de inércia  $I_p$  é proporcional à massa da partícula  $M_p$  e proporcional ao quadrado da distância entre a partícula e o seu eixo de rotação  $R$ , de modo que  $I_p = M_p R^2$ .

Para um corpo rígido, teremos:

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho(x, y, z) dV,$$

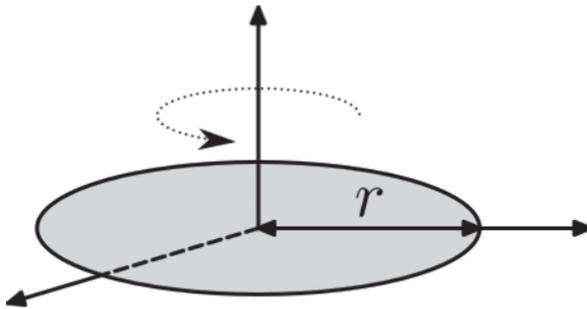
onde  $r$  é o raio da rotação de cada elemento de volume do corpo rígido.



### Exemplificando

Sabendo que o raio de rotação de um volante de inércia passa pelo centro do disco e é perpendicular ao próprio disco, qual o momento de inércia do mesmo volante do exemplo anterior?

Figura 2.2 | Eixo de rotação



Fonte: elaborada pelo autor.

$$I = \int_V r^2 \rho(r) r dz dr d\theta = \int_z dz \int_\theta d\theta \int_r r^2 \rho(r) r dr.$$

Repare que as integrais em  $\mathbf{z}$  e  $\theta$  são as mesmas do exemplo anterior, logo, temos de nos preocupar apenas com a integral em  $r$ :

$$\int_r r^2 \rho(r) r dr = \int_r \rho(r) r^3 dr = \rho_{Al} \int_0^{10} r^3 dr + \rho_{Pb} \int_{10}^{12} r^3 dr,$$

$$\int_r r^2 \rho(r) r dr = \rho_{Al} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{10} + \rho_{Pb} \frac{r^4}{4} \Big|_{10}^{12} = \rho_{Al} \cdot \frac{10^4 - 0^4}{4} + \rho_{Pb} \cdot \frac{12^4 - 10^4}{4}$$

Substituindo os valores para as densidades do alumínio e do chumbo:

$$I = 10 \cdot 2\pi \cdot (\rho_{Al} \cdot 2500 + \rho_{Pb} \cdot 2684) = 2340 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

Qual seria o momento de inércia de um novo volante feito de um único material de densidade constante, mas massa igual à do volante anterior?

Nesse caso, a nova densidade seria:

$$\rho_n = \frac{m}{V} = \frac{24.2 \times 10^3}{\pi \cdot 12^2 \cdot 10} = 8,80 \text{ g/cm}^3.$$

Portanto, o novo momento de inércia seria:

$$I = \int_V r^2 \rho_n r dz dr d\theta = 10 \cdot 2\pi \cdot \left( \rho_n \int_0^{12} r^3 dr \right),$$

$$I = \int_V r^2 \rho_n r dz dr d\theta = 10 \cdot 2\pi \cdot 5.34 \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{12} = 2865 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$



**Pesquise mais**

Para exemplos e uma lista do momento de inércia de diferentes corpos rígidos veja:

BEER, F. **Mecânica vetorial para engenheiros**: dinâmica: apêndice B. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2009.

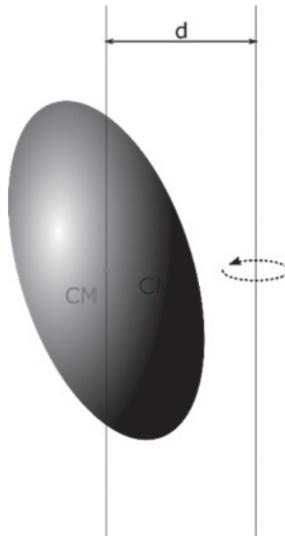
Para facilitar os cálculos do momento de inércia de corpos rígidos podemos ainda usar dois teoremas, conhecidos como: Teorema dos Eixos Paralelos e Teorema dos Eixos Perpendiculares.

a) Teorema dos eixos paralelos: se conhecermos o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa de um corpo rígido, o momento de inércia em relação a qualquer outro eixo paralelo será:

$$I = I_{CM} + m \cdot d^2.$$

Onde  $m$  é a massa do corpo rígido e  $d$ , a distância entre os dois eixos paralelos, como mostra a figura a seguir.

Figura 2.3 | Teorema dos eixos paralelos

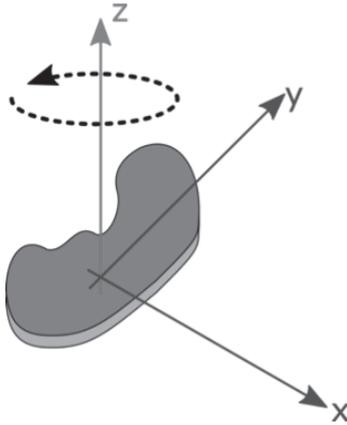


Fonte: elaborada pelo autor.

b) Teorema dos eixos perpendiculares: se conhecermos o momento de inércia de dois eixos, como  $(x, y)$ , podemos definir um plano que passa pelos dois eixos. Sendo assim, o momento de inércia de um terceiro eixo  $z$ , mostrado na Figura 2.4, que é perpendicular a esse plano, será:

$$I_z = I_x + I_y.$$

Figura 2.4 | Teorema dos eixos perpendiculares



Fonte: elaborada pelo autor.

### Centro de Massa

O outro conceito que utilizaremos bastante é o de centro de massa. Para um corpo rígido o centro de massa pode ser calculado pela relação:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} \rho(x, y, z) dV}{\int_V \rho(x, y, z) dV}$$

Atenção! Nessa relação  $\vec{r}$ , não se refere ao raio de nenhuma rotação, mas sim ao vetor da posição  $(x, y, z)$ . E caso você não se lembre, não custa lembrar a fórmula do centro de massa para um conjunto de partículas (acredite, vai ser útil):

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i}$$

onde  $\vec{r}_i$  se refere ao vetor posição da partícula  $i$  e  $m_i$  à massa dessa mesma partícula.

Tome qualquer reta que atravesse o centro de massa de um corpo rígido. Uma força aplicada na mesma linha de qualquer uma dessas

retas não causará torque ou rotação no corpo. Em particular, a força peso da massa total do corpo pode ser considerada como aplicada exatamente em seu centro de massa.

É por isso que você consegue equilibrar um objeto apoiando-o sobre um dedo: seu dedo deve estar na mesma linha do centro de massa, ambos os pontos alinhados na vertical, de modo que a força normal do seu dedo cancelará a força peso do corpo sem causar um torque sobre ele.



### Faça você mesmo

Uma força aplicada na mesma linha do centro de massa de um corpo é a única que não faz com que ele gire. Tente equilibrar um objeto, como um livro, apoiando-o em seu dedo, girando o corpo de diversas maneiras. Tente entender onde se localiza o centro de massa do corpo.



### Vocabulário

Em muitos textos você encontrará os termos **Centro de Gravidade** e **Centro de Massa** tratados como sinônimos. Em um campo gravitacional uniforme (o que é, em uma ótima aproximação, a situação de qualquer corpo na superfície da terra) ambos os pontos sempre coincidirão.

A concepção do centro de massa permite trazer muitos dos conceitos da dinâmica aplicáveis a partículas para sistemas de corpos rígidos. Na unidade anterior, vimos como é possível e útil alterar o referencial. A propriedade de torque nulo faz do centro de massa a escolha mais comum para definir o referencial do corpo rígido, e com isso fazendo com que qualquer força fora da linha do centro de massa se traduza automaticamente em um torque, como de fato deve ser.



### Reflita

Aproveite esta pausa para pensar nas consequências da escolha do centro de massa como referencial do corpo rígido. Resgate seus conhecimentos

de estática e compare com o que estamos construindo aqui. Não é tudo muito semelhante?

Dentre os paralelos que podemos fazer entre corpos rígidos e partículas, podemos começar aplicando o próprio conceito de centro de massa. Da mesma forma que podemos analisar e encontrar o centro de massa de um sistema de muitas partículas independentes, é possível estender a análise e encontrar o centro de massa de um sistema de muitos corpos rígidos independentes.

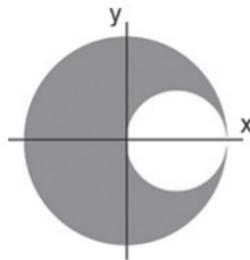
Paratanto, devemos analisar cada corpo rígido independentemente, atribuindo a cada um deles a equivalência a uma **partícula** com: 1. massa idêntica a do corpo e 2. localizada exatamente no centro de massa do corpo rígido. Assim, conseguimos reduzir um sistema de corpos rígidos a um sistema de muitas partículas, muito mais simples de analisar.



### Exemplificando

Em uma chapa metálica circular de raio unitário e densidade de área constante  $\sigma = 10 \text{ kg/m}^2$  fez-se um corte circular, mostrado na Figura 2.5. Calcule a posição do centro de massa deste corpo.

Figura 2.5 | Chapa com furo circular



Fonte: elaborada pelo autor.

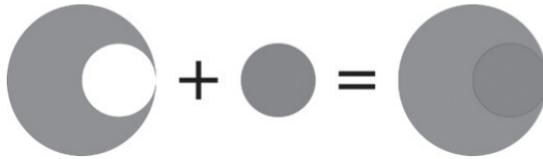
Observando o corpo rígido, podemos concluir de imediato duas coisas:

1. O centro de massa do corpo rígido está localizado no eixo de simetria, ou seja, sobre o eixo x.

2. O centro de massa se deslocou no sentido negativo do eixo x, uma vez que há mais massa do lado esquerdo do que do lado direito da chapa cortada.

Para calcular a posição exata do centro de massa do corpo, podemos usar o conceito de um sistema de vários corpos rígidos. Na Figura 2.6, vemos que se reintroduzirmos o pedaço que foi retirado, teremos uma chapa circular completa.

Figura 2.6 | Composição da chapa com furo



Fonte: elaborada pelo autor.

No referencial mostrado na Figura 2.7, o centro de massa será dado por:

$$CM_y = \frac{y_{circ} \cdot m_{circ} + y_{furo} \cdot (-m_{furo})}{m_{circ} + (-m_{furo})} = \frac{0 \cdot m_{circ} - 0 \cdot m_{furo}}{m_{circ} - m_{furo}} = 0.$$

Demonstrando que o centro de massa se localiza sobre o eixo x. Sabemos também que:

$$CM_x = \frac{x_{circ} \cdot m_{circ} + x_{furo} \cdot (-m_{furo})}{m_{circ} + (-m_{furo})}.$$

Utilizaremos o fato de que  $m = \sigma A$ , que o diâmetro do disco menor é igual ao raio do disco maior, de modo que o raio do disco menor é metade do raio do disco maior. A área de um círculo é dada pela expressão  $A = \pi r^2$ , então:

$$CM_x = \frac{0 \cdot \pi r^2 \sigma - \frac{r}{2} \cdot \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \sigma}{\pi r^2 \sigma - \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \sigma} = -\frac{\pi \frac{1}{4} \sigma}{2\pi \sigma - \pi \frac{1}{2} \sigma} = -\frac{1}{3}$$

e, portanto, o novo centro de massa será:  $CM = -\frac{1}{3} \hat{i}$ .

Nas próximas seções, usaremos extensivamente o conceito de centro de massa para a análise de sistemas compostos por um ou vários corpos rígidos. Usaremos tanto o centro de massa quanto o momento de inércia, já definidos, para criar paralelos com a dinâmica de partículas e, assim, quantificar a ação de forças em um corpo rígido para determinar sua equação de movimento e aplicá-la aos mais diversos mecanismos.



### Pesquise mais

À medida que avançamos nesta unidade, iremos criar cada vez mais paralelos com conceitos inicialmente introduzidos no estudo de partículas. Por isso, para uma revisão da dinâmica de partículas, você pode pesquisar em:

HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. p. 238.



### Assimile

Nesta seção revisitamos duas grandezas que nos serão úteis adiante. A primeira foi uma grandeza denominada Momento de Inércia:

$$I = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho(x, y, z) dV.$$

A segunda foi o Centro de Massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} \rho(x, y, z) dV}{\int_V \rho(x, y, z) dV}.$$

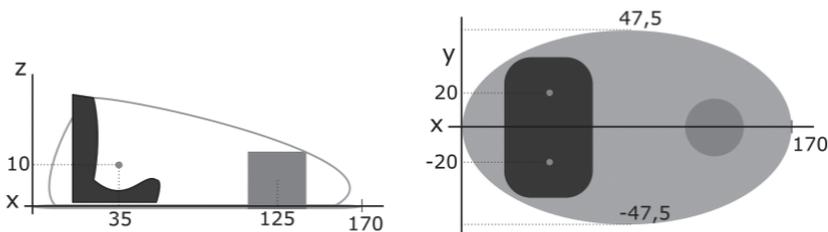
### Sem medo de errar

Você deve se lembrar de que nos colocamos no papel de um projetista que trabalha para uma empresa que constrói atrações para

parques de diversões. E acabamos acabamos de começar a projetar o brinquedo carrinho bate-bate.

Nesta primeira etapa, você é responsável por analisar o carrinho individualmente, no que diz respeito a sua distribuição de peso. O chassi consiste em uma estrutura que pode ser aproximada por uma chapa elíptica de densidade de área  $\sigma = 3\text{g/cm}^2$ , eixos 170 cm e 95 cm, conforme Figura 2.8, e com um buraco para o encaixe do motor. O motor é um bloco único, cilíndrico, com diâmetro e altura de 25 cm; ele fica posicionado em um buraco na placa, fazendo com que o fundo do motor fique no mesmo nível da placa, assim como mostrado na Figura 2.8. Seus componentes internos são variados, mas segundo o fabricante do motor, seu peso total é de 50 kg e fica localizado no centro do cilindro. Além disso, o carrinho pode comportar até dois passageiros de 150 kg no total, cujas posições para seus centros de massa estão demarcadas pelos pontos em cinza.

Figura 2.8 | Esboço da distribuição dos principais componentes num carrinho bate-bate



Fonte: elaborada pelo autor.

Você precisa determinar quais as possíveis variações na distribuição de peso (centro de massa do sistema) para três situações:

- Carrinho vazio;
- Com dois passageiros de massas iguais, 150kg no total, um em cada banco.

E garantir que na condição b) o centro de massa não se desloque acima de 25% se comparado a a).

Para calcular o centro de massa do carrinho, precisamos calcular o

Centro de Massa de seus componentes. O centro de massa do chassis pode ser calculado sabendo o centro de massa de uma placa sólida e corrigindo-o pelo centro de massa do buraco do motor:

$\overline{CM}_{chassis} = \frac{\vec{r}_{elipse} m_{elipse} + \vec{r}_{buraco} (-m_{buraco})}{m_{elipse} + (-m_{buraco})}$ , onde a massa é calculada pela relação  $m = \sigma A$ .

A elipse é uma forma geométrica simétrica, de maneira que para uma densidade constante seu centro de massa se localiza em seu centro geométrico. Então, podemos escrever o centro de massa usando a notação vetorial discutida na unidade anterior, como:

$$\overline{CM}_{chassis} = \frac{(85\hat{i}) \cdot A_{elipse} \cdot \sigma - (125\hat{i}) \cdot A_{buraco} \cdot \sigma}{A_{elipse} \cdot \sigma - A_{buraco} \cdot \sigma}$$

A área de uma elipse é dada pela expressão  $A_{elipse} = \pi \cdot a \cdot b$ , onde a e b são respectivamente o raio maior e o raio menor (semieixos).

$$\overline{CM}_{chassis} = \frac{(85\hat{i}) \cdot \frac{170}{2} \cdot \frac{95}{2} \cdot \pi \cdot \sigma - (125\hat{i}) \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \sigma}{\frac{170}{2} \cdot \frac{95}{2} \cdot \pi \cdot \sigma - \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \sigma} = 83,4\hat{i}$$

Como comentado, o centro de massa do motor fica exatamente no seu ponto central, logo, o centro de massa do motor pode ser escrito na forma vetorial, como:

$$\overline{CM}_{motor} = 125\hat{i} + 12,5\hat{k}$$

a) Logo, o centro de massa com o carrinho vazio será:

$$\overline{CM}_{carrinho} = \frac{\overline{CM}_{motor} m_{motor} + \overline{CM}_{chassis} m_{chassis}}{m_{motor} + m_{chassis}}, \text{ onde } m_{chassis} = 146 \text{ kg}$$

$$\overline{CM}_{carrinho} = \frac{(125\hat{i} + 12,5\hat{k}) \cdot 50 + (83,4\hat{i}) \cdot 146}{50 + 146} = 94\hat{i} + 3,2\hat{k}$$

b) Na presença dos dois passageiros, devemos notar que o centro de massa de ambos fica a uma posição simétrica na direção y (os dois a uma distância de 20 cm do eixo), logo, podemos afirmar que na direção y o centro de massa fica na origem, isso simplifica os cálculos da seguinte forma:

$$\overline{CM}_{\text{carrinho}+2p} = \frac{\overline{CM}_{\text{carrinho}}m_{\text{carrinho}} + \overline{CM}_{2p}m_{2p}}{m_{\text{carrinho}} + m_{2p}}$$

$$\overline{CM}_{\text{carrinho}+2p} = \frac{(94\hat{i} + 3,2\hat{k}) \cdot 196 + (35\hat{i} + 10\hat{k}) \cdot 150}{196 + 150} = 68\hat{i} + 6\hat{k} .$$

Sendo assim, a variação no centro de massa, com e sem o passageiro, será:

$$\Delta = \frac{|\overline{CM}_{\text{carrinho}} - \overline{CM}_{\text{carrinho}+2p}|}{|\overline{CM}_{\text{carrinho}}|} \cdot 100$$

$$\Delta = \frac{|83,4\hat{i} - (68\hat{i} + 6\hat{k})|}{|83,4\hat{i}|} \cdot 100 = \frac{|15,4\hat{i} - 6\hat{k}|}{|83,4\hat{i}|}$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{15,4^2 + 6^2}}{83,4} \cdot 100 = 21\%.$$

Portanto, encontra-se dentro da recomendação de segurança.

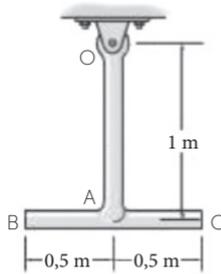
## Avançando na prática

### Pêndulo real

#### Descrição da situação-problema

Na Figura 2.9 temos um pêndulo suspenso pelo pino no ponto O. Ele consiste em duas barras finas homogêneas cada uma com um peso de 5 kg. Determine o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto O.

Figura 2.9 | Pêndulo composto



Fonte: adaptado Hibbeler (2012, p. 323).

### Resolução da situação-problema

Para resolver essa situação-problema, precisamos primeiro calcular o momento de inércia de uma barra de comprimento  $L$  e raio de giro no centro de barra, e deduzir uma fórmula geral para o nosso problema:

$I = \int r^2 \lambda dr$ , como a barra é homogênea, e por isso, a densidade é constante:  $\lambda = \frac{m}{L}$ .

$I = \int r^2 \frac{m}{L} dr$ , como estamos integrando a partir do meio de barra, devemos assumir como origem ( $r = 0$ ) o centro da barra e os limites de integração:  $-\frac{L}{2}$  a  $\frac{L}{2}$ .

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \frac{m}{L} dr = \frac{m}{L} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{L} \cdot \left( \frac{L^3}{3 \cdot 2^3} - \left( -\frac{L^3}{3 \cdot 2^3} \right) \right) = \frac{m}{L} \cdot \left( \frac{L^3}{12} \right) = \frac{mL^2}{12}$$

Dessa maneira, usando o teorema dos eixos paralelos, calculamos o momento de inércia da barra  $\overline{OA}$ :

$$I_{\overline{OA}} = \frac{mL^2}{12} + md_{\overline{OA}}^2, \text{ onde } d_{\overline{OA}} = \frac{L}{2}$$

$$I_{\overline{OA}} = \frac{mL^2}{3}$$

Da mesma forma, para a barra  $\overline{BC}$ :

$$I_{\overline{BC}} = \frac{mL^2}{12} + md_{\overline{BC}}^2, \text{ onde } d_{\overline{BC}} = L$$

$$I_{BC} = \frac{13mL^2}{12}.$$

Logo, o momento total será:

$$I = I_{OA} + I_{BC} = \frac{mL^2}{3} + \frac{13mL^2}{12} = 7kg \cdot m^2.$$

## Faça valer a pena

**1.** Leia as três afirmativas a seguir:

I. A massa total de um corpo rígido bidimensional é dada pela seguinte relação:  $m = \int \lambda(x)dx$ .

II. O momento de inércia de um fio é dado pela relação:  $I = \int r^2 \sigma dA$ .

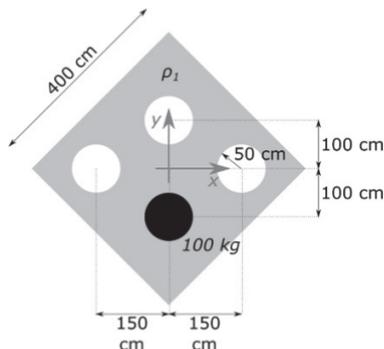
III. Se um corpo rígido possuir densidade constante em todo seu volume, então, sua massa total é dada pela relação:  $m = \rho \cdot V$ .

Leia com cuidado as três afirmativas anteriores, e assinale qual alternativa é a correta.

- Apenas a afirmativa I está correta.
- Apenas a afirmativa II está correta.
- Apenas a afirmativa III está correta.
- Apenas I e II estão corretas.
- Todas as alternativas estão corretas.

**2.** Em uma chapa quadrada, com 400 cm de lado e densidade de área constante  $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^2$ , fez-se 4 furos de raio de 50 cm e posições relativas ao centro da chapa, como mostradas na Figura 2.10. Além disso, um dos furos foi completamente preenchido com um material cuja massa total é 100 kg.

Figura 2.10 | Dimensões da chapa quadrada



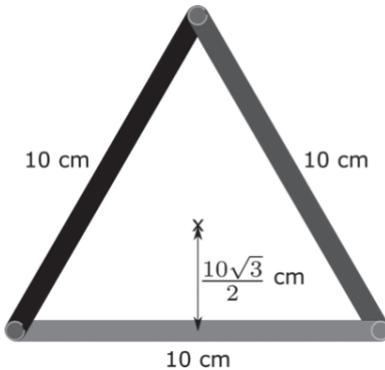
Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 327).

Tomando o centro da chapa como referencial, selecione a alternativa que representa o centro de massa do sistema.

- a)  $66\hat{j}$  mm.
- b)  $-6\hat{i}$  cm.
- c)  $-0,6\hat{k}$  mm.
- d)  $-65,6\hat{j}$  mm.
- e)  $-60,2\hat{i}$  mm.

**3.** Três barras muito finas e idênticas, de comprimento 10 cm e massa 5 kg, são unidas formando um triângulo equilátero. Determine o momento de inércia da montagem em relação ao eixo perpendicular ao plano da folha que passa pelo baricentro do triângulo (ponto X), mostrado na Figura 2.11.

Figura 2.11 | Arranjo de barras.



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 15-17).

Dados: o momento de inércia de uma barra é:  $I_{CM} = \frac{mL^2}{12}$

Selecione a alternativa que melhor representa o valor do momento de inércia.

- a)  $125 \text{ kg} \cdot \text{m}$ .
- b)  $1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}$ .
- c)  $5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}$ .
- d)  $125 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}$ .
- e)  $1000 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}$ .

## Seção 2.2

### Translação de corpos rígidos

#### Diálogo aberto

Olá aluno, na primeira unidade do nosso curso de dinâmica, vimos como podemos descrever a posição, a velocidade e principalmente a aceleração de corpos rígidos em um plano. Logo depois, na seção anterior, revisitamos e aplicamos o conceito de centro de massa a um corpo rígido. Com isso, você já deve desconfiar que podemos juntar esses conceitos de aceleração e massa para finalmente iniciar a análise das forças atuantes sobre um corpo rígido. Tal análise nos deixará não só a um passo mais próximos da compreensão da cinemática de corpos rígidos complexos, como também nos permitirá aplicar os seus conceitos a mecanismos e problemas de engenharia.

Considere, por exemplo, o caso do nosso projetista, que trabalha fabricando brinquedos para parques de diversão. Dando continuidade à análise da dinâmica de um carrinho bate-bate, depois de entender a distribuição de peso do carrinho em diferentes situações, o chefe do nosso projetista solicitou um relatório descrevendo as diferentes formas de aceleração a que o carrinho estará submetido. Você precisa descobrir se o motor escolhido é ideal para uma dada aceleração desejada e também quanta força é necessária para parar o carrinho.

Por fim, ao término desta seção, também já seremos capazes de generalizar os conceitos de dinâmica de translação de corpos rígidos no plano. Com isso, caberá a você criar o senso crítico para solução dos problemas e exercícios propostos, e ainda expandir seu conhecimento com a bibliografia sugerida.

#### Não pode faltar

Na unidade passada, vimos que podemos descrever o movimento de um corpo rígido no plano, de três formas: **translação**, **rotação em eixo fixo** e **movimento geral no plano**. Este último, mostrou-se ser

uma combinação dos dois primeiros e, por isso, podemos nos focar apenas na translação e rotação. Como mencionado, esses dois tipos de movimento do corpo estão restritos a um plano de referência, consequentemente todas as forças de interesse também devem estar contidas neste mesmo plano e, por isso, qualquer força que atua sobre o corpo deve ser projetada no plano.

Iniciaremos nossos estudos focando primeiramente no movimento de translação, tratando da maneira como as forças agem sobre o corpo não fazer com que seus pontos girem ao redor do centro de massa. Nesse caso em particular, seu movimento pode ser descrito apenas com a equação:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{CM}$$

onde  $m$  é a massa total do corpo rígido extenso, que, como vimos, é obtida integrando a densidade ao longo de seu volume:

$m = \int_V \rho dV$ , e também  $\vec{a}_{CM}$  é a aceleração do centro de massa do corpo.

Essa equação é uma consequência direta da segunda Lei de Newton, que está diretamente relacionada à expressão  $\vec{F} = m\vec{a}$ , e o que ela nos diz é que a soma vetorial de todas as forças que agem sobre um corpo rígido resulta em uma aceleração proporcional à massa total do corpo.



### Assimile

Em um movimento no plano, um corpo rígido que não está girando em torno de seu centro de massa terá a soma de todas as forças que agem sobre ele igual à massa total do corpo vezes a aceleração de seu **centro de massa**, ou seja:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{CM}$$

No entanto, para efetivamente aplicarmos essa relação, devemos ainda escolher um referencial que melhor descreve o movimento de translação. Lembre-se que uma translação pode seguir diferentes trajetórias: uma translação retilínea, onde dois pontos quaisquer no corpo rígido desenharão duas retas paralelas, ou uma trajetória curvilínea (que poderá inclusive ser circular). Podemos definir um referencial cartesiano, ou seja, um referencial onde o movimento translacional do corpo segue o plano  $(x, y)$ :

$$\sum F_x = ma_x,$$

$$\sum F_y = ma_y.$$

Repare que  $a_x$  e  $a_y$  ainda se referem a componentes  $x$  e  $y$  do **centro de massa**. Não utilizamos o subíndice  $CM$ , uma vez que nesta seção sabemos que os pontos do corpo rígido mantêm sua posição relativa, sem girar ao redor do centro de massa. Assim, essas duas equações escalares são tudo o que é necessário para descrever a dinâmica de um corpo rígido em uma translação retilínea no plano.



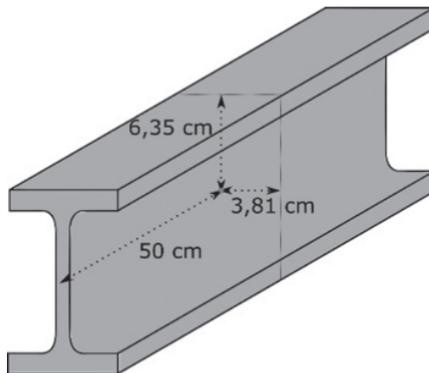
### Exemplificando

Uma viga tipo I de aço tem dimensões **5"x3"** e 1 m de comprimento, ela tem uma massa de 15kg e está inicialmente em repouso sobre o solo. Em seguida ela será içada por um guindaste à velocidade constante de 1 m/s. Como a força do guindaste deve ser aplicada de forma a manter a viga na horizontal? Qual a intensidade dessa força?

Para garantir que a viga continue na horizontal não podemos gerar nenhum tipo de torque à viga. Por isso, precisamos aplicar a força do guindaste exatamente na mesma linha de seu centro de massa.

Para o cálculo do centro de massa, teríamos de considerar as dimensões da viga, no entanto, como ela é simétrica e feita de material homogêneo, podemos afirmar que seu centro de massa se localiza exatamente no centro da viga, como mostrado na Figura 2.12.

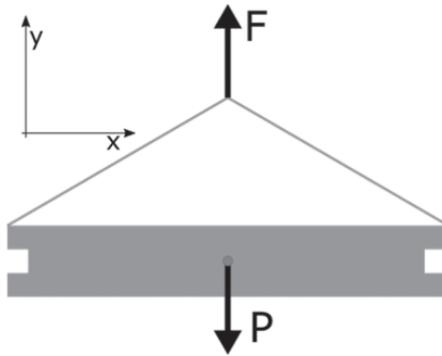
Figura 2.12 | Centro de massa da viga



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, basta garantir que a força do guindaste esteja aplicada nessa linha, como mostrado na Figura 2.13.

Figura 2.13 | Diagrama de forças



Fonte: elaborada pelo autor.

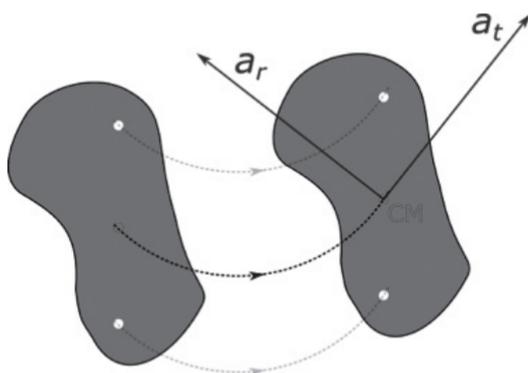
Com relação à intensidade da força, não existe força na direção  $x$ , e na direção  $y$  a velocidade constante de içamento não implica em força resultante, logo:

$$\sum F_y = F - mg = 0$$

$$F = mg = 15 \cdot 9,8 \Rightarrow \vec{F} = (147\text{N})\hat{j}.$$

Um tipo importante de trajetória de um corpo rígido é a trajetória curvilínea, em que os dois pontos de referência do corpo rígido seguirão curvas equidistantes. Um caso importante é o da trajetória curvilínea circular, quando as linhas curvas formam círculos ou semicírculos idênticos, como ilustrado na Figura 2.14.

Figura 2.14 | Trajetória curvilínea circular



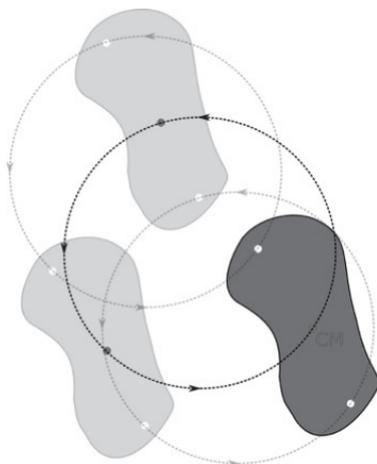
Fonte: elaborada pelo autor.



### Assimile

Não confunda o movimento de translação curvilínea circular com um movimento de rotação. Na translação curvilínea, os pontos no corpo formam círculos de mesmo raio, mas não concêntricos, conforme Figura 2.15.

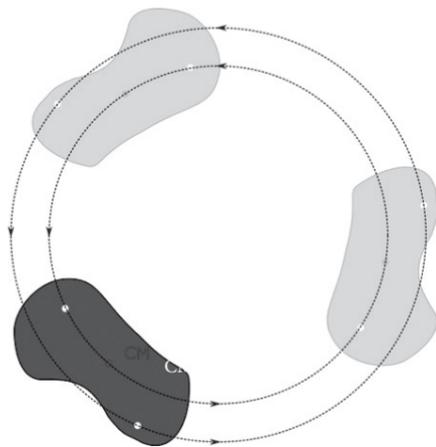
Figura 2.15 | Trajetória curvilínea circular completa



Fonte: elaborada pelo autor.

Na rotação, os pontos no corpo formam círculos de raios distintos, porém, concêntricos, como mostra a Figura 2.16.

Figura 2.16 | Movimento de rotação



Fonte: elaborada pelo autor.

A rotação implica em todos os pontos girando ao redor de um mesmo eixo, o que não ocorre no caso da translação curvilínea circular.



### Faça você mesmo

A descrição de um movimento é sempre mais complicada que sua visualização. Aproveite esta pausa para pegar um corpo rígido, como sua caneta, e se familiarize com o que aqui chamamos de trajetória de translação retilínea e trajetória de translação curvilínea sobre um plano, como sua mesa.

Como já vimos na unidade anterior, uma escolha apropriada de referencial pode simplificar o entendimento da dinâmica do corpo rígido sobre sua trajetória. No caso do movimento curvilíneo, faz sentido utilizar coordenadas polares para reescrever as equações escalares da dinâmica, como:

$$\sum F_t = ma_t,$$

$$\sum F_r = ma_r.$$

Onde  $a_t$  e  $a_r$  referem-se às componentes tangencial e radial (ou normal) da aceleração do centro de massa.

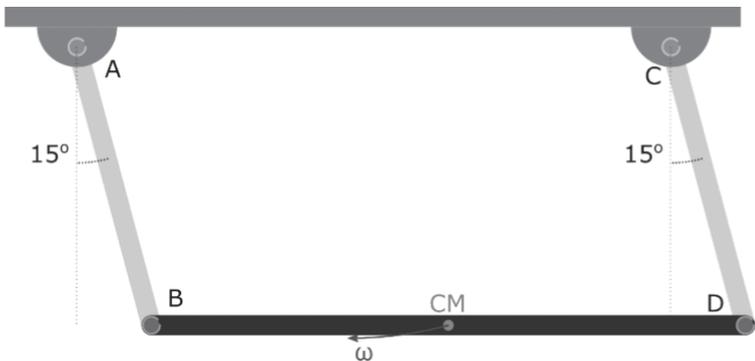
No movimento curvilíneo, a cada instante, podemos definir uma força centrípeta cuja magnitude é proporcional à velocidade angular do centro de massa:  $F_c = ma_r = m\omega^2 r$ . Uma vez que a velocidade tangencial é dada pela expressão  $V_t = \omega r$ , a força centrípeta também pode ser definida em função da velocidade tangencial:  $F_c = m \frac{V_t^2}{r}$ . Note que você precisa descobrir o raio ao redor do qual o centro de massa do corpo rígido gira naquele instante de tempo específico.



### Exemplificando

Uma viga homogênea de 5 kg está estendida horizontalmente, suspensa graças a duas barras de 1 metro e massa desprezível, conforme Figura 2.17. Nessa configuração, a viga se desloca em trajetória curvilínea e, no momento em que as barras fazem um ângulo de  $15^\circ$ , a velocidade angular da viga é de **3 rad/s**. Qual é a aceleração tangencial e radial da viga?

Figura 2.17 | Viga suspensa



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe na Figura 2.17 que o ponto B realiza um movimento circular com relação ao ponto A, enquanto que o ponto D realiza um movimento circular ao redor do ponto C. Perceba que todos os pontos da barra, na

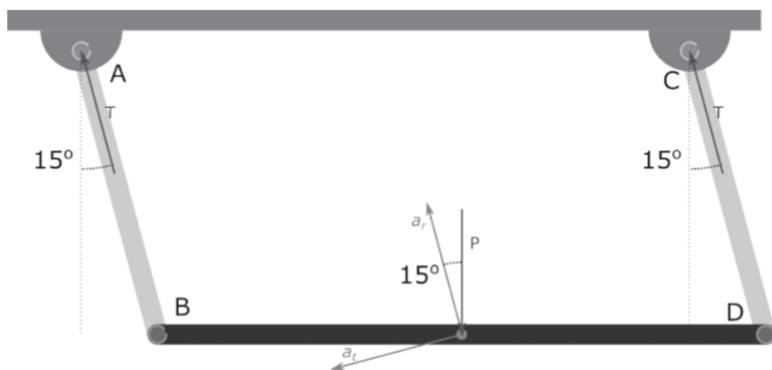
situação indicada, realizarão um movimento circular ao redor de um único ponto na parte superior da figura, com uma mesma velocidade angular, incluindo o centro de massa, isso significa que a aceleração centrípeta pode ser calculada diretamente do valor da velocidade angular:

$$ma_r = m\omega^2 r$$

$$a_r = \omega^2 r = 3^2 \cdot 1 = 9 \text{ m/s}^2.$$

Para obter a aceleração tangencial, precisamos analisar as forças que atuam sobre a barra:

Figura 2.18 | Diagrama de forças e aceleração



Fonte: elaborada pelo autor.

Note que as trações atuam na direção radial, de modo que somente uma componente da força peso atua na direção tangencial, portanto:

$$\sum F_t = ma_t$$

$$ma_t = P \sin 15^\circ = mg \sin 15^\circ = 5 \cdot 9,8 \cdot 0,26 = 12,74 \text{ N}.$$



### Faça você mesmo

Considerando o exemplo anterior, qual a força de tração exercida sobre a viga pelas barras AB e CD? Dica: basta analisar o equilíbrio de forças

na direção tangencial, que ainda não foi estudado, além do equilíbrio de torques. Vamos lá?



### Assimile

O módulo da aceleração centrípeta é dado pela relação:

$$a_r = \omega^2 r = \frac{v_t^2}{r}.$$

O sentido sempre será radial apontando para o centro:  $\vec{a}_r = -a_r \cdot \hat{r}$ .



### Pesquise mais

Para uma revisão dos tipos de movimento, mas também da cinemática de corpos rígidos, incluindo a aceleração para referenciais não inerciais, dê uma olhada em:

BEER, F. **Mecânica vetorial para engenheiros**: dinâmica. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2009. Cap. 15.

Gostaríamos de aproveitar a oportunidade para tecer alguns comentários sobre o conceito de forças imaginárias. Podemos entender a existência delas como uma consequência direta da primeira Lei de Newton. Essa lei, também conhecida como Lei da inércia, diz que todo corpo tem a tendência de manter seu estado de movimento, ou seja, todo corpo deseja manter uma velocidade constante numa trajetória retilínea. Sendo assim, a mudança de direção presente numa trajetória circular só é possível graças à existência de uma força.



### Reflita

Você provavelmente está bem familiarizado com outra força imaginária. Tente se lembrar das vezes em que você esteve em um ônibus (ou carro, trem etc.). Você consegue se lembrar da sensação de uma força no momento em que o motorista acelera

ou freia? Percebe que isso não é uma força real, mas sim um efeito da sua inércia em resposta à aceleração do ônibus?

Na próxima oportunidade, aproveite e tente se familiarizar com a direção, com o sentido e com a intensidade desta força.

Finalmente, para introduzir as forças inerciais à dinâmica de corpos rígidos que estamos desenvolvendo, usamos o chamado Princípio de d'Alembert:

$$\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_{ref} = m\vec{a}.$$

Nessa equação, as forças  $\vec{F}_i$  referem-se a forças reais que agem sobre o sistema, como o motor que puxa o ônibus e a resistência do ar. Já o produto  $m\vec{a}_{ref}$ , refere-se a forças imaginárias decorrentes da inércia da massa  $m$  e da aceleração  $\vec{a}$  do referencial, o que, no caso, pode ser sua tendência em manter-se em movimento durante a frenagem do ônibus. Repare que o sentido da força inercial é contrário à aceleração da referência, ou seja, embora o ônibus esteja desacelerando (força que aponta para trás), você é puxado para frente.



### Exemplificando

Se um avião acelera a uma taxa de  $10\text{m/s}^2$  na direção  $\hat{y}$ , qual a força que um passageiro de massa 70 kg irá sentir estando dentro do avião?

O passageiro está no referencial do avião. Neste referencial e antes da aceleração o passageiro está em repouso:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0,$$

porém, quando o avião acelera, ele agora irá sentir uma força  $\vec{F}$ :

$$\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_{ref} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_{ref} = \vec{F}, \text{ porém, como vimos anteriormente: } \sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{F} = -m\vec{a}_{ref}$$

$$\vec{F} = 70 \cdot (-10\hat{y}) = -700\hat{y}\text{N}.$$

## Sem medo de errar

Retomando aos desafios que nosso projetista tem enfrentado, você continua trabalhando no projeto do brinquedo carrinho bate-bate. Depois de ter examinado a distribuição de peso do carrinho, seu chefe lhe passou as especificações da pista e agora precisa que você determine detalhes da dinâmica do carrinho.

Uma das questões a serem resolvidas é determinar a força máxima que o motor do carrinho terá de fornecer. Seu chefe acaba de lhe entregar a planta da pista, a qual você descobre que será um quadrado de **10m × 10m**. Em relação ao carrinho, ele tem um controle de segurança que limita sua velocidade máxima a **9km/h**, no entanto, o projeto aprovado pelo parque prevê que o carrinho deve ser capaz de alcançar esta velocidade em até  $\frac{1}{4}$  do espaço disponível. Sendo assim, é sua responsabilidade determinar a força necessária para satisfazer essa demanda, com isso, também foi solicitado a você o valor da força esperada sobre as bordas da pista durante uma colisão estimada de **200ms**. Você precisa passar esse valor para o engenheiro responsável pela parte estrutural da pista e, por isso, precisa ser rápido e eficiente, pois agora outros dependem do seu resultado para seus próprios projetos!

Na seção anterior, calculamos a massa do carrinho em  $m_{\text{carrinho}} = (146 + 50) \text{ kg}$  e vimos que ele tem uma ocupação máxima de dois passageiros com até 150 kg:

$$m = 146 + 50 + 150 = 346 \text{ kg}.$$

Com relação à aceleração, temos uma distância de  $\frac{10}{4} = 2,5 \text{ m}$  para alcançar uma velocidade de **9 km/h** ou **2,5 m/s** (no sistema internacional). Com isso, devemos calcular a aceleração pela equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta d$$

$$2,5^2 = 0 + 2a \cdot 2,5$$

$$a = 1,25 \text{ m/s}^2.$$

Portanto, a força que o motor deve gerar será de:

$$F = ma = 346 \cdot 1,25 = 432,5 \text{ N}.$$

Quanto à desaceleração, o pior cenário para uma força aplicada à estrutura da pista é uma desaceleração por uma colisão frontal contra a parede da pista, na velocidade máxima do carrinho, que é de  $v = 2,5 \text{ m/s}$ . O tempo de desaceleração é de  $200 \text{ m/s}$  e pode ser usado para calcular uma desaceleração de:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 2,5}{200 \times 10^{-3}} = -12,5 \text{ m/s}^2.$$

Logo, a força máxima sobre a parede será, em módulo, de:

$$F = m|a| = 346 \cdot 12,5 = 4325 \text{ N}.$$

Essa informação pode ser utilizada para projetar as paredes da pista com segurança, para os usuários da atração do parque.



### Atenção

Lembre-se de que os cálculos de dinâmica apresentados são sempre realizados no que diz respeito ao centro de massa do sistema carrinho/passageiro.

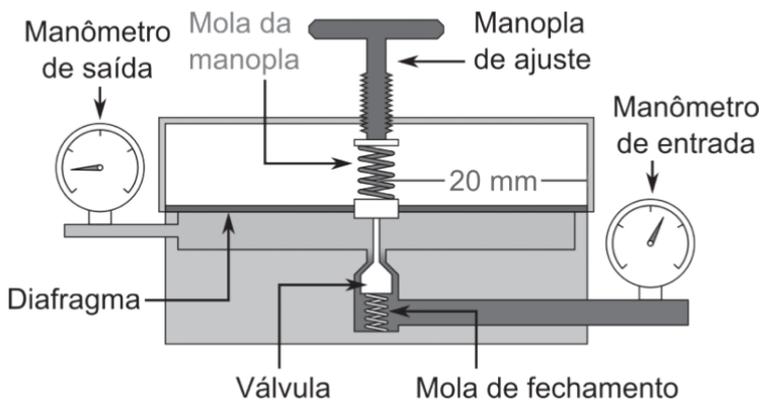
## Avançando na prática

### Regulador de pressão

#### Descrição da situação-problema

Um regulador de pressão é um dispositivo que reduz a pressão de saída de um fluido. Ele é muito utilizado na saída de cilindros contendo gases pressurizados. Seus principais componentes são mostrados na Figura 2.19.

Figura 2.19 | Regulador de pressão



Fonte: adaptado de <[https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure\\_regulator#/media/File:Single-stage-regulator.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure_regulator#/media/File:Single-stage-regulator.svg)>. Acesso em: 28 dez. 2016.

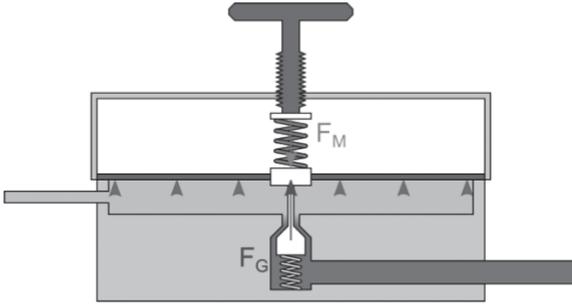
Dentre os componentes, destacamos uma válvula autorregulada, cujo funcionamento é completamente mecânico e pode ser compreendido pelas forças que agem sobre esta. Desenhe o diagrama de forças e determine a força exercida pela mola da manopla sobre a válvula. Considere que a pressão no manômetro de saída é de 6 bar e que a força da mola de fechamento da válvula é desprezível. Lembre-se também que a  $p = \frac{F}{A}$  e que o diafragma é uma peça circular de raio 20 mm.

### Resolução da situação-problema

Note primeiro que o sistema válvula/diafragma é simétrico e visa apenas um movimento de translação, logo, as forças aplicadas sobre o sistema estão alinhadas com o seu centro de massa, evitando que as forças envolvidas causem qualquer tipo de torque.

De qualquer forma, a força da mola de fechamento é desprezível, logo, temos que analisar apenas a força da mola da manopla e a força exercida pelo gás.

Figura 2.20 | Diagrama de forças



Fonte: adaptada de <[https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure\\_regulator#/media/File:Single-stage-regulator.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure_regulator#/media/File:Single-stage-regulator.svg)>. Acesso em: 28 dez. 2016.

$\sum F_y = ma_y = 0$ , pois o sistema está em equilíbrio,

$$F_G - F_M = 0.$$

Lembre-se que a força está relacionada com a pressão devido à relação  $F = P \cdot A$ , onde  $A$  é a área de atuação da pressão, portanto:

$$F_M = F_G = P \cdot A.$$

A pressão está em Bar e precisa ser convertida em Pascal:  
 $6 \text{ bar} = 6 \times 10^5 \text{ Pa}$

$$F_M = 6 \times 10^5 \cdot \pi(0,02)^2 \approx 754 \text{ N}.$$

## Faça valer a pena

**1.** Leia as três afirmativas a seguir:

I. A soma de todas as forças que agem sobre um corpo rígido é igual à massa do corpo vezes a aceleração de seu centro de massa.

II. Um referencial girante e um referencial transladando a velocidade constante são exemplos de referencial inercial.

III. Forças imaginárias são uma consequência direta da primeira Lei da Termodinâmica, a chamada Lei da Entropia.

Leia com cuidado as três afirmativas anteriores, e assinale qual alternativa é a correta.

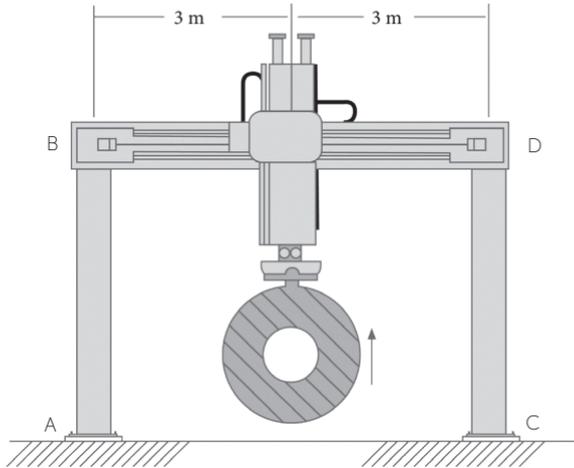
a) Apenas a afirmativa I está correta.

b) Apenas a afirmativa II está correta.

- c) Apenas a afirmativa III está correta.
- d) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- e) Todas as afirmativas estão corretas.

**2.** Uma ponte volante está apoiada em duas colunas, de acordo com a Figura 2.21. Quando ela está operando em sua capacidade máxima, a ponte volante é capaz de içar uma massa de 200 kg, com uma aceleração para cima de até  $10 \text{ m/s}^2$ . Considere a aceleração da gravidade de  $10 \text{ m/s}^2$ .

Figura 2.21 | Ponte volante



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 337).

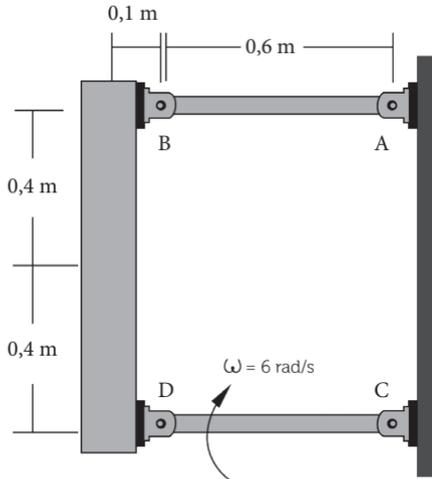
Determine a força compressiva em cada coluna individual exercida sobre a ponte e selecione a alternativa que melhor represente a solução.

- a) 4.000 N.
- b) 2.000 N.
- c) 100 N.
- d) 1.000 N.
- e) 500 N.

**3.** No instante mostrado na Figura 2.22, o membro CD gira com uma velocidade angular  $\omega = 6 \text{ rad/s}$ . A massa total da viga sustentada pelos membros AB e CD é de 50 kg e seu centro de massa é mostrado em G.

Os dois membros de sustentação têm massa desprezível, quando essa é comparada à viga. Considere a gravidade como  $10 \text{ m/s}^2$ .

Figura 2.22 | Barra suspensa



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 336).

Determine a aceleração centrípeta e a tangência do centro de massa do sistema, e selecione a opção que melhor represente sua resposta.

- a)  $a_c = 25,2 \text{ m/s}^2$  ;  $a_t = 5 \text{ m/s}^2$ .
- b)  $a_c = 15,1 \text{ m/s}^2$  ;  $a_t = 21 \text{ m/s}^2$ .
- c)  $a_c = 21,6 \text{ m/s}^2$  ;  $a_t = 10 \text{ m/s}^2$ .
- d)  $a_c = 29,7 \text{ m/s}^2$  ;  $a_t = 15 \text{ m/s}^2$ .
- e)  $a_c = 15,4 \text{ m/s}^2$  ;  $a_t = 10 \text{ m/s}^2$ .

## Seção 2.3

### Rotações de corpos rígidos

#### Diálogo aberto

Caro aluno, seja bem-vindo de volta. Já estamos nos aproximando do final da nossa unidade e, com isso, completaremos nossa compreensão da dinâmica planar dos corpos rígidos. Já somos capazes de analisar inúmeros mecanismos, mas você já deve ter sentido falta daqueles que utilizam algo extremamente simples, como uma roda. Pois é, apesar de já termos abordado mais da metade dos tópicos, ainda nos falta analisar um último tipo de movimento, a rotação em torno de um eixo fixo.

Dessa maneira, nesta seção, iremos finalizar nossos estudos de dinâmica analisando as forças que agem sobre um corpo quando ele rotaciona. Permitindo-nos analisar desde engrenagens e rodas até a maneira como um carrinho se movimenta, ou seja, finalmente seremos capazes de finalizar a compreensão da dinâmica do carrinho bate-bate.

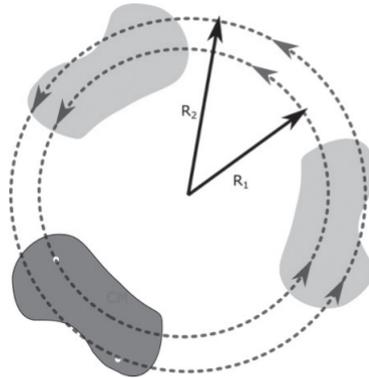
Para tanto, iremos voltar a assumir o dia a dia de nosso projetista que constrói brinquedos, desenvolvendo um diagrama detalhado das forças que agem sobre o carrinho quando ele se move. Com isso, seu gestor espera um relatório detalhado que será incorporado aos arquivos da empresa, de maneira que todo o trabalho que você desenvolveu não seja perdido e certamente possa ser utilizado em projetos futuros.

Simultaneamente, não podemos nos esquecer de como o término desta unidade, sobre a dinâmica de corpos rígidos, nos trouxe uma compreensão completa dos mais diversos mecanismos. Com isso, tenha certeza, caro aluno, que você já desenvolveu um senso mais crítico na solução dos problemas e exercícios propostos, além de uma base para ampliar seus conhecimentos com a bibliografia sugerida.

## Não pode faltar

Na seção anterior, estudamos amplamente a dinâmica translacional de um corpo rígido, agora, para finalizar, precisamos abordar a dinâmica de rotação em torno de um eixo fixo. Novamente, iremos tratar apenas de movimentos contidos no plano em que as forças devem ser projetadas. Além disso, escolhemos definir o eixo de rotação  $z$ , perpendicular ao plano  $(x, y)$  de movimento. Essas condições claramente apontam para a escolha de coordenadas polares para descrever o movimento, sendo assim, retomamos a descrição do movimento rotatório apresentado na seção anterior. Na rotação, dois pontos no corpo formam círculos distintos, ou seja, com raios diferentes, porém, concêntricos, isto é, com uma mesma origem, como os mostrados na Figura 2.23.

Figura 2.23 | Movimento de rotação



Fonte: elaborada pelo autor.

Fica fácil observar que, pela característica circular da trajetória, a coordenada polar que define o raio, tanto  $R_1$  quanto  $R_2$ , deve permanecer constante para qualquer ponto do corpo, inclusive o centro de massa. Logo, todo o deslocamento pode ser descrito pela variável  $\theta(t)$ . Consequentemente, podemos calcular a velocidade angular  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  e a aceleração angular  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ . Em seguida, tendo a aceleração angular em mente, podemos redefinir o torque estudado para partículas e o definir para um corpo rígido de momento angular conhecido:

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r} = I\vec{\alpha} .$$

Nesse caso,  $\tau$  é o torque, que já foi definido como o produto vetorial entre a força  $\vec{F}$  e o raio  $\vec{r}$ , sendo assim, uma análise dimensional que siga o padrão do Sistema Internacional vai mostrar que essa grandeza possui unidades de  $N \cdot m$ . Paralelamente, para um corpo rígido, também podemos reescrever o torque numa forma análoga à segunda lei de Newton (matematicamente,  $\vec{F} = m\vec{a}$ ), onde o momento de inércia  $I$  faz as vezes da massa para a aceleração angular  $\vec{\alpha}$ .

Podemos, assim, enxergar a equação apresentada como a segunda Lei de Newton para rotação, que, de forma análoga a apresentada nas seções anteriores, nos permite estudar a dinâmica de um corpo rígido a partir da relação:

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} .$$

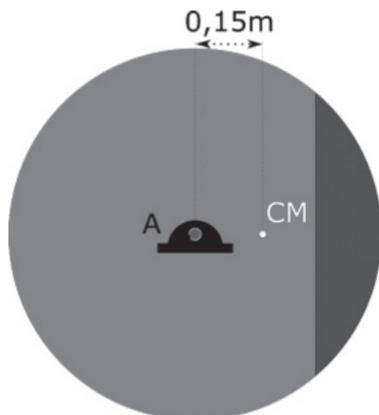
Ou seja, a soma de todos os torques que agem sobre um corpo rígido (ou torque resultante) é igual ao momento de inércia total do corpo multiplicado pela aceleração angular, ambos definidos em função do eixo de rotação do sistema.



### Exemplificando

A roda desbalanceada de 25 kg, mostrada na Figura 2.24, tem um momento de inércia  $I = 0,81 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  em relação a um eixo perpendicular passando pelo seu centro.

Figura 2.24 | Roda desbalanceada



Fonte: adaptada Hibbeler (2012, p. 343).

Se o disco é solto do repouso, determine a equação da aceleração angular do CM como função do ângulo  $\theta$  formado entre a vertical e o eixo entre os pontos A e CM. Encontre o torque no instante onde o centro de massa está abaixo do ponto A, ambos alinhados na vertical.

### Resolução:

Quando o disco é solto, ele deve girar no sentido horário. Logo, podemos descrever a dinâmica do corpo com base na expressão:

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}.$$

Nesse caso, todo o torque é função da ação da gravidade e, portanto, função da força peso  $P$ . Como a força peso sempre age no sentido da gravidade, a força que promove o torque deve ser  $P \sin \theta$ , logo,

$$r \cdot P \cdot \sin \theta = I\alpha$$

$$r \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{r \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta}{I} = \frac{0,15 \cdot 25 \cdot 9,8}{0,81} \sin \theta = 45,37 \sin \theta.$$

Quando o ponto CM encontra-se no ponto mais baixo da trajetória, o ângulo entre a vertical e o eixo é zero, de modo que:

$$\alpha = 45,37 \sin 0 = 0.$$

Isso significa que a roda não acelera no ponto mais baixo da trajetória do CM.



### Assimile

A soma de todos os torques que agem sobre um corpo rígido é igual ao momento de inércia total do corpo vezes a aceleração angular, ambos definidos em função do eixo de giro do sistema:  $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ .

Repare que tanto o momento de inércia quanto a aceleração angular dependem não só das características do corpo, mas também

da trajetória circular. Se você se recordar, vimos que, para um mesmo corpo, o momento de inércia é diferente quando o eixo de giro passa em diferentes pontos do corpo, ao mesmo tempo que a aceleração angular, como a definimos, depende do referencial polar construído em função da trajetória. Por isso, toda a análise de uma rotação em torno de um eixo fixo passa primeiro pela análise de onde se encontra o eixo fixo.

Nesse mesmo contexto, podemos introduzir um conceito semelhante ao de centro de massa, denominado raio de giro ou raio equivalente. Assim como o centro de massa, o raio de giro  $K$  é um conceito que substitui uma distribuição de partículas ou corpos rígidos por uma massa pontual  $m$ , que mantém o mesmo momento de inércia. Matematicamente, definimos o raio de giro como:

$$I = m_k K^2 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

O raio de giro também tem unidade de comprimento, e também se enquadra o referencial polar, seguindo a direção do vetor radial.



### Exemplificando

Calcule o raio de giro de um disco homogêneo de raio  $R$  e o eixo de giro ao longo do eixo  $z$ , passando pelo centro do disco, perpendicular à sua superfície.

Pela simetria do disco e por ser homogêneo, podemos afirmar que o centro de massa do disco está exatamente em seu centro. O momento de inércia de um eixo passando pelo centro do disco, perpendicular ao plano do disco é:

$$I_x = I_y = I = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2.$$

Logo:

$$K = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2}{m}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot R.$$

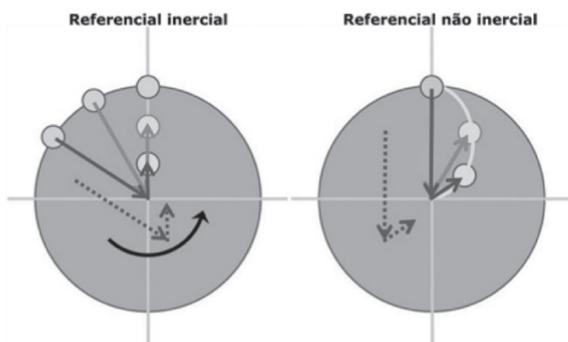
Repare que o raio efetivo pelo qual a massa do disco gira não é seu centro de massa, mas sim uma distância um pouco mais próxima de sua borda.

Agora, já definimos o movimento de giro e vimos que a melhor forma de descrevê-lo é, de fato, utilizando um referencial polar girante. Mas, quais as consequências desse referencial para um movimento linear?

Na seção anterior, comentamos que um referencial girante não é um referencial inercial e, por isso, precisamos considerar a existência de forças imaginárias ou inerciais. Para quantificarmos e compreendermos os efeitos de um referencial girante, podemos isolar a contribuição do referencial, estudando um sistema composto por um corpo movimentando-se à velocidade constante em linha reta e, por isso, sem nenhuma força agindo sobre ele, sob a perspectiva de um observador em um referencial girante. Nessas condições, apenas a inércia do corpo deve criar uma força, o que, aos olhos do observador, deve fazer com que o corpo assuma uma trajetória não retilínea.

Esse sistema irá criar uma força conhecida como força de Coriolis e, de fato, faz, aos olhos do referencial girante, com que o corpo assuma uma trajetória curva contrária à rotação do referencial, como ilustrado na figura a seguir.

Figura 2.25 | Força de Coriolis



Fonte: adaptada de <[https://en.wikipedia.org/wiki/Coriolis\\_force#/media/File:Coriolis\\_construction.JPG](https://en.wikipedia.org/wiki/Coriolis_force#/media/File:Coriolis_construction.JPG)>. Acesso em: 8 dez. 2016.

Nesse exemplo, o observador está sentado em algo que seria um brinquedo gira-gira, ele está sentado no ponto marcado na extremidade do brinquedo e joga uma bola em direção ao centro do brinquedo. Para um observador que está sentado do lado de fora do brinquedo, ou seja, no sistema de coordenadas, parado, ou referencial inercial, a bola segue uma trajetória retilínea, mostrada

no desenho, como esperada. Porém, se mudarmos de referencial, ou seja, olharmos a trajetória nos olhos de quem está sentado no brinquedo, a bola não seguirá uma trajetória retilínea. O que iremos observar será a trajetória curva ilustrada no desenho, e como um corpo não faz curva a menos que exista uma curva, o observador no referencial não inercial deve assumir que existe uma força puxando a bola. Seria uma experiência análoga à força que você sente fazendo curvas. Matematicamente ela é dada pela relação:

$$\vec{F}_{\text{coriolis}} = -2m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Onde  $\vec{v}$  é a velocidade do centro de massa do corpo rígido com relação à origem do referencial girante.



### Refleta

É interessante notar que todos nós estamos sob o efeito dessa força, pois nos encontramos sobre o planeta Terra que, ao rotacionar, faz com que, no equador, a superfície da Terra esteja girando a **1675 km/h**. Mas, então, por que não observamos ou usamos essa força nos cálculos de nosso dia a dia? De fato, não precisamos nos preocupar com a força de Coriolis, devido à rotação da Terra na nossa vida diária, pois ela depende da velocidade angular da Terra, que é de apenas **0,26 rad/h**.



### Pesquise mais

Você pode ver o efeito da força de Coriolis neste vídeo produzido pela Universidade da Califórnia. O vídeo está em inglês, mas mesmo assim, você poderá ver o efeito do referencial girante na trajetória da esfera.

Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=Bsufq2y\\_FVA](https://www.youtube.com/watch?v=Bsufq2y_FVA)>. Acesso em: 1 fev. 2017.

A força de Coriolis é a última força inercial que precisávamos definir para finalizar nossa formalização da dinâmica de corpos rígidos. Devemos, então, retomar nosso último resultado da unidade anterior, quando calculamos a aceleração de uma partícula em um referencial acelerado e girante:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{B/A} + \vec{a}_{B/A}.$$

Se multiplicarmos essa aceleração pela massa, podemos identificar cada uma das forças já discutidas:

$$\vec{F}_{\text{efetiva}} = m \cdot \vec{a}_B = m \cdot \vec{a}_A + m \cdot \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} + m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}) + 2 \cdot m \cdot \vec{\Omega} \times \vec{v}_{B/A} + m \cdot \vec{a}_{B/A}.$$

Na equação apresentada, podemos analisar cada termo, independentemente:

- $m \cdot \vec{a}_A$  é a força inercial, devido à aceleração translacional do referencial. A exemplo da força que você sente quando o ônibus freia ou acelera.

- $m \cdot \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A}$  é a força inercial, devido a aceleração de rotação do referencial. Um exemplo seria uma das componentes da força que você sente quando acelera numa curva.

- $m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A})$  é a força centrípeta, cujo exemplo é a força que você sente quando faz curva sem acelerar.

- $2 \cdot m \cdot \vec{\Omega} \times \vec{v}_{B/A}$  é a força de Coriolis, que é a própria força que a rotação da Terra gera, que, apesar de ter uma intensidade muito baixa, é mensurável e permite "observar" a rotação da Terra;

- $m \cdot \vec{a}_{B/A}$  refere-se à única força real que age sobre o corpo.

De maneira prática, dificilmente teremos uma situação em que todas essas forças agem ao mesmo tempo, mas, de qualquer forma, você já é capaz de intuitivamente identificar os efeitos de cada força e, assim, isolar todas as forças imaginárias que encontrar.

Por fim, antes de finalizarmos a unidade, devemos resumir a unidade escrevendo tudo o que aprendemos para unificar os conceitos apresentados. Definimos as equações de movimento no plano geral como:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum \vec{T} = I\vec{\alpha} \end{cases}$$

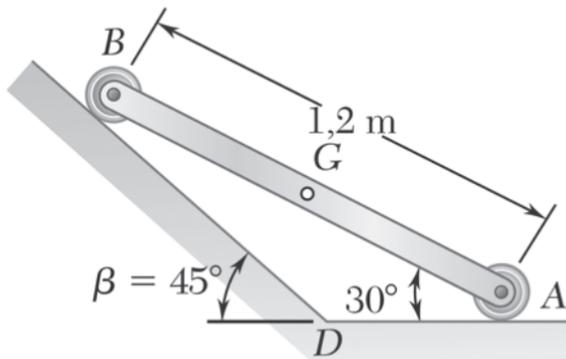
Onde  $a_x$  e  $a_y$  se referem às componentes  $x$  e  $y$  da aceleração do centro de massa, e  $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$  deve ser calculada a partir do eixo fixo de rotação que não necessariamente coincide com o centro de massa. De fato, em muitos problemas podemos escolher um eixo de giro conveniente, que elimine algumas forças da equação. Finalmente, devemos ainda mencionar que, se o referencial escolhido não for inercial, será preciso considerar a existência de forças inerciais e utilizar o Princípio de D’Alambert para incorporá-las nas equações mencionadas.



### Exemplificando

A figura a seguir mostra uma barra de massa total  $m=10\text{ kg}$  e comprimento  $L=1\text{ m}$ , apoiada em dois trilhos que lhe permitem escorregar livremente sem atrito. Determine a aceleração angular da barra, sabendo que no momento mostrado na figura o centro de massa em  $G$  tem aceleração  $\mathbf{a} = (5\hat{i} + 2\hat{j})\text{ m/s}^2$ .

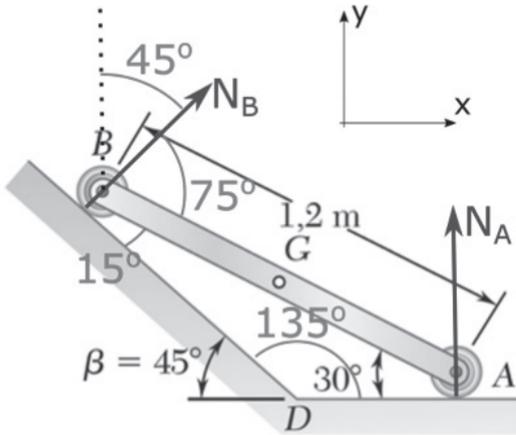
Figura 2.26 | Mecanismo em trilhos



Fonte: Beer (2009, p. 1.064).

Para resolver esse problema, primeiro devemos escrever o diagrama de forças e determinar os principais ângulos do sistema.

Figura 2.27 | Mecanismo em trilhos, forças e ângulos



Fonte: Beer (2009, p. 1.064).

Do diagrama, podemos escrever o sistema de equações:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum \vec{T} = I\vec{\alpha} \end{cases}$$

Sabemos a aceleração do centro de massa:  $\mathbf{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = (5\hat{i} + 2\hat{j}) \text{ m/s}^2$ , e o momento de inércia para uma barra girando em um eixo sobre seu centro de massa é:  $I = \frac{mL^2}{12}$

$$\begin{cases} \sum F_x = 10 \cdot 5 \\ \sum F_y = 10 \cdot 2 \\ \sum \vec{T} = \frac{10 \cdot 1,2^2}{12} \vec{\alpha} \end{cases}$$

Do diagrama, podemos escrever a soma das forças e torques:

$$\begin{cases} N_B \sin 45^\circ = 50 \\ N_A - mg = 20 \\ N_A \sin 60^\circ \cdot \frac{L}{2} - N_B \sin 75^\circ \cdot \frac{L}{2} = 1,2 \cdot \vec{\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_B = 70,71 \text{ N} \\ N_A = 120 \text{ N} \\ \ddot{\alpha} = 0,6 \frac{N_A \sin 60^\circ - N_B \sin 75^\circ}{1,2} = 17,81 \end{cases}$$



**Pesquise mais**

Agora que terminamos nossa unidade, você pode revisar e expandir seus conhecimentos estudando o capítulo 17 do livro: HIBBELER, R. C.

**Dinâmica:** mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012

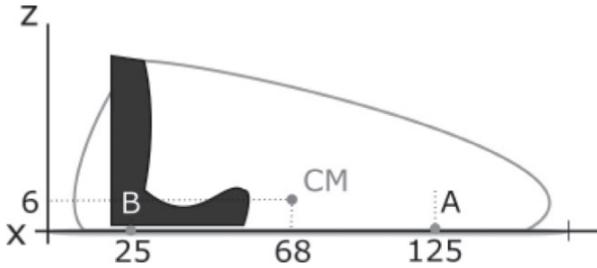
## Sem medo de errar

Finalmente, os últimos detalhes da fabricação do carrinho bate-bate serão definidos. Voltando ao dia a dia do nosso projetista, os últimos resultados estão sendo compilados em um relatório final, e você, sendo o responsável pela caracterização do carrinho individualmente, precisa finalizar os estudos de sua dinâmica.

Nesta última etapa, seu chefe lhe solicitou um último estudo da distribuição de forças atuantes no carrinho. Agora, você deve estudar o carrinho em movimento e determinar o valor das forças envolvidas, em especial as forças normais das rodas sobre o piso. Com isso, a empresa terá um registro não só da dinâmica do carrinho, mas também terá estabelecido um protocolo para futuros projetos, que certamente serão desenvolvidos, a partir do trabalho que você realizou.

No gráfico a seguir, temos a representação do carrinho. Nele, identificamos os pontos A e B, que representam a posição dos pontos de contato das rodas com o solo e também o centro de massa do carrinho. A tração do carrinho é feita pela roda dianteira que não sofre escorregamento e cujo motor pode gerar uma força total de até **432,5 N**. Determine as forças normais dos pontos A e B e a aceleração do carrinho, quando carrega dois passageiros.

Figura 2.28 | Detalhe do carrinho

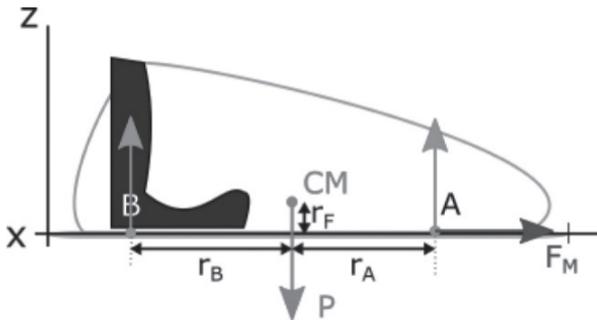


Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se que o carrinho com dois passageiros pesa  $m = 346 \text{ kg}$ .

Para resolver o problema, precisamos desenhar o gráfico de forças envolvidas e montar as equações de dinâmica.

Figura 2.29 | Forças atuando sobre o carrinho



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos, então, escrever o sistema de equações:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_z = ma_z = 0 \\ \sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} = 0 \end{cases}$$

Como o torque total do sistema é zero, ou seja, ele não está girando, podemos escolher qualquer posição para o eixo de giro. Neste caso, é conveniente posicionar o eixo sobre o mesmo ponto de uma força, pois assim ela não contribui para o torque, sendo assim, escolhemos o ponto A para o eixo de giro:

$$\begin{cases} F_M = ma_x \\ N_B - P + N_A = 0 \\ -N_B \cdot (r_B + r_A) + P \cdot \sqrt{r_F^2 + r_A^2} + N_A \cdot 0 + F_M \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 432,5 = 346 \cdot a_x \\ N_B + N_A = 346 \cdot 10 \\ -N_B \cdot (1) + P \cdot \sqrt{(0,06)^2 + (0,57)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 1,25 \text{ m/s}^2 \\ N_A = -1476 \text{ N} \\ N_B = -1983 \text{ N} \end{cases}$$

Agora, com todos esses conhecimentos em mãos, você pode fornecer todas as informações necessárias na descrição da atração, além de escrever o seu relatório.

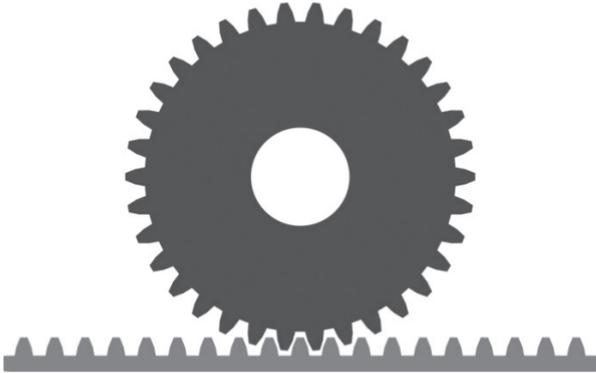
## Avançando na prática

### Atenuador linear

#### Descrição da situação-problema

Um sistema cremalheira/engrenagem, mostrado na figura a seguir, é um tipo de atenuador linear. Esses elementos mecânicos transformam movimento de rotação em movimento de translação e vice-versa. Você, provavelmente, se beneficia ou já se beneficiou de uma cremalheira junto a uma engrenagem, pois ela está presente em muitos dos portões elétricos que utilizamos diariamente.

Figura 2.30 | Engrenagem e cremalheira



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 2.30, a cremalheira indicada no fundo (trilho dentado) possui uma aceleração linear de  $20 \text{ m/s}^2$ ; se a engrenagem tem um raio de  $10 \text{ cm}$  e massa de  $1 \text{ kg}$ , determine o torque o qual a engrenagem está submetida. Considere que a engrenagem é um disco homogêneo e que o raio de giro passa pelo seu centro perpendicular ao plano do papel.

### Resolução da situação-problema

Entre a cremalheira e a engrenagem não existe escorregamento, logo, a aceleração linear da cremalheira se traduz em aceleração angular para a engrenagem:

$$\alpha = 20 \text{ m/s}^2.$$

Também precisamos determinar o momento de inércia da engrenagem. Se retomarmos as seções anteriores, o momento de inércia de um disco será:

$$I = \frac{mr^2}{2} = \frac{1 \cdot 0,1^2}{2} = 0,005 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Logo, o torque na engrenagem será:

$$\tau = I \cdot \alpha = 0,005 \cdot 20 = 0,1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

## Faça valer a pena

**1.** Torque pode ser escrito na mesma forma que a \_\_\_\_\_ Lei de Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ), em que o \_\_\_\_\_  $I$  faz as vezes de massa para a \_\_\_\_\_  $\vec{\alpha} : \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

A \_\_\_\_\_ de todos os torques que agem sobre um corpo rígido é igual ao \_\_\_\_\_ total do corpo vezes a aceleração angular, ambos definidos em função do \_\_\_\_\_ do sistema:  $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ .

Leia o texto acima e selecione a alternativa que melhor completa as lacunas.

a) primeira; momento linear; aceleração angular; subtração; momento de inércia; ângulo.

b) terceira; momento de inércia; aceleração linear; multiplicação; momento angular; eixo de giro.

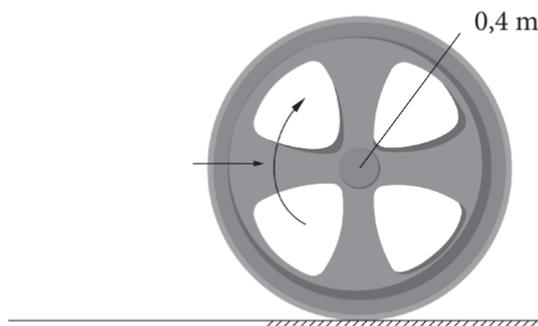
c) terceira; momento angular; aceleração angular; soma; momento angular; ângulo.

d) segunda; momento de inércia; aceleração linear; multiplicação; momento linear; eixo perpendicular.

e) segunda; momento de inércia; aceleração angular; soma; momento de inércia; eixo de giro.

**2.** A roda, ilustrada na Figura 2.31, possui um momento de inércia de  $100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , uma massa de 20 kg e um raio de 400 mm. Quando a roda é submetida a uma força de rotação, ela gira e desliza sobre o plano, à medida em que rola. Nessas condições o coeficiente de atrito cinético  $\mu$  entre a roda e o plano é 0,5.

Figura 2.31 | Roda



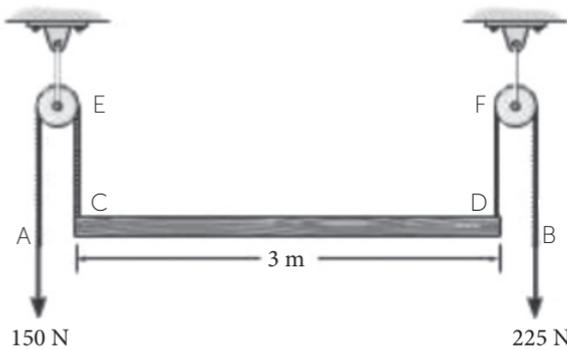
Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 360).

Determine a aceleração angular da roda, a aceleração do centro da roda e selecione, entre as opções a seguir, a alternativa que representa a melhor solução encontrada.

- a)  $4 \text{ m/s}^2$  ;  $0,5 \text{ rad/s}^2$ .
- b)  $2 \text{ m/s}^2$  ;  $1 \text{ rad/s}^2$ .
- c)  $10 \text{ m/s}^2$  ;  $0,8 \text{ rad/s}^2$ .
- d)  $5 \text{ m/s}^2$  ;  $0,4 \text{ rad/s}^2$ .
- e)  $7 \text{ m/s}^2$  ;  $0,3 \text{ rad/s}^2$ .

**3.** A barra homogênea de massa  $25 \text{ kg}$  está suspensa pelas cordas nos pontos  $C$  e  $D$ , de acordo com a Figura 2.32. Essas cordas passam por um sistema de polias e estão submetidas a forças constantes de  $150 \text{ N}$  e  $225 \text{ N}$ , respectivamente. Suponha que a barra seja muito fina e que a massa das polias em  $E$  e  $F$  é desprezível.

Figura 2.32 | Barra suspensa



Fonte: Hibbeler (2012, p. 361).

Determine a intensidade da aceleração inicial do centro da tábua e da aceleração angular, e selecione a alternativa que melhor represente a solução encontrada.

- a)  $20 \text{ N}$  ;  $3 \text{ rad/s}^2$ .
- b)  $25 \text{ N}$  ;  $6 \text{ rad/s}^2$ .
- c)  $50 \text{ N}$  ;  $12 \text{ rad/s}^2$ .
- d)  $15 \text{ N}$  ;  $3 \text{ rad/s}^2$ .
- e)  $22 \text{ N}$  ;  $7 \text{ rad/s}^2$ .

# Referências

BEER, F. **Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2009.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica: mecânica para engenharia**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

MERIAN, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica: estática**. 4. ed. São Paulo: LTC, 1997.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical dynamics of particles and systems**. 5. ed. San Francisco: Brooks/Cole, 2012.



# Princípios de conservação (energia, momentos e trabalho)

## Convite ao estudo

Olá aluno! Nesta nova unidade estudaremos aplicações em Engenharia das leis fundamentais da Física. Na unidade anterior estudamos como um corpo rígido se comporta sob a ação de forças externas. Agora, descobriremos também que conhecendo o estado de energia e momento de um corpo rígido, livre de forças externas em um dado instante, podemos prever seu estado posterior, sem a necessidade de aplicar diretamente as leis de Newton. Assim, seremos capazes de analisar outros mecanismos importantes e úteis para a indústria.

Na Seção 3.1, estudaremos mais a fundo o conceito de energia cinética e a conservação de energia no contexto de corpos rígidos. Em seguida, na Seção 3.2, estudaremos o momento linear e o momento angular com suas interessantes aplicações. Assim como a energia, os momentos possuem leis de conservação. No caso de sistemas isolados, onde não há influência externa relevante, isso permite solucionar e projetar mecanismos de maneira muito mais simples do que com as ferramentas de dinâmica discutidas até então. Finalmente, na Seção 3.3, poderemos conciliar ambos os conceitos de conservação de energia e conservação de momento angular e linear com o nosso conhecimento de dinâmica, mostrando que estudar os momentos e a energia de um sistema é equivalente a aplicar as leis de Newton diretamente, de modo que você, estudante, possa escolher em qual situação é mais interessante usar um ou outro método.

Também, iremos acompanhar o dia a dia de um novo projetista que trabalha no transporte e armazenamento de carga, dentro de um porto marítimo. Veremos que, para transferir um corpo de lugar, é preciso realizar o que na física é conhecido

como trabalho e que isto implica em um gasto energético. Mais especificamente, nesta seção, veremos como o trabalho de se levar um corpo rígido a uma determinada altura lhe confere uma energia que pode ser transformada em velocidade. Nosso projetista deverá projetar uma rampa de transporte que rola tonéis cheios de carga para dentro de um contêiner. Ele precisa prever qual a velocidade do tonel e garantir que ela não exceda 5 m/s, para qualquer situação, seja com o tonel cheio ou com o tonel vazio. Depois, ainda será necessário trabalhar no projeto de um guindaste, responsável por içar a carga que pode atingir até 200 kg, e do seu sistema de segurança para paradas de emergência. Para isso, será importante entender como trabalho e energia cinética se relacionam, além de entender das leis de conservação da Física.

# Seção 3.1

## Métodos de energia e quantidade de movimento

### Diálogo aberto

Nesta primeira etapa precisamos definir, ou redefinir, alguns conceitos que envolvem uma grandeza chamada energia. Você poderia apresentar diversos exemplos de energia e apontar, com muita facilidade, o efeito delas ao seu redor. No entanto, nesta unidade iremos focar principalmente em um tipo específico de energia, chamada energia cinética. Como toda grandeza que descreve energia, a energia cinética também é dada em Joules e descreve a energia associada ao movimento de um corpo rígido ou partícula.

Vimos, nas unidades anteriores, que um corpo pode executar diferentes tipos de movimento e também conhecemos as forças responsáveis por esse movimento. No entanto, o conceito de energia cinética permite ir mais fundo no entendimento do movimento, o que, de certa forma, simplifica a compreensão de muitos problemas. Existe uma conexão muito simples entre força e energia, por meio do que chamamos de trabalho, criando a ponte entre o conhecimento que construímos na unidade anterior e a visão energética desta seção que, de certa forma, são conceitos complementares para análise de um mesmo mecanismo.

Um bom exemplo é uma das tarefas que um projetista trabalhando no transporte de grandes cargas pode encontrar. Nesta unidade, iremos acompanhar algum dos desafios que um projetista que trabalha no porto, transportando ou embarcando cargas, pode encontrar. Em específico, nesta seção, ele terá de descrever uma rampa de transporte de tonéis, utilizada para transportar uma carga composta por tonéis para dentro de um contêiner, e escrever seus resultados organizadamente em um relatório, para apresentar ao seu gestor.

## Não pode faltar

Nesta unidade, estudaremos o conceito de energia e quantidade de movimento. Esses conceitos referem-se aos princípios de conservação de energia e de momento, e são conceitos tão fundamentais que permitem a análise de qualquer sistema mecânico. Eles se relacionam diretamente com a velocidade com que um corpo se movimenta e, exatamente por isso, veremos também como a presença de forças altera tanto a energia quanto a quantidade de movimento do sistema. Assim sendo, começaremos pelos conceitos de energia cinética e trabalho, utilizando-os para solucionar problemas de movimento de corpos rígidos no plano. Com isso, teremos mais uma ferramenta para estudar sistemas que envolvem força, velocidade e deslocamento.

A primeira coisa que devemos fazer é definir a energia cinética de um corpo rígido. Novamente, nossa descrição irá criar paralelos com a dinâmica de partículas e, por isso, devemos nos focar no movimento do centro de massa. Sendo assim, quando um corpo está sujeito a um movimento de translação, rotação entorno de um eixo fixo sobre seu centro de massa, ou, até mesmo, um movimento geral no plano, podemos escrever a energia deste corpo rígido segundo a equação:

$$T = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2.$$

Nessa equação, o termo  $T$  é a energia cinética que tem unidades no sistema internacional de  $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$ , ou simplesmente Joule, abreviado por  $J$ ;  $m$  é a massa total do corpo rígido;  $v_{CM}$  é a velocidade de translação do centro de massa do corpo rígido;  $I_{CM}$  o momento de inércia do corpo rígido; e  $\omega$  sua velocidade angular entorno de um eixo que atravessa o centro de massa.

Repare que mesmo a equação apresentada ter dois termos distintos seguem uma simetria semelhante à da segunda lei de Newton para translação (matematicamente  $\vec{F} = m\vec{a}$ ) e para rotação ( $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ ), discutidas na seção anterior.

Para o caso de um corpo rígido submetido a um movimento de translação, seja retilíneo ou curvilíneo, a energia cinética devido à

rotação do corpo é nula ( $\omega = 0$ ), logo, a energia cinética do corpo será:

$$T = \frac{1}{2}mv_{CM}^2.$$

Quando um corpo rígido executa um movimento de rotação entorno de um eixo fixo, a energia cinética devido à translação será nula ( $v_{cm} = 0$ ), logo:

$$T = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2.$$

Um caso particular dessa situação é o cálculo da energia cinética de rotação em função do eixo que passa pelo seu centro instantâneo de velocidade nula ( $CI$ ), definido na Unidade 1. Neste caso, podemos observar que a equação da energia cinética  $T = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$  pode ser modificada, se lembrarmos da relação entre velocidade angular e velocidade tangencial  $v_{CM} = r\omega$ :

$$T = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}(mr^2 + I_{CM})\omega^2.$$

Se nos recordarmos do teorema dos eixos paralelos, definido como  $I = I_{CM} + mL^2$ , veremos que, para o caso do centro instantâneo de velocidade nula, a distância entre os eixos paralelos dada por  $L$  é exatamente o raio  $r$ , logo,  $I_{CI} = I_{CM} + mL^2$ , o que permite reescrever:

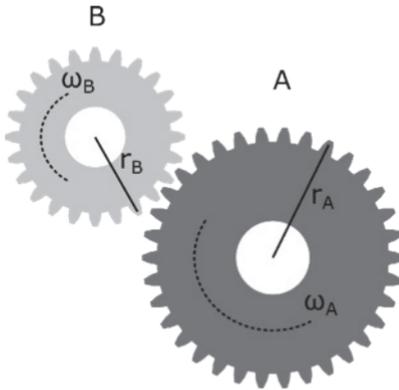
$$T = \frac{1}{2}(mr^2 + I_{CM})\omega^2 = \frac{1}{2}I_{CI}\omega^2.$$

Por conta destes resultados, a equação para um corpo executando um movimento geral no plano será idêntica à primeira definição de energia cinética apresentada. Ademais, devido ao fato de a energia ser uma grandeza escalar, a energia cinética total para um mecanismo será a soma das energias cinéticas individuais de cada uma de suas peças.



No sistema composto por duas engrenagens, mostrado a seguir, a engrenagem A possui um raio 200 mm, massa de 10 kg e um raio de giro de 150 mm. Já a engrenagem B possui um raio de 80 mm, uma massa de 2,5 kg e um raio de giro de 60 mm. Sabendo que a velocidade angular de B é de  $\omega_B = 2,5 \text{ rad/s}$ , determine a energia cinética total do sistema.

Figura 3.1 | Sistema de duas engrenagens



Fonte: elaborada pelo autor.

Ambos os elementos do sistema executam apenas um movimento de rotação, logo, a energia cinética de translação será nula, a energia cinética total será:

$$T = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2.$$

Como a energia é uma grandeza aditiva, a energia cinética total será a soma da energia cinética dos componentes:

$$T = T_A + T_B = \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2.$$

Analisando apenas B, vemos que a velocidade angular  $\omega_B = 2,5 \text{ rad/s}$ , e o momento angular pode ser calculado pelo raio de giro:

$$I_B = m_B K_B^2 = 2,5 \cdot 0,06^2 = 0,009 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Logo, a energia de B é  $T_B = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 = \frac{1}{2} 0,009 \cdot 2,5^2 = 0,028125 \text{ J}$ .

Analisando apenas A, sabemos que não existe escorregamento entre as engrenagens e por isso a velocidade tangencial deve ser a mesma para as engrenagens:  $v_{At} = v_{Bt}$

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B$$

$$\omega_A = \frac{r_B \omega_B}{r_A} = \frac{0,08 \cdot 2,5}{0,2} = 1 \text{ rad/s}.$$

Analogamente a  $I_B$ :  $I_A = m_A K_A^2 = 10 \cdot 0,15^2 = 0,225 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

Logo, a energia de A é  $T_A = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 = \frac{1}{2} 0,225 \cdot 1^2 = 0,225 \text{ J}$ ,

E a energia total do sistema será:

$$T = T_A + T_B = 0,028125 + 0,225 = 0,253125 \text{ J}.$$



### Assimile

A energia cinética de um corpo rígido executando um movimento geral no plano pode ser calculada pela relação:

$$T = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2.$$

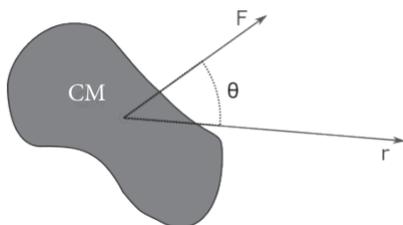
Para conectar o conceito energia com o conceito de força apresentado na unidade anterior, devemos utilizar a grandeza que na Física é denominada como trabalho, de modo a quantificar a energia do deslocamento translacional de um corpo devido a uma força que age sobre ele. Matematicamente temos:

$$W = \int \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = \int F(r) \cos \theta dr,$$

em que  $W$  é o trabalho executado pela força  $\vec{F}$  para percorrer o

caminho dado por  $\vec{r}$ . Repare, na integral, o produto entre a força e o diferencial de deslocamento  $d\vec{r}$ : é um produto escalar e, por isso, ele pode ser substituído pelo produto dos módulos da força e do deslocamento vezes o cosseno do ângulo entre a força e o deslocamento, mostrados na figura a seguir.

Figura 3.2 | Diagrama de força e deslocamento para um movimento de translação



Fonte: elaborada pelo autor.

Para uma força que mantém uma magnitude constante ao longo do deslocamento e em direção  $\theta$  constante, a relação de trabalho e força se reduz a:

$$W = F \cdot r \cos \theta .$$

Uma força muito importante e que está presente na maioria dos mecanismos é a força gravitacional. Neste caso, notamos que a força gravitacional, que sempre tem sentido vertical, só realiza trabalho quando o centro de massa do corpo se desloca verticalmente, sendo assim qualquer que seja o deslocamento  $r$ , sobre a ação da gravidade  $r \cos \theta = z$ , em que, neste caso,  $z$  é a distância vertical percorrida pelo corpo.

Convencionamos também, que a força gravitacional realiza trabalho positivo quando o movimento é para baixo, logo, se em um referencial  $\vec{z} = z\hat{k}$ , onde  $\hat{k}$  é o versor que aponta para cima, o trabalho da força peso  $F_g$  será:  $W = -F_g \cdot z$ .



## Exemplificando

Um corpo de massa 10 kg, inicialmente na posição  $\vec{r}_1 = 10\hat{i} + 15\hat{j} - 5\hat{k}$  deslocou-se para a posição  $\vec{r}_2 = 5\hat{i} + 10\hat{j} + 10\hat{k}$ . Qual foi o trabalho realizado pela força peso?

Como vimos, a força peso apenas realiza trabalho se o deslocamento for na direção vertical. Em nosso referencial,  $\hat{k}$  aponta na direção vertical e os versores  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são perpendiculares a  $\hat{k}$ . Logo, o trabalho realizado pela força peso será:

$$W = -F_g \cdot (z_{\text{final}} - z_{\text{inicial}}) = -mg(z_{\text{final}} - z_{\text{inicial}}) = 10 \cdot 9,8 \cdot (10 - (-5)) = 1470 \text{ J}.$$

Não são todas as forças que atuam sobre um corpo que realiza trabalho. Algumas, como a força centrípeta, sempre agem perpendicularmente ao movimento e, por isso, o ângulo entre eles é de  $90^\circ$ , fazendo com que  $\cos\theta = 0$  para todos os instantes. Outra força, como a força normal, atuando como resposta a uma superfície fixa também não irá gerar trabalho, pois o deslocamento ao longo da força normal é nulo. Por fim, a força de atrito de um ponto que não sofre escorregamento também não irá gerar trabalho, pois, como vimos, o ponto em que a força atua é o centro instantâneo de velocidade nula, que, como a força normal, também não tem deslocamento relativo à força.



## Assimile

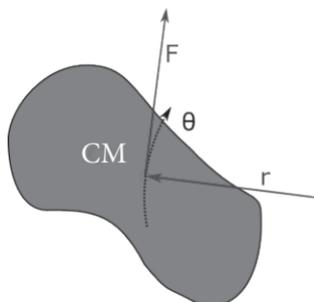
Uma força que desloca um corpo rígido e que faz um ângulo  $\theta$  com o sentido do deslocamento gera um trabalho dado por:  $W = F \cdot r \cos\theta$ .

Além do deslocamento translacional, também podemos usar o conceito de trabalho para estudar um movimento de rotação em torno de um eixo fixo. Nesse caso, o trabalho quantifica a energia do deslocamento angular  $\theta$  de um corpo devido à presença de um torque:

$$W = \int \tau d\theta = \int F r d\theta.$$

em que  $\tau$  é o torque que é igual a força  $F$  vezes o raio (ou distância)  $r$  do eixo de giro. Neste caso, o produto não é um produto escalar, pois pela definição de torque a força,  $F$  sempre estará perpendicular a  $r$  e paralela a  $\theta$ , como mostrado na figura a seguir.

Figura 3.3 | Diagrama de força e deslocamento para um movimento de rotação



Fonte: elaborada pelo autor.

No entanto, se o torque for constante no que diz respeito ao ângulo, teremos a relação análoga ao movimento de translação com a força no sentido do deslocamento:  $W = \tau \cdot \theta$ .



Refleta

Você já deve ter notado inúmeros paralelos entre as equações do deslocamento translacional e do deslocamento de rotação.

Exemplos como a segunda Lei de Newton para translação vs rotação:

$\vec{F} = m\vec{a}$  vs  $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ ; Energia Cinética linear vs angular:  $T = \frac{1}{2}mv^2$

vs  $T = \frac{1}{2}I\omega^2$ ; trabalho de uma força paralela a trajetória vs torque:

$W = F \cdot r$  vs  $W = \tau \cdot \theta$ .

Isso não é uma coincidência, mas demonstra que a maneira de entendermos a natureza segue regras simples. Reflita um pouco sobre isso, pois uma vez feita essa ponte entre a rotação e a translação, a compreensão destes se torna mais intuitiva.

Agora, que compreendemos o que é trabalho e energia cinética, podemos nos beneficiar de uma das leis mais básicas e fundamentais de Física: a lei de **Conservação de Energia**. Trata-se de um teorema

que mostra a energia de um **sistema isolado** que nunca diminui ou aumenta, mas permanece constante. No entanto, é praticamente impossível construir um sistema completamente isolado e, por isso, devemos, para fins práticos, conhecer os limites de quando podemos aplicar este princípio. Inicialmente, podemos nos focar apenas na relação conservação de energia cinética/trabalho, desde que apenas **forças conservativas** estejam envolvidas ou que sejam predominantes. Um exemplo típico é a força atrito que não é conservativa mas está presente na grande maioria de sistemas mecânicos, porém, se o sistema envolver forças que são muito grandes, se comparadas ao atrito (com o uso de lubrificantes, por exemplo), podemos aproximá-lo ao sistema isolado inicialmente proposto. Dessa forma, podemos escrever que:

$$T_{inicial} + \Delta W = T_{final} ,$$

ou seja, a energia cinética  $T_{inicial}$  total do estado inicial mais o trabalho de forças conservativas  $\Delta W$ , que é calculada pela diferença do trabalho  $\Delta W = W_{final} - W_{inicial}$ , que atuam de forma a levar o sistema do estado inicial ao estado final. Estes serão iguais à energia cinética  $T_{final}$  total do estado final.

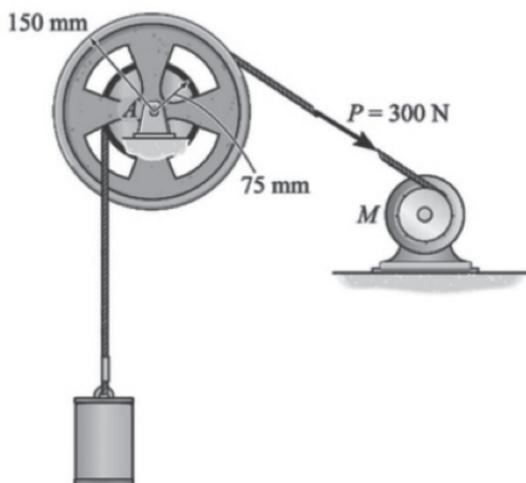
Quando vários elementos de um mesmo mecanismos estão conectados, seja por pinos, cordas inextensíveis ou por contato sem escorregamento, esses elementos compõem um sistema que segue o princípio de conservação mostrado.



### Exemplificando

O motor M, ilustrado na figura a seguir, exerce uma força constante  $F = 300$  N sobre o cabo enrolado em torno da borda externa da polia, (esta, de massa de 25 kg,) e o raio de giro em relação a seu centro de massa A é  $K = 125$  mm. Partindo inicialmente do repouso, determine a velocidade do cilindro circular de 50 kg após ele ter deslocado a uma distância de 2 m. Considere os cabos inextensíveis e de massa desprezível e que não existe escorregamento no sistema.

Figura 3.4 | Motor



Fonte: Hibbeler (2012, p. 3802).

Como não existe escorregamento e, por isso, nenhuma perda por atrito, podemos analisar o problema estudando como a energia varia:

$T_{inicial} + \Delta W = T_{final}$ , como a roda parte do repouso, ela não possui velocidade de translação ( $v_{inicial} = 0$ ) nem velocidade de rotação ( $\omega_{inicial} = 0$ ), logo:  $T_{inicial} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = 0$ .

A energia cinética final será a soma da energia dos vários componentes do sistema:  $T_{final} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{cilindro} + \left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)_{polia}$ .

Para a polia, o momento de inércia é dado por seu raio de giro:  $I = mk^2 = 50 \cdot 0,125 = 6,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , sua velocidade angular pode ser calculada pela velocidade tangencial da borda interna da polia:

$$v = \omega r_{int} \Rightarrow \omega = \frac{v}{r_{int}} = \frac{v}{0,075}$$

Logo, a energia cinética final será:

$$T_{final} = \frac{1}{2}50v^2 + \frac{1}{2}6,25\left(\frac{v}{0,075}\right)^2 = 580,6v^2.$$

O trabalho das forças envolvidas será:

$$\Delta W = (F_g \cdot h)_{\text{peso}} + (Fr\theta)_{\text{torque}} .$$

O cálculo da distância angular promovida pelo torque pode ser calculado pela distância angular realizada pela borda interna da polia:  $n = \frac{h}{2\pi r_{\text{int}}} = \frac{2}{2\pi \cdot 0,075} = 4,24$  revoluções; cada revolução tem  $2\pi$  rad, logo,  $\theta = 2\pi n = 26,7$  rad, portanto:

$$\Delta W = 50 \cdot 9,8 \cdot 2 + 300 \cdot 0,15 \cdot 26,7 = 2181,5 \text{ J} .$$

Por fim, o cálculo da velocidade é:

$$580,6v^2 = 2181,5$$

$$v = \sqrt{\frac{2181,5}{580,6}} = 1,94 \text{ m/s} .$$

Finalmente, um último comentário sobre os mecanismos que iremos estudar nesta unidade. Eles são, até certo ponto, idealizados, pois ignoram a força de atrito. Essa força, por não ser uma força conservativa, fará sempre com que parte da energia transformada em movimento se dissipe na forma de calor. Mesmo assim, as análises apresentadas servem como uma estimativa inicial que pode ser muito fiel.



**Pesquise mais**

Agora que você já se familiarizou com os conceitos de energia cinética e trabalho, consulte a seção 18.5 do livro de Hibbeler para maiores exemplos na solução de problemas. Lembre-se que, como aluno de nossa instituição, você possui acesso gratuito ao livro em sua biblioteca virtual. Realize o login em sua área do estudante e na biblioteca virtual, e depois clique no link: <http://anhanguera.bv3.digitalpages.com.br/users/publications/9788576058144/pages/383>.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. p. 383. (Capítulo 18, seção 18.5).

## Sem medo de errar

Nesta unidade, vamos acompanhar a rotina de um projetista que trabalha no porto marítimo, transportando e estocando diferentes cargas antes de serem embarcadas. Ele acabou de receber a tarefa de estudar uma rampa usada no embarque de tonéis, para utilização no carregamento de um contêiner: o sistema consiste em um plano inclinado que permite rolar os tonéis de um plano mais elevado para dentro do contêiner, cujo escorregamento é desprezível. Nesse novo projeto, o desnível entre a plataforma e o contêiner é de  $h = 1 \text{ m}$  e a distância entre o contêiner e a plataforma é tal que o tonel tem de percorrer uma distância de  $d = 4 \text{ m}$ . O sistema que libera o tonel do alto da plataforma faz com que ele seja liberado do repouso, e o sistema de amortecedores no final da plataforma garante que os tonéis não sejam danificados, se este estiver a uma velocidade máxima de  $v_{\text{max}} = 5 \text{ m/s}$  e tiver uma massa de 200 kg. Seu superior precisa que você determine qual a velocidade máxima que um tonel, com dimensões de 92 cm de altura por 52 cm de diâmetro e que pode pesar até 200 kg, pode assumir.

Essa plataforma pode ser tratada como um plano inclinado sobre o qual um corpo rígido cilíndrico com as dimensões do tonel desliza sem escorregamento. Sendo assim, podemos usar o princípio de conservação de energia para calcular qual a velocidade do tonel no fim da rampa.

$T_{\text{inicial}} + \Delta W = T_{\text{final}}$ , analisando cada termo:

$T_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}mv_{\text{inicial}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{inicial}}^2 = 0$ , pois, como mencionado, o tonel parte do repouso e, por isso,  $v_{\text{inicial}} = \omega_{\text{inicial}} = 0$ .

Quanto ao trabalho da força peso, sabemos que ele é função apenas da altura da rampa:

$\Delta W = mgh = 1 \cdot 9,8 \cdot m = 9,8 \cdot m$ , não temos o valor da massa e, por isso, ela é mantida livre.

Por fim, a energia cinética com que o tonel atinge o final da rampa será:

$T_{final} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ , porém, como o tonel não sofre escorregamento, podemos escrever que  $v = \omega r$  :

$T_{final} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2$ , para o cálculo do momento de inércia, podemos considerar nosso tonel cheio como um cilindro maciço, de forma que  $I = \frac{mr^2}{2}$  :

$T_{final} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$ , o que mostra que o problema independe do diâmetro do tonel. Para o tonel cheio, teremos:

$T_{inicial} + \Delta W = T_{final} \Rightarrow 0 + 9,8m = \frac{3}{4}mv^2 \Rightarrow v = 3,6 \text{ m/s}$ , e, de fato, o sistema independe da massa do tonel.

E, dessa forma, vemos que o sistema de amortecimento não terá problemas em parar o tonel.

### ! Atenção

Máquinas simples como polias, alavancas ou planos inclinados não reduzem a energia para a execução de um trabalho. Repare que no problema anterior o comprimento do plano inclinado não modifica nem o trabalho da força gravitacional nem a velocidade final do tonel.

## Avançando na prática

### Montanha-russa com atrito

#### Descrição da situação-problema

Em um projeto para a construção de uma Montanha-russa, deve-se determinar a altura e extensão da primeira rampa necessárias para atingir-se uma determinada velocidade máxima. Para tanto, sabe-se que a massa do carrinho é  $m = 1200 \text{ kg}$ , a velocidade máxima do carrinho desejada deve ser  $v = 110 \text{ km/h}$  e que, durante a primeira queda, existe uma perda de aproximadamente **9,5%** na velocidade

devido ao atrito e resistência do ar. No que diz respeito à extensão da rampa, o departamento de engenharia civil determinou que a inclinação desta deve ser de  $37^\circ$ . Sendo assim, determine qual o comprimento da rampa que eleva o carrinho e permite alcançar a velocidade encomendada. Considere também que o trem inicia a descida com uma velocidade inicial típica de  $v = 6 \text{ m/s}$ .

### Resolução da situação-problema

Podemos calcular a altura necessária para alcançarmos a velocidade encomendada. Como mencionado, estima-se que a velocidade real seja **9,5%** menor que a velocidade ideal, sendo assim, a altura  $h$  necessária para alcançar a velocidade pode ser calculada pelo princípio de conservação da energia durante a descida, tomando-se qual seria a velocidade em um sistema ideal:

$T_{inicial} + \Delta W = T_{final}$ , o carrinho não está girando, logo, a componente  $\omega = 0$  e, portanto, a energia cinética só depende da velocidade de translação do sistema:

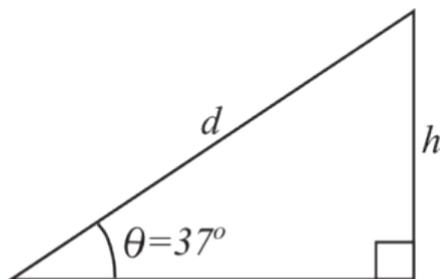
$$\frac{mv_{inicial}^2}{2} + mgh = \frac{mv_{final}^2}{2}, \quad \text{onde}$$

$v_{final} = 110 \cdot 1,095 = 120.45 \text{ km/h} = 33.45 \text{ m/s}$  é a velocidade do carrinho em um sistema ideal sem atrito

$$h = \frac{v_{final}^2 - v_{inicial}^2}{2g} = \frac{33,15^2}{20} = 54,17 \text{ m}.$$

Por fim, com uma inclinação de  $37^\circ$  sugerida pelo departamento de engenharia civil, para calcular o comprimento  $d$  da rampa:

Figura 3.5 | Rampa



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\sin 37^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{54,17}{\sin 37^\circ} = 90 \text{ m} .$$

Sendo assim, precisamos de uma rampa de comprimento  $d = 90 \text{ m}$  com uma inclinação de  $37^\circ$  que eleva o carrinho até uma altura  $h = 54,17 \text{ m}$ .

## Faça valer a pena

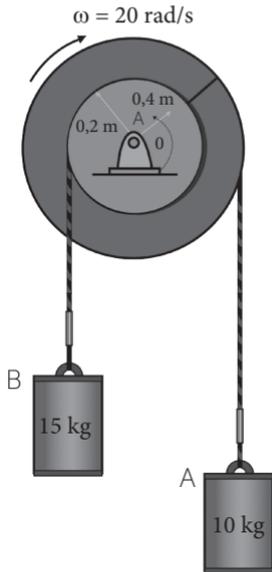
**1.** A Energia Cinética de \_\_\_\_\_ é função do momento angular e da \_\_\_\_\_, e é definida pela relação:  $T = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ . A Energia Cinética de translação é função da \_\_\_\_\_ e da velocidade de translação, e é definida pela relação: \_\_\_\_\_. O trabalho feito por uma força que faz um ângulo  $\theta$  com a trajetória do corpo pode ser escrito como: \_\_\_\_\_.

Leia o texto acima e selecione a alternativa que melhor completa as lacunas:

- a) giro; velocidade centrífuga; massa;  $T = mv$  ;  $U = F \cdot r \cos \theta$  .
- b) rotação; aceleração centrípeta; inércia;  $T = \frac{1}{2} mv_{CM}^2$  ;  $U = F \cdot r \sin \theta$  .
- c) giro; aceleração angular; massa;  $T = mgv_{CM}^2$  ;  $U = F \cos \theta$  .
- d) queda; velocidade; massa;  $T = mv \cos \theta$  ;  $U = F \cdot r$  .
- e) rotação; velocidade angular; massa;  $T = \frac{1}{2} mv_{CM}^2$  ;  $U = F \cdot r \cos \theta$  .

**2.** Uma polia dupla consiste de dois cilindros com diâmetros diferentes, porém, solidários, conforme mostrado na figura a seguir. Este sistema tem uma massa total de **25 kg**, um raio de giro em relação a seu centro  $k = 0,24 \text{ m}$  e gira a uma velocidade angular de **20 rad/s**, no sentido horário.

Figura 3.6 | Polia dupla



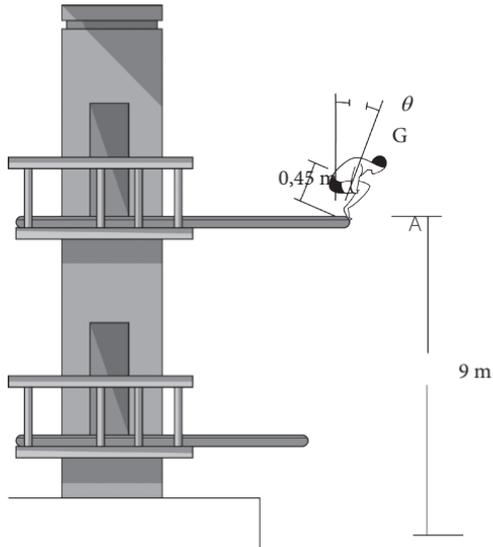
Fonte: Hibbeler (2012, p. 378).

Determine, para o caso mostrado na figura, a energia cinética do sistema. Suponha que não existe deslizamento entre os cabos e a polia.

- a) 871 J.
- b) 1000 J.
- c) 700 J.
- d) 728 J.
- e) 694 J.

**3.** Um homem com massa de 75 kg está agachado na extremidade do trampolim, como mostra a figura a seguir. Nessa posição, o raio de giro em relação a seu centro de gravidade é  $k = 36 \text{ cm}$ . Enquanto mantém sua posição em  $\theta = 0^\circ$ , ele gira em torno da ponta dos pés em A, até perder contato com a plataforma, quando  $\theta = 90^\circ$ .

Figura 3.7 | trampolim



Fonte: Hibbeler (2012, p. 378).

Se ele permanece rígido, determine a quantidade de revoluções completas realizadas antes de atingir a água, após uma queda de 9 m.

- a) 1 revolução.
- b) 2 revoluções.
- c) 3 revoluções.
- d) 4 revoluções.
- e) 5 revoluções.

## Seção 3.2

### Momento angular e momento linear

#### Diálogo aberto

Nos estudos feitos até então, já compreendemos grandezas como força e energia e solucionamos problemas. No início da unidade, vimos que o trabalho de uma força contribui para a energia de um sistema, respeitando um dos fundamentos da física conhecido como princípio de conservação da energia. Nesta seção, veremos como essa energia é entregue no tempo, ou seja, como o trabalho de uma força aplicada ao longo do tempo se expressa no que chamamos de potência.

Essa análise também servirá como ponte para análises distintas das que já vimos. Em problemas onde a velocidade de um corpo rígido é constante e, portanto, a soma das forças é nula, essa compreensão pode não ser suficiente para uma análise completa. Devemos analisar o sistema através de algo que chamamos de quantidade de movimento (ou momento).

Sendo assim, nesta seção, veremos como duas grandezas denominadas como momento linear e momento angular podem, a partir de mais um princípio fundamental de conservação, ser usadas para solução de problemas.

No entanto, antes de começarmos nossa seção, não podemos esquecer de verificar mais um dia de trabalho de nosso projetista que, em seu mais recente projeto, está responsável por modelar e calcular os detalhes para a construção de um sistema de transporte e embarque de cargas. Até agora, ele calculou alguns dos fatores para embarque de tonéis dentro de contêineres através de uma rampa. Todavia, nosso trabalho ainda está longe de estar finalizado; depois de armazenados em contêineres, os tonéis devem ser içados e transportados por um guindaste e, por isso, seu chefe precisa que você determine qual a potência do motor necessária para içar um contêiner cheio de tonéis.

## Não pode faltar

Dando continuidade ao que aprendemos na seção anterior, podemos estudar não só como uma força executa trabalho, mas em que taxa ele é executado, ou seja, podemos definir o conceito de potência  $P$ :

$$P = \frac{d}{dt}(W) = \frac{d}{dt} \left[ \int \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \right],$$

em que  $\vec{F}$  é a força que executa o trabalho e  $\vec{r}$  é o caminho percorrido pelo corpo rígido. Essa grandeza, no Sistema Internacional, tem unidades de  $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3} = \frac{\text{J}}{\text{s}}$ , ou simplesmente Watt, abreviado por  $W$ . Analogamente à seção anterior, quanto a uma força constante ao longo do caminho, teremos  $P = \frac{d}{dt} \left[ \int \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{F} \cdot \vec{r}]$ . E, finalmente, se essa força constante faz um ângulo  $\theta$  com o deslocamento, podemos reescrever:

$$P = \frac{d}{dt}(F \cdot d \cdot \cos \theta) = F \cdot \cos \theta \frac{d}{dt}(d) = F \cdot v \cdot \cos \theta,$$

ou seja, a potência será o produto da força pela velocidade vezes o cosseno do ângulo entre eles.

Não podemos nos esquecer de corpos efetuando um movimento de rotação, nesse caso, para um corpo rígido girante a uma velocidade angular  $\omega$ , sobre a ação de um torque  $\tau$  constante, a potência do trabalho gerado pelo torque será:  $P = \tau \cdot \omega$ .



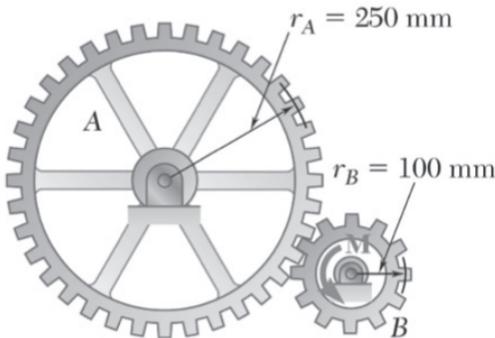
Refleta

Notou mais esse paralelo entre as equações do deslocamento translacional e do deslocamento de rotação? Potência de uma força paralela à velocidade vs a potência de um torque:  $P = F \cdot v$  vs  $P = \tau \cdot \omega$ , consegue se lembrar de algo semelhante nas seções anteriores?



No sistema mostrado a seguir, um torque  $M = 5 \text{ N}\cdot\text{m}$  é aplicado na engrenagem  $B$ , no seu eixo (em seu centro).  $B$  está ligada à engrenagem  $A$  e ambas giram com velocidade angular constante, pois o eixo da engrenagem  $A$  oferece resistência, gerando um torque de igual intensidade, mas sentido oposto. A soma dos torques que agem no sistema é nula, ou seja, o sistema está em equilíbrio com  $\omega_A = 10 \text{ rad/s}$ . Qual a potência do trabalho aplicado em  $B$ ?

Figura 3.8 | Sistema de engrenagens



Fonte: Beer (2009, p. 1.093).

Para o cálculo da potência da força em  $B$ , podemos usar a relação de potência de um torque em um corpo girando:  $P_B = M\omega_B$ .

Para o cálculo de  $\omega_B$  podemos relacionar a velocidade angular das engrenagens pela velocidade tangencial destas, que deve ser a mesma, logo:  $v_{At} = v_{Bt} \Rightarrow r_A\omega_A = r_B\omega_B$ ,  $\omega_B = \frac{r_A\omega_A}{r_B}$ .

Substituindo na expressão para a potência, teremos, enfim:

$$P_B = M\omega_B = M \frac{r_A\omega_A}{r_B} = 5 \cdot \frac{0,25 \cdot 10}{0,1} = 125 \text{ W}.$$

Isso nos mostra que, de forma geral, podemos entender o conceito de potência como o quão rápido o trabalho de uma força é realizado, ou seja, quanto mais rápido for realizado um trabalho e, por isso, alterado o estado energético do sistema, maior será a potência do sistema.



A potência do trabalho de uma força linear é dada pela relação:

$$P = F \cdot v \cdot \cos \theta .$$

Ao mesmo tempo, a potência do trabalho de um torque é dada pela relação:  $P = \tau \cdot \omega$  .

Em ambos os casos, a grandeza de potência no SI terá unidades de J/s, ou simplesmente Watt, abreviado por *W*.

Como vimos, é comum encontrarmos corpos que, mesmo com a atuação de diversas forças, mantêm-se em um estado de equilíbrio estático ou dinâmico, pois a força resultante é nula, assim como a aceleração.

Matematicamente, não existe diferença entre duas esferas colidindo sobre uma mesa sem atrito (onde a força peso e a força normal se cancelam) ou duas esferas colidindo livremente no espaço (em um local onde não existam forças atuando). Em ambos os casos as esferas vão realizar um movimento plano.

Nos casos de equilíbrio estático e dinâmico, podemos analisar o sistema por meio de outra grandeza vetorial denominada **quantidade de movimento** ou **momento**, a qual, assim como a energia, também segue um princípio de conservação. Existem dois tipos de momentos que se aplicam aos dois tipos de movimento estudados. O momento linear  $\vec{L}$  trata da quantidade de movimento translacional e pode ser calculada pela relação:

$$\vec{L} = m\vec{v}_{CM}$$

em que  $m$  é a massa do corpo e  $\vec{v}_{CM}$ , a velocidade do centro de massa do corpo. Por ser uma grandeza vetorial, ela é dotada de magnitude, sentido e direção, além de possuir unidade  $kg \cdot m/s$  no Sistema Internacional (SI).

Em uma primeira impressão, podemos entender o momento linear de um corpo como a quantificação da Primeira Lei de Newton ou Lei da Inércia. Essa lei diz que um corpo mantém seu estado de movimento a menos que uma força seja aplicada sobre ele, ou seja,

se tivermos dois corpos com a mesma velocidade eles irão manter essa velocidade, a menos que uma força aja de forma a modificar tal condição. Caso ocorra uma interação entre os dois corpos, observamos que o corpo com maior massa será mais resistente a uma mudança, pois, quantitativamente, o momento linear do corpo mais pesado lhe confere uma maior inércia.

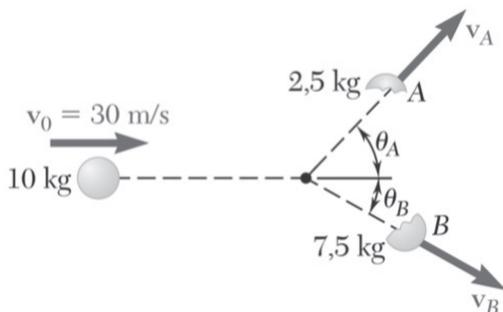
O momento linear possui uma característica aditiva na qual podemos definir o momento linear de um sistema, como a soma dos momentos lineares de seus componentes. Além disso, e ainda mais útil para solução de problemas, observamos que o momento linear também possui um princípio de conservação próprio. É possível afirmar que o momento linear total de um sistema isolado sempre se conserva:

$$\sum \vec{L}_{antes} = \sum \vec{L}_{depois}$$

### Exemplificando

Um projétil de 10 kg, mostrado na figura abaixo, se move com uma velocidade de 30 m/s, até que explode em dois fragmentos, A e B, de massa 2,5 kg e 7,5 kg, respectivamente. Imediatamente após a explosão, observou-se que os fragmentos se moviam em direções definidas respectivamente por  $\theta_A = 45^\circ$  e  $\theta_B = 30^\circ$ . Determine a velocidade de cada fragmento imediatamente após a explosão. Considere:  $\cos 45^\circ = 0,707$  ;  $\sin 45^\circ = 0,707$  ;  $\cos 30^\circ = 0,87$  ;  $\sin 30^\circ = 0,50$ .

Figura 3.9 | Projétil explosivo



Fonte: Beer (2009, p. 869).

### Resolução:

Na descrição do problema não é mencionada a ação da gravidade, por isso, podemos assumir que, no problema, a gravidade que atua sobre o projétil é ou inexistente ou muito pequena e desprezível, se comparada às forças originadas na explosão e, portanto, pode ser desprezada. Além disso, também podemos identificar que a explosão do projétil só envolve forças internas, pois o centro de massa do sistema deve permanecer na mesma trajetória. Sendo assim, a força resultante que age sobre o sistema é nula e podemos analisar o problema por sua quantidade de movimento. Segundo o princípio de conservação do momento linear:

$$\sum \vec{L}_{\text{antes}} = \sum \vec{L}_{\text{depois}},$$

antes temos apenas um projétil movendo-se na direção  $\hat{i}$  :

$$\sum \vec{L}_{\text{antes}} = m v_0 \hat{i} = 10 \cdot 30 \hat{i} = 300 \hat{i},$$

depois temos os projéteis A e B que contribuem para o momento final:  $\sum \vec{L}_{\text{depois}} = \vec{L}_A + \vec{L}_B$ ,

$\vec{L}_A$  e  $\vec{L}_B$  possuem componentes  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  que podem ser calculados projetando-se as velocidades de saída:

$$\vec{L}_A = m_A \vec{v}_A = m_A (v_A \cos \theta_A \hat{i} + v_A \sin \theta_A \hat{j})$$

$$\vec{L}_A = 2,5 \cdot v_A (\cos 45^\circ \hat{i} + \sin 45^\circ \hat{j}) = v_A (2,5 \cdot \cos 45^\circ \hat{i} + 2,5 \cdot \sin 45^\circ \hat{j})$$

$$\vec{L}_A = v_A (1,77 \hat{i} + 1,77 \hat{j})$$

$$\vec{L}_B = m_B \vec{v}_B = m_B (v_B \cos \theta_B \hat{i} - v_B \sin \theta_B \hat{j})$$

$$\vec{L}_B = 7,5 \cdot v_B (\cos 30^\circ \hat{i} - \sin 30^\circ \hat{j}) = v_B (6,49 \hat{i} - 3,75 \hat{j}).$$

Logo, a equação de conservação de momento linear será:

$$\sum \vec{L}_{\text{antes}} = \sum \vec{L}_{\text{depois}}$$

$$300 \hat{i} + 0 \hat{j} = v_A (1,77 \hat{i} + 1,77 \hat{j}) + v_B (6,49 \hat{i} - 3,75 \hat{j}), \text{ analisando cada}$$

direção separadamente teremos:

$$\begin{cases} 1,77v_A\hat{j} - 3,75v_B\hat{j} = 0\hat{j} \\ 1,77v_A\hat{j} + 6,49v_B\hat{j} = 300\hat{j} \end{cases}$$

resolvendo para  $v_B$ :

$$3,75v_B + 6,49v_B = 300 \Rightarrow v_B = 29,30 \text{ m/s},$$

resolvendo para  $v_A$ :

$$v_A = \frac{3,75v_B}{1,77} = \frac{3,75 \cdot 29,30}{1,77} = 62,08 \text{ m/s}.$$

Paralelamente, o outro tipo de quantidade de movimento que se aplica a corpos rígidos, executando um movimento de rotação em torno de um eixo fixo, é o momento angular. Analogamente ao que temos visto ao comparar as equações de translação e rotação, podemos escrever o momento angular matematicamente como  $\vec{H} = I\vec{\omega}$ , em que  $H$  é o momento angular dado pelo produto do momento de inércia  $I$  vezes a velocidade angular  $\omega$ . Novamente, lembre-se que essas grandezas dependem não só da distribuição de massa do corpo como principalmente da posição do eixo de giro. Dito isso, no Sistema Internacional, o momento angular também será expresso em  $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ .

Prosseguindo da mesma forma como para o momento linear, vemos que o momento angular é uma grandeza aditiva e que também segue um princípio de conservação que pode ser usado na solução de problemas. Sendo assim, para um sistema isolado, na ausência de forças externas, podemos escrever:

$$\sum \vec{H}_{\text{antes}} = \sum \vec{H}_{\text{depois}}.$$

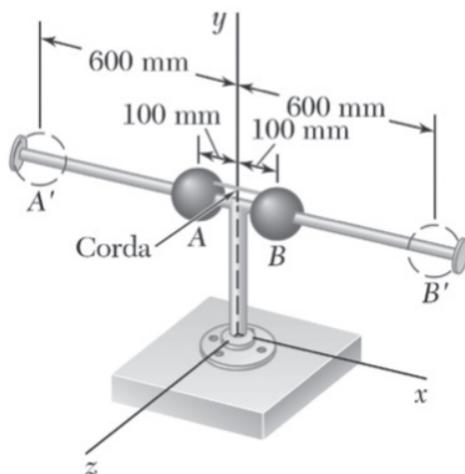


### Exemplificando

Duas esferas sólidas de raio 100 mm, pesando 1 kg cada, estão montadas em **A** e **B** sobre a barra horizontal **A'** e **B'**, como mostrada na Figura

3.10. Essa barra gira livremente em torno de seu eixo vertical com uma velocidade angular  $\omega = 6 \text{ rad/s}$  no sentido anti-horário. Inicialmente, as esferas são mantidas no lugar por uma corda inextensível que se rompe subitamente. Sabendo que o momento de inércia da barra girando no eixo é  $I_b = 0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , determine a velocidade angular da barra após as esferas atingirem as suas extremidades (posições  $A'$  e  $B'$ ).

Figura 3.10 | Barra e esferas



Fonte Beer (2009, p. 1.113).

Considere: momento de inércia de uma esfera de massa  $m$  e raio  $r$  é

$$I_{\text{esfera}} = \frac{2}{5} mr^2.$$

Teorema dos eixos paralelos:  $I = I_{CM} + md^2$ .

### Resolução:

Como a soma das forças que agem no sistema é nula, devemos usar o momento angular para analisar o problema. Pelo princípio de conservação do momento angular:

$$\sum \vec{H}_{\text{antes}} = \sum \vec{H}_{\text{depois}}, \text{ analisando cada instante separadamente:}$$

$$\sum \vec{H}_{\text{antes}} = H_b + H_A + H_B, \text{ como todo o sistema mantém a mesma velocidade angular}$$

$\sum \vec{H}_{antes} = I_b \omega + I_A \omega + I_B \omega$  tanto para  $I_A$  e  $I_B$ , o momento de inércia será o momento de uma esfera sólida que gira em torno de um eixo deslocado, logo, usando o teorema dos eixos paralelos:

$$I_A = I_B = I_{esfera} + md^2 = \frac{2}{5}mr^2 + md^2 = \frac{2}{5}1 \cdot 0,1^2 + 1 \cdot 0,1^2 = 0,014 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Logo:

$$\sum \vec{H}_{antes} = \omega(I_b + I_A + I_B) = 6(0,4 + 0,014 + 0,014) = 2,568 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Já no instante posterior, temos:

$\sum \vec{H}_{depois} = H_b + H_{A'} + H_{B'} = \omega'(I_b + I_{A'} + I_{B'})$ , em que o momento de inércia de  $I_{A'}$  e  $I_{B'}$  pode ser calculado também utilizando o teorema dos eixos paralelos:

$$I_{A'} = I_{B'} = I_{esfera} + md'^2 = \frac{2}{5}mr^2 + md'^2 = \frac{2}{5}1 \cdot 0,1^2 + 1 \cdot 0,6^2 = 0,364 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Logo:

$$\sum \vec{H}_{depois} = \omega'(0,4 + 0,364 + 0,364) = 1,128\omega'.$$

Por fim, o princípio de conservação do momento angular permite escrever:

$$\sum \vec{H}_{antes} = \sum \vec{H}_{depois}$$

$$2,568 = 1,128\omega' \Rightarrow \omega' = 2,28 \text{ rad/s}.$$



### Assimile

O momento linear de um corpo rígido é dado por:

$$\vec{L} = m\vec{v}_{CM}.$$

O momento angular de um corpo rígido é dado por:

$$\vec{H} = I\vec{\omega}.$$

Por fim, para um movimento geral no plano, constituído pela composição de um movimento de translação e de um movimento de rotação, devemos destacar que, apesar de terem a mesma unidade, o momento linear não soma com o momento angular, fazendo destas grandezas independentes. Com isso, calcula-se a quantidade de movimento de um corpo rígido para

$$\text{uma trajetória no plano geral de forma independente: } \begin{cases} \vec{L} = m\vec{v}_{CM} \\ \vec{H} = I\vec{\omega} \end{cases}$$



**Pesquise mais**

Para aprofundar-se no assunto estude o material: HIBBELER, R. C.

**Dinâmica:** mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. p. 385 - 406.

## Sem medo de errar

Como mencionado, nosso projetista, que trabalha no porto, foi recentemente envolvido no desenvolvimento de um sistema para o transporte de carga. Nesse contexto, seu chefe acabou de lhe pedir para que você dimensione, ou seja, calcule qual a potência do motor que será usado em um guindaste que ficará no pátio executando tarefas diversas. De qualquer forma, esse guindaste de polia simples deverá içar contêineres carregados, cuja carga deve alcançar o peso aproximado de 32.000 kg. Exatamente por isso, o guindaste deverá ser capaz de içar massas (cargas + contêiner + margem de segurança) de pelo menos 36.000 kg. Além disso, espera-se que o guindaste trabalhe com uma velocidade constante no içamento de aproximadamente 1 m/s e com uma eficiência mecânica de 90%. Também, existe a possibilidade de se trabalhar com um guindaste que possui uma polia móvel, além da polia simples. Qual a potência do motor para esse caso, mantendo a mesma velocidade de 1 m/s para o içamento? Seria interessante trabalhar com mais polias móveis?

Sabemos que a carga irá subir com uma velocidade constante, logo, a força de tração  $\vec{T}$ , que puxa a carga para cima, será contrabalançada por outras forças de sentido contrário e mesma magnitude. Para um sistema ideal, de apenas uma polia, toda a força peso é apenas redirecionada e, portanto, a magnitude da tração do motor deve ser igual à magnitude da força peso.

$$T_{ideal} = P$$

Ao mesmo tempo, todo o sistema do guindaste tem uma eficiência mecânica de 90 %, isso implica que a performance da tração real é  $\vec{T}_{ideal} = 0,9 \cdot \vec{T}$ , logo:  $0,9 \cdot T = P$

$$T = \frac{P}{0,9} = \frac{36000 \cdot 10}{0,9} = 400000 \text{ N}.$$

Sabendo a força do motor, podemos calcular a potência do trabalho realizado:

$W = \vec{F} \cdot \vec{v}$ , no caso do guindaste, a força e o deslocamento estão sempre paralelos

$$W = F \cdot v = 400000 \cdot 1 = 400 \text{ kW}.$$

Para o caso de uma polia dupla, temos um fator de vantagem mecânica  $n$  que é igual ao número de polias móveis. Esse fator divide a força peso que é transferida para o motor:  $T_{ideal} = \frac{P}{n}$

$$T = \frac{P}{0,9 \cdot n} = \frac{36000 \cdot 10}{0,9 \cdot 2} = 200000 \text{ N}.$$

Porém, este mesmo fator faz com que a velocidade de içamento seja a metade da velocidade com que o motor aplica a força:

$$\vec{v}_{\text{içamento}} = \frac{\vec{v}_{\text{motor}}}{n}$$

$$\vec{v}_{\text{motor}} = n\vec{v}_{\text{içamento}} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ m/s}.$$

Logo, a potência do motor deve ser:  
 $W = F \cdot v = 200000 \cdot 2 = 400 \text{ kW}.$

Como visto, o número de polias móveis não vai alterar a potência necessária. Como podemos reduzir a potência necessária? Feitos estes cálculos, você agora tem uma compreensão melhor para dimensionar a potência do motor. Depois de levar esse resultado, seu chefe percebe que as especificações para o motor são muito altas e te pergunta se é possível usar um motor com menor potência. Qual seria a sua resposta? Para o nosso projetista, graças a sua compreensão do sistema, ele responde que, alterando a velocidade de içamento é possível diminuir a potência do motor. Com isso,

ele percebe que ter uma compreensão das variáveis que de fato interferem no resultado é melhor que ter uma simples resposta de sim ou não.



### Atenção

Máquinas simples como polias, alavancas ou planos inclinados reduzem a força necessária para a execução de um trabalho. Porém, isso tem um preço, que é a distância percorrida. Você pode entender isso como uma consequência do princípio de conservação de energia da seção anterior. Em nosso exemplo, escolhemos manter a taxa, ou velocidade, com que gastamos essa energia, logo, a potência também será a mesma.

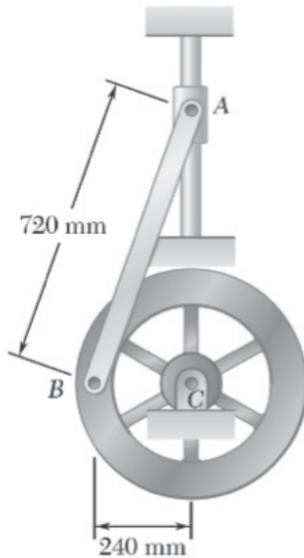
## Avançando na prática

### Volante

#### Descrição da situação-problema

Uma engenheira mecânica trabalha em uma indústria e precisa analisar a segurança da operação de um mecanismo com o esboçado na Figura 3.11. Ele é composto de uma barra de 5 kg, que está presa a um curso de massa desprezível em  $A$  e a uma roda em  $B$ . A roda tem uma massa total de 10 kg e raio de giração de 200 mm. Sabendo que, na posição mostrada na figura a seguir, a velocidade angular da roda é  $\omega = 60 \text{ rpm}$ , girando no sentido horário, determine a velocidade angular da roda quando o ponto  $B$  está diretamente abaixo do eixo de giro desta.

Figura 3.11 | Volante



Fonte: Beer (2009, p. 1105).

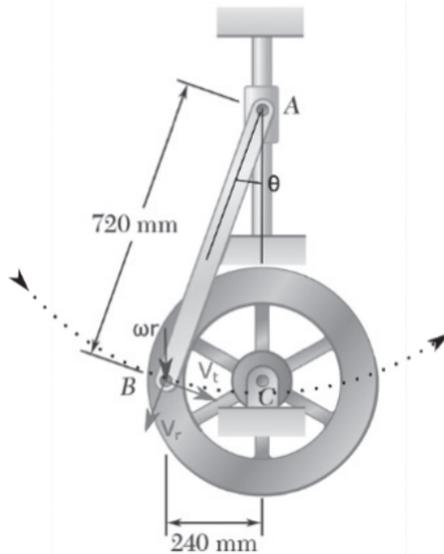
### Resolução da situação-problema

O sistema se encontra em equilíbrio e, por isso, pode ser analisado em termos de sua quantidade de movimento. Para encontrar a velocidade, podemos analisar o momento angular do sistema e utilizar o princípio de conservação do momento angular para analisar o momento mostrado na figura e o momento no qual queremos determinar a velocidade:

$\sum \vec{H}_{antes} = \sum \vec{H}_{depois}$ , no primeiro momento a roda está girando com uma dada velocidade angular e a barra também está girando em torno do ponto A

$\sum \vec{H}_{antes} = I_{barra} \omega_{barra} + I_{roda} \omega_{roda}$ , precisamos então determinar a velocidade angular da roda em respeito ao ponto A. Pelo diagrama dinâmico podemos observar que:

Figura 3.12 | Decomposição de velocidades no volante



Fonte: Beer (2009, p. 1.105).

$v_t = \omega r \cos \theta$ , em que  $v_t$  é a velocidade tangencial da barra,  $\omega$  é a velocidade angular da roda ( $\omega = 60 \text{ rpm} = 1 \text{ rad/s}$ ),  $r$  é o raio da roda (240 mm) e  $\cos \theta$  é ângulo da barra no instante mostrado na figura. Para o cálculo do ângulo podemos usar a geometria do mecanismo mostrados na figura:

$\sin \theta = \frac{240}{720} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{240}{720}\right) = 0,34 \text{ rad}$ , logo a velocidade tangencial da barra será:

$v_t = \omega r \cos \theta = 1 * 0,24 * \cos 0,34 = 0,23 \text{ m/s}$ , a velocidade

angular da barra será proporcional a velocidade tangencial  $v_t = \omega_{\text{barra}} L \Rightarrow \omega_{\text{barra}} = \frac{v_t}{L} = \frac{0,23}{0,72} = 0,31 \text{ rad/s}$ , logo:

$\sum \vec{H}_{\text{antes}} = I_{\text{barra}} \omega_{\text{barra}} + I_{\text{roda}} \omega_{\text{roda}}$ , o momento angular da barra é calculado pelo raio de giro:  $I = mk^2$  e o momento da barra é dado por:  $I = \frac{mL^2}{3}$

$$\sum \vec{H}_{\text{antes}} = m_{\text{roda}} k^2 \omega_{\text{roda}} + \frac{m_{\text{barra}} L^2}{3} \omega_{\text{barra}} = 10 \cdot 0,2^2 \cdot 1 + \frac{5 \cdot 0,72^2}{3} \cdot 0,31 = 0,667 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

O momento angular depois será:

$\sum \vec{H}_{\text{depois}} = I'_{\text{barra}} \omega'_{\text{barra}} + I'_{\text{roda}} \omega'_{\text{roda}}$ , porém no exato instante em que  $B$  passa sobre o eixo  $\omega'_{\text{barra}} = \omega'_{\text{roda}} = \omega'$ , logo:

$$\sum \vec{H}_{\text{depois}} = m_{\text{roda}} k^2 \omega' + \frac{m_{\text{barra}} L^2}{3} \omega' = 10 \cdot 0,2^2 + \frac{5 \cdot 0,72^2}{3} = 1,264 \omega'$$

Por fim, a velocidade angular será:

$$\sum \vec{H}_{\text{antes}} = \sum \vec{H}_{\text{depois}} \Rightarrow 0,667 = 1,264 \omega' \Rightarrow \omega' = 0,527 \text{ rad/s.}$$

Com essa informação em mãos, a engenheira pode tomar decisões no que se refere à segurança da instalação atual do equipamento na indústria.

## Faça valer a pena

**1.** A taxa com a qual uma \_\_\_\_\_ realiza trabalho se traduz na grandeza denominada potência. No sistema internacional, essa grandeza é dada em \_\_\_\_\_. O momento linear avalia a quantidade de movimento de um corpo rígido executando um movimento de \_\_\_\_\_. O \_\_\_\_\_ quantifica a quantidade de movimento de um corpo rígido executando uma rotação entorno de um eixo fixo. Na ausência de uma força resultante, tanto o momento linear quanto o angular são \_\_\_\_\_.

Selecione dentre as alternativas a seguir a que melhor completa as afirmações apresentadas no enunciado acima:

- a) força; Newton; rotação, precessão, constantes.
- b) força; Watt; translação; momento angular; conservados.
- c) carga; Watt; queda; impulso; iguais.
- d) massa; Newton; precessão; rotação; iguais.
- e) massa; Coulomb; giro; momento linear; conservados.

**2.** Um veículo espacial de massa 200 kg é monitorado de forma que em  $t = 0$  sua velocidade é  $V_0 = 150\hat{i}$  m/s. Neste, logo depois, explosivos são detonados e a nave se separa em três pedaços, denominados  $A$ ,  $B$  e  $C$ , de massa 100 kg, 60 kg e 40 kg, respectivamente.

Sabendo que no tempo  $t = 2,5$  s a posição observada para as partes  $A$  e

$B$  foi  $r_A = 555\hat{i} - 180\hat{j} + 240\hat{k}$  e  $r_B = 255\hat{i} - 120\hat{k}$ , determine a posição do pedaço  $C$  e selecione dentre as alternativas a seguir a que melhor representa sua resposta.

a)  $\vec{r}_C = 235\hat{i} - 160\hat{j} + 712\hat{k}$ .

b)  $\vec{r}_C = 95\hat{i} - 561\hat{j} + 349\hat{k}$ .

c)  $\vec{r}_C = 105\hat{i} - 450\hat{j} + 420\hat{k}$ .

d)  $\vec{r}_C = 117\hat{i} - 395\hat{j} + 510\hat{k}$ .

e)  $\vec{r}_C = 87\hat{i} - 411\hat{j} + 399\hat{k}$ .

**3.** De acordo com a figura ilustrada a seguir, temos um vagão ferroviário que possui uma massa de 20 Mg e este está se movendo a uma velocidade de 3,6 km/h. Ele é acoplado a um outro vagão ferroviário que possui uma massa de 40 Mg e que está em repouso, com as rodas travadas com coeficiente de atrito  $\mu = 0,30$ .

Figura 3.13 | Vagão ferroviário



Fonte: Beer (2009, p. 821).

Determine a distância que a composição deve percorrer até parar. Selecione dentre as alternativas a que melhor representa sua resposta.

a) 2,8 mm.

d) 210 mm.

b) 5 mm.

e) 57 mm.

c) 1,9 m.

## Seção 3.3

### Trabalho e a conservação de energia

#### Diálogo aberto

Olá estudante! Até aqui, nossos estudos da dinâmica de corpos rígidos nos levaram a considerar os conceitos de força e momento, de forma independente. Nas seções anteriores aprendemos métodos interessantes para analisar sistemas em equilíbrio. No entanto, sistemas e mecanismos reais sofrem constantemente a ação de forças externas, saindo do equilíbrio. É por isso que agora aplicaremos o chamado princípio de impulso, no contexto de corpos rígidos.

Com ele, veremos que a quantidade de movimento pode ser modificada na presença de uma força externa não equilibrada, o que concilia os conceitos de força e quantidade de movimento. Isso, além de fechar nossa unidade, permite dizer que alcançamos um formalismo completo do movimento de um corpo rígido em um plano. Teremos aplicado os princípios chave da mecânica de corpos rígidos: o princípio de conservação de energia, o princípio de conservação de momento e o princípio do impulso.

Para nosso projetista, isso significa que sua próxima tarefa logo será finalizada. Após quantificar a potência necessária para um guindaste içar uma carga, você estará próximo de finalizar o projeto. De acordo com o solicitado por seu gestor, falta apenas calcular a resposta do sistema de segurança deste mesmo guindaste. Por isso, você deve analisar o freio de segurança, determinando principalmente o tempo de resposta e qual o deslocamento da carga içada, no caso de uma perda catastrófica de tração. Talvez essa seja uma de suas tarefas mais importantes, afinal, ninguém deseja que um sistema de emergência precise ser acionado, mas você deve se certificar que a segurança de seus funcionários não será colocada em risco. Com isso, o projeto do sistema de transporte de cargas do porto já está na reta final, não é mesmo? Vamos lá.

## Não pode faltar

Sabemos que em muitos mecanismos, em algum momento o sistema deverá estar sujeito a alguma força que mudará seu estado de movimento. Para entender o que ocorre nesse caso, podemos recorrer ao conhecimento acumulado na Unidade 2, que envolvia a descrição da ação de forças. No entanto, em uma situação realista não é possível conhecer todas as forças que atuam no sistema, nem como elas variaram em cada instante de tempo, ao menos com a precisão necessária.

Para a maioria das aplicações, queremos apenas entender como a presença da força modificou o estado de movimento do sistema, e é possível fazer isso analisando apenas o antes e o depois da ação da força. Para essa análise, então, podemos utilizar um conceito conhecido como princípio de impulso e quantidade de movimento.

Esse método combina a equação de movimento da dinâmica e o conceito de quantidade de movimento. Assim, a equação resultante possibilita uma solução direta para problemas envolvendo força, velocidade e tempo.

Retomando a Segunda Lei de Newton que estudamos na Unidade 2, podemos reescrever  $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ , dado que a massa de um corpo rígido em muitas aplicações é constante, teremos a relação:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}),$$

em que  $\sum \vec{F}$  é a soma das forças que agem sobre o corpo cuja intensidade pode variar de forma desconhecida ao longo do tempo;  $m$  é a massa do corpo rígido e  $\vec{v}$ , a velocidade do centro de massa do corpo rígido. Note que a equação apresentada é uma equação vetorial e, portanto, depende do sistema de coordenadas.

Multiplicando ambos os lados da equação por  $dt$ :  $\sum \vec{F} dt = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) dt$

Com essa multiplicação, estamos descrevendo a resposta da força dentro de janelas temporais extremamente pequenas. Lembre-

se que a grandeza impulso é definida como o produto da força por um intervalo de tempo. E o impulso afeta diretamente o momento linear ( $m\vec{v}$ ) do centro de massa do sistema, como indica a relação anterior.

Para obter o resultado exato, precisaríamos somar todas as forças que agem sobre o corpo em um determinado instante de tempo. Seria algo análogo a somar as forças dentro de um filme onde, em cada cena, podemos desenhar o diagrama de força e calcular a soma das forças, com isso, ao final do filme teremos um combinado dessas diversas cenas que chamamos de impulso. Essa analogia é exatamente o que é uma integração  $t = t_{inicial}$ , quando  $m\vec{v} = (m\vec{v})_{inicial}$ , a  $t = t_{final}$ , quando

$m\vec{v} = (m\vec{v})_{final}$ , integrando no tempo em ambos os lados:

$$\int_{t_{inicial}}^{t_{final}} \sum \vec{F} dt = \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) dt.$$

Utilizando o teorema fundamental do cálculo do lado direito da equação, em que observamos a integral de uma derivada:

$$\sum \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} \vec{F} dt = m(\vec{v})_{final} - m(\vec{v})_{inicial}.$$

Esta equação, que tem unidade no SI de  $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ , descreve o chamado princípio de impulso e quantidade de movimento, o qual estabelece que a soma dos impulsos criados pela soma das forças ( $\sum \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} \vec{F} dt$ ) que agem sobre um corpo rígido durante um intervalo de tempo ( $t_{inicial} \rightarrow t_{final}$ ) é igual a variação da quantidade de movimento do corpo dentro deste mesmo intervalo ( $m(\vec{v})_{final} - m(\vec{v})_{inicial}$ ). Como até o momento estamos analisando mecanismos contidos no plano, a equação vetorial do princípio de impulso pode ser reescrita como um conjunto de duas equações escalares independentes:

$$\begin{cases} m(v_x)_{inicial} + \sum \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} F_x dt = m(v_x)_{final} \\ m(v_y)_{inicial} + \sum \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} F_y dt = m(v_y)_{final} \end{cases}$$

ou simplesmente:

$$\begin{cases} L_{x_{inicial}} + \Delta J_x = L_{x_{final}} \\ L_{y_{inicial}} + \Delta J_y = L_{y_{final}} \end{cases}$$

em que  $L$  é o momento linear e  $\Delta J$ , a soma dos impulsos que agem sobre o corpo. O impulso tem unidades, no sistema internacional, de  $kg \cdot m / s$ , a mesma unidade para o momento angular o qual é dimensionalmente equivalente.

Note que as duas equações foram arranjadas de maneira bastante intuitiva: somando o momento linear inicial com o impulso dado, obtemos o momento linear final do sistema.

De forma análoga podemos rever o conceito de energia e trabalho, apresentados na Seção 3.1. Ela também se referia a uma mudança de estado devido a ação de uma força externa, sendo assim, a forma  $T_{inicial} + \Delta W = T_{final}$ , serve como paralelo para a teoria apresentada. A energia cinética inicial somada ao trabalho aplicado sobre o sistema resulta na energia cinética final.

Dando continuidade, devemos abordar os casos quando o corpo não está transladando, mas sim executando um movimento de rotação em torno de um eixo fixo. Para esses casos, podemos fazer uma dedução semelhante a apresentada, dado que o momento de inércia de um corpo também não varia em muitas aplicações, sendo assim:

$$\sum M = \frac{d}{dt}(I\omega)$$

em que  $\sum M$  é o somatório dos torques que agem sobre o corpo de momento de inércia dado por  $I$  e velocidade angular  $\omega$ . Assim, da mesma forma que foi apresentada para o momento linear, podemos escrever uma relação que descreve o princípio de impulso e quantidade de movimento para rotações na forma:

$$I\omega_{inicial} + \sum \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} M dt = I\omega_{final},$$

ou simplesmente:

$$H_{inicial} + \Delta Y = H_{final}$$

em que  $H$  é o momento angular e  $\Delta Y$ , a soma dos impulsos angulares que fazem com que o corpo rígido altere seu estado de rotação em torno de um eixo.



### Assimile

Lembre-se que assim como o momento de inércia, o momento angular e a velocidade angular, os impulsos angulares devem ser definidos como função de um mesmo eixo de rotação.

De qualquer forma, a dedução apresentada não exclui outras definições de momento angular apresentadas na seção anterior, onde o momento angular também podia ser calculado pela equação:  $H = Lr$ , onde  $L$  é momento linear aplicado na extremidade de um braço de comprimento  $r$ . O resultado é idêntico.

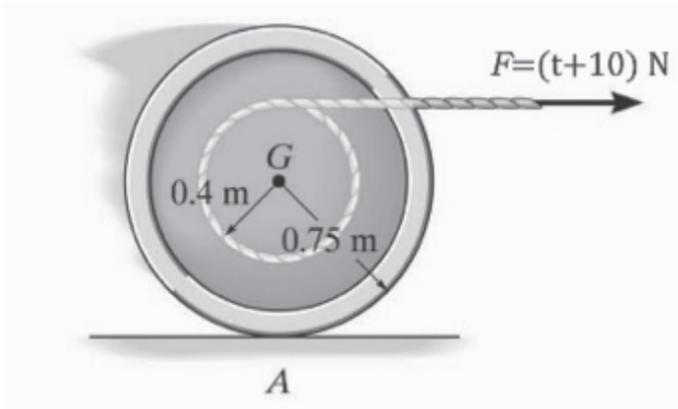
Por fim, como já vimos nas seções anteriores, podemos estender nossa análise utilizando o princípio de impulso para um corpo executando um movimento geral, utilizando as duas equações do movimento translacional em conjunto com a equação do movimento de rotação em torno de um eixo fixo.

$$\begin{cases} L_{x_{inicial}} + \Delta J_x = L_{x_{final}} \\ L_{y_{inicial}} + \Delta J_y = L_{y_{final}} \\ H_{inicial} + \Delta Y = H_{final} \end{cases}$$



Uma bobina de 100 kg e com um raio de giro de  $k = 350$  mm é mostrada na figura a seguir; nela, um cabo é enrolado ao longo de seu cilindro interno, por meio do qual uma força variável de  $f = (t+10)n$  é aplicada, em que  $t$  é dado em segundos. Considere que a bobina está inicialmente em repouso e que pode rolar sem escorregamento. Determine sua velocidade angular após 5 s.

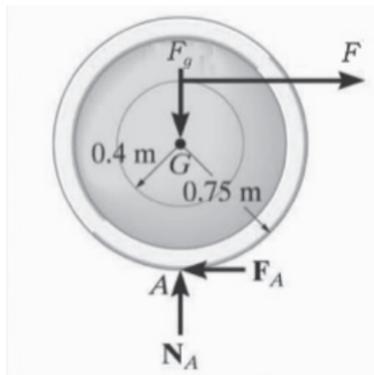
Figura 3.14 | Bobina



Fonte: Hibbeler (2012, p. 405).

Utilize a relação  $I = mk^2$  para o cálculo do momento de inércia. Para a solução do problema, devemos analisar seu diagrama de forças:

Figura 3.15 | Diagrama de forças



Fonte: Hibbeler (2012, p. 405).

Do diagrama de forças, podemos utilizar o princípio de impulso e escrever as equações:

$$\begin{cases} L_{x_{inicial}} + \Delta J_x = L_{x_{final}} \\ L_{y_{inicial}} + \Delta J_y = L_{y_{final}} \\ H_{inicial} + \Delta Y = H_{final} \end{cases}, \text{ assumindo o eixo da própria bobina como}$$

ponto de giro e relembrando que ela sai do repouso e, por isso, as quantidades de movimentos iniciais são nulas:  $L_{x_{inicial}} = L_{y_{inicial}} = H_{inicial} = 0$

$$\begin{cases} \Delta J_x = L_{x_{final}} \\ \Delta J_y = L_{y_{final}} \\ \Delta Y = H_{final} \end{cases}, \text{ além disso a bobina não executa nenhum deslocamento}$$

ao longo do eixo  $y$  e, por isso, ele também não apresenta momento ao longo de  $y$ .

$$\begin{cases} \Delta J_x = L_{x_{final}} \\ \Delta J_y = 0 \\ \Delta Y = H_{final} \end{cases}, \text{ rescrevendo os impulsos na sua forma integral, em que}$$

$$t_{inicial} = 0 \text{ e } t_{final} = 5$$

$$\begin{cases} \sum_0^5 \int F_x dt = m(v_x)_{final} \Rightarrow \int_0^5 F dt - \int_0^5 F_A dt = m(v_x)_{final} \\ \sum_0^5 \int F_y dt = 0 \Rightarrow \int_0^5 N_A dt - \int_0^5 P dt = 0 \\ \sum_0^5 \int M dt = I\omega_{final} \Rightarrow \int_0^5 F \cdot r dt + \int_0^5 F_A \cdot R dt = I\omega_{final} \end{cases}, \text{ o momento de}$$

inércia pode ser calculado pelo raio de giro:  $I = mk^2$ , e como não existe escorregamento, a velocidade angular deve se relacionar com a velocidade de translação:  $v_x = \omega R$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^5 F dt - \int_0^5 F_A dt = m(\omega R)_{final} = mR\omega_{final} \\ \int_0^5 N_A dt - \int_0^5 P dt = 0 \\ \int_0^5 F \cdot r dt + \int_0^5 F_A \cdot R dt = mk^2\omega_{final} \end{array} \right. , \text{ observe que a relação } v_x = \omega R$$

é uma relação cinemática independente do tempo, por isso, o instante quando é feita a substituição é importante, ou seja, os subíndices final e inicial devem ser respeitados. Substituindo os valores do enunciado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^5 (t + 10) dt - \int_0^5 F_A dt = 100 \cdot 0,75\omega_{final} \\ \int_0^5 N_A dt - \int_0^5 100 \cdot 10 dt = 0 \\ \int_0^5 (t + 10) \cdot 0,4 dt + \int_0^5 F_A \cdot 0,75 dt = 100 \cdot 0,35^2\omega_{final} \end{array} \right. , \text{ como}$$

queremos determinar a velocidade angular final, focaremos apenas na primeira e última relação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^5 (t + 10) dt - \int_0^5 F_A dt = 75\omega_{final} \\ 0,4 \int_0^5 (t + 10) dt + 0,75 \int_0^5 F_A dt = 12,25\omega_{final} \end{array} \right. , \text{ resolvendo a integral}$$

para a força  $F$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{t^2}{2} + 10t \right) \Big|_0^5 - \int_0^5 F_A dt = 75\omega_{final} \\ 0,4 \left( \frac{t^2}{2} + 10t \right) \Big|_0^5 + 0,75 \int_0^5 F_A dt = 12,25\omega_{final} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{5^2}{2} + 10 \cdot 5 \right) - \int_0^5 F_A dt = 75\omega_{final} \\ 0,4 \left( \frac{5^2}{2} + 10 \cdot 5 \right) + 0,75 \int_0^5 F_A dt = 12,25\omega_{final} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^5 F_A dt = 62,5 - 75\omega_{final} \\ 25 + 0,75 \int_0^5 F_A dt = 12,25\omega_{final} \end{array} \right. , \text{ não precisamos resolver a integral}$$

de  $F_A$  substituindo-a diretamente:

$$25 + 0,75(62,5 - 75\omega_{final}) = 12,25\omega_{final}$$

$$\omega_{final} = 1,05 \text{ rad/s}.$$



### Assimile

O princípio de impulso e quantidade de movimento podem ser usados para solução de problema utilizando três equações escalares independentes, dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{x_{inicial}} + \Delta J_x = L_{x_{final}} \\ L_{y_{inicial}} + \Delta J_y = L_{y_{final}} \\ H_{inicial} + \Delta Y = H_{final} \end{array} \right.$$

Uma aplicação direta do princípio de impulso e quantidade de movimento é o estudo de **colisões** entre corpos rígidos.

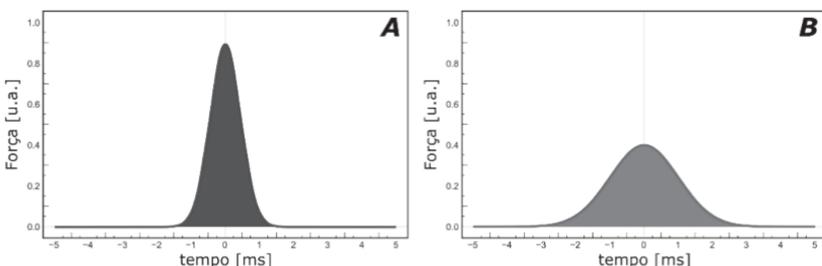
Para compreender o impacto de corpos rígidos, podemos retomar não só o que já vimos nesta seção, mas também o conceito de energia e trabalho. Do ponto de vista energético, um impacto envolve uma resposta elástica por parte dos corpos envolvidos. Mesmo o mais rígido dos materiais irá, se observarmos bem de perto, se deformar durante o impacto e, em seguida, restituir sua forma, assim como uma mola. Sendo assim, do ponto de vista energético, um impacto

deve ser analisado pelo trabalho realizado por uma mola.

Note que esse comportamento atribui ao impacto entre corpos uma janela de tempo dentro da qual a força de contato entre eles pode atuar. E embora essa força não seja constante e tenha um comportamento que, de certa forma, é praticamente impossível descrever, ainda assim, podemos dizer que a elasticidade do corpo deve modificar a resposta a um impacto.

Na figura a seguir, temos uma representação de como seria a resposta de uma força impulsiva durante uma colisão. Em ambas as figuras a força é normalizada e dada em unidades arbitrárias para facilitar a comparação, em específico a área sobre a curva é a mesma em ambos os casos, o que significa que o impulso é o mesmo para ambos. No caso de A, que representa um corpo mais rígido, possui uma janela de resposta ou um intervalo de integração pequeno e, por isso, a força impulsiva durante a colisão precisa ter uma intensidade maior. Comparativamente, em B, um corpo mais elástico possui uma janela de resposta maior, o que se traduz em uma força impulsiva menos intensa para um mesmo impulso.

Figura 3.16 | Resposta de uma força impulsiva



Fonte: elaborada pelo autor.



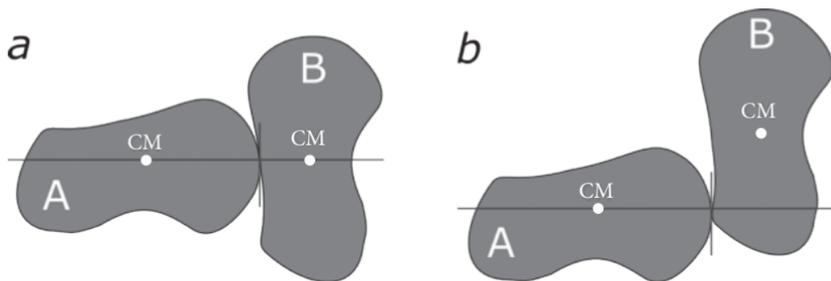
Refleta

Que exemplos você consegue observar no seu dia a dia em que um material mais elástico tem uma força impulsiva menor? Já se perguntou por que um prato de plástico não se quebra se ele cai no chão? Quem você acha que é mais elástico, vidro ou plástico?

Para entender melhor como funcionam as colisões no contexto de corpos rígidos, devemos estudar duas coisas: o parâmetro de impacto e o coeficiente de restituição.

No impacto mostrado na Figura 3.17A, o centro de massa dos dois corpos está localizado na linha de impacto, o que é inevitável para uma partícula pontual. Chamaremos esse caso de impacto central.

Figura 3.17 | Tipos de Impacto: a) impacto central; b) impacto excêntrico



Fonte: elaborada pelo autor.

Por outro lado, um corpo rígido extenso nos apresenta outras possibilidades, como no caso do impacto excêntrico 3.17B. Em casos assim, o resultado do impacto será não somente uma translação, mas será iniciada uma rotação, como você poderá testar facilmente se tiver em mãos dois livros sobre uma mesa lisa. Faça alguns testes!

Outra grandeza importante no estudo de uma colisão é o chamado coeficiente de restituição. Ele indica quanto da energia inicial da colisão é mantida no sistema. Ele pode ser definido como:

$$e = \frac{v_B - v_A}{u_A - u_B},$$

em que  $v_A$  e  $v_B$  referem-se às velocidades do centro de massa dos corpos A e B exatamente após o impacto;  $u_A$  e  $u_B$  referem-se às velocidades A e B exatamente antes do impacto. Este coeficiente resume a perda de energia cinética devido à resposta do corpo à força impulsiva do impacto (perda de energia por deformação, calor, som etc.).  $e = 1$  indica uma colisão perfeitamente elástica, onde toda a energia do sistema se mantém, sem perdas, portanto,  $0 \leq e \leq 1$ .

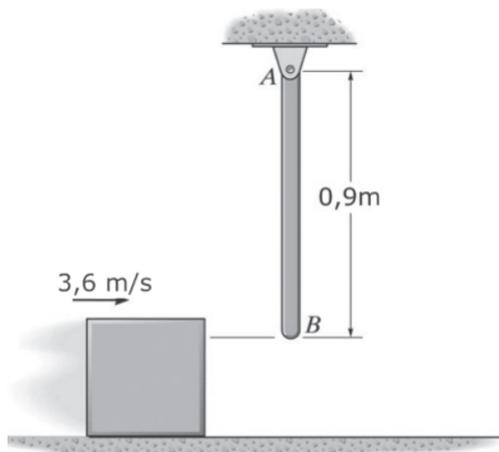
Os valores de  $e$  são altamente sensíveis ao material, geometria, e à velocidade do impacto, fatores estes que modificam a força impulsiva entre os corpos.



### Exemplificando

A barra  $AB$  de  $m_a = 2 \text{ kg}$  está pendurada na posição vertical, conforme figura 3.18. Um bloco de  $m_o = 1 \text{ kg}$ , deslizando sobre uma superfície horizontal lisa com uma velocidade de  $v_o = 3,6 \text{ m/s}$ , acerta a barra na sua extremidade  $B$ . Determine a velocidade do bloco imediatamente após a colisão. O coeficiente de restituição entre o bloco e a barra em  $B$  é  $e = 0,8$ .

Figura 3.18 | Barra e bloco



Fonte: Hibbeler (2012, p. 424).

Podemos relacionar as velocidades antes e depois da colisão usando o princípio de conservação de momento angular:

$H_{inicial} = H_{final}$ , analisando cada instante separadamente, no momento inicial apenas o bloco possui velocidade e, por isso, apenas ele terá quantidade de movimento angular em respeito ao ponto  $A$ , logo:

$$H_{inicial} = m_o(v_o)_{inicial}r_{AB} = 1 \cdot 3,6 \cdot 0,9 = 3,24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

No instante seguinte, teremos a contribuição do momento devido a velocidade final do bloco e a velocidade angular da barra, que gira em torno do ponto  $A$ , logo:

$H_{final} = m_o(v_o)_{final} r_{AB} + I\omega$ , o momento de inércia pode ser calculado sabendo-se o momento de inércia de uma barra girando em torno de seu

centro  $I_{CM} = \frac{mL^2}{12}$ , e o teorema dos eixos paralelos  $I = I_{CM} + md^2$ , em

que  $d$  é a distância do centro da barra ao ponto A, portanto:

$$I = \frac{m_a r_{AB}^2}{12} + m_a \left( \frac{r_{AB}}{2} \right)^2 = \frac{2 \cdot 0,9^2}{12} + 2 \left( \frac{0,9}{2} \right)^2 = 0,54 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Além disso, visto que  $v_a = r_{AB}\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_a}{r_{AB}}$

$$H_{final} = m_o(v_o)_{final} r_{AB} + I\omega = 1 \cdot (v_o)_{final} \cdot 0,9 + 0,54 \frac{v_a}{0,9}$$

$$H_{final} = 0,9(v_o)_{final} + 0,6v_a.$$

Sendo assim, temos a relação:

$$H_{inicial} = H_{final} \Rightarrow 3,24 = 0,9(v_o)_{final} + 0,6v_a.$$

Pelo coeficiente de restituição, podemos escrever que:

$$e = \frac{(v_o - v_a)_{final}}{(v_a - v_o)_{inicial}} \rightarrow 0,8 = \frac{(v_o)_{final} - v_a}{(0 - 3,6)_{inicial}}$$

$$2,88 = (v_o)_{final} - v_a.$$

logo, podemos escrever o sistema de equações:

$$\begin{cases} 3,24 = 0,9(v_o)_{final} + 0,6v_a \\ 2,88 = (v_o)_{final} - v_a \end{cases}$$

Resolvendo, temos:

$$\begin{cases} (v_o)_{final} = 3,312 \text{ m/s} \\ v_a = 0,432 \text{ m/s} \end{cases}$$



Pesquise mais

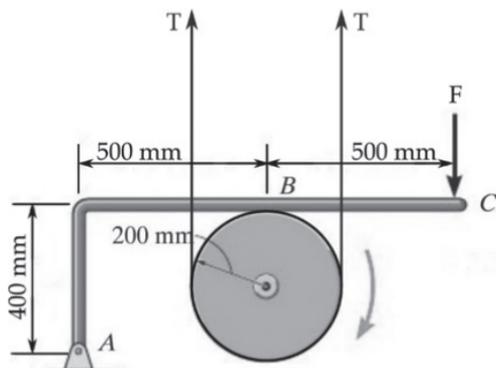
Portanto, podemos dizer que finalizamos nossos estudos sobre a dinâmica de corpos rígidos no plano. Reveja os conceitos abordados no capítulo de revisão da bibliografia: HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

## Sem medo de errar

Retornemos ao dia a dia de nosso projetista que trabalha com o transporte de cargas. Em sua última tarefa, você precisou dimensionar a potência do motor de um guindaste que será utilizado para içar cargas de até  $m = 36.000 \text{ kg}$ . No entanto, graças a seus cálculos, seu chefe percebeu que as especificações exigidas eram muito restritivas e, por isso, ele autorizou a alteração para uma velocidade de içamento de  $v = 0,1 \text{ m/s}$ . Com a velocidade e a carga estipuladas, sua nova tarefa será a de calcular o tempo de resposta do freio de emergência do guindaste, caso uma falha catastrófica ocorra no motor.

Na Figura 3.19 temos uma representação do sistema de freio de emergência do guindaste.

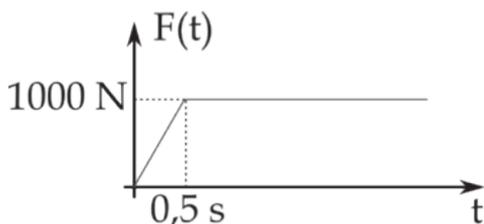
Figura 3.19 | Representação do sistema de freio



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, 411).

Nesse sistema, a força exercida pela carga separa o sistema, mas o freio pode ser acionado através da força  $F(t)$ , acionada caso a carga atinja uma velocidade superior a  $0,1 \text{ m/s}$ , como mostra a Figura 3.20.

Figura 3.20 | Resposta da força F



Fonte: elaborada pelo autor.

Isso gera um atrito no cilindro por onde passa o cabo que freia a carga, o coeficiente de atrito entre o freio e o cilindro é de  $\mu = 1$ , e é possível considerar que não existe escorregamento entre o tambor e o cabo. Determine, para o pior caso, o tempo necessário para a carga içada parar, caso o motor perca toda a tração deixando a carga completamente livre.

Podemos analisar o sistema pelo princípio de impulso e quantidade de movimento angular do cilindro, por onde passam os cabos e o freio atua.

$H_{inicial} + \Delta Y = H_{final}$ , analisando cada componente independente.

$H_{inicial}$  será apenas o momento angular induzido pela tração devido a carga que, segundo o enunciado, exatamente antes da frenagem, tem um momento linear  $L_{inicial} = mv = 36.000 \cdot 0,1 = 3.600 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , logo, o momento angular no cilindro devido a carga será  $H_{inicial} = L_{inicial}r = 3600 \cdot 0,2 = 720 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .

$\Delta Y$  será a resposta do torque devido a força de atrito, contrária ao movimento, entre o cilindro e o freio,  $\Delta Y = \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} M dt = \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} -F_{at} r dt$ , já a força de atrito é proporcional à força normal  $F_{at} = \mu N \Rightarrow \Delta Y = - \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} \mu N r dt$ .

Para determinar  $N$ , temos a relação estática dos torques sobre o braço do freio:  $\sum \tau = 0 \Rightarrow Fd_1 - Nd_2 = 0 \Rightarrow N = \frac{Fd_1}{d_2}$ , onde  $d_1$  e  $d_2$  são os braços do freio com respeito ao ponto A.

Sendo assim,  $\Delta Y = - \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} \mu \frac{Fd_1}{d_2} r dt = -1 \cdot 0,2 \cdot \frac{0,5}{1} \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} F dt = -0,1 \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} F(t) dt$ , pelo gráfico, podemos analisar o comportamento de  $F$  durante dois períodos, para  $t=0$  a  $t=0,5$  a força se comporta linearmente até estabilizar para tempos  $t > 0,5$ , :  $\Delta Y = -0,1 \left( \int_0^{0,5} F(t) dt + \int_{0,5}^t F(t) dt \right)$ .

$H_{final} = 0$ , pois queremos determinar o momento em que o sistema para completamente. Portanto:  $H_{inicial} + \Delta Y = H_{final}$ .

$720 - 0,1 \left( \int_0^{0,5} F(t) dt + \int_{0,5}^t F(t) dt \right) = 0$ , a integral será a área sobre a curva, logo, para a primeira parte da frenagem  $\int_0^{0,5} F(t) dt$  será a área do triângulo no gráfico:  $\int_0^{0,5} F(t) dt = \frac{0,5 \cdot 1000}{2} = 250$ . Já para a segunda parte da frenagem, a integral  $\int_{0,5}^t F(t) dt$  será a área do retângulo:  $\int_{0,5}^t F(t) dt = 1000 \cdot (t - 0,5)$ , logo:

$$0,1(250 + 1000 \cdot (t - 0,5)) = 720 \Rightarrow t = 7,45 \text{ s}.$$

O tempo de resposta, portanto, é 7,45 s. Pode parecer muito, mas lembre-se que a carga envolve uma massa muito grande e, por isso, um momento linear muito grande. Dentro dos parâmetros de segurança de sua empresa, o resultado é considerado satisfatório. Finalmente o projeto está concluído! Não se esqueça que agora é necessário colocar essas informações em um relatório, para apresentar ao gestor.

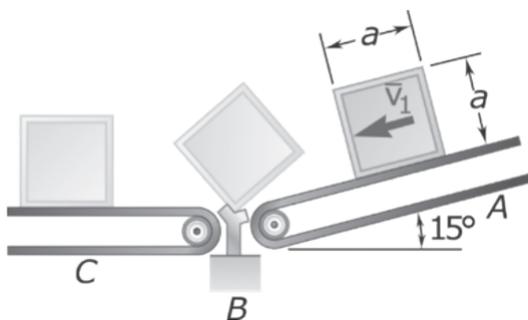
## Avançando na prática

### Colisão excêntrica

#### Descrição da situação-problema

Uma caixa quadrada de lado  $a = 1 \text{ m}$  e massa  $m = 2 \text{ kg}$  move-se para baixo sobre uma esteira transportadora A com uma velocidade constante  $v_1 = 1 \text{ m/s}$ , conforme Figura 3.21. No final da esteira transportadora, o canto do pacote bate em um suporte rígido em B de forma a promover um movimento de rotação da caixa, fazendo com que ela tombe em C. Admitindo que o impacto em B seja perfeitamente plástico, determine a velocidade angular da caixa no exato momento em que ela atinge B.

Figura 3.21 | Esteira de transporte



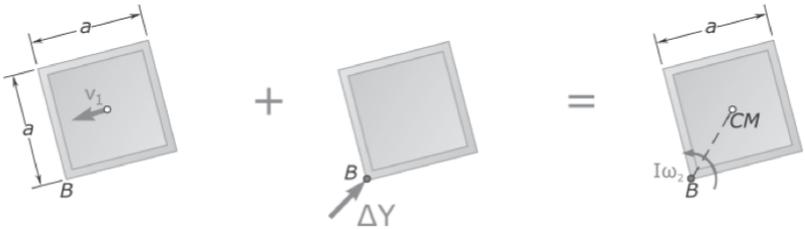
Fonte: Beer (2009, p. 1128).

#### Resolução da situação-problema

Podemos resolver esse problema utilizando o princípio de impulso e quantidade de movimento. Mais especificamente,

podemos analisar o sistema todo executando apenas um movimento de rotação em torno de um eixo passando por B. Graficamente representamos o sistema por meio da Figura 3.22.

Figura 3.22 | Representação gráfica do princípio de impulso e quantidade de movimento



Fonte: adaptada de Beer (2009, p. 1.128).

Matematicamente:  $H_{inicial} + \Delta Y = H_{final}$ , analisando cada componente separadamente.

O momento angular inicial pode ser calculado por  $H_{inicial} = L_{inicial} \cdot r$ , onde  $L_{inicial} = mv_1$  e  $r = \frac{a}{2}$ , logo  $H_{inicial} = \frac{amv_1}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .

O impulso angular será  $\Delta Y = \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} M dt = \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} F \cdot 0 dt = 0$ , pois escolhemos o ponto B como eixo de giro e isso faz com que o torque neste ponto seja nulo.

O momento angular final pode ser calculado com  $H_{final} = I\omega_2$ , em que o momento de inércia no ponto B é  $I = I_{CM} + md^2$ . Para um cubo de lado  $a$ ,  $I_{CM} = \frac{ma^2}{6}$ . A distância do ponto B e do CM é a metade da diagonal de um quadrado de lado  $a$ ,  $d = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2}$ , logo,  $H_{final} = \left(\frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{2}\right)\omega_2 = \left(\frac{2 \cdot 1^2}{6} + \frac{2 \cdot 1^2}{2}\right)\omega_2 = \frac{4}{3}\omega_2$ .

Portanto, a velocidade angular no instante em que a caixa começa a girar será:

$$H_{inicial} + \Delta Y = H_{final} \Rightarrow 1 + 0 = \frac{4}{3}\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 0,75 \text{ rad/s}.$$

Com essa informação é possível calcular o tempo ideal ou a distância ideal entre as caixas, otimizando o processo.

## Faça valer a pena

**1.** Leia as três afirmativas a seguir:

I. A presença de qualquer força que age sobre um corpo rígido modifica a quantidade de movimento deste corpo.

II. A presença de qualquer força que age sobre um corpo rígido modifica o estado energético deste mesmo corpo.

III. O princípio de conservação de energia se aplica a sistemas onde o princípio de impulso e quantidade de movimento não se aplica, e vice-versa.

Leia com cuidado as três afirmativas anteriores, e assinale a alternativa que indica todas as afirmativas corretas.

- a) Apenas a afirmativa I está correta.
- b) Apenas a afirmativa II está correta.
- c) Apenas a afirmativa III está correta.
- d) Apenas I e II estão corretas.
- e) Apenas I, II e III estão corretas.

**2.** Uma bola de massa  $m = 2 \text{ kg}$ , movendo-se com velocidade inicial de  $u_{\text{bola}} = 5\hat{i} \text{ m/s}$ , bate na extremidade inferior de uma barra de comprimento  $h = 1,2 \text{ m}$  suspensa por uma articulação. Esta barra, que estava inicialmente em repouso, possui massa  $M = 8 \text{ kg}$  e momento de inércia em respeito a

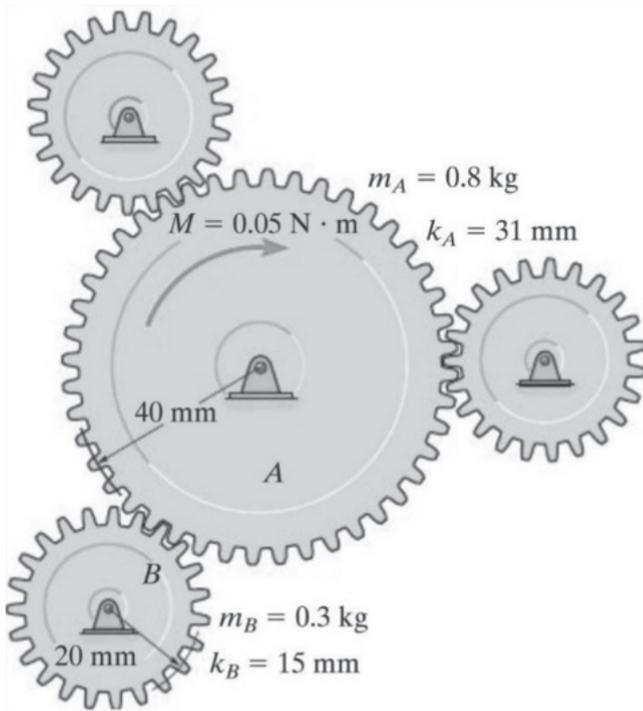
seu centro de massa  $I_{CM} = \frac{1}{12} Mh^2$ .

Sabendo que o coeficiente de restituição entre a barra e a esfera é de  $e = 80\%$ , determine a velocidade da esfera imediatamente após o impacto. Selecione dentre as alternativas abaixo a que melhor representa sua resposta.

- a)  $-0,143 \text{ m/s}$ .
- b)  $0,100 \text{ m/s}$ .
- c)  $0,423 \text{ m/s}$ .
- d)  $-2,401 \text{ m/s}$ .
- e)  $0,000 \text{ m/s}$ .

3. Um motor, quando acionado, pode transmitir um torque  $M = 0,05 \text{ N} \cdot \text{m}$  para o centro da engrenagem A, mostrada na Figura 3.23, que está conectada a outras três engrenagens menores e idênticas. Considere as dimensões, massas e raio de giro de cada componente, como os representados na figura. Durante um teste, o motor foi acionado por  $t = 5 \text{ s}$ , em seguida, sem a ação do motor as engrenagens podem girar livremente desprezando-se o atrito.

Figura 3.23 | Sistema de engrenagens



Fonte: adaptada de Beer (2009, p. 1.128).

Determine a velocidade angular de cada uma das engrenagens menores durante esse teste em um tempo  $t = 10 \text{ s}$ , depois delas terem saído do repouso e, selecione dentre as alternativas a seguir, a que melhor representa sua resposta.

- a)  $8,45 \text{ rad/s}$ .
- b)  $5,00 \text{ rad/s}$ .

- c) **3,91 rad/s** .
- d) **2,11 rad/s** .
- e) **4,26 rad/s** .

# Referências

BEER, F. **Mecânica vetorial para engenheiros**: dinâmica. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2009.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

MERIAN, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica**: estática. 4. ed. São Paulo: LTC, 1997.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical dynamics of particles and systems**. 5. ed. Boston: Brooks/Cole, 2012.



# Movimentos de corpos em três dimensões

## Convite ao estudo

Estamos chegando à última unidade de nossos estudos de dinâmica dos corpos rígidos. Nas unidades anteriores, já abordamos os principais temas, descrevendo aspectos cinemáticos, dinâmicos, além dos métodos baseados na energia, trabalho, quantidade de movimento e impulso. Você já é capaz de identificar e resolver problemas mecânicos em diversos contextos.

No entanto, estudamos mecanismos que executavam seu movimento em um plano, ou seja, estudamos, até agora, apenas a dinâmica de corpos rígidos no plano. Agora que os conceitos fundamentais estão fixados, podemos avançar e estudar exemplos nos quais o movimento se dá no espaço, nas três dimensões espaciais. Assim, você poderá conhecer, compreender e aplicar conceitos relacionados à cinética e dinâmica do movimento de corpos rígidos no plano e no espaço.

Na Seção 4.1, iremos retomar a descrição do movimento de corpos rígidos, mas, agora, em três dimensões. Veremos como uma translação praticamente não difere do caso bidimensional, ao passo que uma rotação exige um pouco mais de cuidado e atenção. Na Seção 4.2 iniciaremos nossos estudos de dinâmica em três dimensões. Iremos aplicar grandezas como força e torque, momento angular e linear, além de impulso. Falaremos também de conservação de energia. Finalmente, na Seção 4.3, aplicaremos as ferramentas de dinâmica na solução de problemas interessantes, como o caso de um giroscópio, que é um sistema modelo, mas suficientemente geral para permitir uma compreensão completa da dinâmica das rotações de corpos rígidos em três dimensões.

Para motivar nosso aprendizado, iremos acompanhar os desafios na carreira de um projetista que trabalha na área de automação, desenvolvendo elementos robóticos que realizam diversas tarefas. Neste momento, ele analisa uma planta em que uma ferramenta de corte produz uma peça metálica, que é capturada e transportada por um braço robótico, que, por sua vez, realiza movimentos no espaço e se localiza por meio de um sensor. Ele precisa compreender os movimentos realizados e o funcionamento dos componentes, como as engrenagens que estão presentes em sua junta. Não é difícil imaginar que, para alcançar tamanha versatilidade, os elementos deste braço devam ser também um pouco mais complexos. Entretanto, isso não é problema para o personagem de nossa história, que gosta do que faz e está sempre aberto para novos desafios!

# Seção 4.1

## Noções vetoriais no espaço tridimensional

### Diálogo aberto

Na unidade anterior, finalizamos nossos estudos sobre a dinâmica dos corpos rígidos no plano. Muitos componentes úteis na indústria realizam movimentos no espaço bidimensional, e já somos capazes de descrever seu movimento. O próximo passo, em nossos estudos, é expandir nosso conhecimento para poder compreender mecanismos com movimento no espaço tridimensional.

Definiremos como o movimento em três dimensões difere do movimento em duas dimensões. Você já deve desconfiar que para uma translação não existe uma mudança muito grande, afinal, uma reta no espaço e uma reta no plano não deixam de ser uma reta. E mesmo em translações mais complexas, como a curvilínea, a posição ainda pode ser descrita por funções dependentes do tempo e com os versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ . No caso de uma rotação, no plano pode estar contida em um círculo de raio  $\vec{r}$ , mas no espaço ficaria contida em uma esfera de raio  $\vec{r}$ , ou seja, quando falamos de rotação, ela terá no espaço muito mais possibilidades que no plano e, por isso, precisa ser descrita com muito mais cuidado.

Um bom exemplo desse problema é como descrever e programar um movimento no espaço por um braço mecânico. Diferentemente das engrenagens e alavancas, essas máquinas modernas são capazes de interagir ativamente em um ambiente tridimensional. Nesta unidade, veremos os desafios de um projetista que trabalha com esse tipo de equipamento e, por isso, precisa estar familiarizado com a cinemática tridimensional. Nesta análise, que será utilizada para a elaboração de um relatório de calibração, ele poderá utilizar os valores medidos por um acelerômetro posicionado na extremidade do braço. Esse equipamento mede a aceleração naquela posição e, por isso, pode ser usado para medir a intensidade da rotação. Para fazer isso, é necessário conhecer as

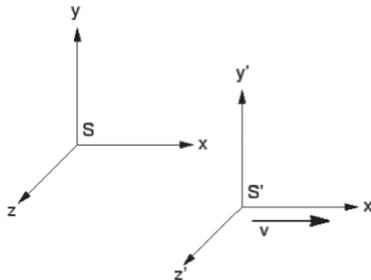
características do movimento de translação e de rotação no espaço tridimensional. Que tal começarmos?

## Não pode faltar

Estudaremos, agora, mecanismos que se movimentam em um espaço tridimensional. Devemos começar de forma semelhante à feita no início do curso, em que, primeiramente, definimos os fundamentos dos tipos de movimento e sua consequência quando este se aplica a um referencial.

O primeiro tipo de movimento que podemos analisar é a **translação**. Ela pode ser descrita da maneira que já conhecemos, tomando cuidado apenas de analisar não mais duas componentes do movimento  $(x, y)$ , mas sim três  $(x, y, z)$ . Como exemplo, retomamos o caso do sistema referencial inercial em movimento translacional relativo, discutido na Seção 1.1. Neste caso, podemos lembrar que as equações de movimento obedecem à transformação de Galileo, e para dois referenciais podemos escrever a fórmula  $(x', y', z', t') = (x - v_x t, y - v_y t, z - v_z t, t)$ , em que  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$  é a velocidade do referencial  $(x', y', z')$  em relação ao referencial  $(x, y, z)$ , como pode ser observado na Figura 4.1. Lembre-se sempre do exemplo do carro em movimento: da janela do carro, você observa as árvores e postes como se eles se movessem no sentido oposto ao do carro (daí o sinal negativo na fórmula mostrada acima).

Figura 4.1 | Referenciais



Fonte: elaborada pelo autor.

Logo, se o centro de massa de um corpo rígido pode se mover livremente, segundo equações dependentes do tempo  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ , sua posição é descrita pela equação vetorial  $\vec{S}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{j}$ , teremos, no referencial em movimento,  $\vec{S}'(t) = (x(t) - v_x t)\hat{i} + (y(t) - v_y t)\hat{j} + (z(t) - v_z t)\hat{j}$ .

Em um espaço tridimensional, o movimento de **rotação** pode assumir muito mais liberdade que no plano. A rotação no plano está restrita a eixos perpendiculares a ele, enquanto que no espaço há liberdade para girar ao redor de um ponto, limitado à extremidade de esfera no espaço.



### Refleta

Para visualizar o quão complexo uma rotação no espaço pode ser, tente comparar uma rotação de um objeto, como um livro ou uma caneta, feita sobre uma mesa e a rotação que você pode fazer com cada um deles livres no ar. Você consegue visualizar a diferença entre a rotação no plano com relação a um eixo e a rotação no espaço com relação a um ponto?

Para compreender uma rotação em torno de um ponto, podemos decompor o movimento em questão em uma combinação de rotações em torno de diferentes eixos. Acontece que qualquer rotação em torno de um ponto, que um objeto pode assumir, será descrita por **três rotações** em torno de eixos ortogonais. Neste ponto, é interessante distinguir entre rotações intrínsecas e extrínsecas.

Uma rotação **extrínseca** toma como referência um sistema fixo, que não muda quando o objeto é rotacionado, ou seja, é aquele referencial que fica do lado de fora, observando o objeto girar.

Já uma rotação **intrínseca** é aquela feita em torno dos eixos do próprio objeto. Seria o equivalente ao referencial do próprio objeto. Lembre-se de quando você era criança, brincando de girar até perder o equilíbrio. No caso, você gira, mas observa o mundo a sua volta girando ao seu redor.

Se imaginarmos um observador externo analisando a rotação de um livro, teremos, por exemplo, que definir os eixos deste livro (como direção das linhas, da coluna lateral e direção perpendicular às folhas). Note também que apenas dois desses eixos irão mudar de orientação, à medida que a rotação é feita em torno do terceiro.

Não existe, necessariamente, uma descrição melhor ou pior, mas sim aquela que melhor se adequa à necessidade do problema. Para

nossos estudos de corpos rígidos, vimos que algumas grandezas como momento de inércia e, por conseguinte, torque e momento angular, dependem da forma e densidade de massa do objeto, por isso, é interessante utilizar um referencial que acompanhe o corpo, ou seja, descrever uma rotação em torno de um ponto por um conjunto de três rotações intrínsecas.

Neste contexto, devemos fazer uma segunda escolha, que envolve em como compor tais rotações e escolher os eixos em torno dos quais iremos aplicar as rotações. Novamente, não existe escolha melhor ou pior, mas sim a que melhor se enquadra em nossa aplicação. As ferramentas matemáticas que iremos utilizar já existem e são bem fundamentadas, logo, o que precisamos compreender é a maneira como podemos construir um sistema que descreve a rotação, para assim sermos capazes de estender a outros sistemas.

Matematicamente, a rotação de um vetor  $\vec{r}(x, y, z)$ , que descreve a posição de um elemento do corpo rígido, pode ser feita pelo produto matricial:

$$\vec{r}' = \Xi \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} & \Xi_{23} \\ \Xi_{31} & \Xi_{32} & \Xi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

em que  $\vec{r}'$  é a nova posição do vetor após a rotação, e a matriz  $3 \times 3$  contém elementos  $\Xi_{ij}$  que, após a operação de produto matricial, transformam os três componentes do vetor  $\vec{r}$  nos três componentes do vetor  $\vec{r}'$ . Se tiver dúvidas sobre as operações mostradas, lembre-se de estudar seu material de Geometria Analítica e Álgebra Vetorial.

Devemos lembrar que, como estamos tratando de um corpo rígido,  $\vec{r}(x, y, z)$  pode apontar para qualquer ponto no corpo rígido, e como estamos tratando de um corpo rígido, girar um único ponto faz todos os outros seguirem o mesmo movimento.

Como mencionamos, a operação de rotação  $\Xi$  pode ser quebrada em uma sequência de 3 rotações ao longo de eixos fixos,  $\Xi = \Xi_{\psi} \Xi_{\theta} \Xi_{\phi}$ , e é justamente a escolha eficiente dos eixos e do sentido de cada uma das rotações  $\Xi_{\psi}$ ,  $\Xi_{\theta}$  e  $\Xi_{\phi}$  o que devemos compreender.

Como exemplo, iremos estudar uma rotação que segue a formalização feita por **Leonhard Euler** (1707-1783), que define o que é conhecido como **ângulos eulerianos**.

Inicialmente, devemos definir a fórmula como uma rotação em torno de um eixo específico no espaço tridimensional. A fórmula pode ser escrita utilizando a notação matricial de multiplicação de vetores, uma rotação  $R_x$  de um ângulo  $\alpha$  em torno do eixo  $x$ :

$$R_{x_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

uma rotação  $R_y$  de um ângulo  $\alpha$  em torno do eixo  $y$  será:

$$R_{y_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \text{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

e uma rotação  $R_z$  de um ângulo  $\alpha$  em torno do eixo  $z$  será:

$$R_{z_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



### Exemplificando

Vamos ver isso tudo na prática? Calcule o efeito de uma rotação em torno do eixo  $x$  sobre um vetor que inicialmente estava na direção  $r = 1\hat{k}$ . Considere  $\alpha = 90^\circ$ .

Para este cálculo podemos usar a relação

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} & \Xi_{23} \\ \Xi_{31} & \Xi_{32} & \Xi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ para } \vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

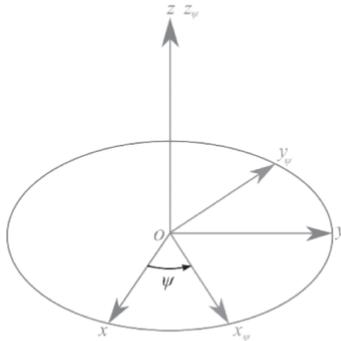
Como a rotação será feita em torno do eixo  $\mathbf{x}$  a um ângulo de  $\alpha = 90^\circ$ :

$$R_{x_{90}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & \text{sen} 90 \\ 0 & -\text{sen} 90 & \cos 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ 0) \Rightarrow r = 1\hat{j}$ , ou seja, após a rotação em  $90^\circ$ , temos um vetor que agora aponta na direção do eixo  $\mathbf{y}$ .

Sendo assim, podemos começar a descrever uma rotação utilizando os conhecidos ângulos de Euler. A primeira rotação equivale à operação feita por  $\Xi_\psi$ , corresponde a uma rotação ao longo do eixo  $\mathbf{z}$ , no qual giramos por um ângulo  $\psi$ . Na Figura 4.2, podemos notar que isso modifica a posição dos eixos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  para uma nova posição definida por  $\mathbf{x}_\psi$  e  $\mathbf{y}_\psi$ , mas mantém o eixo  $\mathbf{z}$  no mesmo lugar  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_\psi$ .

Figura 4.2 | Primeiro ângulo de Euler



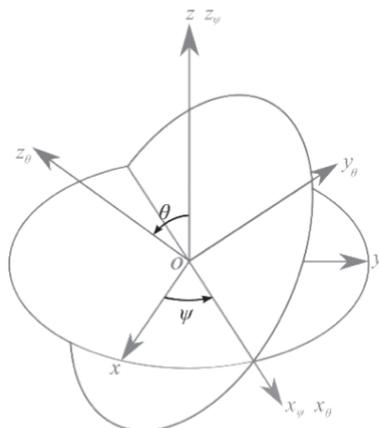
Fonte: adaptada de <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eulerangles-alternative.svg>>. Acesso em: 8 jan. 2017.

Matematicamente, a rotação será dada por:

$$\vec{r}_\psi = \Xi_\psi \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_\psi \\ y_\psi \\ z_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A segunda rotação dada por  $\Xi_\theta$  é feita ao longo do eixo  $\mathbf{x}_\psi$  por um ângulo  $\theta$ . Note que o eixo de rotação ao longo de  $\mathbf{y}_\psi$  precisa primeiro ser definido na primeira rotação ao longo de  $\mathbf{z}$ ; este procedimento é o que chamamos de rotação intrínseca, em que a direção dos eixos de rotação é construída a partir de rotações anteriores. Sendo assim, teremos, na Figura 4.3, os novos eixos  $\mathbf{x}_\theta$ ,  $\mathbf{y}_\theta$  e  $\mathbf{z}_\theta$ , em que  $\mathbf{x}_\theta = \mathbf{x}_\psi$ .

Figura 4.3 | Segundo ângulo de Euler



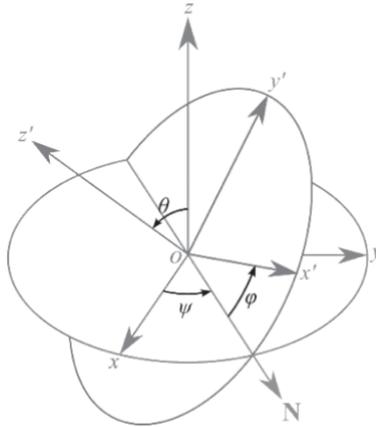
Fonte: adaptada de <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eulerangles-alternative.svg>>. Acesso em: 8 jan. 2017.

Matematicamente, a rotação será dada por:

$$\vec{r}_\theta = \Xi_\theta \vec{r}_\psi \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\theta \\ \mathbf{y}_\theta \\ \mathbf{z}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\psi \\ \mathbf{y}_\psi \\ \mathbf{z}_\psi \end{pmatrix}.$$

Finalmente, a terceira e última rotação dada por  $\Xi_\varphi$  será ao longo do eixo  $\mathbf{z}_\theta$ , por um ângulo  $\varphi$ . Dessa forma, como podemos ver na Figura 4.4, teremos os novos eixos  $\mathbf{x}_\varphi$ ,  $\mathbf{y}_\varphi$  e  $\mathbf{z}_\varphi$ , em que  $\mathbf{z}_\varphi = \mathbf{z}_\theta$ . Esta é nossa última rotação e, por isso, teremos  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_\varphi$ ,  $\mathbf{y}' = \mathbf{y}_\varphi$  e  $\mathbf{z}' = \mathbf{z}_\varphi$ .

Figura 4.4 | Terceiro ângulo de Euler



Fonte: adaptada de <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eulerangles-alternative.svg>>. Acesso em: 8 jan. 2017.

Matematicamente, a rotação será dada por:

$$\vec{r}' = \vec{r}_\varphi = \Xi_\varphi \vec{r}_\theta \Rightarrow \begin{pmatrix} x_\varphi \\ y_\varphi \\ z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi & 0 \\ -\text{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \\ z_\theta \end{pmatrix}.$$

Combinando as rotações em uma única operação de rotação, teremos:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} & \Xi_{23} \\ \Xi_{31} & \Xi_{32} & \Xi_{33} \end{pmatrix} \quad \text{considerando:} \quad \begin{cases} \Xi_{11} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \text{sen} \psi \text{sen} \varphi \\ \Xi_{21} = -\text{sen} \varphi \cos \psi - \cos \theta \text{sen} \psi \text{sen} \varphi \\ \Xi_{31} = -\text{sen} \theta \text{sen} \psi \\ \Xi_{12} = \cos \varphi \text{sen} \psi + \cos \theta \text{sen} \psi \text{sen} \varphi \\ \Xi_{22} = -\text{sen} \varphi \text{sen} \psi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi \\ \Xi_{32} = -\text{sen} \theta \cos \psi \\ \Xi_{13} = \text{sen} \varphi \text{sen} \theta \\ \Xi_{23} = \cos \varphi \sin \theta \\ \Xi_{33} = \cos \theta \end{cases}$$

em que fica aparente o grande trabalho algébrico necessário para descrever um movimento razoavelmente simples de ser visualizado. Ao mesmo tempo, vemos que se trata de um formalismo poderoso, que nos permite descrever qualquer rotação.



As matrizes de rotação para um ângulo  $\alpha$  em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , são:

$$R_{x_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$R_{y_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \text{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$R_{z_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Você pode visualizar a sequência de rotações descritas realizadas sobre um corpo rígido assistindo aos vídeos disponíveis em: <<https://www.youtube.com/watch?v=UpSMNYTVqQI>>. e <<https://www.youtube.com/watch?v=N7AVc5yYX-k>>. Acesso em: 4 mar. 2017.

O formalismo apresentado é uma rotação intrínseca do tipo  $\mathbf{z} - \mathbf{x} - \mathbf{z}$ , pois executamos a rotação ao longo dos eixos  $\mathbf{z} - \mathbf{x}_\psi - \mathbf{z}_\theta$ . Nessas convenções, três ângulos de giro são denominados ângulos de Euler. Evidentemente esta não é a única forma de executar uma rotação; seguindo o processo apresentado, poderíamos realizar a rotação ao redor de quaisquer eixos, indicando os eixos ao redor dos quais foi feita a rotação na ordem certa, separados pelos traços.

Outro formalismo para as rotações intrínsecas também é conhecido como ângulos de Tait-Bryan. Estas rotações seguem a mesma lógica de construção que a usada nos ângulos de Euler, à exceção de que o último eixo de rotação não é igual ao primeiro, como uma rotação do tipo  $\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}$ .

O formalismo apresentado é uma rotação intrínseca do tipo  $\mathbf{z} - \mathbf{x} - \mathbf{z}$ , pois executamos a rotação ao longo dos eixos  $\mathbf{z} - \mathbf{x}_\psi - \mathbf{z}_\theta$ . Nessas convenções, três ângulos de giro são denominados ângulos de Euler. Evidentemente esta não é a única forma de executar uma rotação; seguindo o processo apresentado, poderíamos realizar a rotação ao redor de quaisquer eixos, indicando os eixos ao redor dos quais foi feita a rotação na ordem certa, separados pelos traços.

Outro formalismo para as rotações intrínsecas também é conhecido como ângulos de Tait-Bryan. Estas rotações seguem a mesma lógica de construção que a usada nos ângulos de Euler, à exceção de que o último eixo de rotação não é igual ao primeiro, como uma rotação do tipo  $\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}$ .



### Pesquise mais

Você pode visualizar outras sequências de rotações que seguem a convenção  $\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}$  dos ângulos de Tait-Bryan sobre um corpo rígido, através do vídeo disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=W4mkUPxxQs>>. Acesso em: 4 mar. 2017.



### Exemplificando

Calcule a matriz de rotação seguindo a convenção  $\mathbf{z} - \mathbf{y} - \mathbf{x}$ , considerando que a primeira rotação tem um ângulo de  $90^\circ$ , a segunda de  $45^\circ$  e a última de  $0^\circ$ .

Como nossa convenção é diferente da discutida na teoria, devemos calcular  $\Xi$  desde o princípio. Nossa convenção é  $\mathbf{z} - \mathbf{y} - \mathbf{x}$ , logo,

$\Xi = R_{x_0} R_{y_{45}} R_{z_{90}}$ , analisando cada matriz:

$$R_{z_{90}} = \begin{pmatrix} \cos 90 & \text{sen} 90 & 0 \\ -\text{sen} 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R_{y_{45}} = \begin{pmatrix} \cos 45 & 0 & \sin 45 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 45 & 0 & \cos 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

$$R_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & \sin 0 \\ 0 & -\sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, a matriz de rotação será:

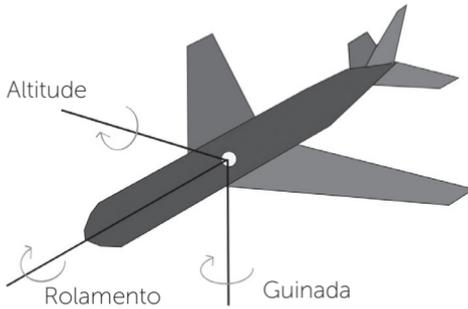
$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Como mencionado, a convenção escolhida depende do mecanismo ou problema a ser resolvido. Por exemplo, um avião utiliza uma convenção do tipo  $\mathbf{z-y-x}$ , portanto, ângulos de Tait-Bryan, cujos eixos possuem nomes distintos, como *Guinada* para  $z$ , *Altitude* para  $y$  e *Rolamento* para  $x$ , como ilustrado na Figura 4.5.

Figura 4.5 | Eixos de rotação de um avião



Fonte: adaptada de <[https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport\\_chained\\_rotations#/media/File:Yaw\\_Axis\\_Corrected.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport_chained_rotations#/media/File:Yaw_Axis_Corrected.svg)>. Acesso em: 2 fev. 2017.

Podemos continuar com nosso formalismo baseado nos ângulos de Euler, que convencionamos em  $\mathbf{z}-\mathbf{x}-\mathbf{z}$ , para determinar qual a velocidade angular da rotação em torno de um ponto descrita por  $\Xi$ . Para tanto, analisamos a velocidade angular das rotações individuais; podemos retomar a definição da magnitude da velocidade angular descrita na Unidade 1 e escrever  $\omega_\psi = \frac{d\psi}{dt}(t)$ ,

$\omega_\theta = \frac{d\theta}{dt}(t)$  e  $\omega_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}(t)$ , já o sentido do vetor  $\omega$  será paralelo ao eixo no qual se executa a rotação, ou seja,  $\omega_\psi \parallel \mathbf{z}$ ,  $\omega_\theta \parallel \mathbf{x}_\psi$ .

Isso permite escrever a velocidade angular final, ou seja, no referencial de  $\vec{\mathbf{r}}'$ , como sendo:

$$\vec{\omega} = (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) \quad \text{onde:} \quad \begin{cases} \omega_{x'} = \omega_\psi \sin\theta \sin\varphi + \omega_\theta \cos\varphi \\ \omega_{y'} = \omega_\psi \sin\theta \cos\varphi - \omega_\theta \sin\varphi \\ \omega_{z'} = \omega_\psi \cos\theta + \omega_\varphi \end{cases}$$

O cálculo de  $\vec{\omega}$  é importante, pois com ele temos todas as ferramentas necessárias para calcular as mesmas relações de posição, velocidade e aceleração que realizamos na Unidade 1.

Ou seja, se  $\vec{\mathbf{R}}$  é o vetor posição que descreve a posição do referencial  $\mathbf{S}'$  em respeito ao referencial  $\mathbf{S}$  estático, a posição de um objeto  $\vec{\mathbf{r}}$  no referencial  $\mathbf{S}$  está relacionada com a posição do objeto no referencial  $\mathbf{S}'$  pela relação:

$$\vec{r}_S = \vec{r}_{S'} + \vec{R}.$$

Sendo assim, se o referencial  $S'$  se move a uma velocidade constante  $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ , a velocidade  $\vec{v}$  do objeto será  $\frac{d\vec{r}_S}{dt} = \frac{d\vec{r}_{S'}}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{V}$ . Essa relação é a mesma que encontramos para o movimento no plano e é fruto da transformada de Galileu. No entanto, se o referencial  $S'$  está girando, o resultado encontrado foi que  $\frac{d\vec{r}_S}{dt} = \frac{d\vec{r}_{S'}}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{R}$ , porém, com o  $\vec{\omega}$  definido acima para rotação em torno de um ponto, a relação também é válida para uma rotação em torno de um ponto. Com isso, para o referencial executando um movimento geral (transladando e rotacionando):

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{R}.$$

Dando continuidade, devemos seguir para a análise da aceleração, que, como vimos, pode ser escrita como:

$$\vec{a}_S = \vec{a} + \vec{a}_{S'} + \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}),$$

novamente as grandezas são definidas como na Unidade 1:

$\vec{a}_{S'} = \frac{d\vec{v}_{S'}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{S'}}{dt^2}$  é a aceleração do corpo observada no referencial  $S'$ ;  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  é a aceleração do corpo no referencial  $S'$ ;  $\vec{a}_{S'} = \frac{d\vec{v}_{S'}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$  é a aceleração do referencial  $S'$ ;  $\vec{\alpha} \times \vec{R} = \vec{\alpha} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  é a aceleração tangencial; e  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$  é a aceleração centrípeta, estes últimos, escritos segundo a definição de  $\vec{\omega}$ , resultam na aceleração de um corpo girando em torno de um ponto.

## Sem medo de errar

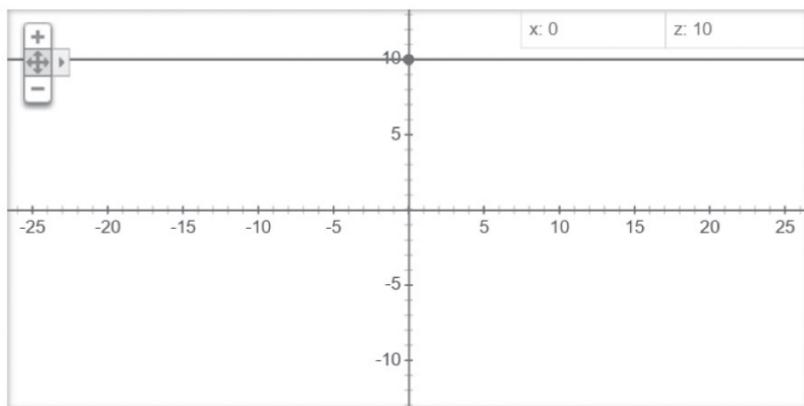
Como projetista, você se depara constantemente com braços mecânicos que eventualmente podem assumir inúmeras orientações em um espaço tridimensional. Mais recentemente, você analisa uma planta e recebeu a tarefa de calibrar um sensor colocado na extremidade de um desses elementos robóticos, de forma que ele registre um valor nulo durante todas as etapas do processo. Trata-

se do acelerômetro, que mede os três componentes da aceleração em que a ponta do braço se move.

Depois de vasculhar os manuais e outras documentações referentes ao braço mecânico, você descobriu que ele utiliza a convenção  $\mathbf{z}-\mathbf{x}-\mathbf{z}$  para rotações. Além disso, e para a sua surpresa, a rotina de calibração apenas lhe permite girar um motor com uma velocidade  $\omega = 3 \text{ rad/s}$ , enquanto os outros dois motores ficam com seu movimento de rotação travado. De qualquer forma, o manual lhe diz que você deve testar o acelerômetro, fazendo com que o braço gire perpendicularmente a cada um dos eixos, e ajustar a aceleração no eixo como nula. Não parece ser uma tarefa complicada, mas certamente não será tão fácil compreender o porquê de o procedimento ser este. Mas, como um bom projetista, você deve tentar compreender o motivo do procedimento, pois você compreende que para somente apertar uma série de botões não precisamos de um projetista.

Seu primeiro teste é descobrir em torno de qual eixo a velocidade angular  $\omega$  irá atuar. Por isso, seguindo o manual, você decide zerar todos os ângulos e acionar o teste. Você logo nota que o braço começa a rodar ao redor do eixo  $\mathbf{z}$ , e, por isso, deduzimos que  $\omega = \omega_y$ . Ao mesmo tempo, o acelerômetro mede as componentes da aceleração mostradas no gráfico da Figura 4.6:

Figura 4.6 | Dados do acelerômetro



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos notar que a medida da componente na direção  $\mathbf{z}$ , mostrada, se mantém constante. Se retomarmos o movimento de rotação no plano, sabemos que a aceleração centrípeta tem direção variável, mas nunca sairá do plano de rotação, logo, a componente perpendicular à rotação deve ser constante e, por isso, pode ser calibrada. Excelente, agora você entendeu o porquê da calibração. Você precisa posicionar o braço de forma a manter o eixo de rotação paralelo ao eixo que o acelerômetro deve medir. Sendo assim, precisamos calcular os valores de  $\varphi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  que permitiram isolar a rotação  $\omega_\psi$  na direção desejada: em seguida, podemos repetir a calibração.

Como a convenção do sistema é  $\mathbf{z}-\mathbf{x}-\mathbf{z}$ , podemos usar a relação de velocidade angular encontrada:

$$\vec{\omega} = (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) \leftarrow \begin{cases} \omega_{x'} = \omega_\psi \text{sen}\theta \text{sen}\varphi + \omega_\theta \text{cos}\varphi \\ \omega_{y'} = \omega_\psi \text{sen}\theta \text{cos}\varphi - \omega_\theta \text{sen}\varphi \\ \omega_{z'} = \omega_\psi \text{cos}\theta + \omega_\theta \end{cases}, \text{ já descobrimos}$$

que  $\omega_\psi = 3 \text{ rad/s}$  e  $\omega_\theta = \omega_\varphi = 0$ , pois seus motores ficam travados, logo,

$$\vec{\omega} = (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) \leftarrow \begin{cases} \omega_{x'} = \omega_\psi \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \\ \omega_{y'} = \omega_\psi \text{sen}\theta \text{cos}\varphi \\ \omega_{z'} = \omega_\psi \text{cos}\theta \end{cases}, \text{ para calibrar a direção } \mathbf{x}$$

queremos um conjunto de valores para  $\theta$  e  $\varphi$  que faça com que  $\vec{\omega}$  tenha apenas componentes na direção de  $\mathbf{x}$ , ou seja,  $\vec{\omega} = \omega_\psi \hat{i}$ , logo, podemos escolher  $\text{sen}\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90^\circ$  e  $\text{sen}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$ :

$$\vec{\omega} = (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) \leftarrow \begin{cases} \omega_{x'} = \omega_\psi \text{sen}90^\circ \text{sen}90^\circ \\ \omega_{y'} = \omega_\psi \text{sen}90^\circ \text{cos}90^\circ \\ \omega_{z'} = \omega_\psi \text{cos}90^\circ \end{cases}$$

$\vec{\omega} = (\omega_\psi, 0, 0) = \omega_\psi \hat{i}$ , o que permite, ao executar a rotação, calibrar a componente  $\mathbf{x}$  do acelerômetro.

Para calibrar a direção  $\mathbf{y}$ , queremos um conjunto de valores para  $\theta$  e  $\varphi$  que faça com que  $\vec{\omega}$  tenha apenas componentes na direção

de  $\mathbf{y}$ , ou seja,  $\vec{\omega} = \omega_\psi \hat{j}$ , logo, podemos escolher  $\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90^\circ$  e  $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$ :

$$\vec{\omega} = (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) \leftarrow \begin{cases} \omega_{x'} = \omega_\psi \text{sen}90^\circ \text{sen}0^\circ \\ \omega_{y'} = \omega_\psi \text{sen}90^\circ \text{cos}0^\circ \\ \omega_{z'} = \omega_\psi \text{cos}90^\circ \end{cases}$$

$\vec{\omega} = (0, \omega_\psi, 0) = \omega_\psi \hat{j}$ , o que permite, ao executar a rotação, calibrar a componente  $\mathbf{y}$  do acelerômetro. Pronto, o acelerômetro está calibrado, e, assim, você pode reportar para o programador do controle do robô que os valores registrados pelo acelerômetro são apenas devido a um movimento real do braço. Seu relatório de teste e calibração está pronto e seu conhecimento certamente cresceu, fazendo-o um profissional mais completo.

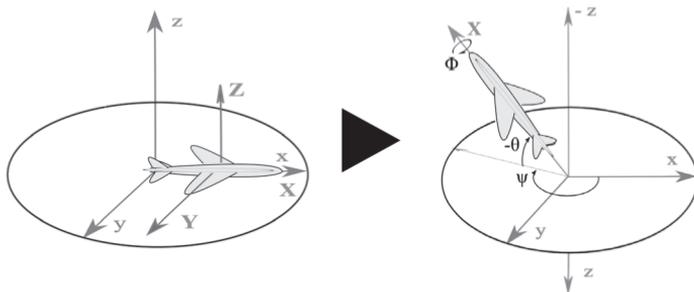
## Avançando na prática

### Manobra no espaço

#### Descrição da situação-problema

Um avião em pleno voo deve ser capaz de, praticamente, assumir qualquer orientação no espaço tridimensional. Para tanto, ele deve ser capaz de descrever seu movimento, principalmente uma rotação em torno de um ponto. Tipicamente, para descrever a rotação de um avião, utilizamos a convenção dos ângulos de Tait-Bryan, definida por ângulos conhecidos como *Guinada*, *Altitude* e *Rolamento*. Inicialmente, podemos assumir que no referencial do avião ele se encontra alinhado na direção  $\mathbf{X}$ , permitindo definir um vetor  $\vec{r} = 30\hat{i}$  m que liga seu centro até a cabine. Calcule a nova posição do avião, se ele executa uma manobra e altera sua orientação em relação a seu referencial, segundo a Figura 4.7.

Figura 4.7 | Manobra



Fonte: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport\\_chained\\_rotations](https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport_chained_rotations)>. Acesso em: 12 jan. 2017.

Considere  $\psi = \frac{\pi}{3}$  rad,  $\theta = \frac{\pi}{12}$  rad e  $\varphi = \frac{\pi}{36}$  rad; e as matrizes:

$$\text{Rolamento}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \text{Altitude}_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix};$$

$$\text{Guinada}_{\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Resolução da situação-problema

A posição final do vetor  $\vec{r} = 30\hat{i}$  m pode ser calculada se multiplicarmos o vetor pelas matrizes de rotação na ordem correta. Segundo o texto, a convenção escolhida é Guinada, Altitude e Rolamento, logo, a primeira rotação em Guinada será:

$$\vec{r}_1 = \text{Guinada}_{\psi} \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,87 & 0 \\ -0,87 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -25,98 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A segunda rotação será a Altitude:

$$\vec{r}_2 = \text{Altitude}_\theta \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{12} & 0 & \sin \frac{\pi}{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{12} & 0 & \cos \frac{\pi}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ -25,98 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0,96 & 0 & 0,26 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,26 & 0 & 0,96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ -25,98 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,49 \\ -25,98 \\ -3,88 \end{pmatrix}.$$

Por fim, executamos a terceira rotação (Rolamento):

$$\vec{r}_3 = \text{Rolamento}_\psi \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{36} & \sin \frac{\pi}{36} \\ 0 & -\sin \frac{\pi}{36} & \cos \frac{\pi}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14,49 \\ -25,98 \\ -3,88 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,99 & 0,09 \\ 0 & -0,09 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14,49 \\ -25,98 \\ -3,88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,49 \\ -26,22 \\ -1,60 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, se compararmos a posição inicial e final do avião no referencial de seu centro de massa, a cabine do avião, agora, estaria apontando para na direção  $\vec{r} = (14,49\hat{i} - 26,22\hat{j} - 1,6\hat{k}) \text{ m}$ .

## Faça valer a pena

**1.** Uma rotação, em torno de um ponto, pode ser descrita por \_\_\_\_ rotações em torno de eixos distintos.

Em uma rotação \_\_\_\_\_, os eixos de rotação variam de posição devido a rotações anteriores.

Existem \_\_\_\_\_ possíveis convenções quanto à ordem com que as rotações podem ser combinadas. Três delas definem o que chamamos de ângulos de \_\_\_\_\_ e três, o que chamamos de ângulos de Tait-Bryan.

Selecione, dentre as alternativas a seguir, a que melhor complete as afirmações apresentadas no enunciado.

- a) quatro, interna, três, Gauss.
- b) três, intrínseca, seis, Euler.
- c) duas, externa, nove, Abel.
- d) três, variável, quinze, Tait.
- e) quatro, extrínseca, doze, Bryan.

**2.** Um corpo rígido livre, para se mover no espaço tridimensional, tem a posição  $\vec{r}(t)$ , dada em metros de seu centro de massa, definida pela equação  $\vec{r}(t) = (50t^2 + 15)\hat{i} + (2t + 5)\hat{j} + 10t^3\hat{k}$ , onde  $t$  é o tempo dado em segundos. Qual será o módulo da aceleração desse corpo livre depois de 10 s de movimento?

Selecione, dentre as alternativas a seguir, aquela que melhor representa a sua resposta.

- a) 256 m/s<sup>2</sup>.
- b) 443 m/s<sup>2</sup>.
- c) 608 m/s<sup>2</sup>.
- d) 532 m/s<sup>2</sup>.
- e) 100 m/s<sup>2</sup>.

**3.** Considere um corpo rígido livre para girar no espaço, longe da influência de qualquer aceleração da gravidade. Se este corpo rígido rotaciona em torno de seu centro de massa com velocidade angular  $\vec{\omega} = 10\hat{i} + 5\hat{j} + 20\hat{k}$ , qual será a aceleração centrípeta em um ponto na sua superfície a uma distância de 1 m do centro de massa do corpo?

Selecione, dentre as alternativas a seguir, aquela que melhor representa a sua resposta.

- a) 35 m/s<sup>2</sup>.
- b) 525 m/s<sup>2</sup>.
- c) 23 m/s<sup>2</sup>.
- d) 1.000 m/s<sup>2</sup>.
- e) 1.225 m/s<sup>2</sup>.

## Seção 4.2

### Conceitos gerais do espaço tridimensional

#### Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior, estudamos e definimos o movimento de um corpo no espaço tridimensional. Vimos que uma translação é algo simples de ser descrito em três dimensões, e que de fato possui praticamente a mesma descrição de uma translação no plano. Por outro lado, vimos que uma rotação no espaço aceita muito mais liberdade para orientar o objeto, e que isso faz com que a descrição deste movimento seja mais complexa. Mesmo assim, fomos capazes de descrever qualquer rotação com a composição de até três rotações em um plano, o que, por fim, permitiu descrever o movimento de rotação com o que é conhecido como ângulos de Euler ou ângulos de Tait-Bryan, a depender da convenção adotada.

Nesta seção, iremos escolher a convenção dos ângulos de Euler, mais especificamente a convenção  $\mathbf{z}-\mathbf{x}-\mathbf{z}$ , para estudar outros conceitos antes apresentados na dinâmica de corpos rígidos no plano. Dentre eles, destacamos o momento angular e a energia cinética, que, juntos com os termos referentes à translação, permitirão expandir os princípios de conservação de momento e conservação de energia para um sistema tridimensional.

Por fim, voltaremos a participar dos desafios de nosso projetista, que acompanharemos em sua mais nova tarefa. Agora, ele precisa calcular a velocidade com que um dos componentes do braço robótico responde a um determinado torque. Mais especificamente, será necessário modelar a resposta de um sistema de engrenagens cônicas, a fim de avaliar sua resposta dinâmica. Uma das engrenagens sofre a influência de um torque externo e depois gira, sem atrito, ao redor de um eixo. Qual seria a velocidade angular da segunda engrenagem? E a sua frequência? Esse sistema de engrenagens é bastante simples, perfeito para o início de nossos estudos. Vamos lá?

## Não pode faltar

Na Unidade 2, o conceito de momento de inércia foi discutido. Agora, precisamos verificar como sua descrição se altera em um espaço tridimensional.

Quando definimos o momento de inércia, o fizemos sempre em respeito a um eixo de rotação, que, para formas mais simples e usuais, eram perpendiculares e podiam até ser usadas para definir um sistema de coordenadas  $(x, y, z)$ . Sendo assim, já conhecemos o momento de inércia  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  em torno desses eixos, os quais são chamados momentos principais de inércia, cujos valores são os mesmos momentos de inércia calculados para uma rotação no plano, seguindo a fórmula  $I = \int r^2 dm$ . Como exemplo, o momento de inércia ao longo do eixo  $x$  será  $I_x = \int x^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm$ . No entanto, um corpo tridimensional pode girar em torno de outros eixos e, por isso, existem outros valores para o momento de inércia que podem ser calculados. Neste caso, devemos usar um objeto matemático conhecido como tensor de inércia, que resume o valor do momento de inércia para um dado eixo; este tensor é descrito na forma de uma matriz:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

em que os elementos da diagonal  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$  são os momentos principais de inércia e, portanto,

$$I_{xx} = I_x = \int x^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm,$$

$$I_{yy} = I_y = \int y^2 dm = \int (x^2 + z^2) dm \text{ e}$$

$$I_{zz} = I_z = \int z^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm;$$

já os outros elementos do tensor de inércia podem ser calculados pela relação

$$I_{xy} = I_{yx} = \int xy dm,$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int xz \, dm \text{ e}$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int yz \, dm .$$

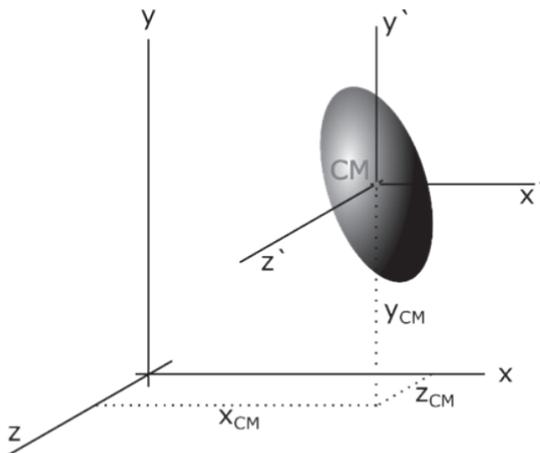
Este tensor de inércia permite calcular o momento de inércia para um corpo girando em torno de qualquer eixo no espaço tridimensional. Com isso, podemos estudar uma rotação em torno de um ponto usando a teoria discutida na seção anterior, que mostrou que uma rotação em volta de um ponto pode ser descrita pela composição de três rotações planas em torno de um eixo. Sendo assim, para um eixo qualquer unitário  $\vec{u}$ , teremos:

$$I = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x ,$$

em que  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  são as componentes do vetor unitário  $\vec{u}$ , que, por ser unitário, faz com que  $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1$ .

Outro tópico de interesse, quando tratamos do momento de inércia, foi o teorema dos eixos paralelos. De certa forma, ele segue a mesma lógica tratada na Unidade 2, porém, agora precisamos ter um pouco mais de cuidado quando definimos o sentido do eixo e seu correspondente paralelo. No caso tridimensional, podemos imaginar um corpo de tensor de inércia conhecido e cujo o referencial  $(x', y', z')$  coincide com seu centro de massa; também o referencial  $(x, y, z)$  define o referencial onde queremos calcular o tensor de inércia.

Figura 4.8 | Teorema dos eixos paralelos e planos paralelos



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com a Figura 4.8, podemos calcular os elementos do tensor de inércia para o sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  pelo teorema dos eixos paralelos:  $I_{xx} = (I_{x'x'})_{CM} + m(y_{CM}^2 + z_{CM}^2)$ ,  $I_{yy} = (I_{y'y'})_{CM} + m(x_{CM}^2 + z_{CM}^2)$  e  $I_{zz} = (I_{z'z'})_{CM} + m(x_{CM}^2 + y_{CM}^2)$ .

Os termos cruzados do novo tensor de inércia são calculados da mesma forma. Aqui, entretanto, utilizamos o teorema dos planos paralelos, que é usado para transferir o momento de inércia de um plano para outro plano paralelo; matematicamente, teremos:  $I_{xy} = (I_{x'y'})_{CM} + mx_{CM}y_{CM}$ ,  $I_{yz} = (I_{y'z'})_{CM} + my_{CM}z_{CM}$  e  $I_{zx} = (I_{z'x'})_{CM} + mz_{CM}x_{CM}$ .

De qualquer forma, essas relações, envolvendo o tensor de inércia descrito acima, podem ser aplicadas a qualquer sistema de coordenadas  $(x, y, z)$ . No entanto, é comum e muito mais prático descrever o momento de inércia alinhando-se o sistema de coordenadas com os eixos principais do corpo. Em outras palavras, faremos com que os eixos  $(x, y, z)$  se alinhem com os eixos de rotação que definem  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ . Neste caso, o cálculo dos termos cruzados do tensor de inércia ( $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  e  $I_{yz}$ ) serão nulos, e, por isso, o tensor de inércia poderá ser escrito na forma:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

Graças a esta escolha dos eixos  $(x, y, z)$ , podemos reescrever o momento em torno de um eixo unitário  $\vec{u}$  qualquer, como:

$$I = I_x u_x^2 + I_y u_y^2 + I_z u_z^2.$$

Já o teorema dos eixos paralelos poderá ser escrito na forma:  $I_{xx} = (I_{x'x'})_{CM} + m(y_{CM}^2 + z_{CM}^2)$ ,  $I_{yy} = (I_{y'y'})_{CM} + m(x_{CM}^2 + z_{CM}^2)$  e  $I_{zz} = (I_{z'z'})_{CM} + m(x_{CM}^2 + y_{CM}^2)$ , ao mesmo tempo que o teorema dos planos paralelos mostra que os termos cruzados serão:  $I_{xy} = mx_{CM}y_{CM}$ ,  $I_{yz} = my_{CM}z_{CM}$  e  $I_{zx} = mz_{CM}x_{CM}$ .



O tensor de inércia de um corpo, quando o sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  se alinha com os eixos de rotação que definem  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ , permite escrever:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix},$$

em que  $I_x = \int x^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm$ ,  $I_y = \int y^2 dm = \int (x^2 + z^2) dm$  e  $I_z = \int z^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$ .

Tendo a matriz do momento de inércia descrito por seus eixos principais, podemos utilizá-la para descrever uma rotação em conjunto com as convenções para rotação intrínseca discutidas na seção anterior, quando vimos que uma rotação em torno de um ponto pode ser definida como a composição de três rotações em torno de três eixos (ângulos de Tait-Bryan) ou apenas dois eixos (ângulos de Euler). Uma rotação intrínseca faz com que os eixos de coordenadas acompanhem o objeto, ou seja, tanto os eixos de coordenadas quanto o momento de inércia irão girar em conjunto com o corpo, o que, como veremos mais a frente, permite generalizar de forma bem direta as grandezas que dependem de uma rotação e do momento de inércia como momento angular e energia.

Podemos, assim, passar a revisar os conceitos apresentados nas unidades anteriores, quando definimos para a dinâmica no plano, a começar pela **grandeza quantidade** de movimento. Como vimos, a quantidade de movimento deve ser **estudada** separadamente para movimentos de translação e rotação. Na seção anterior, vimos que um movimento de translação em três dimensões segue uma descrição idêntica da feita para o plano, isso faz com que grandezas como o momento linear, dado pela mesma relação  $\vec{L} = m\vec{v}$ , também sigam um raciocínio semelhante. Em três dimensões, um vetor pode ser decomposto da seguinte forma  $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$  e que, por

consequente, faz  $\vec{L} = mv_x\hat{i} + mv_y\hat{j} + mv_z\hat{k}$  também ser descrito por três componentes, que também podem ser escritas independentemente na forma:

$$\begin{cases} L_x = mv_x \\ L_y = mv_y \\ L_z = mv_z \end{cases}.$$

Definido o momento linear, podemos utilizar o princípio de conservação do momento linear descrito como  $\vec{L}_{inicial} = \vec{L}_{final}$  para escrever as relações:

$$\begin{cases} (mv_x)_{inicial} = (mv_x)_{final} \\ (mv_y)_{inicial} = (mv_y)_{final} \\ (mv_z)_{inicial} = (mv_z)_{final} \end{cases}.$$

Em seguida, podemos definir a quantidade de movimento angular de um corpo em três dimensões. Você já deve imaginar que essa descrição será mais complicada que a do momento linear, porém, graças aos cálculos apresentados anteriormente, no que se refere ao tensor de inércia, podemos escrever as componentes do momento angular como:

$$\begin{cases} H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y = I_{yy}\omega_y - I_{yx}\omega_x - I_{yz}\omega_z \\ H_z = I_{zz}\omega_z - I_{zy}\omega_y - I_{zx}\omega_x \end{cases}$$

em que  $\omega = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}$ , o vetor velocidade angular que descreve a rotação do corpo em torno de um eixo. Note que, se descrevermos os eixos de coordenadas  $(x, y, z)$  em respeito aos eixos principais, veremos que os termos cruzados  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$  serão nulos e, portanto:

$$\begin{cases} H_x = I_x\omega_x \\ H_y = I_y\omega_y \\ H_z = I_z\omega_z \end{cases}.$$

Para o cálculo do momento angular de uma rotação em torno de um ponto, devemos considerar que este é uma grandeza aditiva e, por isso, pode ser descrita pela composição de três rotações em torno de seus eixos respectivos.

Por fim, definido o momento angular, podemos utilizar o princípio de conservação do momento angular descrito como  $\vec{H}_{inicial} = \vec{H}_{final}$  para escrever as relações quando os eixos de coordenadas  $(x, y, z)$  acompanham os eixos principais:

$$\begin{cases} (I_x \omega_x)_{inicial} = (I_x \omega_x)_{final} \\ (I_y \omega_y)_{inicial} = (I_y \omega_y)_{final} \\ (I_z \omega_z)_{inicial} = (I_z \omega_z)_{final} \end{cases} .$$

Agora que reescrevemos os princípios de conservação do momento linear e do angular, podemos revisitar o princípio do impulso e da quantidade de movimento. Retomando a relação para a quantidade de movimento linear, temos a equação vetorial

$\vec{L}_{inicial} = \sum \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} \vec{F} dt = \vec{L}_{final}$ , que em três dimensões permite escrever a relação:

$$\begin{cases} L_{x_{inicial}} + \Delta J_x = L_{x_{final}} \\ L_{y_{inicial}} + \Delta J_y = L_{y_{final}} \\ L_{z_{inicial}} + \Delta J_z = L_{z_{final}} \end{cases} ,$$

em que

$$\Delta J = \Delta J_x \hat{i} + \Delta J_y \hat{j} + \Delta J_z \hat{k} = \sum \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} F_x dt \hat{i} + \sum \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} F_y dt \hat{j} + \sum \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} F_z dt \hat{k} \quad \text{é}$$

a soma dos impulsos que agem sobre o corpo. Na relação para a quantidade de movimento angular, temos a equação vetorial

$\vec{H}_{inicial} + \sum \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} \vec{M} dt = \vec{H}_{final}$ , que em três dimensões permite escrever

a relação:

$$\begin{cases} H_{x_{inicial}} + \Delta Y_x = H_{x_{final}} \\ H_{y_{inicial}} + \Delta Y_y = H_{y_{final}} \\ H_{z_{inicial}} + \Delta Y_z = H_{z_{final}} \end{cases}$$

em que

$$\Delta Y = \Delta Y_x \hat{j} + \Delta Y_y \hat{j} + \Delta Y_z \hat{k} = \sum_{t_{inicial}}^{t_{final}} \int M_x dt \hat{i} + \sum_{t_{inicial}}^{t_{final}} \int M_y dt \hat{j} + \sum_{t_{inicial}}^{t_{final}} \int M_z dt \hat{k} \quad \text{é a}$$

soma dos impulsos angulares. Observe que, diferentemente de nossa definição anterior, válida para uma rotação no plano e em torno de um único eixo, um espaço tridimensional permite que o objeto gire em torno de três eixos distintos. Por isso, ao invés de apenas uma relação de impulso para o momento angular, teremos três relações distintas.



### Assimile

O princípio de impulso e quantidade de movimento em três dimensões pode ser usado para solução de problema, utilizando seis equações escalares independentes, dadas por:

$$\begin{cases} L_{x_{inicial}} + \Delta J_x = L_{x_{final}} \\ L_{y_{inicial}} + \Delta J_y = L_{y_{final}} \\ L_{z_{inicial}} + \Delta J_z = L_{z_{final}} \end{cases}, \begin{cases} H_{x_{inicial}} + \Delta Y_x = H_{x_{final}} \\ H_{y_{inicial}} + \Delta Y_y = H_{y_{final}} \\ H_{z_{inicial}} + \Delta Y_z = H_{z_{final}} \end{cases}$$



### Refleta

A diferença no número de equações para o teorema do impulso e da quantidade de movimento entre um movimento restrito no plano (3 equações) e um para o espaço tridimensional (6 equações) é reflexo do aumento dos graus de liberdade que um corpo pode assumir. Aproveite esta pausa para refletir sobre como o movimento de um helicóptero, por exemplo, pode ser tão mais complexo que o de um carro. Você consegue imaginar quantos comandos um helicóptero deve ter?

A próxima grandeza que podemos rever é a energia cinética. Na unidade anterior, vimos que esta grandeza tem componentes que se relacionam com o movimento translacional e com o movimento de rotação do corpo. Para o movimento translacional, teremos a relação  $T = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$ , em que a velocidade

$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$  se refere ao centro de massa e cujo módulo quadrado é calculado segundo  $|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ,

logo, a energia cinética translacional em três dimensões será:  
 $T = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2$ .

No que tange ao componente proporcional ao movimento de rotação, podemos escrever a energia cinética de rotação para os eixos de coordenadas  $(x, y, z)$  que acompanham os eixos principais do corpo rígido, como:  $T = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$ .

Logo, a energia cinética total para um corpo rígido será dada por:

$$T = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2.$$

Finalmente, definida a energia cinética, podemos reescrever o último princípio apresentado na unidade anterior, o do trabalho e conservação de energia. Logo, da unidade anterior, podemos escrever que  $T_{\text{inicial}} + \Delta W = T_{\text{final}}$ , que, para um espaço de três dimensões, as definições para o trabalho  $W = F \cdot r \cos \theta$  e  $W = \tau \cdot \theta$  se mantêm as mesmas.



### Assimile

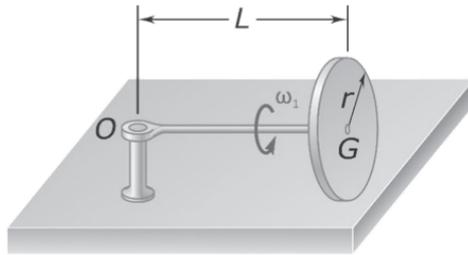
A energia cinética de um corpo rígido executando um movimento geral no espaço tridimensional pode ser calculada pela relação:

$$T = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2.$$



Um disco homogêneo de raio  $r = 100 \text{ mm}$  e massa  $m = 1 \text{ kg}$  está montado sobre um eixo  $OG$  de comprimento  $L = 300 \text{ mm}$ , massa desprezível, conforme Figura 4.9. O eixo é pivotado no ponto fixo  $O$  e o disco é compelido a rolar sobre um piso horizontal, onde não ocorre escorregamento. Sabendo que o disco gira no sentido anti-horário a uma taxa  $\omega_1 = 30 \text{ rad/s}$  em torno do eixo  $OG$ , qual o módulo de sua quantidade de movimento angular e a sua energia cinética?

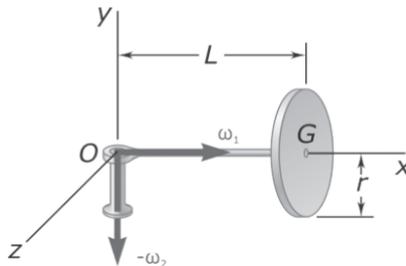
Figura 4.9 | Disco sobre eixo



Fonte: Beer (2009, p. 1.159).

Para o cálculo da quantidade de movimento do disco, devemos considerar composição do movimento de rotação do disco em torno do eixo  $OG$  com o movimento de rotação ao pivotar em torno do ponto  $O$ . Dessa forma, podemos desenhar os vetores instantâneos da velocidade angular  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , segundo a Figura 4.10.

Figura 4.10 | Diagrama das velocidades angulares



Fonte: Beer (2009, p. 1.159).

Por ser uma grandeza aditiva, podemos analisar cada movimento separadamente.

O momento angular da rotação em torno do eixo OG, ou seja, eixo  $x$ , será:

$H_x = I_x \omega_1$ , em que o momento de inércia  $I_x$  é um dos eixos principais do disco e pode ser calculado pela relação  $I = \frac{mr^2}{2}$ , logo:

$$H_x = I \omega_1 = \frac{mr^2}{2} \omega_1 = \frac{1 \cdot 0,1^2}{2} 30 = 0,15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

O momento angular da rotação em torno do pivô O, ou seja, eixo  $y$ , será:

$H_y = I_y \omega_2$ , em que o momento de inércia  $I_y$  também está ao longo de um dos eixos principais do disco, porém, o eixo de rotação está paralelo a um dos eixos principais do disco, cujo momento de inércia é  $I_{CMY} = \frac{mr^2}{4}$

para um eixo passando pelo centro de massa. Note que, na realidade, o eixo está a uma distância  $L$  do centro de massa e, por isso, podemos usar o teorema dos eixos paralelos para calcular o momento de inércia

$$I_y = I_{CM} + mL^2 = \frac{mr^2}{4} + mL^2.$$

Já o módulo da velocidade angular  $\omega_2$  pode ser calculado pela velocidade tangencial das rotações, que deve ser a mesma, visto que não existe escorregamento  $\omega_2 L = \omega_1 r \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 r}{L}$ , logo,

$$H_y = I_y \omega_2 = \left( \frac{mr^2}{4} + mL^2 \right) \left( -\frac{\omega_1 r}{L} \right)$$

$$H_y = - \left( \frac{1 \cdot 0,1^2}{4} + 1 \cdot 0,3^2 \right) \frac{30 \cdot 0,1}{0,3} = -0,925 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

O momento angular em torno do eixo  $z$  será:

$$H_z = I_z \omega_z = I_z 0 = 0.$$

Sendo assim, o módulo do momento angular do sistema será:

$$|\vec{H}| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} = \sqrt{0,15^2 + (-0,925)^2 + 0^2} = 0,937 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Para o cálculo da energia cinética, temos a relação:

$$T = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2, \text{ porém,}$$

como o sistema não translada  $\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_y = \mathbf{v}_z = \mathbf{0}$ , logo,

$T = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2$ ; do diagrama podemos substituir  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$

$$T = \frac{1}{2}I_x\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_z \cdot 0^2 = \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{mr^2}{4} + mL^2 \right) \left( -\frac{\omega_1 r}{L} \right)^2$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{11 \cdot 0,1^2}{2} 30^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1 \cdot 0,1^2}{4} + 1 \cdot 0,3^2 \right) \left( -\frac{30 \cdot 0,1}{0,3} \right)^2 = 6,876 \text{ J}$$



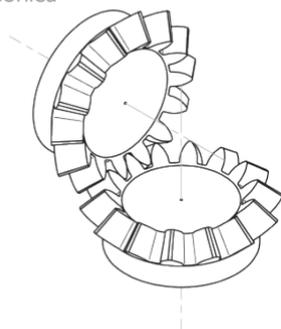
**Pesquise mais**

Você pode revisar esses conceitos e até explorar outros exemplos nesta bibliografia, no capítulo 21 do livro: HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

## Sem medo de errar

O desenvolvimento de máquinas capazes de responder a tarefas cada vez mais complexas abriu espaço para o desenvolvimento de mecanismos cada vez mais interessantes. Você, no lugar do personagem de nossa história, especialista em braços mecânicos de linhas industriais, acaba se deparando com inúmeras engrenagens e mecanismos. Após calibrar um braço mecânico, chegou a hora de analisar uma de suas peças: uma engrenagem cônica, representada na Figura 4.11.

Figura 4.11 | Engrenagem cônica



Fonte: adaptada de <[https://en.wikipedia.org/wiki/Bevel\\_gear#/media/File:Engrenage\\_conique\\_concourant\\_14dts\\_mod5.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Bevel_gear#/media/File:Engrenage_conique_concourant_14dts_mod5.svg)>.. Acesso em: 23 jan. 2017.

A princípio, o raio  $r = 25 \text{ mm}$  das engrenagens é fixo e não pode ser alterado, no entanto, existe o fator que diz respeito ao número máximo de rotações por segundo que cada engrenagem pode suportar. Segundo o manual, a engrenagem horizontal fica ligada a um eixo que, partindo do repouso, fornece um torque de  $\tau = 5 \text{ N}\cdot\text{m}$  que permanece constante até que a engrenagem complete 2 revoluções completas. Sabendo que ambas as engrenagens pesam  $100 \text{ g}$  e que possuem um raio de giro de  $k = 20 \text{ mm}$ , você precisa determinar qual a velocidade angular esperada. Nesse caso, o atrito pode ser desprezado.

A presença do torque por um determinado número de revoluções implica que o sistema executa um trabalho dado por:  $U = \tau \cdot \theta$ ; como ele opera por exatas duas revoluções  $\theta = 4\pi \text{ rad}$ , logo,  $U = 5 \cdot 4\pi \approx 62,83 \text{ J}$ .

Sendo assim, podemos usar o princípio de trabalho e energia para escrever a relação entre trabalho e energia cinética:

$T_{\text{inicial}} + \Delta U = T_{\text{final}}$ , como o sistema parte do repouso  $T_{\text{inicial}} = 0$ ; já a energia cinética final

$T_{\text{final}} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2$ , porém, o sistema não transla e, por isso,  $v_x = v_y = v_z = 0$ , logo,

$T_{\text{final}} = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2$ , ao mesmo tempo, como as engrenagens tem as mesmas dimensões, faz com que  $I_x = I_y = I$ . Também, elas estão alinhadas a apenas dois eixos, por isso,  $\omega_x = \omega_y = \omega$  e  $\omega_z = 0$ , logo,

$T_{\text{final}} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = I\omega^2$ ; o cálculo do momento de inércia pode ser feito pelo raio de giro:  $I = mk^2 = 0,1 \cdot 0,02^2 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .

Logo, teremos:  $T_{\text{inicial}} + \Delta U = T_{\text{final}}$

$$0 + 62,83 = 4 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^2$$

$$\omega \approx 1253,3 \text{ rad/s}$$

Você precisa determinar o número de rotações por segundo antes de passar este valor para o setor de compras, logo,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 199 \text{ Hz}.$$

Com essas informações, a descrição da engrenagem cônica está completa.

## Avançando na prática

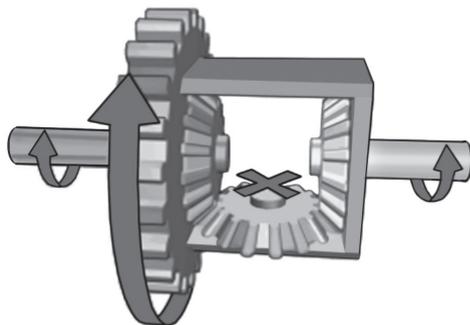
### Diferencial

#### Descrição da situação-problema

Um diferencial é um componente mecânico encontrado em carros e veículos que envolvam algum sistema de eixos e rodas. Ele é desenhado para compensar os instantes quando duas rodas em um mesmo eixo precisam assumir velocidades diferentes, o que seria impossível com um eixo fixo.

Um exemplo típico são os momentos quando um carro precisa fazer uma curva: neste caso, a roda do lado de dentro da curva precisa fazer um percurso menor que a de fora da curva e, por isso, embora estas rodas estejam ligadas ao mesmo eixo, elas devem girar com velocidades diferentes. Na figura, temos a representação esquemática de um diferencial cuja razão entre as engrenagens externas e as demais, ligadas aos eixos e à central, é 28 por 12. Na condição mostrada, o carro estaria andando em linha reta, e, por isso, a engrenagem central não irá rotacionar e ambas as rodas estão livres para girar na mesma velocidade, como vemos na Figura 4.12.

Figura 4.12 | Diferencial



Fonte: <[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/61/Differential\\_free.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/61/Differential_free.png)>. Acesso em 23 jan. 2017.

Se considerarmos o instante mostrado na figura, quando a engrenagem externa gira a uma velocidade  $\omega_{ext} = 10 \text{ rad/s}$ , qual será a velocidade das duas engrenagens ligadas ao eixo?

### Resolução da situação-problema

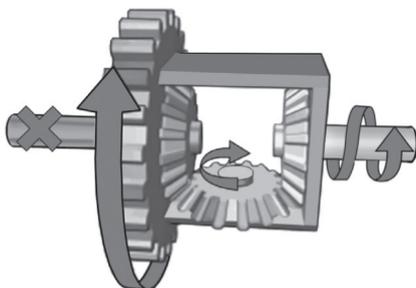
Apesar de ser um mecanismo tridimensional, as engrenagens ainda irão seguir a relação de torque proporcional ao seu número de dentes ou perímetro. No caso mostrado na figura, a central não gira e, por isso, transfere todo o momento da engrenagem externa para as demais.

Sendo assim, como a razão entre as engrenagens é de 28 por 12, as demais engrenagens terão uma velocidade angular de:

$$\omega = \frac{28}{12} \omega_{ext} = \frac{28}{12} 10 \approx 23,33 \text{ rad/s}.$$

Note que, mesmo quando uma das rodas do carro está travada, o sistema não sofre de nenhum estresse mecânico, pois, neste caso, a engrenagem central irá girar, compensando a diferença de velocidade entre os eixos, como observamos na Figura 4.13.

Figura 4.13 | Comportamento do diferencial para roda travada



Fonte: <[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/61/Differential\\_free.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/61/Differential_free.png)>. Acesso em: 23 jan. 2017.

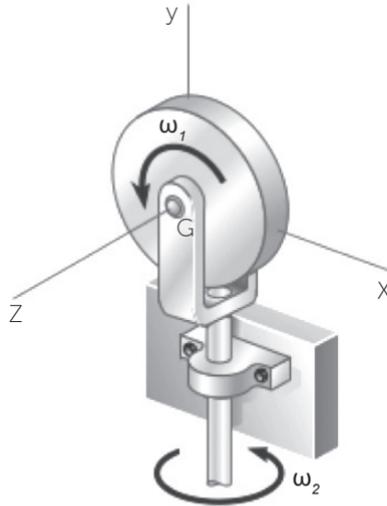
### Faça valer a pena

**1.** Na Figura 4.14 temos um sistema composto por um disco homogêneo que possui uma massa  $m = 5 \text{ kg}$  e raio  $r = 150 \text{ mm}$ ; este disco gira a uma taxa constante de  $\omega_1 = 25 \text{ rad/s}$  em torno de um eixo apoiado em uma união em U que está presa em uma barra vertical que também gira, com

uma taxa constante de  $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$ .

Selecione, dentre as alternativas a seguir, a que melhor representa a resposta correta.

Figura 4.14 | Disco



Fonte: Beer (2009, p. 1.162).

a)  $2,00 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$ .

d)  $2,15 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$ .

b)  $1,45 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$ .

e)  $1,00 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$ .

c)  $1,68 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$ .

**2.** Avalie as afirmativas a seguir

I. O teorema de eixos paralelos permite calcular o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo passando por seu centro de massa, com base no momento de inércia com relação a outro eixo paralelo passando por outro ponto.

II. O teorema de planos paralelos é usado para obter os produtos de inércia do corpo em relação a um conjunto dos três planos ortogonais passando pelo centro de massa do corpo, para um conjunto correspondente de três planos paralelos passando por algum outro ponto  $O$ .

III. Ambos os teoremas de eixos paralelos e planos paralelos são usados

para calcular o tensor de inércia de um corpo sobre um ponto que passa exclusivamente por seu centro de massa  $CM$ .

Selecione, dentre as alternativas a seguir, a que melhor representa a sua resposta.

- a) Apenas a alternativa I está correta.
- b) Apenas as alternativas II e III estão incorretas.
- c) Todas as alternativas estão incorretas.
- d) Todas as alternativas estão corretas.
- e) Apenas as alternativas I e II estão corretas.

**3.** Um corpo composto suspenso possui uma massa  $m = 2 \text{ kg}$ , e os momentos de inércia desse corpo no centro de massa estão

representados na matriz  $I_{CM} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -15 \\ -1 & 5 & -1 \\ -15 & -1 & 20 \end{pmatrix}$ . Considerando que o ponto

$CM$  está nas coordenadas  $x_{CM} = 10$ ,  $y_{CM} = 15$  e  $z_{CM} = 20$  em relação ao ponto  $O$  do plano  $xyz$ , selecione, dentre as alternativas a seguir, a que melhor representa o tensor de inércia com relação à origem  $O$  do sistema cartesiano.

a)  $I_0 = \begin{pmatrix} 1260 & -299 & -385 \\ -299 & 1005 & -599 \\ -385 & -599 & 670 \end{pmatrix}$ .

b)  $I_0 = \begin{pmatrix} 1260 & -385 & -299 \\ -385 & 1005 & -599 \\ -299 & -599 & 670 \end{pmatrix}$ .

c)  $I_0 = \begin{pmatrix} 1260 & -599 & -385 \\ -599 & 1005 & -299 \\ -385 & -299 & 670 \end{pmatrix}$ .

d)  $I_0 = \begin{pmatrix} 1260 & -299 & -599 \\ -299 & 1005 & -385 \\ -599 & -385 & 670 \end{pmatrix}$ .

e)  $I_0 = \begin{pmatrix} 1200 & -299 & -599 \\ -299 & 1000 & -385 \\ -599 & -385 & 1500 \end{pmatrix}$ .

## Seção 4.3

### Exemplos de movimentos de corpos rígidos

#### Diálogo aberto

Estamos chegando à última seção do nosso curso. Estamos muito próximos de finalizar mais esta etapa de sua formação, na qual desenvolvemos uma intuição sobre as leis e fundamentos que governam a dinâmica de corpos rígidos. Resta-nos apenas abordar alguns últimos tópicos mais avançados na dinâmica em três dimensões.

Nesta seção, estudaremos as equações de movimento do corpo rígido em três dimensões, assim como ferramentas para descrever esse movimento de maneira eficiente. Como exemplo, vamos estudar um giroscópio, que é um dispositivo que assume um movimento de rotação no espaço que resume toda a teoria vista até então. Estudaremos também corpos livres de forças externas, que também é uma condição interessante na qual podemos aplicar nossa dinâmica de corpos no espaço tridimensional.

Neste contexto, veremos como o projetista que trabalha com automação industrial precisa projetar o mancal da máquina de corte da linha de uma indústria, no caso, um rotor de alta velocidade posicionado sobre um braço mecânico. O torque do rotor exerce força sobre o mancal quando o braço é acionado. Desta forma, nesta última tarefa, precisamos calcular essa força. E, para isso, você precisa de novos conhecimentos!

#### Não pode faltar

Na seção anterior, vimos como os princípios de trabalho e conservação de energia, de impulso e quantidade de movimento podem ser estendidos a um corpo rígido em três dimensões. Resta-nos então estudar as forças que agem sobre este corpo e definir suas equações de movimento.

Assim como na dinâmica planar, podemos escrever as equações

de movimento de um corpo rígido no espaço, acompanhando o movimento de translação de seu centro de massa. A primeira lei de Newton afirma que o estado de movimento de um corpo rígido só pode ser alterado pela atuação de uma força resultante  $\vec{F}_R$ , que é a soma de todas as forças que atuam sobre ele em um dado instante. Desta forma, teremos:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{L},$$

em que  $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$  é a força que pode ser decomposta em três componentes espaciais, e é igual à taxa de variação do vetor momento linear  $\vec{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k}$ . Vimos que o momento  $\vec{L}$  pode ser escrito como o produto entre a massa  $m$  e a velocidade  $\vec{v}$ ; para o caso tridimensional, teremos  $\vec{L} = m v_x \hat{i} + m v_y \hat{j} + m v_z \hat{k}$ . Por fim, para o caso de um corpo de massa constante, teremos:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a},$$

em que a derivada temporal da velocidade resulta na aceleração:  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ , no caso, a aceleração translacional do centro de massa do corpo rígido. Sendo assim, podemos escrever três relações lineares independentes:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum F_z = ma_z \end{cases}$$

Em seguida, como era de se esperar, o caso particular envolvendo uma rotação pode ser escrito inicialmente como:

$$\tau_R = \sum \vec{\tau} = \frac{d}{dt} \vec{H}$$

em que  $\sum \vec{\tau}$  é a soma dos torques que agem sobre o corpo,

compondo um torque resultante  $\vec{\tau}_R$  e fazendo com que sua quantidade de movimento angular  $\vec{H}$  varie no tempo. Neste caso, como no espaço, o momento angular deve ser escrito segundo  $\vec{H} = \vec{r} \times \vec{L}$ . Quando calculamos a derivada temporal, utilizaremos a propriedade distributiva das derivadas. Note que a derivada de um vetor resulta em um vetor, então a aplicação da derivada não afeta o produto vetorial. Portanto:

$$\frac{d}{dt} \vec{H} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{L}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{L} + \vec{r} \times \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Como você deve imaginar, escrever o vetor  $\vec{r}$  e o vetor  $\vec{L}$  pode ser bem complicado para mecanismos mais gerais. Podemos simplificar bastante a análise, considerando a rotação por um referencial conveniente, que gire acompanhando os eixos principais do corpo, ou seja, nosso referencial deverá girar junto com o corpo de forma que o tensor de inércia do corpo fique constante ao longo do tempo. Com isto, podemos escrever o conjunto de equações lineares:

$$\begin{cases} \sum \tau_x = I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ \sum \tau_y = I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x \\ \sum \tau_z = I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{cases}$$

em que  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são o momento de inércia dos eixos principais do corpo rígido;  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  os componentes da velocidade angular;  $\dot{\omega}_x$ ,  $\dot{\omega}_y$  e  $\dot{\omega}_z$  são as derivadas temporais das componentes da velocidade angular (aceleração angular). Você deve se lembrar que essa descrição é a mesma usada na definição dos ângulos de Euler, por isso, essas equações são conhecidas como equações de movimento de Euler.

É importante que você compreenda que essa definição simplifica a análise. Os eixos principais do corpo podem ser escolhidos de modo a permitir uma definição clara dos torques, e velocidades angulares, e a facilitar o cálculo do momento de inércia.

Outra escolha no referencial permite modificar o conjunto de equações e é útil para diversos mecanismos. Neste caso, o referencial não irá mais girar a uma velocidade angular  $\vec{\omega}$  igual à do corpo, mas sim a uma velocidade angular  $\vec{\Omega}$ . Isso é particularmente adequado

para a análise de piões e giroscópios simétricos em relação ao seu eixo de rotação. Neste caso, teremos um novo conjunto de equações escalares independentes:

$$\begin{cases} \sum \tau_x = I_x \dot{\omega}_x - I_y \Omega_z \omega_y - I_z \Omega_y \omega_z \\ \sum \tau_y = I_y \dot{\omega}_y - I_z \Omega_x \omega_z - I_x \Omega_z \omega_x \\ \sum \tau_z = I_z \dot{\omega}_z - I_x \Omega_y \omega_x - I_y \Omega_x \omega_y \end{cases}$$

em que  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  e  $\Omega_z$  são as componentes da velocidade angular do referencial. Note que se  $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$  teremos as equações de movimento de Euler discutidas anteriormente.



### Assimile

As equações de movimento para um corpo rígido executando um movimento de translação sob a ação de forças no espaço tridimensional são:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum F_z = ma_z \end{cases}$$

Para um movimento de rotação com uma velocidade  $\vec{\omega}$  uma escolha conveniente de referencial, que gira junto ao corpo:

$$\begin{cases} \sum \tau_x = I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ \sum \tau_y = I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x \\ \sum \tau_z = I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{cases}$$

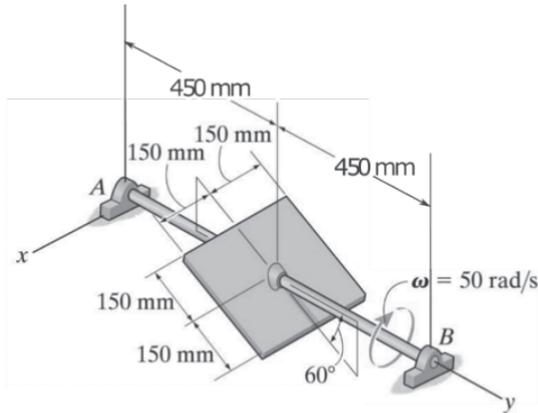
Quando o referencial gira a uma velocidade  $\vec{\Omega} \neq \vec{\omega}$ , temos:

$$\begin{cases} \sum \tau_x = I_x \dot{\omega}_x - I_y \Omega_z \omega_y - I_z \Omega_y \omega_z \\ \sum \tau_y = I_y \dot{\omega}_y - I_z \Omega_x \omega_z - I_x \Omega_z \omega_x \\ \sum \tau_z = I_z \dot{\omega}_z - I_x \Omega_y \omega_x - I_y \Omega_x \omega_y \end{cases}$$



Uma placa fina de material uniforme e massa total de  $5\text{ kg}$  está acoplada a um eixo de massa desprezível, como mostrada na figura a seguir. Se o eixo AB gira a uma velocidade angular constante  $\omega$ , determine as componentes  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$  da reação no mancal A e as componentes  $B_x$  e  $B_y$  da reação no mancal B.

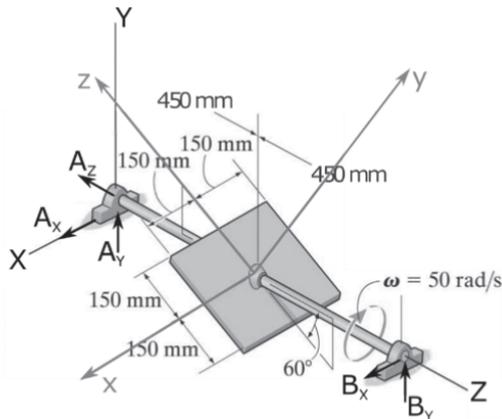
Figura 4.15 | Placa e eixo



Fonte: Hibbeler (2012, p. 490).

Para solução do problema, podemos escolher um referencial  $x, y, z$  que gira junto com a placa e segue seus eixos principais, como mostrado na Figura 4.16.

Figura 4.16: Placa com eixos principais



Fonte: Hibbeler (2012, p. 490).

Neste referencial, a velocidade  $\omega$  tem componentes:

$$\omega_x = 0, \omega_y = -\omega \text{sen}60^\circ, \omega_z = \omega \text{cos}60^\circ.$$

Como o referencial gira na mesma velocidade que o eixo:  $\Omega = \omega$  usamos a relação:

$$\begin{cases} \sum \tau_x = I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ \sum \tau_y = I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x, \\ \sum \tau_z = I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{cases}$$

o sistema não apresenta aceleração angular, ou seja,  $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$ . Sabendo que o momento de inércia de uma chapa quadrada de

lado  $a$  tem componentes principais:  $I_x = I_y = \frac{1}{12} ma^2$  e  $I_z = \frac{1}{6} ma^2$ .

$$\begin{cases} -A_y L + B_y L = 0 - \left( \frac{1}{12} ma^2 - \frac{1}{6} ma^2 \right) (-\omega \text{sen}60^\circ)(\omega \text{cos}60^\circ) \\ A_x L \text{cos}60^\circ - B_x L \text{cos}60^\circ = 0 - 0 \\ A_x L \text{sen}60^\circ - B_x L \text{sen}60^\circ = 0 - 0 \end{cases}$$

Também podemos escrever:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y, \text{ que descreve as forças no referencial estático} \\ \sum F_z = ma_z \end{cases}$$

X, Y, Z

$$\begin{cases} A_x + B_x = 0 \\ A_y + B_y - P = 0 \\ A_z = 0 \end{cases}$$

Logo, temos o sistema:

$$\begin{cases} -A_Y L + B_Y L = 0 - \left( \frac{1}{12} m a^2 - \frac{1}{6} m a^2 \right) (-\omega \operatorname{sen} 60^\circ)(\omega \cos 60^\circ) \\ A_X L \cos 60^\circ - B_X L \cos 60^\circ = 0 - 0 \\ A_X L \operatorname{sen} 60^\circ - B_X L \operatorname{sen} 60^\circ = 0 - 0 \\ A_X + B_X = 0 \\ A_Y + B_Y - P = 0 \\ A_Z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A_Y L + B_Y L = \left( \frac{1}{12} m a^2 - \frac{1}{6} m a^2 \right) (\omega \operatorname{sen} 60^\circ)(\omega \cos 60^\circ) \\ A_X - B_X = 0 \\ A_X + B_X = 0 \\ A_Y + B_Y = P \\ A_Z = 0 \end{cases}$$

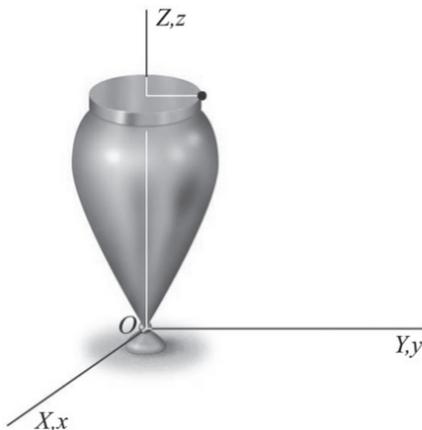
$$\begin{cases} -A_Y L + B_Y L = \left( \frac{1}{12} m a^2 - \frac{1}{6} m a^2 \right) (\omega \operatorname{sen} 60^\circ)(\omega \cos 60^\circ) \\ A_Y + B_Y = P \\ A_Z = 0 \\ A_X = 0 \\ B_X = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A_Y 0,45 + B_Y 0,45 = \left( \frac{1}{12} 5 \cdot 0,3^2 - \frac{1}{6} 5 \cdot 0,3^2 \right) (-50 \operatorname{sen} 60^\circ)(50 \cos 60^\circ) \\ A_Y + B_Y = 5 \cdot 10 \\ A_Z = 0 \\ A_X = 0 \\ B_X = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A_y + B_y = -90 \\ A_y + B_y = 50 \\ A_z = 0 \\ A_x = 0 \\ B_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_y = 70N \\ B_y = -20N \\ A_z = 0 \\ A_x = 0 \\ B_x = 0 \end{cases}$$

A partir destas equações de movimento, podemos estudar um dos dispositivos mais populares que envolve rotações, e aqui me refiro a um simples pião ou giroscópio. Para tanto, podemos retomar a descrição de uma rotação de um corpo rígido utilizando os ângulos de Euler e aplicá-la. Imaginando o pião em repouso, podemos definir os eixos de nosso referencial. Note que priorizamos para o eixo  $z$  (eixo de simetria), o que facilita muito a estimativa do momento de inércia em qualquer caso real. De todo o modo, manteremos a discussão geral, para que as equações sejam válidas em qualquer caso. O referencial  $(x,y,z)$  é mostrado na Figura 4.17.

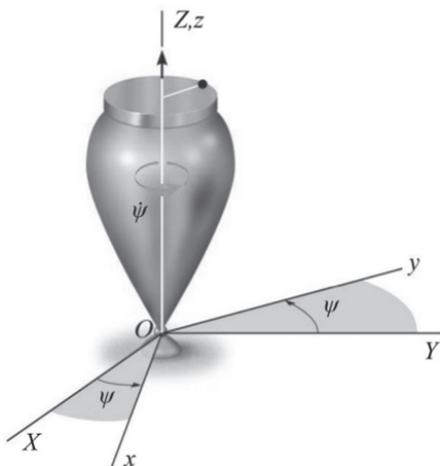
Figura 4.17 | Giroscópio



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 491).

Seguindo a mesma convenção apresentada na Seção 4.1, iniciamos nossa rotação em torno do eixo  $z$ , o eixo de simetria, movimento que podemos denominar **precessão**:

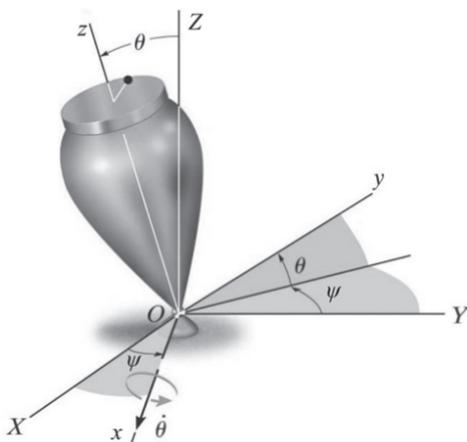
Figura 4.18 | Precessão



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 491).

O próximo movimento, segundo nossa convenção, ocorre em torno do eixo  $X$ , que iremos denominar **nutação**, como vemos na figura a seguir:

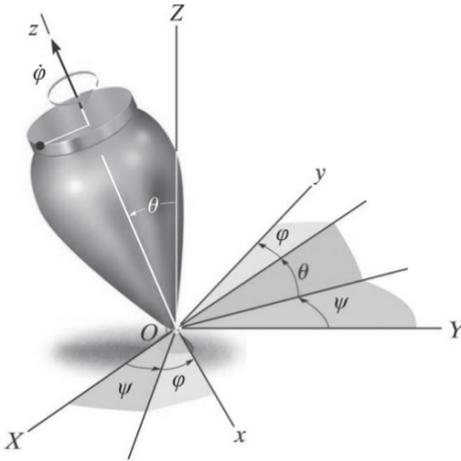
Figura 4.19 | Nutação



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 491).

Portanto, estamos inclinando o corpo rígido. Por fim, o último movimento ocorre em torno, novamente, do eixo  $Z$ , o qual denominaremos **rotação**, como vemos na Figura 4.20.

Figura 4.20 | Rotação



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 491).

Para descrever sua equação de movimento, devemos escolher cuidadosamente a melhor forma de descrever este problema. Note que, devido à simetria do pião, o movimento de rotação não modifica a posição do pião. Com isso, um vetor que descrevesse a posição do pião iria se alterar quando a rotação em  $\phi$  é aplicada. Desta forma, podemos assumir que para descrever a posição do pião,  $\phi$  pode assumir qualquer valor, inclusive zero. Logo, os componentes do vetor velocidade angular  $\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$ , para esta convenção dos ângulos de Euler, será:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_\theta \\ \omega_y = \omega_\psi \sin \theta \\ \omega_z = \omega_\psi \cos \theta + \omega_\phi \end{cases}$$

Também, devido a simetria do pião, podemos escolher um referencial que não segue o corpo, ou seja,  $\vec{\Omega} \neq \vec{\omega}$ . Isso é possível, devido a simetria do pião, que faz com que o momento de inércia  $I_x$  e  $I_y$  sejam constantes para qualquer instante, por isso, podemos assumir um referencial que se alinha ao eixo  $z$ , mas que não precisa acompanhar o movimento de rotação do pião, com isso, teremos um referencial que precessiona e nutaciona, porém, não rotaciona. Logo, a velocidade angular  $\vec{\Omega} = \Omega_x \hat{i} + \Omega_y \hat{j} + \Omega_z \hat{k}$  do referencial pode

assumir que  $\omega_\phi = 0$ , resultando em:

$$\begin{cases} \Omega_x = \omega_\theta \\ \Omega_y = \omega_\psi \sin \theta \\ \Omega_z = \omega_\psi \cos \theta \end{cases}$$

Podemos, então, calcular a equação de movimento do pião pela relação quando  $\vec{\Omega} \neq \vec{\omega}$ . Utilizando as expressões apresentadas anteriormente:

$$\begin{cases} \sum \tau_x = I_x \dot{\omega}_x - I_y \Omega_z \omega_y - I_z \Omega_y \omega_z \\ \sum \tau_y = I_y \dot{\omega}_y - I_z \Omega_x \omega_z - I_x \Omega_z \omega_x \\ \sum \tau_z = I_z \dot{\omega}_z - I_x \Omega_y \omega_x - I_y \Omega_x \omega_y \end{cases}$$

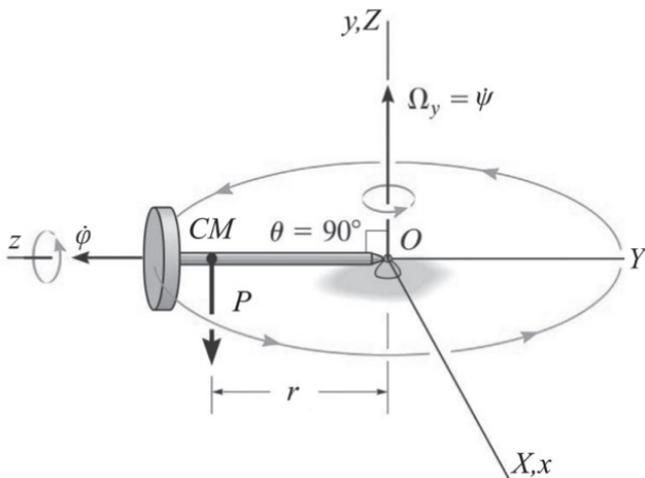
Substituindo os valores conhecidos para a velocidade angular do referencial:

$$\begin{cases} \sum \tau_x = I(\dot{\omega}_\theta - \omega_\psi^2 \sin \theta \cos \theta) + I_z \omega_\psi \sin \theta (\omega_\psi \cos \theta + \omega_\phi) \\ \sum \tau_y = I(\dot{\omega}_\theta \sin \theta + \omega_\psi \omega_\theta \cos \theta) + I_z \omega_\theta (\omega_\psi \cos \theta + \omega_\phi) \\ \sum \tau_z = I_z(\dot{\omega}_\phi + \dot{\omega}_\psi \cos \theta - \omega_\psi \omega_\theta \sin \theta) \end{cases}$$

em que  $I = I_x = I_y$ , uma vez que o pião é simétrico em torno do eixo z. Um caso particular conhecido como precessão estacionária ocorre quando o ângulo de nutação  $\theta$  e as velocidades angulares de precessão  $\omega_\psi$  e rotação  $\omega_\phi$  são constantes. Neste caso, teremos

$\sum \tau_x = -I\omega_\psi^2 \sin \theta \cos \theta + I_z \omega_\psi \sin \theta (\omega_\psi \cos \theta + \omega_\phi)$  e  $\sum \tau_y = \sum \tau_z = 0$ . Para o caso específico em que  $\theta = 90^\circ$ , teremos o caso em que  $\sum \tau_x = I_z \omega_\phi \omega_\psi$ , mostrado na Figura 4.21.

Figura 4.21 | Caso particular



Fonte: adaptada de Hibbeler (2012, p. 492).

O interesse neste tipo de sistema em particular torna-se mais evidente quando consideramos a ação da gravidade, pois, como mostrado na Figura 4.18, a presença da força peso agindo no centro de massa criará um torque na direção  $x$  do sistema:  $\vec{\tau}_p = \vec{r} \times \vec{P} = P \cdot r \cdot \hat{i}$ ; note que o sentido do torque devido à força peso é o mesmo do torque resultante devido a precessão  $\omega_\psi$  e rotação  $\omega_\phi$  descrito por  $\sum \tau_x = I_z \omega_\phi \omega_\psi$ . Com isso, é possível escolher uma velocidade de precessão  $\omega_\psi$  e uma velocidade de rotação  $\omega_\phi$ , de forma a contrabalançar o efeito da força peso (fazendo o corpo levitar!), criando o chamado efeito giroscópico.



### Refleta

Se o efeito giroscópico é uma resposta ao torque gerado pela gravidade, você acha que apenas a força peso resulta nesse efeito? Alguma vez você já tentou mover um HD externo enquanto ele funciona? Consegue identificar o efeito giroscópico? Atenção: mova o HD com calma, afinal, ele não é uma coisa barata!

Um outro sistema modelo de interesse é o estudo da dinâmica de um corpo quando livre de torques. A força gravitacional não exerce torque, pois age como se estivesse concentrada diretamente sobre

o centro de massa do corpo rígido. Por isso, um corpo rígido livre de torque pode estar sobre a ação da gravidade. Este tipo de movimento é característico de planetas e satélites, mas também de projéteis, desde que o atrito com o ar possa ser desprezado.

Além de estar livre de torques, para descrever um pouco este movimento devemos assumir a mesma condição para o estudo do giroscópio: a de que o corpo rígido, assim como o pião, tem simetria axial ao longo do eixo que definiremos como  $\mathbf{z}$ . Nesse caso, a origem do sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  está localizada no centro de massa do corpo de forma que podemos manter a mesma relação para o tensor de inércia:  $I = I_x = I_y$  e  $I_z$ .

Sendo assim, mantendo a mesma convenção para os ângulos de Euler, podemos escrever que a velocidade angular  $\vec{\omega}$  do corpo rígido livre de torques e com simetria axial será:

$$\vec{\omega} = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I} \hat{j} + \frac{H_G \operatorname{cos} \theta}{I_z} \hat{k}.$$

em que  $H_G$  é a quantidade de movimento angular do corpo que, como está livre de torque, é constante. Já  $\theta$  segue o mesmo padrão dos ângulos de Euler na convenção  $\mathbf{z} - \mathbf{x} - \mathbf{z}$ , descrevendo o ângulo entre os eixos  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{Z}$ .

Por fim, também podemos escrever as equações de movimento para um corpo livre de torque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \text{constante} \\ \omega_\psi = \frac{H_G}{I} \\ \omega_\phi = \frac{I - I_z}{I \cdot I_z} H_G \operatorname{cos} \theta \end{array} \right.$$

Com isso, finalizamos nosso estudo sobre a dinâmica de corpos rígidos no espaço tridimensional.

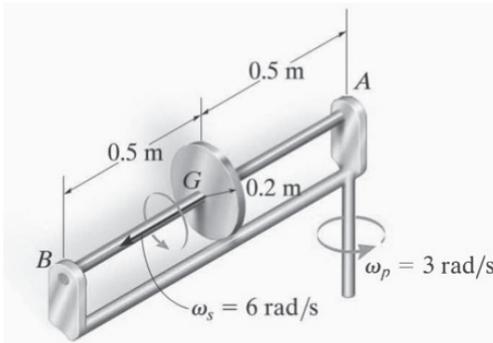


Agora que finalizamos nossos estudos da dinâmica tridimensional, você pode se aprofundar consultando este livro: HIBBELER, R. C. **Dinâmica: mecânica para engenharia**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. Capítulo 21.

## Sem medo de errar

Em sua mais recente tarefa, o projetista precisa calcular e quantificar as forças a que um eixo está submetido, devido ao movimento de um rotor. Um sistema para cortes circulares consiste em um disco de corte e um eixo, conforme a Figura 4.22. Esse disco gira submetido a uma determinada configuração de forças sobre o eixo. Você deve investigar este fenômeno e descrever a situação.

Figura 4.22 | Disco de corte

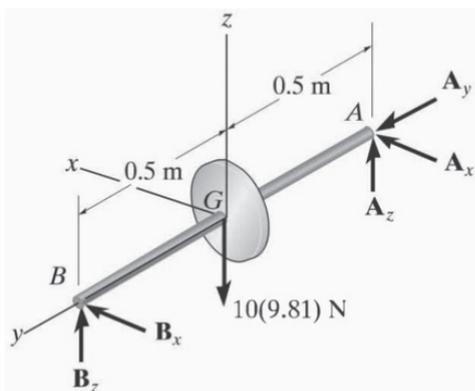


Fonte: Hibbeler (2012, p. 486).

Nele, o disco possui uma massa  $m = 1\text{g}$  e seu eixo de giro está representado em AB; durante sua operação ele precisa operar a uma velocidade angular de  $\omega_s = 6\text{rad/s}$ . Já o sistema que gira o disco executa um movimento de rotação em torno do pivô em A, a uma velocidade angular  $\omega_p = 3\text{rad/s}$ .

Graças aos conceitos que acabamos de estudar, podemos escrever o diagrama de forças e calcular as forças reativas que agem sobre os pontos A e B, e mantêm o eixo alinhado, sendo assim, o diagrama de forças pode ser representado por:

Figura 4.23 | Diagrama de forças



Fonte: Hibbeler (2012, p. 486).

Considerando o diagrama de corpo livre mostrado na figura, identificamos que a origem do sistema de coordenadas  $x, y$  e  $z$  está localizada no centro de massa  $G$  do volante. Assim, esse sistema de coordenadas terá uma velocidade angular  $\Omega = \omega_p = 3\hat{k} \text{ rad/s}$ ; apesar do volante girar em relação a esses eixos, os momentos de inércia permanecem constantes, ou seja:

$$I_x = I_z = \frac{1}{4}(10)(0,2)^2 = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = \frac{1}{2}(10)(0,2)^2 = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

No sistema de coordenadas externo  $X, Y, Z$  o disco possui uma velocidade angular  $\omega = \{6\hat{j} + 3\hat{k}\} \text{ rad/s}$ , de maneira que:  $\omega_x = 0; \omega_y = 0; \omega_z = 0$ .

Aplicando as equações de  $\sum M$  para  $\Omega \neq \omega$ , resulta:

$$\sum M_x = I_x \dot{\omega}_x - I_y \Omega_z \omega_y + I_z \Omega_y \omega_z$$

$$-A_z(0,5) + B_z(0,5) = 0 - (0,2)(3)(6) + 0 = -3,6$$

$$\sum M_y = I_y \dot{\omega}_y - I_z \Omega_x \omega_z + I_x \Omega_z \omega_x$$

$$0 = 0 - 0 + 0 = 0$$

$$\sum M_z = I_z \dot{\omega}_z - I_x \Omega_y \omega_x + I_y \Omega_x \omega_y$$

$$A_x(0,5) - B_x(0,5) = 0 - 0 + 0$$

Aplicando:

$$\sum F_x = m(a_G)_x; A_x + B_x = 0$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y; A_y = -10(0,5)(3)^2$$

$$\sum F_z = m(a_G)_z; A_z + B_z - 10(9,81) = 0$$

Resolvendo as equações, obtemos:

$$\begin{cases} A_x + B_x = 0 \\ A_x(0,5) - B_x(0,5) = 0 \\ A_y = -10(0,5)(3)^2 \\ A_z + B_z - 10(9,81) = 0 \\ -A_z(0,5) + B_z(0,5) = -3,6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x + B_x = 0 \\ A_x - B_x = 0 \\ A_y = -45 \\ A_z + B_z = 98,1 \\ -A_z + B_z = -7,2 \end{cases}$$

$$A_x = 0$$

$$A_y = -45N$$

$$A_z = 52,6N$$

$$B_x = 0$$

$$B_z = 45,4N$$

Logo, a força devida do giro do disco sobre os pontos A e B será:

$$A = (-45\hat{j} + 52,6\hat{k})N$$

$$B = 45,4 \hat{k}N$$

Agora, você tem uma compreensão mais clara sobre as especificações da linha industrial sob sua responsabilidade e os equipamentos que a compõem.

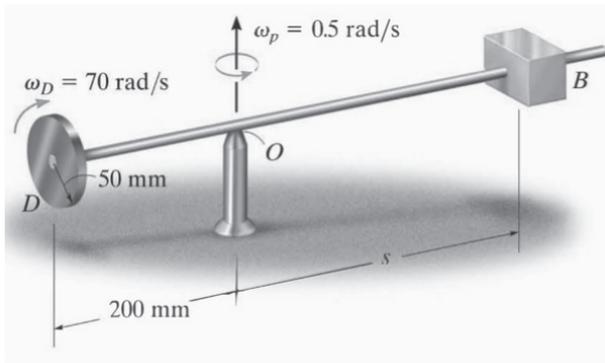
## Avançando na prática

### Equilibrando uma barra

#### Descrição da situação-problema

O efeito giroscópico é um dos fenômenos mais inusitados descritos pela mecânica newtoniana. Este efeito é encontrado em qualquer sistema em que um corpo rígido gira e, por isso, possui momento angular. Exemplos de nosso dia a dia envolvem HD de computador e ferramentas (como serras circulares e furadeiras). Para compreender tal efeito, um estudante resolveu construir um sistema, como o mostrado na Figura 4.24. Neste sistema modelo se pretende equilibrar uma barra em que, em uma extremidade, temos um disco e, na outra, um peso, cujo torque pode ser ajustado variando se sua distância  $s$  em relação ao ponto  $O$ .

Figura 4.24 | Giroscópio



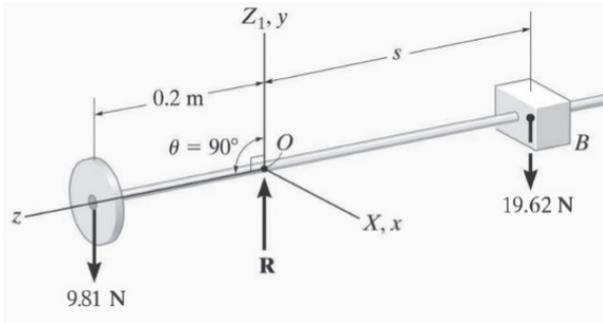
Fonte: Hibbeler (2012, p. 495).

Desta forma, nosso estudante resolveu determinar o comprimento  $s$  que permite equilibrar a barra.

## Resolução da situação-problema

Para resolver este problema, precisamos primeiro desenhar seu diagrama de forças, como observado na Figura 4.25:

Figura 4.25 | Diagrama de forças do giroscópio



Fonte: Hibbeler (2012, p. 495).

Por convenção, o eixo Z é escolhido ao longo do eixo de precessão e o eixo z é escolhido ao longo do eixo de rotação, desta maneira  $\theta = 90^\circ$ . Sabendo que a precessão é uniforme, pode-se usar a equação descrita a seguir:

$$\sum M_x = I_z \Omega_y \omega_z$$

$$F_D \cdot d_{OD} - F_B \cdot d_{OB} = \frac{1}{2} mr^2 \cdot \omega_p \cdot (-\omega_D)$$

$$F_D = 1 \cdot 9,8 = 9,8 N$$

$$F_B = 2 \cdot 9,8 = 19,62 N$$

$$9,81 \cdot 0,2 - 19,62 \cdot s = \left[ \frac{1}{2} 1(0,05)^2 \right] 0,5 \cdot (70)$$

$$s = \frac{-0,04375 + 1,962}{19,62} = 0,09777$$

Depois desses cálculos, nosso estudante resolveu testar esta teoria e colocou o peso na posição encontrada. Será que a barra ficou equilibrada?

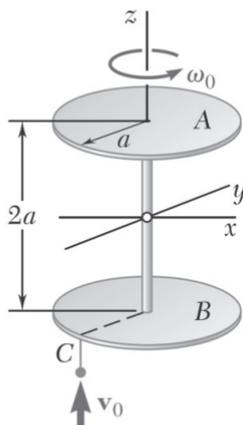
## Faça valer a pena

**1.** Um giroscópio é um mecanismo composto por um rotor que pode girar livremente em torno de seu eixo. Os ângulos que descrevem a sua rotação seguem a convenção dos \_\_\_\_\_ e suas velocidades angulares são \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_, respectivamente. Leia com atenção as afirmativas a seguir e selecione a resposta que preenche as lacunas acima.

- a) ângulos de Euler; translação, angulação, rotação.
- b) ângulos de Newton; precessão, triangulação, translação.
- c) ângulos congruentes; translação, nutação, angulação.
- d) ângulos de Euler; precessão, nutação, rotação.
- e) ângulos de Newton; nutação, angulação, translação.

**2.** Sabe-se que um satélite espacial de massa  $m$  é dinamicamente equivalente a dois discos finos de massas iguais. Os discos têm raio  $a = 800 \text{ mm}$  e estão rigidamente conectados por uma barra leve de comprimento  $2a$ , como observamos na figura 4.26. Inicialmente, o satélite está girando livremente em torno de seu eixo de simetria a uma taxa  $\omega_0 = 60 \text{ rpm}$ , quando um meteorito de massa  $m_o = m / 1.000$ , viajando a uma velocidade  $v_0 = 2.000 \text{ m/s}$  em relação ao satélite, colide com ele e fica alojado no ponto C.

Figura 4.26 | Sistema equivalente



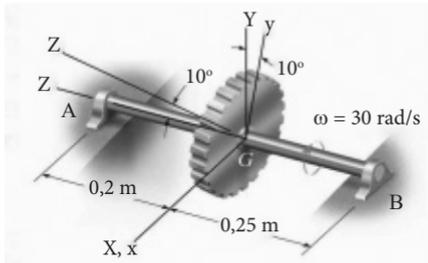
Determine a magnitude da velocidade angular do satélite imediatamente após o impacto e selecione a alternativa que melhor representa sua resposta. Considere os momentos de inércia  $I_z = \frac{1}{2}ma^2$  e

$$I = I_x = I_y = 2 \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}m \right) a^2 + \left( \frac{1}{2}m \right) a^2 \right] = \frac{5}{4}ma^2.$$

- a) 6,595 rad/s.
- b) 7,773 rad/s.
- c) 3,777 rad/s.
- d) 4,000 rad/s.
- e) 10,000 rad/s.

**3.** A engrenagem mostrada na Figura 4.27 possui uma massa de 10 kg e está montada em um ângulo de  $10^\circ$  com o eixo de rotação.  $I_z = 0,1 \text{ kg.m}^2$ ,  $I_x = I_y = 0,05 \text{ kg.m}^2$ , e o eixo está girando com uma velocidade angular constante  $\omega = 30 \text{ rad/s}$ .

Figura 4.27 | Engrenagem



Fonte: Hibbeler (2012, p. 483).

Determine as componentes da reação que o mancal axial A e o mancal radial B exercem sobre o eixo no instante mostrado.

$$a) \left\{ \begin{array}{l} A_x = 26,0N \\ A_y = 71,6N \\ B_x = 0N \\ B_y = 26,5N \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \begin{cases} A_x = 55,0N \\ A_y = 71,6N \\ B_x = 30,0N \\ B_y = 26,5N \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} A_x = 0N \\ A_y = 71,6N \\ B_x = 0N \\ B_y = 26,5N \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} A_x = 71,6N \\ A_y = 71,6N \\ B_x = 26,5N \\ B_y = 26,5N \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} A_x = 72,0N \\ A_y = 0N \\ B_x = 28,0N \\ B_y = 0N \end{cases}$$

# Referências

BEER, F. **Mecânica vetorial para engenheiros**: dinâmica. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2009.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. São Paulo: Cengage, 2012.



ISBN 978-85-8482-813-5



9 788584 828135 >