KLS

História da matemática

História da matemática

João Eichenberger Neto

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Eichenberger Neto, João

E34h História da matemática / João Eichenberger Neto.

– Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016.
224 p.

ISBN 978-85-8482-588-2

1. Matemática - História. 2. Matemática. I. Título.

CDD 510.09

2016
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Palavras do autor

Ao longo da história a Matemática evoluiu a partir de boas ideias. Isso não significa que seu desenvolvimento se deu exclusivamente a partir de acertos. Nem que a Matemática é uma ciência universal, com ideias prontas e infalível. Estudando a História da Matemática é possível perceber que o saber matemático é algo vivo e em desenvolvimento. Nesta disciplina, estabeleceremos um laço entre você, estudante, a época e o personagem relacionado com os conteúdos matemáticos que utilizaremos no nosso curso.

No estudo de qualquer conteúdo o ensino se dá por um agente externo e o aprendizado é a quantidade de ideias que conseguimos absorver. Limitar-se ao que é ensinado numa aula é conhecer apenas o que pensa um único agente, a partir das suas referências. O autoestudo visa quebrar esse limite. Ir além da sala de aula, ou da vídeoaula é conhecer outras visões sobre um mesmo assunto e, com isso, aumentar a probabilidade de compreender o que está sendo ensinado e formar suas próprias ideias.

Esta unidade curricular tem o propósito de promover uma contextualização sociocultural das ciências, em especial da Matemática, apresentando-a como construção humana, desenvolvida por acumulação, continuidade e ruptura de paradigma, intimamente ligada às transformações sociais. Num contexto em que problema apresentado é problema resolvido, ela mostra seu papel na vida humana nas diferentes épocas e também atualmente.

Iremos nos dedicar a relatar a origem dos números e sistemas de numeração e ratificar sua importância social. Conheceremos bases numéricas que foram utilizadas ao longo da história e veremos que algumas delas são utilizadas até hoje. Tudo isso para que você entenda bem os números e possa utilizá-los da melhor forma possível. Nesta unidade curricular apresentaremos, muitas vezes, as motivações e dúvidas dos sábios da época para que você tenha uma visão da Matemática como nunca teve. Essa visão lhe permitirá entender essa ciência como um saber significado e totalmente integrado ao seu mundo.

Após conhecermos a história dos números, conheceremos a da Geometria e do Cálculo Diferencial e Integral. Por último, estudaremos os aspectos mais recentes da História da Matemática, especialmente aqueles que influenciaram o ensino de Matemática no Brasil. Aproveitaremos esse momento para entender o contexto do Ensino da Matemática no nosso país.

História dos algarismos e numerações

Convite ao estudo

São 6h30 da manhã, hora de acordar! Henrique abre seus os olhos, confere as horas e se depara com os primeiros números dentre muitos que farão parte do seu dia. Em seguida, levanta-se da cama, vai até o banheiro e liga seu barbeador elétrico na tomada, com o cuidado de escolher aquela que tem o adesivo 110V, e não 220V.

Depois vai até a cozinha preparar seu café. Pretende tomá-lo assistindo ao telejornal e, para isso, digita no controle remoto da televisão o número do canal em que o programa será transmitido. O apresentador do jornal informa, logo no início da edição, o que ele já sabia: seu time do coração havia ganhado por 2 a 0 do rival e os dois gols foram marcados aos 14 e 36 minutos do segundo tempo, pelo jogador que usa a camisa 9.

Ao sair de casa, dirigiu-se ao ponto de ônibus para pegar o transporte que o levaria ao trabalho. O primeiro veículo que passou não era o seu, pois ele deveria tomar o da linha 210 e aquele era o da 315. Quando entrou no ônibus da sua linha, olhou para o relógio e percebeu que não corria o risco de chegar atrasado porque ainda faltavam 30 minutos para o início do expediente.

O tempo do trajeto era de 20 minutos e o ponto fica bem em frente do prédio onde é seu escritório, no 12º andar. Esse tempo foi mais do que suficiente para que Henrique iniciasse uma reflexão que o acompanharia por todo o dia: como seria sua vida sem os números? Será que eles sempre estiveram entre nós? Quando surgiram? Quem os inventou?

Ao chegar no escritório viu, sobre sua mesa, todas aquelas planilhas e relatórios com os quais lidava todos os dias. Percebeu que lidar melhor com os números poderia fazer com que seu trabalho fosse realizado com maior eficiência. Ao ler um artigo, encontrado em uma pesquisa na internet, percebeu que as respostas àquelas perguntas poderiam ser um caminho para compreender melhor os números e, com isso, melhorar os resultados do seu trabalho.

O artigo em questão apostava na melhora do *senso numérico* a partir do conhecimento sobre quando e como os números foram descobertos e como os sistemas de numeração foram desenvolvidos. A partir de relatos e atividades propostas seria possível aprimorar seu trato com os números.

Nesta unidade reviveremos a experiência de Henrique após a leitura do artigo. Conheceremos o processo de descoberta dos números e teremos ainda mais certeza de sua importância, não só histórica, mas também nos dias atuais. Será uma ótima oportunidade para conhecermos um dos importantes percursos históricos que resultaram no desenvolvimento da Matemática.

Seção 1.1

O senso numérico

Diálogo aberto

Vivenciaremos o que Henrique experimentou enquanto lia o artigo e executava as atividades propostas nele. Teremos contato, inicialmente, com alguns relatos sobre as primeiras observações numéricas no cotidiano das pessoas, ao longo da História, e a causa provável para isso. Esses relatos nos mostrarão as primeiras "boas ideias" que provavelmente, foram a semente do que hoje chamamos de Matemática.

Quando estiver lendo o texto é preciso que você tenha o seguinte olhar: não se trata apenas de um relato de fatos e curiosidades, trata-se de uma tentativa de conhecer a origem dos números e entender sua essência.

Compreendendo como se deram as primeiras ideias sobre numeração, procuraremos entender processos simples de contagem desenvolvendo uma maneira própria de contar. A partir disso, realizaremos cálculos matemáticos buscando desenvolver métodos para torná-los mais ágeis e eficientes. Nosso objetivo é aprimorar a maneira como utilizamos os números, nosso senso numérico, como fez Henrique.

Não pode faltar

A História considera como Idade da Pedra o período que vai desde os primeiros registros, que datam de aproximadamente 5.000.000 de anos antes de Cristo, até aproximadamente 3.000 anos a.C., com o advento do trabalho com metais. Nesse período os povos eram essencialmente nômades e caçadores. Tudo que era desenvolvido visava à possibilidade de deslocamento da forma mais ágil possível e a capacidade de caçar com mais eficiência.

De 7.000 a.C., até o fim da Idade da Pedra já eram praticados certos modos primitivos de agricultura e domesticação de animais, mas nada que justificasse algo a mais que os limitados avanços científicos observados no período. É importante destacar que não foi por falta de capacidade ou inteligência que a tecnologia não avançou até 3.000 a.C., mas, talvez, por não haver uma razão prática que justificasse.

Uma necessidade que o homem parece ter tido, independentemente do período histórico é a de contar. Talvez não da forma como fazemos hoje, ou seja, quantificando observações da maneira mais exata possível. A preocupação essencial nos primórdios da contagem era a comparação, saber se há mais ou menos. Conforme a sociedade foi se reestruturando, a agricultura se desenvolveu, os povos deixaram, aos poucos, a característica nômade e a ciência evoluiu, aprimorando a maneira como se contava.

Poderíamos escolher diversos temas na Matemática para iniciarmos os relatos sobre como se deu a História dessa ciência. Tomaremos como ponto de partida a ideia de número como instrumento de contagem, isto é, o senso de número e as consequências dessa descoberta.

Considera-se como a "matemática mais antiga" aquela resultante dos primeiros movimentos do homem na direção de sistematizar conceitos como de número, forma e grandeza, não necessariamente nessa ordem. Observaremos essa sequência para contar a História da Matemática.

Figura 1.1 | Modos de contagem

Fonte: DPDMD.

Acredita-se que o conceito de número e o processo de contagem se desenvolveram muito antes de qualquer registro histórico de que se tenha notícia. Nesse sentido, a forma como tudo começou é absolutamente conjectural. Entretanto não é muito difícil admitir que, ao menos nas épocas mais primitivas, a noção de mais ou menos, ao se acrescentar ou retirar algo, era importante em muitas atividades.

À medida que a sociedade foi se reorganizando, essa preocupação aumentou.

Uma tribo tinha que saber como a população variava, se tinha muitos ou poucos inimigos. Mais tarde, o criador de animais precisava ter um certo controle sobre seu rebanho e o agricultor, sobre como andava sua produção.

No início, registros simples eram suficientes. Podia-se dobrar um dedo para cada membro da tribo, associar uma pedra para cada inimigo visto, fazer um entalhe num pedaço de madeira, ou mesmo de osso, para cada animal do rebanho, um nó em uma corda para cada espiga de milho colhida, como se observa nas figuras a seguir.

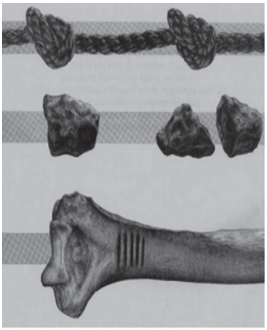
Figura 1.2 | Evolução

Fonte: DPDMD.

Figura 1.3 | Osso de Ishango

Fonte: <https://goo.gl/1PI5d5>. Acesso em: 17 mar. 2016.

Figura 1.4 | Contagem por correspondência



Fonte: <https://goo.gl/lzD9QZ>. Acesso em: 17 mar. 2016.

Posteriormente, tem-se relatos de sons vocais que representavam agrupamentos, como a dúzia, que utilizamos hoje em dia, para uma coleção de doze objetos. Nos mais longínquos períodos em que se observou a contagem vocal, eram utilizados sons diferentes para o objeto a ser contado mesmo que tivessem quantidades iguais.

É algo similar ao que observamos hoje no português quando nos referimos aos coletivos, por exemplo, matilha (de cães ou lobos), tropas (de cavalos) ou até mesmo par (de sapatos).

Seja qual for a forma de contagem escolhida, é preciso determinar aquele que será o elemento unitário da contagem. Por isso arriscamos a afirmar que, desde que o homem começou a contar, o 'número 1', de alguma forma, sempre existiu.

Nas próximas unidades veremos que na geometria, e também quando falamos em grandeza, esse elemento fundamental também foi essencial.

Pesquise mais

Assista ao vídeo *A História do Número 1*, veiculado pelo canal *History Channel*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3rijdn6L9sQ>. Acesso em: 17 nov. 2016.

Quando desejamos quantificar a geometria, seja ela plana ou espacial, precisamos do segmento unitário. Para definirmos uma grandeza, é fundamental estabelecermos a unidade, por exemplo, o metro ou a polegada, que vale 0,0254 metros, ou o pé, que mede 0,3048 metros, ou ainda, 12 polegadas. Em seguida, esses elementos vão se compondo, por soma e subtração principalmente, fazendo com que cada vez mais o homem tenha que desenvolver seu senso numérico.

Assimile

O profissional das ciências exatas tem que ter muito claro esse conceito. Qualquer contagem, medição e quantificação de uma observação passa por estabelecer uma unidade, ou elemento unitário, a partir do qual algo pode ser então contado, medido ou quantificado.

Reflita

Esse conceito se confunde com a própria definição de medidas conhecidas, como o metro, os pés e as jardas. Você sabe qual é a origem de cada uma delas? Será o metro que utilizamos hoje é o mesmo de tempos atrás? Ao adotarmos um sistema de medida universal é possível garantirmos precisão nas medidas que fazemos?

A partir da definição desses elementos fundamentais, a Matemática parece ter ganhado corpo. As tentativas de utilizá-la para resolver outros problemas foram se intensificando. Em decorrência disso, a História testemunhou, em muitas civilizações, sobretudo na Grécia, a tentativa de pensadores como Euclides de Alexandria, Tales de Mileto e Pitágoras de Samus, entre outros, de fazer Matemática pela Matemática.

Euclides de Alexandria foi o responsável por organizar aquela que talvez seja a mais importante obra da Matemática, a coleção de 13 livros chamada *Os elementos*. Tales estudou, entre outras coisas, a proporcionalidade gerada por feixes de retas interceptadas por transversais.

Pitágoras, talvez o mais famoso entre esses três, teria fundado a Escola Pitagórica, uma sociedade quase secreta que estudava fundamentalmente os padrões observados nos números. É atribuída ao próprio Pitágoras a frase: "Tudo é número". Suas contribuições vão muito além da matemática, passando inclusive pela Música.

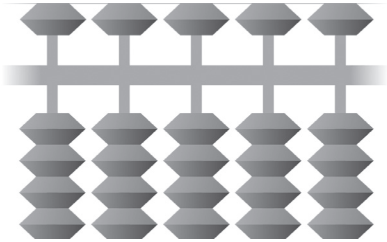
Para esses matemáticos e seus discípulos não era mais necessária uma situação prática, os problemas passaram a existir e serem também resolvidos de forma apenas teórica. Uma das consequências disso é que os documentos que relatam o que se passava nesse período são menos escassos, possibilitando que a História, a partir de então, possa ser relatada com mais precisão.

Nesse momento não bastava apenas desenvolver um raciocínio provisório, que proporcionasse a resolução do problema em questão. Era preciso difundir, discutir, criar novas ferramentas. Por isso, a preocupação com os registros se torna cada vez maior.

Contrapondo-se a esse fato, a ausência de alguns registros, de períodos mais remotos principalmente, dificulta a comprovação de tudo o que se sabe da História da Matemática. Acredita-se que a Matemática possa ter surgido, de fato, em rituais religiosos dado o misticismo de alguns de seus elementos. Por não se saber ao certo a real origem da Matemática, a preocupação nesta disciplina não deve se restringir aos fatos históricos em si, mas deve também abranger motivações e formas que cercam a descoberta dos números.

Para que isso fique ainda mais claro e possamos entender melhor o que vem a seguir, tente responder às perguntas propostas abaixo. Procure ter boas ideias para que sua contagem possa ser feita de forma mais sistemática e, portanto, mais prática e menos suscetível a erros.

Figura 1.5 | Ábaco (instrumento primitivo utilizado para contagem)



Fonte: <https://pixabay.com/en/abacus-counting-math-ancient-wood-33275/>. Acesso em: 17 mar. 2016.

Exemplificando

Como você contaria a quantidade de palitinhos desenhados a seguir?

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | |

Há mais palitinhos acima que letras “A” abaixo?

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

AA

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

AA

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

AA

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

AA

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

AA

Foi possível perceber a importância de um método de contagem? Você desenvolveu uma unidade de contagem, de cinco em cinco, dez em dez, utilizando uma marcação para cada grupo contado. Nesse caso, foi possível vivenciar um pouco de como provavelmente se deu o início da Matemática, a partir do desenvolvimento do senso numérico.

Falamos até aqui de senso numérico procurando formar o conceito ao longo do texto. Fazendo a leitura e realizando a atividade proposta, pretende-se que você tenha entendido esse termo como a capacidade de utilizar os números, seja em contagens ou em operações, a partir do conhecimento de sua história.

Ao pensarmos na melhor forma de contar os símbolos apresentados, recriamos algumas descobertas feitas nos primórdios da Matemática. Vivenciamos alguns dos “porquês” sobre como as coisas são feitas até hoje dessa forma. Se olharmos de perto para o número 342, trata-se de 3 grupos de cem, 4 de dez e duas unidades. Conta-se de dez em dez até que se tenha dez desses grupos e, então, esses grupos são separados. O processo é repetido até que tudo seja contado.

Sem medo de errar

Você já é capaz de responder à pergunta proposta no "Convite ao estudo"?

Não existe uma resposta única. Depende da percepção de cada um sobre o que tratamos nesta unidade. O que não podemos é perder de vista que temos um objetivo maior: perceber como anda seu senso numérico.

Vamos explorar um pouco mais o exemplo apresentado há pouco. Você deve ter contado 264 palitinhos e 265 letras "A". Para chegar a esse resultado é possível que você tenha, ou não, desenvolvido um método. Provavelmente, os elementos não foram contados de um em um. Foram separados em grupos menores e depois você contou os grupos. Nesse caso, há diversas possibilidades de organizar a quantidade que deveria ter em cada grupo e subgrupo. Agora, vamos praticar de uma outra forma.

Escolha dividir em grupos de dez elementos. Desenhe um símbolo para a unidade a ser contada, outro para representar um grupo e um terceiro para representar dez desses grupos. Represente sua contagem utilizando esses símbolos. Some as quantidades obtidas e represente o número total no seu sistema de numeração.

Atenção

Você pode realizar a soma das quantidades utilizando a representação dos números como estamos acostumados. Os símbolos desenhados servirão apenas para representar as quantidades, e não para as operar.

Resposta: são 264 palitinhos e 265 letras "A", certo? Se escolhermos ø para unidade, ® para um grupo e † para dez grupos, teremos 264 = ††®®®®®® øøøø, por exemplo. Como temos 265 letras "A" teremos 265 = ††®®®®®® øøøøø.

Avançando na prática

Afiando os cálculos mentais

Descrição da situação-problema

A multiplicação nada mais é que uma soma sucessiva. Quando lemos 4 + 4 + 4 temos o 4 somado 3 vezes, então podemos escrever $4 \times 3 = 12$. Nas primeiras séries da educação básica memorizamos a tabuada, o que faz com que a multiplicação, ao invés da soma, seja um bom negócio. Depois aprendemos multiplicação com dois ou mais algarismos. Nesse momento, voltamos às origens, ou seja, fazemos somas para resolver uma multiplicação.

Esse pequeno texto teve a intenção de lembrar-lhe a relação direta entre essas duas operações. Na nossa busca por um melhor senso numérico, podemos utiliza-las para “afiar” nossa capacidade de realizar alguns cálculos com agilidade. Utilizaremos como pano de fundo as ideias apresentadas e discutidas na teoria e na prática nesta seção.

Imagine que precisamos realizar a soma 467 + 198. O algoritmo da soma manda colocarmos um número sobre o outro, posicionados de forma que as unidades, dezenas, centenas, e assim por diante, estejam uma embaixo da outra. Em seguida, somamos algarismo por algarismo. Quando a soma passa de dez, dizemos “vai um”, e assim seguimos até que a soma esteja pronta.

Mas não seria mais fácil somar mentalmente 200, que dá 667, e dois, já que estamos somando apenas 198? Resultado: 665. Veja que somar 100, 200, 300, ou até mesmo 10, 20, 30, é mais fácil pois trata-se de um grupo fechado, depois é só tirar ou acrescentar o que se tem a mais ou a menos.

No caso do produto não é diferente. Quanto dá 47×12? Poderíamos montar o algoritmo da multiplicação, mas isso exigiria, talvez, um papel e algum tempo. E se fizéssemos $47 \times 10 + 47 \times 2$, isso daria $470 + 84 = 470 + 100 - 16 = 570 - 16 = 554$. Que tal tentar você mesmo?

Proponha maneiras “mais práticas” para realizar as seguintes operações:

a) 797 + 347

b) 1567 – 1291

c) 199×44

d) 456×19

Lembre-se

Você se lembra dos relatos sobre a descoberta dos números? De acordo com o problema a ser resolvido devemos ir apurando nosso senso numérico.

Resolução da situação-problema

Sugestões:

a) $800 + 347 - 3 = 1147 - 3 = 1144$

b) $1567 - 1300 + 9 = 267 + 9 = 267 + 10 - 1 = 277 - 1 = 276$

c) $200 \times 44 - 44 = 8800 - 44 = 8756$

d) $456 \times 20 - 456 = 9120 - 420 - 36 = 8700 - 36 = 8664$

Faça você mesmo

Proponha maneiras "mais práticas" para realizar as seguintes operações:

a) $573 + 2247$

b) $15831 - 11299$

c) 333×29

Faça valer a pena

1. Na Idade da Pedra há poucos indícios de um desenvolvimento significativo da Matemática. Isso ocorreu:

a) Por incapacidade dos seres humanos que viviam naquela época.

b) Devido ao grande desenvolvimento literário ocorrido na época, que despertava mais o interesse daqueles povos.

c) Porque a sociedade era nômade, então a preocupação era com questões essencialmente práticas, como a agilidade no deslocamento e o desenvolvimento de mecanismos de caça.

d) Porque os homens que viviam naquele período não tinham interesse real em se comunicar uns com os outros.

e) Porque o homem tinha hábitos noturnos e, sem luz, não era possível desenvolver qualquer ciência.

2. Euclides de Alexandria é conhecido com o autor de qual importante obra para o desenvolvimento da Matemática?

a) *Principia.*

b) *Aritmética.*

c) *Odisseia*

d) *Os elementos.*

e) *O discurso do Método.*

3. Quantas letras há nesta sequência?

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccc

a) 84

b) 85

c) 86

d) 87

e) 88

Seção 1.2

Bases de um sistema de numeração

Diálogo aberto

Agora que conhece um pouco melhor os números, você se sente mais confiante para trabalhar com eles? Ao perceber sua presença no nosso dia a dia, fica claro que lidar melhor com eles pode ser uma boa ideia. Nesta unidade temos como objetivo ampliar nosso senso numérico, certo? Por isso, na seção anterior tratamos dos números desde sua criação, passando pelo desenvolvimento dos sistemas de numeração.

Nesta seção, Henrique irá continuar sua viagem no tempo, conhecendo bases de numeração observadas e utilizadas ao longo da história. O principal objetivo é conhecer um pouco melhor os algarismos binários, ou seja, a numeração de base 2. Essa base chama sua atenção por ser bastante utilizada pelo pessoal de TI (tecnologia da informação) da empresa. Como seria um número na base binária escrito na base 10 e vice-versa?

Respondendo a perguntas como essa, Henrique pretende compreender melhor como ocorre a sistematização da numeração a partir da base escolhida. Sabendo isso, irá aprender a converter um número da base 10, que é normalmente utilizada, para base 2. E você, caro aluno, é convidado a viver essa experiência.

Não pode faltar

Na medida em que as contagens se tornam mais extensas, o homem sente a necessidade de uma melhor sistematização dos sistemas de contagem. Os dedos das mãos e pés, as marcações nos ossos e os nós nas cordas, bem como as pedrinhas coletadas, não se mostram mais tão eficientes.

Como fizemos na seção anterior, precisamos dispor os números em grupos básicos, convenientes, em geral de acordo com a correspondência que pretendemos empregar. Se utilizarmos os dedos de uma mão, os elementos serão dispostos em grupos de cinco, se utilizarmos as duas mãos, serão grupos de dez, mãos e pés, vinte, e assim por diante.

Primeiramente o método consistia em escolher um certo número como base, e os números menores que ele passavam a ter um símbolo e nome que os identificava. Por exemplo, escolhendo o cinco como base, teríamos 1 (um), 2 (dois), 3 (três), 4 (quatro) e 5 (cinco). De forma geral, se a base escolhida fosse b, os números e símbolos seriam 1 (um), 2 (dois), 3 (três), ..., b.

Atualmente utilizamos a base 10, ou base decimal, em correspondência com os dedos das duas mãos, temos nomes para os números até dez. Se pensarmos nas palavras em inglês para esses nomes, a palavra para 11, que é *eleven*, derivaria, segundo filósofos, de *ein lifon*, que significa "um acima de dez". Nesse caso para 12, que dizemos *twelve*, teríamos *twe lif*, que significa "dois acima de dez". Essa nomenclatura segue até que chegamos em 20, cuja palavra em inglês é *twenty*, derivada de *twe-tig*, que significa "dois dez".

Apesar da conveniência de utilização da base, diversas outras bases são encontradas em evidências históricas. Muitas tribos de índios americanos utilizam até hoje as bases 2 e 3 para suas contagens, apesar de serem minoria. A palavra para o número oito na língua indo-germânica sugere que seu significado seria uma forma dual para quatro e ao observar a palavra para nove, em latim, seu significado seria novo. Isso poderia evidenciar a utilização da base 4.

Por ter tantos divisores inteiros ou por ser o número aproximado de lunações (tamanho do ciclo lunar) no ano, a base 12, também é muito encontrada até hoje. Além do relógio que marca intervalos de dozes horas, temos doze meses no ano, há doze polegadas em um pé, entre tantos outros exemplos.

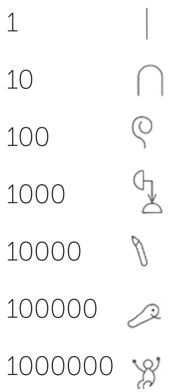
Tribos que andavam descalças utilizavam amplamente a base 20, ou base vigesimal. A palavra em inglês para pontuação, *score*, corresponde a uma vintena. O bem definido sistema de numeração maia também se utiliza dessa base em algumas contagens. A contagem maia para o tempo, gerou, no ano 2012, a polêmica sobre o possível "final dos tempos", já que alguns historiadores acreditavam que aquele ano correspondia ao fim de um ciclo e o povo maia creditava algumas tragédias ao final desses ciclos.

Também associada à contagem tempo, a base 60, conhecida como sexagesimal, é muito encontrada na história e nos dias atuais. Contamos um minuto quando temos 60 segundos e uma hora quando temos 60 minutos. Então entramos na base 12 quando observamos que doze horas dão meio-dia, e assim por diante.

A matemática parece ter tido origem na tentativa do homem de resolver questões práticas. Nesse caso, na mente dos habitantes da Terra durante a Idade da Pedra, dois cavalos pareciam ser diferentes de duas frutas, por exemplo. A quantidade é a mesma, porém, por se tratarem de objetos diferentes, o termo utilizado não era o mesmo. Milhares de anos foram necessários para que o homem fizesse distinção entre o concreto e o abstrato. A quantidade de tentativas para estabelecer uma contagem que contasse "de tudo" pode ser a explicação para a demora para estabelecer uma base ou para a existência de tantas diferentes.

Com o desenvolvimento da escrita, no entanto, parece ter ficado clara a preferência pela base 10. As línguas modernas são construídas, quase sem exceção, em torno dessa base. É preciso lembrar que quando falamos de base 10, base 20 e base 60, pressupomos a existência do zero, desde os primórdios da contagem, o que não é necessariamente verdade. O zero surgiria apenas nos últimos anos antes de Cristo.

Figura 1.6 | Símbolos egípcios para numeração



Fonte: Eves (1995, p. 31).

Os egípcios, por exemplo, utilizavam a base 10 e praticamente ignoravam a presença do zero. Eles usavam um sistema de numeração por agrupamento. Para registro das contagens, adotavam os símbolos apresentados na Figura 1.6, de acordo com a correspondência representada.

Se desejavam representar uma contagem que resultaria 3024, por exemplo, observariam inicialmente tratar-se de 4 unidades, 2 grupos de 10 e 3 de 1000. Nesse caso, simbolizariam fazendo conforme a Figura 1.7:

Figura 1.7 | 3024 no sistema egípcio

Fonte: Eves (1995, p. 31).

Reflita

Olhando para esse desenho temos a sensação de que já fizemos algo parecido, certo? Naquela oportunidade, no entanto, representamos números como 264 e 265, que não têm zeros, justamente para não termos que pensar em como representá-lo. Os egípcios nem se preocupavam com isso, pois talvez o zero não tivesse sido inventado. Após essa "invenção", os sistemas de numeração tiveram que se adaptar. Não é incomum encontrar algumas inconsistências em alguns desses sistemas causadas justamente pelo desconhecimento da existência do zero.

Para os egípcios, o registro era exatamente o mesmo, independentemente da ordem em que os símbolos estavam dispostos. A ferradura era sempre a representação de um grupo de 10 e a haste vertical, a unidade. Isso parece ser um benefício, mas traz consigo a necessidade de mais símbolos cada vez que um novo múltiplo de 10 aparece na contagem. Incluindo o zero no contexto e buscando reduzir ao máximo o número de símbolos, de acordo com a base escolhida, é que os sistemas de numeração mais modernos foram se constituindo.

Há pouco foi mencionado que, na base 5, por exemplo, tínhamos símbolos para 1, 2, 3, 4 e 5, com a existência do zero, o símbolo para 5 dá lugar ao símbolo para zero, então passamos a ter registros para 0, 1, 2, 3 e 4. Na base 10, portanto, teremos símbolos para 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O próprio 10 já é composto por esses símbolos, que chamamos hoje de algarismos. São dez símbolos, porém o primeiro é zero, então o último será o nove. A base informa a quantidade de algarismos, mas esse número não está entre eles. Na base 7, que utilizamos para contar os dias da semana, temos 7 algarismos, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Não é necessário qualquer outro símbolo se ficar estabelecido que a posição (ou ordem) faz diferença. Nos números 123 e 321, por exemplo, temos os mesmos símbolos, no entanto o símbolo para 1 e o símbolo para os que contam grupos com quantidades são diferentes. No 123 são três (3) unidades, dois (2) grupos de dez e um (1) de cem. No 321 temos uma (1) unidade, os mesmos dois grupos de dez, já que o dois permanecem ocupando a segunda posição, e três (3) grupos de cem.

Leonardo Fibonacci, um importante matemático italiano da Idade Média, ("Leonardo filho de Bonaccio", 1175-1250), publicou em 1202, com 27 anos, a obra *Liber abaci* cuja introdução diz muito sobre essa questão: "Nouem figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1 cym his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appelatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur". A tradução é: "Estes são os nove algarismos indianos 9 8 7 6 5 4 3 2 1, com esses nove algarismos, e com o sinal 0, que os árabes chamam de *zephirum*, pode-se escrever qualquer número, como se demonstrará a seguir".

Assimile

O conceito tratado no penúltimo parágrafo e ilustrado pelo texto de Fibonacci merece destaque. Chama-se propriedade posicional e sua utilização pode nos ajudar a desenvolver o senso numérico, assim como ajudou os povos antigos na busca por um sistema de numeração mais adequado.

Fibonacci também estudou uma sequência que tem o número 1 como seus dois primeiros elementos e, a partir do terceiro, um termo era obtido pela soma dos anteriores. Os oito primeiros elementos da *Sequência de Fibonacci*, como ficou conhecida, são, portanto: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 e 21. Esses números foram obtidos, inicialmente, observando-se a quantidade de casais de coelhos com o passar do tempo, tendo em vista as características da reprodução desses animais.

Posteriormente, esse padrão foi observado em muitos outros elementos da natureza.

Pesquise mais

Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino, **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, Ed. Especial PROFMAT,2015, p. 578–591, Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas – UFSM.Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/index.php/cienciaenatura/article/viewFile/14664/pdf>. Acesso em: 17 nov. 2016.

Um número na base 10, escrito no sistema de numeração posicional, deve ser entendido como a soma das quantidades de grupos unitários, de dez, de cem, de mil,... elementos. Se representarmos os algarismos por a0, a1, a2, e assim por diante, qualquer número poderá ser escrito como $a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_n \cdot 10^n$ ou, como é mais apropriado $a_n \cdot 10^n + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$.

Exemplificando

O número 1567 é entendido como 1000 + 500 + 60 + 7 = 1·1000 + 5·100 + 6·10 + 7, ou $1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7$. Já 405 é o mesmo que 4·100 + 0·10 + 5, ou $4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5$. Nesse caso podemos escrever, por exemplo, 123 como $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3$ e 321 como $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1$.

Faça você mesmo

Escreva o número 102030 como proposto no "Exemplificando" acima.

Resp.: $1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^1$.

Se um número estiver na base 5, também pode ser escrito no sistema posicional seguindo esse mesmo princípio. As diferenças estão nos algarismos, pois só poderemos utilizar 0, 1, 2, 3 e 4, e os grupos serão contados de 5 em 5, depois de 25 em 25, e assim por diante. Para indicarmos a base em que o número está escrito, utilizamos o subíndice correspondente à base escolhida. Nesse caso, um número como o 1023_5, que está na base 5, como indicado, deve ser entendido como 1·125 + 0·25 + 2·5 + 3 ou $1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3$.

Para convertermos um número na base 5 para um número na base 10, basta fazer a conta indicada $1 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 = 138$, ou seja, $138 = 1023_5$. O número 234_5 pode ser escrito como $2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 4 = 69$.

Faça você mesmo

Escreva o número 1203_5 na base 10.

Resp.: $125+2 \cdot 25+3=178$

Quando um número estiver na base 2, também podemos fazer o mesmo. As diferenças estão nos algarismos, pois só poderemos utilizar 0 e 1, e os grupos serão contados de 2 em 2, depois de 4 em 4, 8 em 8, e assim por diante. Nesse caso, um número como o 10101_2, que está na base 2 como indicado, deve ser entendido como $1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1$ ou $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1$.

Para convertermos um número na base 2 para um número na base 10, fazemos o mesmo, isto é, $1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 = 21$, ou seja, $21 = 10101_2$.

Faça você mesmo

Escreva o número 111001_2 na base 10.

Resp.: $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 57$

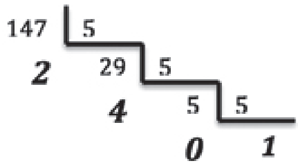
Também é possível fazer o contrário. Dado um número na base 10 podemos escrevê-lo em base 5, base 2 ou qualquer outra base que desejarmos.

Exemplificando

Se o número $147 = 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7$ é dividido por 10, que é sua base, obtemos 14 e sobram 7. Ou seja, percebemos que há 14 grupos de 10 e sobram 7 unidades. Nesse caso, quando um número está na base 10 e dividimos por 10, descobrimos os algarismos da unidade. Se dividimos o 14 por 10, obtemos 1 e sobra 4. É como se tivéssemos dividindo $140 = 147 - 7$ por 100. O resultado informa que há um grupo de 100, e o resto informa que sobram 4 grupos de 10. Ou seja, dividindo por 10 novamente, obtemos como 4 o algarismo das dezenas (quantidades de grupos de 10) e, "de quebra" a quantidade de grupos de 100. Como essa quantidade é menor que 10, que é a base, não há mais o que fazer, pois descobrimos quantas são as unidades (7), os grupos de 10 (4) e os de 100 (1).

Se desejamos que o número esteja na base 5, as divisões têm que ser por 5, para separarmos as unidades, os grupos de 5, de 25, e assim por diante, como na Figura 1.8:

Figura 1.8 | Algoritmo para troca de base



Fonte: elaborada pelo autor.

As divisões sucessivas por 5 nos dizem que há 1 grupo de 125, 0 grupos de 25, 4 grupos de 5 e 2 unidades, portanto, teremos 147 igual a:

$1 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 2$, ou 1042_5.

Sem medo de errar

Durante a leitura do artigo, Henrique percebeu que entendendo o processo de construção do sistema de numeração posicional, ele poderia transformar um número de base 10 em qualquer outra base. A base 2 era muito presente no seu dia a dia, pois estava sempre em contato com o pessoal da TI. Escolheu então um número qualquer e o converteu para base 2.

Imagine que o número escolhido tenha sido 147, que anteriormente foi escrito na base 5. Sua tarefa é escrevê-lo na base 2. Para isso você deve realizar divisões sucessivas por 2. A hora de parar será quando o último resultado for menor que 2. Então observe os restos, de cima para baixo, e o último quociente, e você terá a quantidade de unidades, de grupos de 2 elementos, de 4 elementos, de 8, e assim por diante.

Lembre-se

Lembre-se de que a quantidade de grupos com mais elementos é a única que é dada pelo resultado da divisão (quociente). Todas as outras são informadas pelos restos. O primeiro resto fornece a quantidade de unidades; o segundo, a quantidade de grupos com 2 elementos; o terceiro, a quantidade de grupos com 4 elementos; e assim sucessivamente.

147 ÷ 2: quociente é 73 e resto **1**

73 ÷ 2: quociente é 36 e resto **1**

36 ÷ 2: quociente é 18 e resto **0**

18 ÷ 2: quociente é 9 e resto **0**

9 ÷ 2: quociente é 4 e resto **1**

4 ÷ 2: quociente é 2 e resto **0**

2 ÷ 2: quociente é 1 (que é menor que 2) e resto é 0

Nesse caso o valor da soma será 10010011_2.

Resposta: 10010011_2

Avançando na prática

Somando números escritos na base 2

Descrição da situação-problema

Imagine que Henrique deseje somar os números 1110111_2 e 111101_2. Utilizando o algoritmo de soma que conhecemos para soma com números de base 10, poderíamos tentar uma adaptação para a base 2. Por não acharmos essa possibilidade viável, recomendamos que você utilize o que aprendemos nesta seção: mudança de base. Se esses dois números estivessem escritos na base 10 seria fácil somá-los, certo? Então é dessa forma que iremos fazer.

Lembre-se

$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 5$, ou seja, para transformar um número da base 2 para a base 10, basta realizarmos a conta correspondente à expansão do número, tendo em vista as quantidades de cada potência de 2. Para voltar para a base 2 devemos realizar divisões sucessivas por dois, observar os restos e o último quociente.

Resolução da situação-problema

Como $1110111_2 = 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1 = 119$ e $11110_2 = 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0 = 30$, a soma na base 10 vale 149.

149 ÷ 2: quociente é 74 e resto **1**

74 ÷ 2: quociente é 37 e resto **0**

37 ÷ 2: quociente é 18 e resto **1**

18 ÷ 2: quociente é 9 e resto **0**

9 ÷ 2: quociente é 4 e resto **1**

4 ÷ 2: quociente é 2 e resto **0**

2 ÷ 2: quociente é **1** (que é menor que 2) e resto é **0**

Nesse caso, o valor da soma será 10010101_2.

Faça você mesmo

Calcule o valor da soma 111001_2 + 1110110_2. Apresente o resultado na base 2. *Resposta*: $57 + 118 = 175 = 11110101_2$

Faça valer a pena

1. Leonardo Fibonacci foi um famoso matemático italiano da Idade Média. Muitas de suas realizações são importantes até hoje, notadamente a sequência que leva seu nome. Os dois primeiros termos da sequência de Fibonacci são iguais a 1. Do terceiro em diante, o valor de cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores.

Qual o décimo elemento da sequência de Fibonacci?

a) 13

b) 21

c) 35

d) 56

e) 91

2. Leonardo Fibonacci foi um famoso matemático italiano da Idade Média. Muitas de suas realizações são importantes até hoje, notadamente a sequência que leva seu nome (sequência de Fibonacci).

Em 1202 ele publicou uma importante obra. Qual era o nome dessa obra?

a) *Liber abaci*

b) *Aritmética*.

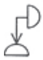
c) *Princípia.*

d) *A odisseia*.

e) *Os elementos.*

3. Os egípcios utilizavam a base 10 para representar os números, com símbolos distintos para indicar as potências de 10.

Um dos símbolos que eles utilizavam para indicar 100000 era:

a) 

b) 

c)

d) 

e) 

Seção 1.3

Número, numeral e algarismo

Diálogo aberto

Durante suas leituras, Henrique percebeu que um número, quando escrito, se chama numeral. Lembrou que o homem difere de outros animais de modo mais acentuado por ter desenvolvido uma linguagem, não só falada, mas também escrita. Juntando as duas coisas percebeu que os registros numéricos tinham uma importância ainda mais significativa do que aquela que havia notado até o momento.

Refletindo sobre as bases numéricas, percebeu a importância do registro. Desde as marcas e entalhes em ossos ou em pedaços de madeira até os sistemas que utilizamos hoje, a humanidade passou por muitas experiências interessantes.

Olharemos de perto para alguns sistemas de numeração deixados de lado na Seção 1.2, quando tínhamos como propósito conhecer as bases mais usuais. Durante esta seção, veremos algumas das preocupações que os povos mais antigos tiveram para criar seu sistema de contagem. Preocupações que não temos hoje, já que utilizamos um sistema pronto.

Observaremos formas primitivas de registros numéricos como a escrita cuneiforme, muito comum na Mesopotâmia, o sistema romano de numeração, entre outros. Faremos conversões de números que conhecemos hoje para como eram conhecidos por esses povos. Isso tudo com o propósito de melhorar ainda mais nosso senso numérico. É hora de encarar os números que você vê por todos os lados como nunca antes!

Não pode faltar

A História da Humanidade, assim como a História da Matemática, é comumente dividida em períodos, de acordo com características culturais e científicas mais relevantes. Isso não significa que nada diferente tenha sido feito, ou seja, as divisões no tempo não refletem um pensamento que regia uniformemente todos os povos. O que é latente, no entanto, é que os caminhos para solução dos problemas, uma vez encontrados, parecem ter uma convergência. O que resulta nessa divisão.

Em diferentes lugares, num espaço de tempo suficientemente longo, alguns povos se destacaram quanto à forma de registrar seus algarismos formando os números, ou seja, a ideia de numeral. Esclarecendo alguns pontos sobre o que foi dito, afirmamos que um número, quando registrado, passa a ser um numeral. Os algarismos, no nosso sistema 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, compõem os números, de acordo com o sistema de numeração em que são utilizados, no nosso caso o posicional. Uma vez registrados lado a lado, por exemplo, forma-se um numeral.

Na Mesopotâmia, onde o barro era abundante, marcações em forma de cunha eram feitas sobre a argila mole e depois cozidas em fornos ou deixadas sob a luz do sol. A escrita cuneiforme, criada pelos sumérios e feita dessa maneira, minimizava a possibilidade de perder os registros. Algumas dessas tábuas foram tão bem cuidadas que sobrevivem até hoje, algumas com mais de 4.000 anos.

Figura 1.9 | Escrita cuneiforme

Fonte: <http://www.infoescola.com/civilizacoes-antigas/escrita-cuneiforme/>. Acesso em: 28 mar. 2016.

A palavra mesopotâmia significa “entre rios”. A região onde viviam os sumérios, os babilônios, os assírios, entre outros povos, ficava entre os rios Tigres e Eufrates, região onde hoje é o Iraque. Se os sumérios inventaram a escrita cuneiforme, os babilônios a utilizaram para representar os numerais. O sistema era de base 60, no entanto os numerais menores que a base eram representados por agrupamentos simples de base 10, como se vê na Figura 1.10:

Figura 1.10 | Representação cuneiforme dos números até 59

1	▼	10	◀
2	▼▼	20	◀◀
3	▼▼▼	...	
4	▼▼▼▼	34	◀◀◀ ▼▼▼▼
...		...	
9	▼▼▼▼▼▼▼▼▼	59	◀◀◀◀◀ ▼▼▼▼▼▼▼▼▼

Fonte: elaborada pelo autor.

Os números maiores que 60 eram representados através do sistema posicional. O símbolo mais à direita representava a quantidade menor que 60. O símbolo à esquerda demonstra a quantidade de grupos de 60 já contados, como explica a Figura 1.11:.

Figura 1.11 | Representação cuneiforme de alguns números maiores que 59

60	▼	243	▼▼▼▼ ▼▼▼ $(240 + 3 = 4.60^1 + 3)$
120	▼▼	263	▼▼▼▼◀◀▼▼▼ $(240 + 20 + 3 = 4.60^1 + 3)$
180	▼▼▼	3721	▼ ▼▼▼▼ ▼ $(3600 + 120 + 1 = 1.60^2 + 2.60^1 + 1)$
240	▼▼▼▼	3816	▼ ▼▼▼ ◀◀◀ ▼▼▼▼▼▼ $(3600 + 180 + 30 + 6 = 1.60^2 + 3.60^1 + 30 + 1)$

Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

Observe com atenção a Figura 1.11. A maneira de representar os números é um misto de base 10 e base 60. Ao completarmos 60 objetos contados, a base passa a ser 60. A representação a partir daí é bastante consonante com o que aprendemos na Seção 1.2.

Reflita

Como saber se o símbolo registrado era 1 ou 60? Observando as Figuras 1.8 e 1.9 vemos que é uma dúvida pertinente. Talvez a não necessidade de se registrar uma unidade seja a resposta para essa questão.

Havia ainda um símbolo para representar o subtrativo, ou seja, o que se deveria subtrair de uma quantidade completa de grupos para representar uma quantidade incompleta. É o símbolo análogo ao sinal de menos (–). Escrever um número utilizando essa ideia é algo parecido com o que fazemos quando informamos as horas. Muitas vezes, ao invés de dizer 5 horas e 45 minutos, por exemplo, dizemos 15 para as 6, o que significa 6 horas menos 15 minutos. Na Figura 1.12 observa-se o símbolo e, adiante, um exemplo de utilização.

Figura 1.12 | Símbolo cuneiforme subtrativo

Fonte: Eves (1995, p. 32).

Exemplificando

48 = 50 - 2

Fonte: adaptado de Eves (1995, p. 32).

Faça você mesmo

Como você desenharia, utilizando essa mesma ideia, o número 137 de acordo com o sistema de numeração babilônico? Lembre-se de que 137 é igual a $120 + 17 = 2 \cdot 60 + 17 = 2 \cdot 60$.

Pesquise mais

Acessando o site: <https://sites.google.com/site/fisiklain/home/1/matematica-babilonica> (acesso em: 16 maio 2016) você terá a oportunidade de ler um pouco mais sobre a matemática babilônica.

Outro sistema de numeração de destaque, que persiste até os dias atuais e ainda é muito utilizado é o romano. Nesse sistema, os numerais têm como símbolos sete letras do alfabeto latino, de acordo com a Tabela 1.1:

Tabela 1.1 | Correspondência entre a notação romana e a indo-arábica (atual)

I	Unidade (Unus) – ***1***
V	Cinco Unidades (Quinque) – ***5***
X	Dez Unidades (Decem) – ***10***
L	Cinquenta Unidades (Quinquaginta) – ***50***
C	Cem Unidades (Centum) – ***100***
D	Quinhentas Unidades (Quingenti) – ***500***
M	Mil Unidades (Mille) – ***1000***

Fonte: elaborada pelo autor.

Nos tempos antigos esse sistema consistia em um simples agrupamento dessas letras para que fossem representados os números. A única regra era que o numeral deveria ser escrito da direita para a esquerda.

Exemplificando

2354 = MMCCCLIIII

1050 = ML

1944 = MDCCCCIIII

Mais recentemente, na Idade Moderna, uma adaptação do método subtrativo utilizado pelos babilônios, mas sem um símbolo, foi incorporado. A partir de então a quantidade máxima de símbolos repetidos passou a ser 3. Um mesmo símbolo não podia, então, ser registrado 4 vezes, como foi feito no exemplo anterior.

Exemplificando

2354 = MMCCCLIV (o "I" antes do "V" significa um a menos que cinco).

1944 = MCMXLIV (O "C" antes do "M" indica cem a menos que mil, o "X" antes do "L" significa dez a menos que 50).

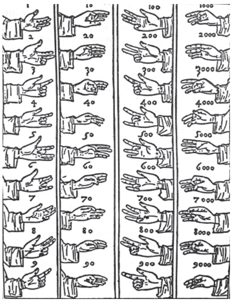
Nesse caso o I só pode preceder o V ou o X, o X só pode preceder o L ou o C e o C só pode preceder o D ou o M. Isso tudo pode parecer confuso no começo, mas essa confusão diminui conforme nos acostumamos. A forma mais moderna visava diminuir o tamanho da representação. Alguns números, como o 4.444, tinham a notação reduzida pela metade utilizando o método subtrativo.

Faça você mesmo

Como ficaria o número 4.444 em algarismos romanos, nas duas notações, a antiga e a moderna?

A escolha pelas letras I, V, X, L, C, D e M é objeto de muita especulação. Acredita-se que a letra I representa um dedo erguido de uma mão. O X seria a composição de dois V ou a representação de duas mãos ou dois dedos cruzados ou entrelaçados. Essas suposições vêm do fato de que a transição dos números falados para os numerais pode ter ocorrido através do uso dos números digitais. Nessa representação, a forma como os dedos são posicionados indica o número que está sendo representado, como se observa na Figura 1.13:

Figura 1.13 | Números digitais



Fonte: Eves (1995, p. 30) – extraída da Suma de Pacioli, 1491.

Reflita

Outra curiosidade que vale também para a escrita cuneiforme de um numeral é a inexistência de um símbolo para representar o zero. A presença desse símbolo resolveria o problema da semelhança entre as representações para o 1 e para o 60 nesse sistema.

Sem medo de errar

O próximo passo de Henrique era certificar-se do seu entendimento quanto à montagem de um número segundo a escrita cuneiforme, tendo em vista a mudança de base que se faz necessária, sobretudo se o número for grande.

Como seria então a representação do número 548? O primeiro passo é escrever sua expansão na base 60, como fizemos na seção anterior. Em seguida, não esquecer que para numerais menores que 60 a base é 10. Lembre-se também de que o método prático para isso consiste na divisão do 548 por 60, o quociente obtido igualmente por 60, e assim por diante, até que não seja mais possível. O último quociente e os restos, de baixo para cima fornecem os algarismos que procuramos. Observe a Figura 1.14:

Figura 1.14 | Transformação para base 60

$$\begin{array}{r|l} 568 & 60 \\ \cline{2-2} 28 & 9 \end{array}$$

Fonte: elaborada pelo autor.

A divisão nos informa que são 9 grupos de 60 e sobram 28, o que corresponde a 2 grupos de 10 e sobram 8. E essa última conta não requer nova divisão, certo? Então a expansão na base 60 e na base 10 será $9 \cdot 60 + 2 \cdot 10 + 8$. Esse é o número que se transformará num numeral na escrita cuneiforme. Agora é sua vez!

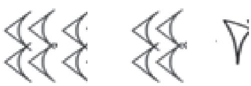
Represente o número 401 dessa mesma forma, realizando o procedimento desde o início. Bom trabalho!

Atenção

Se necessário, releia a Seção 1.2, que tratou de conversão de bases numéricas. Observe que os restos multiplicarão 60, 60^2, 60^3 e assim por diante, então não se preocupe, pois só será necessária mais de uma divisão para números maiores de 3600.

Resposta: o número 568 seria representado por:

Como $401 = 6 \cdot 60 + 4 \cdot 10 + 1$ sua representação é:



Fonte: adaptado de Eves (1995, p. 32).

Avançando na prática

Numeração maia

Descrição da situação-problema

Na sua pesquisa, Henrique conheceu um pouco da numeração maia. A base desse sistema de numeração era 20, no entanto, o segundo grupo após a unidade não reunia $20 \cdot 20 = 400$ e sim $18 \cdot 20 = 360$, talvez por se tratar da quantidade de dias de um ano segundo seu calendário. O próximo grupo teria $18 \cdot 20^2$, o próximo $18 \cdot 20^3$, mas isso não será importante para nós. Nesta situação-problema, vamos escrever o número 876 segundo o sistema maia. Primeiramente procuraremos a quantidade de grupos de 360. Veja a Figura 1.15:

Figura 1.15 | Transformação para base $18 \cdot 20 = 360$

$$\begin{array}{r|l} 876 & 360 \\ \cline{2-2} 156 & 2 \end{array}$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que há dois desses grupos e sobram 156 unidades. Agora é hora de transformarmos esse resto para a base 20. Veja a Figura 1.16:

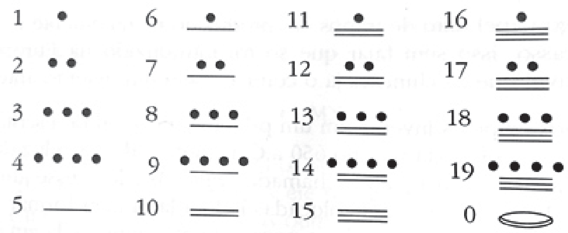
Figura 1.16 | Transformação para base $18 \cdot 20 = 360$

$$\begin{array}{r|l} 156 & 20 \\ \cline{2-2} 16 & 7 \end{array}$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Com isso temos que o número 876 na base utilizada pelos maias será $2 \cdot 18 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 16$. Os algarismos serão representados de acordo com a Figura 1.17 e o posicionamento dos algarismos é no sentido vertical com as unidades ocupando a posição mais abaixo.

Figura 1.17 | Algarismos da numeração maia



Fonte: Eves (1995, p. 37).

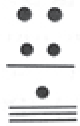
Agora você tem todos os elementos. Seu trabalho é, utilizando as informações da Figura 1.17, representar o número 876 (= 2·18·20 + 7·20 + 16) utilizando o sistema maia. Bom trabalho!

Lembre-se

O posicionamento dos símbolos será na vertical, com as unidades embaixo, depois os grupos de 20 e, em seguida, os de 18·20.

Resolução da situação-problema

Diante do exposto, o símbolo para 16 deve estar embaixo, acima dele o símbolo para 7 e depois o símbolo para 2. A representação ficaria assim:

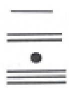


Fonte: Eves (1995, p. 37).

Faça você mesmo

Tente representar o número 2016 no sistema maia.

Resposta: 2016 = 5·18·20 + 10·20 + 16, portanto



Fonte: Eves (1995, p. 37).

Faça valer a pena

1. No sistema de numeração de base utilizamos os ______________ 0, 1, 2, 3 e 4 para formar os ______________ que, quando registrados passam a ser chamados de ____________. Dentre as alternativas, aquela que não pode ser colocada em qualquer um dos espaços é:

a) números

b) algarismos

c) numeral

d) bases

e) símbolos

2. Para representar numerais menores que 60, os babilônios utilizavam os símbolos ▼ e ◀ para representar, respectivamente, unidade e dezena.

Nesse contexto, o símbolo ◀◀◀◀◀▼▼▼▼▼▼▼▼ representa o número:

a) 56

b) 57

c) 58

d) 59

e) 60

3. De acordo com o sistema de numeração babilônica, baseado na escrita cuneiforme, o símbolo ▼ ▼ pode representar:

a) 2 ou 120

b) 2 ou 200

c) 20 ou 120

d) 20 ou 200

e) 120 ou 200

Seção 1.4

Os sistemas de numeração e algumas civilizações

Diálogo aberto

De acordo com suas pesquisas, Henrique também percebeu que números podem ser utilizados na ordenação. Esse fato os torna numerais ordinais, enquanto aqueles utilizados nas contagens são numerais cardinais. O número 1 (um), cardinal, torna-se 1º (primeiro), o número 2 se torna 2º (segundo), e assim por diante. Um número, dependendo de como é escrito, pode representar a posição ocupada por ele numa sequência. Henrique se deparava com esse tipo de numeração diariamente ao esperar pelo elevador e observar o visor que informava o número do andar à medida que ele se aproximava do térreo: 5º, 4º, ..., 1º e térreo, mas isso era para ele apenas uma curiosidade.

No seu trabalho Henrique lidava constantemente com frações. Por vezes, observava que a demanda de um produto da sua empresa sofria um aumento de 25%, ou qualquer outra porcentagem. Lembrava que 25% era o mesmo que $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$ portanto, representava um aumento de um quarto em relação ao que se tinha antes.

Ao pensar sobre como deveria fazer essa conta, lembrou-se de que para encontrar um quarto de um número, deveria multiplicar esse número por um quarto, assim como fazia quando pretendia determinar o triplo de uma quantia, por exemplo. Foi quando se deparou com os numerais multiplicativos.

Lembrou-se de uma conversa que tivera com Pedro, um colega de trabalho. Henrique ficou sabendo que um quarto do salário de seu amigo era gasto com aluguel e um sexto com o condomínio. Pagas essas despesas, sobrava R$ 3.500,00. Para calcular quanto recebia seu amigo, Henrique poderá aplicar num contexto prático o que havia estudado sobre as frações.

Nesta seção, a exemplo do que fizemos nas anteriores, acompanharemos Henrique nesse aprendizado pela História da Matemática. Fazendo isso, tentaremos conhecer os numerais ainda melhor, explorando sua essência. Relacionaremos os números cardinais com os ordinais, fracionários e multiplicativos para formarmos definitivamente o conceito de numeral, iniciado na Seção 1.3.

Não pode faltar

Quando entramos num estabelecimento que realiza um serviço, é comum encontrarmos a placa "retire sua senha". Quando pegamos nossa senha, vemos que há no papel um número registrado. Se estiver escrito 65, sabemos que seremos o sexagésimo quinto atendimento realizado no dia, ou no período, ou em qualquer outra unidade de tempo. Sabemos também que, ao olharmos no painel e vermos o número 62, faltam ainda duas pessoas para serem atendidas e, portanto, somos o terceiro na fila.

Veja como os números cardinais 65 e 62, que registram as quantidades de atendimentos, confundem-se com sexagésimo quinto e sexagésimo segundo. Observe que, mesmo sem o registro correto da ordenação, que é o que representa o número no papel, ela está implícita. Por isso acredita-se que imediatamente após a invenção do número percebeu-se que ele era capaz não só de contar, mas também de ordenar.

Nesse caso a história dos números cardinais se confunde com a dos números ordinais. Mesmo que para muitas civilizações não parecesse necessário ter um símbolo para esse tipo de numeral, o significado de ordenação parecia estar implícito. Por esse motivo é raro encontrar registros e bibliografia específicos sobres os numerais ordinais, mas isso não significa que são menos importantes e pouco presentes no nosso dia a dia.

Na Figura 1.18 podemos observar a importância da diferenciação entre um numeral cardinal e um ordinal. Vemos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 estampados no chão identificando as raias onde correm os atletas. É possível ver que o atleta da raia 4, cardinal, foi o 1º colocado, numeral ordinal, na corrida. Nesse caso o símbolo é necessário e mostra a importância de conhecermos bem os dois tipos de numeral para que a informação transmitida seja bem entendida.

Figura 1.18 | Números cardinais x números ordinais

Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/df/Usain_Bolt_winning-cropped.jpg>. Acesso em: 19 abr. 2016.

Observando a Figura 1.19, também é possível lembrar de um tipo de numeral, certo? Imagine que a pizza fotografada tenha sido dividida em 8 pedaços. Ao se servir de um deles, você estará retirando um oitavo da pizza. O numeral $\frac{1}{8}$ (um oitavo) representa que um inteiro foi dividido em oito partes iguais e uma delas será considerada. O número que está em cima, no nosso caso 1, pois estamos falando da fração $\frac{1}{8}$, chamamos de numerador, e o que está embaixo, o número 8, chamamos de denominador.

Figura 1.19 | Fração

Fonte: <https://pixabay.com/en/pizza-slice-italian-toppings-329523/>. Acesso em: 13 abr. 2016.

No Papiro Rhind ou Papiro Ahmes, um importante documento egípcio, fonte de muitas informações sobre o conhecimento matemático dessa civilização, encontram-se símbolos como  para representar $\frac{1}{8}$ e  para $\frac{1}{20}$. Isso a prova que os egípcios, desde 2000 a.C., conheciam e utilizavam esses numerais. Nesse papiro observa-se que as frações unitárias, que têm numerador 1, eram manipuladas livremente, no entanto frações com outros numeradores parecem ter sido um enigma para esse povo.

Pesquise mais

Para saber mais sobre esse papiro, acesse o site disponível em: acesse: <revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/download/9228/6847>. Acesso em: 14 abr. 2016.

A exceção era $\frac{2}{3}$, cujo símbolo era , que parecia ter um papel de destaque nas operações com esses numerais. Para calcular $\frac{2}{3}$ de um número, primeiro era calculado $\frac{1}{3}$ desse número e depois o resultado era dividido pela metade. As demais frações eram escritas como soma de frações unitárias.

Exemplificando

A fração $\frac{3}{5}$ era escrita como a soma de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{15}$. Essas somas eram encontradas nos papiros em forma de tabelada. Para obter $\frac{3}{5}$ de 75, por exemplo, calculava-se $\frac{1}{3}$ de 75 que é 25, depois $\frac{1}{5}$ de 75 que é 15 e, por fim $\frac{1}{15}$ de 75 que é 5, para então somar os resultados 25 + 15 + 5 = 45.

Nesse exemplo, fizemos uso de um outro numeral importante conhecido como multiplicativo. Também conhecido e muito utilizado pelos egípcios e por outras civilizações há muito tempo. Entendia-se que $\frac{1}{3}$ de 75, como no exemplo, era o mesmo que dividir 75 em três grupos de igual tamanho e considerar apenas uma dessas partes. Sabemos graças a isso que, como esse numeral representa uma multiplicação, para que duas frações sejam multiplicadas basta multiplicar os numeradores e os denominadores. Como 75 não é necessariamente uma fração, escrevemos $75 = \frac{75}{1}$ e então $\frac{1}{3} \cdot \frac{75}{1} = \frac{1 \cdot 75}{3 \cdot 1} = \frac{75}{3} = 25.$

Assimile

Multiplicação de frações é uma das operações que podemos realizar com esses numerais. O profissional das ciências exatas tem que ter clareza sobre essas operações ainda que ele conte com uma calculadora. Essas operações com números, chamadas de aritméticas, conduzem os métodos para os cálculos com variáveis e incógnitas, que chamamos de algébricas. Nesse caso, elas têm sua importância garantida ainda que sejam pouco utilizadas.

Diante dessa reflexão não é difícil acreditar que a multiplicação de frações pode ter sido a primeira operação entre esses numerais que tomou forma. No papiro encontramos ainda vários problemas que exemplificam a utilização dos numerais, multiplicativos que contêm frações. Em alguns deles podemos observar indícios de que os egípcios estavam muito próximos de estabelecer um método para outra operação entre frações: a soma. Para resolver problemas que envolviam soma desses numerais o Papiro Ahmes apresenta um raciocínio muitas vezes extenso e baseado em somas de frações unitárias já tabeladas. Hoje sabemos que para somarmos duas frações precisamos que elas tenham o mesmo denominador. Isso faz com que os inteiros sempre estejam divididos no mesmo número de partes e, com isso, basta somar os numeradores.

Exemplificando

Para somar $\frac{1}{6}$ com $\frac{2}{5}$, fração que não tinha uma representação formal, utilizavam a informação da tabela de que o dobro da quinta parte de algo era o mesmo que $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ dela, então $\frac{1}{6}+\frac{2}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. Pensando dessa forma, o resultado era encontrado na tabela como dezessete vezes trinta avos de um inteiro, ou seja, $\frac{17}{30}$.

O candidato a denominador comum é um número que chamamos de Mínimo Múltiplo Comum. Trata do menor inteiro que é múltiplo dos dois denominadores simultaneamente. Com o denominador escolhido, basta escrevermos as frações com o novo denominador de forma que elas sejam equivalentes àquelas que estão sendo somadas. Veja o exemplo a seguir.

Exemplificando

Para somar $\frac{1}{6}$ com $\frac{2}{5}$, verifica-se que 30 é o menor múltiplo comum entre 5 e 6. A saber, os primeiros 8 múltiplos positivos de 5 e 6 estão nos conjuntos A = {5,10,15,20,25,***30***,35,40} e B = {6,12,18,24,***30***,36,42,48} e, de fato, 30 é a primeira ocorrência de um múltiplo comum. Nesse caso, $\frac{1}{6}+\frac{2}{5}=\frac{5}{30}+\frac{12}{30}=\frac{17}{30}$. Para determinar os denominadores das novas frações, no exemplo 5 e 12, pode-se pensar na regra: dividir pelo que está embaixo e multiplicar o resultado pelo que está em cima. De fato, 30 dividido por 6 dá 5 que, multiplicado por 1 dá 5, e 30 dividido por 5 dá 6, que multiplicado por 2 dá 12.

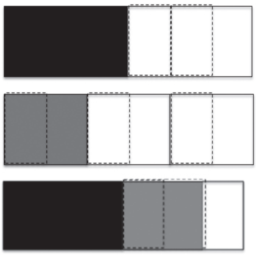
A Figura 1.20 ilustra as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Essa ilustração permite que possamos enxergar o que realmente é feito quando, para somar essas frações, igualamos os denominadores.

Figura 1.20 | Frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Somar essas duas frações nada mais é do que transportar o retângulo cinza para a direita do retângulo em que está representada a fração $\frac{1}{2}$ e verificar qual parte desse retângulo estará pintada. Mas ao realizar esse procedimento, não sabemos exatamente como indicar a fração que representa o fim do retângulo cinza. Porém, se tanto o retângulo de cima quanto o de baixo estivessem divididos em 6 partes iguais, como se vê na Figura 1.21, isso não seria um problema.

Figura 1.21 | Frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora é possível ver por que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ certo?

Sem medo de errar

Henrique ficou sabendo que um quarto do salário de seu amigo era gasto com aluguel e um sexto com o condomínio. Pagas essas despesas, sobrava R$ 3.500,00. Henrique ficou curioso para saber quanto recebia seu amigo, e para isso aplicou o que havia estudado sobre as frações.

Considerando os dois gastos, Henrique percebeu que $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$ do salário de seu amigo era destinado às despesas mencionadas. Isso significa que sobravam $\frac{7}{12}$ do salário após esses pagamentos. Dessa forma, 3.500 corresponde a $\frac{7}{12}$ dos vencimentos do amigo de Henrique, certo? Nesse caso, $\frac{7}{12}\times \text{Salário} = 3.500$, ou seja, $\text{Salário} = 3.500 \times \frac{12}{7} = 6.000$.

Atenção

Observe que para que o salário ficasse isolado no primeiro membro da equação foi necessário dividir os dois lados por 7 e multiplicá-los por 12, fazendo com que 3.500, que está no segundo membro, fosse multiplicado por 12 e dividido por 7.

Avançando na prática

Comprar ou não comprar um carro

Descrição da situação-problema

Henrique pretendia comprar um carro. Ouviu em um programa de televisão que a prestação do automóvel não deveria superar um terço do salário líquido após descontar as despesas fixas. Ao sair da concessionária de automóveis, tinha em mãos um plano de pagamento que incluía um valor à vista mais 24 parcelas de R$ 580,00. Estava disposto a seguir o conselho do programa, então foi fazer as contas. A tabela 1.2 mostra a realidade financeira vivida por Henrique mês a mês.

Tabela 1.2 | Planilha de gastos fixos de Henrique

Descrição	Valor
Aluguel	R$ 800,00
Condomínio	R$ 90,00
Contas de consumo (média)	R$ 200,00
Supermercado (média)	R$ 400,00
Pós-graduação	R$ 890,00
Transporte	R$ 60,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Recebendo um salário líquido de R$ 4.150,00, será que Henrique deve comprar o carro?

Lembre-se

Você deve calcular a parte utilizada do salário e escrever o numeral multiplicativo referente à parte que sobra e que pode ser disponibilizada para a compra do automóvel.

Resolução da situação-problema

A soma dos gastos fixos de Henrique é 800 + 90 + 200 + 400 + 890 + 60 = 2440 reais. Nesse caso, após pagar essas despesas, Henrique fica com 4.150 – 2.440 = 1.710 reais. Se quiser mesmo seguir o conselho do programa de televisão, não deve gastar mais que $\frac{1}{3} \cdot 1.710 = 570$ reais. Como a parcela está no limite, ele deveriarenegociá-la ou tentar reduzir um outro gasto fixo, como o de consumo, por exemplo, para não se comprometer demais com as parcelas do automóvel durante um período tão longo.

Faça você mesmo

No mesmo contexto apresentado, qual o valor máximo de parcela que poderia ser assumida por uma pessoa que recebe R$ 3.200,00 e tem os gastos fixos apresentados na Tabela 1.3?

Tabela 1.3 | Planilha de gastos fixos de uma pessoa

Descrição	Valor
Aluguel	R$ 600,00
Condomínio	R$ 80,00
Contas de consumo (média)	R$ 200,00
Supermercado (média)	R$ 500,00
Pós-graduação	R$ 499,00
Transporte	R$ 100,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. De acordo com o texto, a frase “estou em 18° lugar na fila para ser atendido” contém um numeral:

a) Cardinal

b) Ordinal

c) Fracionário

d) Multiplicativo

e) Coletivo

2. De acordo com o texto, a frase “serão atendidas 18 pessoasantes de mim eu nessa repartição” contém um numeral:

a) Cardinal

b) Ordinal

c) Fracionário

d) Multiplicativo

e) Coletivo

3. De acordo com o texto, a frase “o dobro das pessoas que estão aqui agora, foram atendidas antes de mim" contém um numeral:

a) Cardinal

b) Ordinal

c) Fracionário

d) Multiplicativo

e) Coletivo

Referências

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em:<http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf>. Acesso em: 11 maio 2016.

ROONEY, A. **A história da matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

História da álgebra, geometria e conjuntos numéricos

Convite ao estudo

Na Unidade 1, procuramos desenvolver nosso senso numérico entendendo como os sistemas de numeração foram se constituindo ao longo da História e em algumas civilizações. Vivenciamos alguns dos problemas enfrentados por aqueles que se dedicaram a desenvolver um sistema eficiente para registrar contagens e os resultados de seus cálculos. Com isso, pudemos compreender um pouco melhor por que nosso sistema de numeração é "como ele é".

Uma vez estabelecido o sistema de numeração hindu-arábico como universal, ao menos para os povos ocidentais, chegou o momento de conhecermos melhor os números, agora em uma visão mais moderna. Essa visão se fez necessária, sobretudo durante a Revolução Industrial, quando o mundo experimentou uma grande evolução tecnológica e a matemática passou a desempenhar um papel fundamental nesse processo, à medida que o estudo dos números foi evoluindo.

Muitos matemáticos contribuíram para essa evolução. Aquele que talvez tenha dado as contribuições mais significativas, ou ao menos as mais famosas, chamava-se Carl Friedrich Gauss, cuja história interessou Henrique, nosso personagem. Henrique não se contentou em conhecer apenas a essência dos números. Resolveu se aprofundar, até porque muitos dos números e numerais que conhecia ainda não haviam aparecido de forma significativa em suas pesquisas. Ao aumentar o espectro de seus estudos, tomou conhecimento dos conjuntos numéricos e das contribuições de Gauss nesse campo.

Nosso personagem se deparou com a história do surgimento da Álgebra e resolveu estudá-la. Lembrou-se de que a Matemática lidava prioritariamente com números, grandezas e formas, e resolveu investigar estas últimas. Foi quando reencontrou Euclides de Alexandria, que, por meio do estudo dos elementos geométricos, deu à matemática o caráter formal e abstrato. Com isso, ela passou a assumir o papel de "linha mestre" para o desenvolvimento da ciência como um todo.

Para Henrique, a "linha do tempo" das descobertas na História da Matemática já não tem mais importância. Seu desejo de conhecer melhor as descobertas e os personagens responsáveis pelo desenvolvimento dessa ciência o fez perceber, a cada estudo, o quanto a matemática está presente em seu dia a dia. E você, caro estudante, está convidado para participar de mais essa viagem!

Seção 2.1

A história de Gauss e os conjuntos numéricos

Diálogo aberto

A curiosidade de Henrique sobre a evolução da matemática ao longo do tempo parece não ter fim! A cada leitura ele se interessa mais pelas descobertas matemáticas que ocorreram ao longo da História. Após entender a sistematização dos números, percebeu que estes podem ter formas e utilizações diferentes, de acordo com suas características. Isso faz que eles possam ser agrupados em conjuntos que reúnem aqueles que têm características semelhantes, principalmente quanto à forma de representá-los. Trata-se dos conjuntos numéricos.

Nosso personagem quer entender como e por que determinados números são agrupados nesses conjuntos e em que isso ajuda no desenvolvimento da matemática. Ele se dedicou a entender como funcionavam as operações entre as frações e os demais numerais estudados, principalmente as operações básicas como soma, subtração, multiplicação e divisão. Agora é a hora de entender como realizar essas operações com as dízimas periódicas e não periódicas.

Nesse percurso, Henrique conheceu alguns matemáticos bastante importantes na história dessa ciência. Um deles se chama Carl Friedrich Gauss, conhecido como "O Príncipe dos Matemáticos". Nosso personagem se encantou pela história desse matemático e por seu objeto de estudo, relacionado aos conjuntos numéricos. Lembrou que os conjuntos numéricos não se limitam ao conjunto dos números reais, pois há, ainda, os números complexos. Por isso decidiu que também queria conhecê-los melhor. Como as decisões dele são as nossas decisões, é hora de conversarmos sobre os conjuntos numéricos, sobre a história de Gauss e sobre os números complexos. Preparado?

Não pode faltar

À medida que o tempo passou e a Matemática foi se desenvolvendo, certos grupos de números chamaram a atenção de alguns matemáticos de forma independente. Os números ou numerais cardinais, amplamente estudados na Unidade 1, juntamente ao zero, foram separados em um conjunto chamado de Conjunto dos Números Naturais. Utilizando o símbolo N para dar nome a esse conjunto e as chaves para identificá-lo como tal, temos que:

$$N = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,...\}\ .$$

Esses números correspondem à forma mais simples de representar um número. Esse conjunto contém os numerais mais primitivos, aqueles que muito provavelmente surgiram primeiramente no pensamento de quem se preocupava em contar e comparar quantidades.

Com esses números podemos realizar qualquer uma das quatro operações básicas, no entanto, apenas fazendo soma ou multiplicação garantimos que o resultado se encontra no próprio conjunto. Ao fazermos uma subtração, corremos o risco de não termos um número dentro do conjunto dos Naturais que represente o resultado dessa operação. Isso também pode ocorrer se realizarmos uma divisão entre esses números.

Para garantirmos que todos os resultados dos cálculos da diferença entre esses números estejam no mesmo conjunto, este precisa ser ampliado. Estamos falando do Conjunto dos Números Inteiros. Os números obtidos pela subtração de um natural com outro maior que ele, nessa ordem, recebem, do lado esquerdo de seu símbolo, o sinal de menos (–). O Conjunto dos Números Inteiros é representado pelo símbolo Z. Nesse caso, a representação fica assim:

$$Z = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...\}.$$

O símbolo Z refere-se ao substantivo *Zahl* que, traduzido do alemão, significa número, dígito ou algarismo, assim como remete ao verbo *zahlen*, que significa contar. Nesse caso fica clara a interferência europeia – ou, mais precisamente, alemã – na simbologia matemática que conhecemos e utilizamos hoje.

Dois números que são iguais exceto pelo sinal de menos de um deles são chamados de opostos. É correto afirmar que, ao colocarmos um sinal de menos na frente de um número, estamos representando o simétrico do número escolhido inicialmente, tomando como referência o zero.

Exemplificando

O número –5 é o oposto de 5. De modo semelhante, dizemos que 15 é o oposto de –15 e, ainda, que o número –(–17) é o oposto de –17, portanto 17.

Note que o conjunto dos números naturais é uma parte do conjunto dos números inteiros. De acordo com a teoria dos conjuntos, dizemos que N é subconjunto de Z. O conjunto dos números inteiros tem outros subconjuntos "famosos". São eles: Z^*, inteiros não nulos; Z_+, inteiros não negativos; Z_-, inteiros não positivos; Z_+^*, inteiros positivos; e Z_-^*, inteiros negativos.

Não é possível garantir, no entanto, que o quociente de uma divisão entre inteiros seja um número inteiro. Nesse caso, nova ampliação se faz necessária. Se escrevêssemos, em um conjunto, todos os resultados possíveis de uma divisão entre números inteiros, teríamos escrito aquele que é conhecido como Conjunto dos Números Racionais. O símbolo Q foi escolhido para nomear esse conjunto, mas sua representação tabular, explicitada para N e Z, não é possível nesse caso. Fazemos a representação desse conjunto informando que tipo de elemento há nele:

Assimile

Q = {a ÷ b, tal que a é um número inteiro e b é um número inteiro não nulo}.

Essa representação também pode ser feita de maneira mais simbólica utilizando os símbolos ∈ e /, que significam, respectivamente, "é elemento de" e "tal que" é o numeral fracionário, ou fração, que estudamos na seção anterior. Essa representação ficaria assim:

$$Q = \{\frac{a}{b} \ / \ a \in Z \text{ e } b \in Z^*\}$$

em que Z* = {..., -2, -1, 1, 2, ...}.

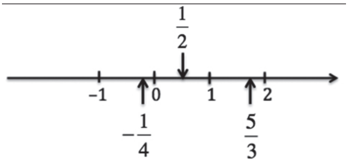
Reflita

Você concordou com a afirmação "mas a representação tabular desse conjunto, explicitada para N e Z, não é possível nesse caso" sobre a maneira de representar o conjunto dos racionais? Você seria capaz de representar esse conjunto da maneira como foram representados os conjuntos N e Z? Tente preencher, então, os retângulos a seguir com os números que deveriam suceder o zero e o 1.

$$Q = \{\ldots, 0, \boxed{}, \ldots, 1, \boxed{}, \ldots\}$$

A Figura 2.1 simboliza o processo de construção dos conjuntos numéricos até o "surgimento" [1] do conjunto dos racionais. Nessa figura, a flecha representa um eixo onde os números estão representados. O zero ocupa a posição central, os números positivos estão à direita, respeitando o sentido da flecha, e os negativos estão à esquerda. Entre dois números inteiros são posicionados os racionais não inteiros, por exemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$ e $-\frac{1}{4}$.

Figura 2.1 | Números racionais representados no eixo real



Fonte: elaborada pelo autor.

No conjunto dos números racionais as frações representam os números decimais exatos e as dízimas periódicas. Ao realizarmos a divisão proposta pelos numerais fracionários representados na Figura 2.1, obtemos 0,5 para $\frac{1}{2}$, –0,25 para $-\frac{1}{4}$ e 1,666... para $\frac{5}{3}$. Os dois primeiros resultados são decimais exatos, pois têm uma quantidade finita de casas decimais. O terceiro é uma dízima periódica. Entende-se por dízima o fato de o número conter uma infinidade de casas

[1] As aspas no termo surgimento são para demarcar o fato de os números racionais já existirem antes de serem agrupados nesse conjunto, ou seja, os conjuntos numéricos apareceram no sentido de organizar em grupos os números que já existiam.

decimais. Uma dízima é dita periódica quando, a partir de determinado número de casas decimais, observa-se uma repetição.

Quando representamos os números racionais, não inteiros, nos espaços entre dois números inteiros, preenchemos quase todo o segmento limitado por eles. Os espaços que sobram são ocupados pelas dízimas não periódicas, conhecidas como Números Irracionais. Esses números recebem esse nome porque não podem ser representados como numerais fracionários.

Esses números foram objeto de estudos da escola Pitagórica. Os estudiosos provaram que nenhum racional entre os inteiros 1 e 2 correspondia ao número $\sqrt{2}$. Esse número surgia em muitos cálculos realizados pelos matemáticos dessa escola, pois equivale à medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Isso intrigava bastante esses estudiosos, pois esse segmento podia ser desenhado mas, aparentemente, não podia ser medido, já que o final dele não correspondia a um ponto na escala do eixo real (*hoje é sabido que pode ser medido e há um ponto para ele no eixo real*).

Outros irracionais famosos são os números π (pi) e e (número de Euler). O primeiro corresponde ao perímetro de uma circunferência de raio $\frac{1}{2}$ e seu valor é aproximadamente 3,14. O segundo é recorrente em estudos de matemática financeira e modelagem populacional. Seu valor é aproximadamente 2,72. Por se tratar de aproximações, utiliza-se prioritariamente o símbolo, e não a aproximação correspondente. Essa atitude deve ser tomada em relação a todos os números desse conjunto numérico.

Pesquise mais

Para saber mais sobre os números irracionais, acesse o site disponível em: <http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/irrac.pdf>. Acesso em: 30 abr. 2016.

Até agora todos os pontos do eixo real e todos os tipos de números que conhecemos foram definidos e classificados, certo? Sua resposta pode ter sido “sim”, mas ela só estaria correta se, na pergunta, fosse mencionado “todos os tipos de números reais”. Chamamos de números reais a reunião dos racionais e irracionais. Os números reais são capazes de fornecer o resultado de quase todas as operações que realizamos com eles.

Entre as operações que normalmente fazemos com os números reais estão a potenciação e sua inversa, a radiciação. As definições dessas operações podem ser vistas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 | Definições de potenciação e radiciação

Potenciação	Radiciação
sendo a um número real, não nulo, m e n, naturais $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a$ (n vezes) $a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	se n é par, a e x são não negativos $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$ se n é impar $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Tabela 2.1 podemos observar que não é possível o valor de a ser negativo se o valor de n for par. Em outras palavras, com números reais, não existem as chamadas raízes quadradas, raízes quartas, raízes sextas ou de índice seis, e assim por diante, de números negativos.

Da mesma forma que a escola Pitagórica encontrou números não usuais em seus cálculos e passou a estudá-los com mais cuidado, muitos outros estudiosos se depararam com problemas que exigiam o cálculo dessas "raízes estranhas". Esse fato era bastante observado na tentativa de resolver equações quadráticas e cúbicas, estas últimas objeto de desejo de muitos matemáticos até mesmo nos dias de hoje.

As equações quadráticas e cúbicas já haviam sido estudadas pelos babilônios, árabes e, talvez, por todos os outros povos com mais ou menos intensidade. O que havia de comum era que sempre esbarravam em soluções que não conseguiam explicar, seja pela não existência de um numeral que representasse a resposta, seja pela aparente incoerência daquilo que se apresentava. Esse era o contexto propício para a definição de um novo tipo de número, ou seja, para a inclusão de um novo conjunto numérico na Matemática, o qual passou a se chamar Conjunto dos Números Complexos. Seus elementos são da forma $a + b \cdot i$, em que a e b são números reais e i é a unidade imaginária. Por definição, i é o numeral que, se elevado ao quadrado, fornece -1, ou seja, $i^2 = -1$.

Reflita

Você já tentou resolver uma equação do 2º grau e o "delta" deu negativo? O que você fez quando isso aconteceu? Continuou os cálculos? Ou parou e informou que não havia como continuar?

Você já tentou calcular $\sqrt{-4}$ utilizando uma calculadora? Ou nem ligou a calculadora, pois sabia que não havia resposta?

Exemplificando

Com a inclusão do conjunto dos números complexos o resultado de $\sqrt{-4}$ passa a existir. Se lembrarmos que $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4}$, basta substituirmos (-1) por i^2. Nesse caso, temos:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = \sqrt{i^2 \cdot 4} = i.2 = 2i \ .$$

Quando a tentativa de resolução de uma equação do 2º grau "esbarra" em $x = \dfrac{4 + \sqrt{-36}}{2}$ ou $x = \dfrac{4 - \sqrt{-36}}{2}$, podemos fazer o mesmo, ou seja, trocar -36 por $i^2 \cdot 36$. Assim, teremos: $x = \dfrac{4 + 6i}{2}$ ou $x = \dfrac{4 - 6i}{2}$. Nesse caso, as raízes serão $2 + 3i$ e $2 - 3i$.

Entre os matemáticos que estudaram os números complexos, destacou-se Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Homem de talento impressionante, foi reconhecido como o principal matemático do século XIX e chamado de "O Príncipe dos Matemáticos". Seu talento foi observado precocemente. Diz-se que com três anos detectou um erro aritmético em um cálculo que seu pai realizava. Aos dez anos foi desafiado por seu professor a somar todos os números naturais de 1 a 100. Realizou essa operação sem fazer qualquer registro, pois percebeu que $1+100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101$, ou seja, o resultado da soma proposta era $50 \cdot 101 = 5050$.

Como era de família com poucas posses, não teria tido a possibilidade de estudar se não fosse a intervenção do duque de Brunswick. Ao se tornar seu tutor, o duque promoveu seu ingresso no colégio da cidade aos 15 anos e na Universidade Göttingen aos 18 anos. Antes mesmo de decidir entre o estudo da Filosofia e o da Matemática, áreas em que se destacava, havia desenvolvido, de forma independente, um método para aproximação de curvas similar ao Método dos Quadrados Mínimos, descoberto por Adrien-Marie Legendre (1752-1833), uma década antes.

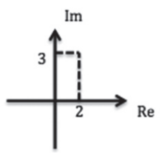
Gauss deu contribuições notáveis à Astronomia, à Geodésia e à Eletricidade. Inventou aparelhos como o heliógrafo e o telégrafo eletromagnético. Gauss dizia que "a matemática é a rainha das ciências, e a teoria dos números é a rainha da matemática". Nesse campo deu muitas contribuições em relação ao estudo dos números complexos. Junto a Jean Robert Argand (1768-1822) e Caspar Wessel (1745-1818), percebeu que um número complexo podia ser associado a um ponto do plano e que alguns números complexos estavam sobre a reta real.

A partir de seus estudos, representa-se um número complexo da forma $a+bi$, no plano, por meio do par ordenado $(a;b)$. Nesse caso, o eixo horizontal representa a parte real do número complexo e o eixo vertical representa a parte imaginária dele, isto é, o coeficiente que multiplica a unidade imaginária i. O ponto determinado por esse par ordenado é denominado afixo, por isso dizemos que o afixo é a representação de um número complexo no plano cartesiano. Por essa razão o plano cartesiano, quando recebe os afixos, é chamado de Plano de Argand-Gauss.

Exemplificando

O número complexo z = 2 + 3i está representado no plano de Argand-Gauss na Figura 2.2 a seguir:

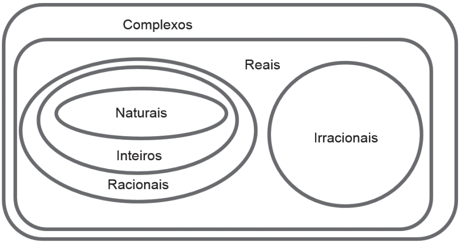
Figura 2.2 | Representação de z = 2 + 3i



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesse contexto, um número da forma $a+0i$ fica representado sobre o eixo horizontal, que é o eixo em que são representados os números reais. Todo número real é, na verdade, um número complexo, ou seja, todo real é complexo, mas nem todo complexo é real. Assim, o conjunto dos números reais é um subconjunto ou parte do conjunto dos números complexos. Os números reais são representados no eixo horizontal e os demais complexos são representados em todos os outros pontos do plano. A Figura 2.3 fornece um bom resumo para esta seção, pois ilustra a disposição dos números de acordo com o conjunto numérico ao qual eles pertencem.

Figura 2.3 | Conjuntos numéricos



Fonte: elaborada pelo autor.

Vocabulário

Geodésia: é a ciência que se ocupa da determinação da forma, das dimensões e do campo de gravidade da Terra. (IBGE. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/>. Acesso em: 1 maio 2016.)

Heliógrafo: instrumento que mede a insolação diária ou o número diário de horas de brilho do sol (Aulete digital. Disponível em: <www.aulete.com.br/Heli%C3%B3grafo>. Acesso em: 1 maio 2016).

Sem medo de errar

Henrique dedicou-se a entender como funcionavam as operações entre frações e demais numerais estudados, principalmente as operações básicas, como soma, subtração, multiplicação e divisão. Chegou a hora de Henrique compreender como realizar essas operações com as dízimas periódicas e não periódicas.

As dízimas periódicas têm sua forma fracionária, nesse caso, basta transformá-las em fração e utilizar os princípios das operações com frações. Mas como transformar uma dízima em fração? Veja o exemplo a seguir:

O número 1,233333... é uma dízima periódica. Fazendo $x = 1{,}23333\ldots$ teremos,

$$10x = 12,3333...$$
$$100x = 123,3333...$$
assim,
$$100x - 10x = 123,3333... - 12,3333...$$
ou seja,
$$90x = 111 \Leftrightarrow x = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}$$
ou seja,
$$1,23333... = \frac{37}{30}$$

Atenção

É preciso compreender que a multiplicação por 10 deve ser feita até que se observem duas equações com números decimais com a parte após a vírgula igual. Essa é a hora de fazer a subtração.

As operações com dízimas não periódicas, ou seja, com números irracionais, não são muito comuns e, muitas vezes, têm motivação mais geométrica do que aritmética. Para somarmos 2 e $\sqrt{2}$, por exemplo, apenas representamos o resultado escrevendo 2 + $\sqrt{2}$ ou utilizamos uma aproximação para o irracional (1,41 é uma boa aproximação) e obtemos um resultado aproximado. A segunda possibilidade só é indicada no final dos cálculos, pois podemos carregar erros nos demais cálculos se fizermos isso durante o processo.

No entanto, a divisão entre 2 e $\sqrt{2}$ chamou a atenção de Henrique. Ele leu que sempre foi um cálculo de difícil concepção ao longo da História da Matemática. No entanto, havia uma saída para isso. Ao escrever essa divisão na forma de fração $\frac{2}{\sqrt{2}}$, percebeu que, ao multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$, o resultado permanecia o mesmo e o denominador se tornava $\sqrt{4} = 2$. Nesse caso, tem-se: $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. O resultado não parece muito melhor, mas ao menos pode ser determinado geometricamente.

Avançando na prática

Divisão com Números Complexos

Descrição da situação-problema

Da mesma forma que a divisão com irracionais chamou a atenção de Henrique, a divisão com números complexos o fez parar para pensar. Percebeu, ao longo de suas leituras, que o processo era semelhante àquele que usou para dividir 2 por $\sqrt{2}$, ou seja, era necessário que o denominador se tornasse racional, não importando o que ocorresse com o numerador.

Tentou realizar as seguintes operações:

I. $\dfrac{5}{i}$

II. $\dfrac{1+i}{2i}$

III. $\dfrac{1+i}{2+i}$

Lembre-se

Para dividir um número racional por um irracional devemos criar uma situação para que o denominador não seja mais irracional. Normalmente fazemos isso por meio de uma multiplicação. Nesse caso, o numerador também deve ser multiplicado para que o resultado não se altere.

Resolução da situação-problema:

Para realizar a primeira divisão, lembrou que $i^2 = -1$. Nesse caso:

I. $\dfrac{5}{i} = \dfrac{5 \cdot i}{i \cdot i} = \dfrac{5 \cdot i}{-1} = -5i$

Para realizar a segunda divisão fez o mesmo, ou seja, decidiu multiplicar o numerador e o denominador por i. Assim,

II. $\dfrac{1+i}{2i} = \dfrac{(1+i) \cdot i}{2i \cdot i} = \dfrac{i+i^2}{-2} = \dfrac{i-1}{-2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$

Na última divisão percebeu que multiplicar por i não resolvia o problema. Lembrou-se de que o produto da soma pela diferença entre dois números, ou seja, multiplicando $a+b$ por $a-b$, o resultado era $a^2 - b^2$. Assim,

III. $$\frac{1+i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i+2i-i^2}{4-i^2} = \frac{3+i}{4+1} = \frac{3}{5} + \frac{i}{5}$$

Faça você mesmo

Tente realizar as seguintes operações:

a) $\dfrac{10}{-i}$

b) $\dfrac{2-i}{3i}$

c) $\dfrac{1-i}{1+i}$

Faça valer a pena

1. Entre as alternativas a seguir, assinale a única que contém um número natural.

a) -7

b) $4\ i$

c) $\sqrt{2}$

d) $\dfrac{8}{4}$

e) $\dfrac{5}{4}$

2. Entre as alternativas a seguir, assinale a única que tem um número inteiro.

a) -7

b) $4\,i$

c) $\sqrt{2}$

d) $\dfrac{10}{4}$

e) $\dfrac{5}{4}$

3. O comprimento de uma circunferência de raio 1 metro é um número:

a) Natural.

b) Inteiro.

c) Racional.

d) Irracional.

e) Não há como afirmar a que conjunto numérico esse número pertence.

Seção 2.2

História da álgebra

Diálogo aberto

Gauss, os conjuntos numéricos, a Álgebra e a Geometria "cruzaram" o caminho de Henrique. Na Seção 2.1, falamos sobre Gauss e os conjuntos numéricos. Agora é a hora de conhecermos, na companhia do nosso personagem, a História da Álgebra. As duas últimas seções desta unidade serão dedicadas à História da Geometria.

Você sabe o que é Álgebra? Em linhas gerais, Álgebra é a ciência das equações. É quando não sabemos o valor de determinada grandeza e a chamamos de "x". É uma extensão do pensamento aritmético que temos desenvolvido até aqui quando buscamos ampliar nosso senso numérico.

Tão logo o pensamento matemático ganhou forma, há cerca de 6.000 anos, o desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra aconteceu quase paralelamente. Como vimos na seção anterior, a própria existência dos números irracionais e complexos pode ter tido motivação algébrica.

No trabalho de Henrique, conhecer as equações é tão importante quanto conhecer os números. Não é incorreto afirmar que, conhecendo bem os números e as operações com eles, Henrique pode resolver melhor os problemas algébricos com os quais lida no trabalho.

Uma situação típica no seu dia a dia é o cálculo do custo total tendo em vista a quantidade e o custo unitário. Se um produto custa R$ 100,00, por exemplo, e forem adquiridas 8 unidades, o custo total será: 8 · R$ 100 = R$ 800,00. Porém, nem sempre o custo total é calculado. Às vezes, após consultarmos o preço unitário com o fornecedor, ou com os fornecedores, decidimos a quantidade a ser adquirida de acordo com o quanto podemos gastar. Se, em determinado mês, pudermos gastar apenas R$ 500,00, teremos de resolver a equação x · R$ 100 = R$ 500,00. O valor que encontrarmos para x nos dirá a quantidade de produto que poderemos adquirir.

Ao pensar sobre isso nosso personagem se lembrou de quando estudou matemática na faculdade. Abriu um livro que estava em sua biblioteca, cujo título era **Matemática aplicada à gestão financeira**, e encontrou um problema em que foram relações $R = -2q^2 + 400q$ e $C = 240q + 2400$. A ideia era encontrar os valores de q para que o lucro bruto fosse nulo. Lucro bruto é definido como a diferença entre a receita e o custo. Se ele tem de ser nulo, então a receita e o custo devem ser iguais. Nesse caso, $R = C$ ou $-2q^2 + 400q = 240q + 2400$, o que nada mais é do que uma equação quadrática na incógnita q.

Mas como resolvemos esse tipo de equação? Essa é a pergunta que procuraremos responder nesta seção.

Não pode faltar

Em 632, o profeta Maomé morreu na cidade de Medina. Sua morte, no entanto, não freou a expansão islâmica. Em poucos anos, muitos territórios já se encontravam ocupados, entre eles a Mesopotâmia, região entre os rios Tigres e Eufrates, onde viveram os babilônios e se desenvolveu a escrita cuneiforme.

A expansão árabe chegou a Alexandria em 641. Essa cidade, que era considerada o centro matemático do mundo, possuía uma biblioteca de acervo riquíssimo, no entanto parte dele se perdeu durante as lutas pela conquista do território e possivelmente um pouco depois da ocupação, por razões que não são um consenso entre os historiadores. Isso fez com que grande parte da produção matemática até então se perdesse.

Nessa época, apesar das sucessivas vitórias na busca pela expansão de seu império, havia muita confusão política e cultural entre os árabes. Os únicos pontos de convergência eram econômicos e religiosos. Sabe-se que o sistema de numeração moderno, chamado de hindu-arábico, foi desenvolvido nessa época, mas não se sabe bem quando, pois não parecia haver muito interesse em desenvolvimento cultural e intelectual.

Em 750 essa estagnação aparentava estar no fim. O pouco que havia restado de conhecimento começou a despertar a curiosidade dos novos ocupantes de uma terra antes reconhecida pelo desenvolvimento cultural e intelectual. Muitas obras foram trazidas da Índia, e rapidamente os árabes foram absorvendo e desenvolvendo a cultura de seus vizinhos. Esse desenvolvimento espanta pela rapidez e é conhecido como "milagre árabe".

Sem esse súbito despertar cultural do Islã, ainda mais conhecimento científico e matemático dos povos antigos poderia ter desaparecido. Bagdá tornou-se a nova Alexandria após o estabelecimento da "Casa da Sabedoria". Importantes obras, como *Os elementos,* de Euclides, foram traduzidas para o árabe, como se vê na Figura 2.4.

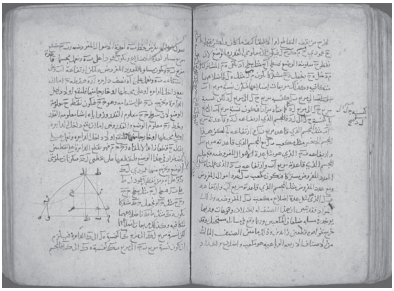
Figura 2.4 | Capa do livro ***Os Elementos***, traduzido para o árabe

Fonte: <http://www.muslimheritage.com/article/ahmad-salim-sa'idan-palestinian-historian-arabic-mathematics>. Acesso em: 9 maio 2016.

Um dos grandes responsáveis pela "Casa da Sabedoria" era um homem chamado al-Khwārizmī. Esse nome se tornou tão popular quanto o do próprio Euclides mais tarde, na Europa Ocidental. Ele próprio ratificou em suas obras a origem hindu do nosso sistema de numeração, mas leitores descuidados trataram de atribuir aos árabes, por meio de sua influência, a criação desse sistema.

Entre as obras mais importantes desse notável matemático estão *Al-jabr wa'l muqabalah* (Figura 2.5), cujo nome deu uma palavra bastante importante aos estudos matemáticos: *Al-jabr* é a origem da palavra Álgebra. Por essa razão, al-Khwārizmī é conhecido com o "Pai da Álgebra".

Figura 2.5 | Páginas do livro *Al-jabr wa'l muqabalah*



Fonte: <http://www.muslimheritage.com/article/ahmad-salim-sa'idan-palestinian-historian-arabic-mathematics>. Acesso em: 9 maio 2016.

Esse tempo não marca a origem da Álgebra, muito pelo contrário. Muita Álgebra já havia sido feita até então por diversos povos. O papiro Rhind, que data de 4.000 a.C., já continha registros dessas manipulações. Outros matemáticos contemporâneos a al-Khwārizmī utilizaram princípios aritméticos para obter os valores de incógnitas, que são os valores desconhecidos de uma equação.

Na equação destacada a seguir, a incógnita é representada pela letra x e apresenta apenas o expoente 1, sendo por isso chamada de Equação do 1º grau.

$$2x - 3 = 3x - 8$$

Reflita

A partir dessa equação, o objetivo é encontrar um valor para a letra, de modo que o primeiro membro, que se encontra à esquerda do sinal de igual, seja igual ao segundo, do lado direito do sinal de igual.

A obra *Al-jabr wa'l muqabalah* se destaca pela simplicidade dos problemas abordados, tornando-se mais acessível, inclusive pela maneira clara e direta como esses problemas são tratados. É uma característica que se observa na maioria dos textos árabes. Segundo Boyer (1996, p. 156), "os árabes em geral gostavam de uma boa e clara apresentação indo da premissa à conclusão, e também da organização sistemática".

Após introduzir brevemente o princípio posicional para a construção do sistema de numeração, o livro propôs, em seis de seus capítulos, resoluções para equações quadráticas, isto é, equações do 2º grau. Inicialmente foram apresentadas equações como $x^2 = 5x$, $\frac{x^2}{3} = 4x$ e $5x^2 = 10x$, em que soluções positivas x = 5, x = 12 e x = 2 foram dadas. Vale ressaltar que as soluções nulas não foram apresentadas porque ainda não eram conhecidas.

Assimile

Como já visto, x = 5, x = 12 e x = 2 são soluções para $x^2 = 5x$, $\frac{x^2}{3} = 4x$ e $5x^2 = 10x$, substituindo x pelo respectivo valor apresentado. Observe que x = 0 também resolve cada uma das equações.

Em seguida, equações como $x^2 = 25$ foram discutidas, mas apenas as soluções positivas foram apresentadas. Por fim, foram propostas equações como $x^2 + 10x = 39$, novamente apresentando somente soluções positivas e um método para completar quadrados. As equações foram cuidadosamente escolhidas para que não houvesse falta de respostas positivas.

Exemplificando

A equação $x^2 + 10x = 39$ pode ser resolvida completando quadrados. Sabe-se que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ para quaisquer a e b reais. Nesse caso, se somarmos 25 aos dois lados da equação, teremo $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$ se a equação então ficará $x^2 + 10x + 25 = 64$, que é o mesmo que $(x+5)^2 = 64$. Para os árabes, $x + 5 = 8$, pois $8^2 = 64$, então x tem que ser igual a 3. Hoje sabemos também que $(-8)^2 = 64$, portanto $x + 5 = -8$, o que significa que temos outra solução: x = –13.

Pesquise mais

Veja uma explicação mais detalhada de como completar quadrados em uma equação do 2º grau acessando:

<http://www.vivendoentresimbolos.com/2013/02/o-metodo-de-completar-quadrados_20.html>. Acesso em: 9 maio 2016.

A “arte” de completar quadrados está fundamentada no produto notável $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, como foi observado. Esse aparece como Proposição 4 do Livro II, da obra *Os elementos,* de Euclides, o que comprova a influência dessa importante obra no pensamento árabe.

A própria ideia de resolver equações, sobretudo quadráticas, já havia sido estudada pelos gregos nos tempos de Euclides. No entanto, as soluções eram essencialmente geométricas, o que não as tornava simples tampouco fáceis de entender. Isso reforça a importância dos árabes no processo de simplificação e sistematização de alguns processos matemáticos complexos.

Outra influência clara no pensamento árabe é a matemática hindu, sobretudo de Brahmagupta. Entre suas publicações mais importantes estão as soluções gerais para algumas equações quadráticas, sem a necessidade de completar quadrados. No entanto, seus trabalhos deixaram importantes lacunas no estudo da Álgebra. Algumas delas foram preenchidas por outro indiano, chamado Bhaskara, que, segundo estimativa, viveu entre 1114 e 1185. A fórmula que utilizamos até hoje para resolver uma equação do 2º grau recebe seu nome. Essa fórmula parte do princípio de que se uma equação é da forma $ax^2 + bx + c = 0$, sempre é possível completar os quadrados para que se consiga, por meio da resolução de equações do 1º grau, obter os valores reais de x, se eles existirem. Uma das formas de fazer isso está apresentada a seguir:

Se $ax^2 + bx + c = 0$, podemos multiplicar os dois membros da equação por $4a$. Nesse caso, teremos:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \cdot$$

Subtraindo $4ac$ dos dois membros a equação, temos:

$$4a^2x^2 + 2 \cdot 2axb = -4ac$$

ou ainda

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2axb = -4ac$$

pois $(2ax)^2 = 4a^2x^2$.

O primeiro termo da equação tem o quadrado de $2ax$, mais duas vezes $2ax$, vezes b, e para que tenhamos o quadrado de $2ax+b$ só falta b^2. Nesse caso, teríamos :

$$(2ax)^2 + 2axb + b^2 = (2ax+b)^2$$

Somando b^2 em ambos os membros, teremos:

$$(2ax)^2 + 2axb + b^2 = b^2 - 4ac$$

e, portanto,

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Assim:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O termo $b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação e simbolizado pela letra grega Δ (delta). A equação só terá solução real se Δ for maior ou igual a zero, pois não está definida a raiz quadrada de um número negativo em R. Se Δ for zero, as respostas serão iguais, pois somar ou subtrair a raiz quadrada de zero não altera o resultado.

Exemplificando

A equação $x^2 + 10x = 39$ também pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara. Para isso precisamos escrever $x^2 + 10x - 39 = 0$. Nesse caso, temos que $a = 1$, $b = 10$, $c = -39$ e $\Delta = (10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-39) = 256$.

Portanto, $x = \frac{-10 \pm \sqrt{256}}{2.1} = \frac{-10 \pm 16}{2.1}$, assim $x = 3$ ou $x = -13$.

Faça você mesmo

Resolva as equações a seguir completando quadrados ou utilizando a fórmula de Bhaskara:

a) $x^2 + 15x + 26 = 0$

b) $x^2 - 15x - 16 = 0$

c) $4x^2 - 15x + 11 = 0$

Sem medo de errar

Retomando a situação-problema desta seção, Henrique se deparou com um problema em que foram dados a receita e o custo de um produto, em função da quantidade vendida, pelas relações $R = -2q^2 + 400q$ e $C = 240q + 2400$. A ideia desse problema era definir os valores de q para que o lucro fosse nulo. Considerando que o lucro é a diferença entre a receita e o custo, se ele tem de ser nulo, então a receita e o custo devem ser iguais. Nesse caso, $R = C$ ou $-2q^2 + 400q = 240q + 2400$, o que nada mais é do que uma equação quadrática na incógnita q.

Mas como resolvemos esse tipo de equação?

O primeiro passo é reescrever a equação, de forma que ela possa ser resolvida por meio da fórmula de Bhaskara. Assim, temos:

$$-2q^2 + 160q - 2400 = 0$$

Nesse caso, os valores de a, b, c e Δ são, respectivamente, –2, 160, –2400 e 6400 (confira!). Assim,

$$q = \frac{-160 \pm 80}{2 \cdot (-2)}$$

Portanto, $q = 20$ ou $q = 60$. A conclusão é que se forem vendidas 20 ou 60 unidades, a receita será igual ao custo, ou seja, o lucro será zero. São as condições de equilíbrio dessa situação-problema. Esses valores informam ainda que entre 20 e 60 unidades o lucro é positivo e viabiliza o negócio.

! Atenção

Cuidado com os sinais dos coeficientes de x^2, x e do termo independente de x. A falta desse cuidado é a maior fonte de erro nesse tipo de resolução.

Avançando na prática

Pagamento dos funcionários

Descrição da situação-problema

Durante o expediente, Henrique recebeu uma ligação do empreiteiro que presta serviço para a empresa onde trabalha. Foi informado que quatro funcionários foram demitidos, e, nesse caso, cada um dos que permaneceram passaram a ter de executar 9 m^2 a mais do serviço combinado para suprir a falta desses funcionários. O serviço a ser realizado por todos os funcionários totaliza 72 m^2. Henrique precisa alterar a folha de pagamentos, mas a ligação caiu antes que ele pudesse confirmar a quantidade de funcionários que havia sido contratada no início, pois não está encontrando o papel em que tinha feito essa anotação.

Empenhado em seus estudos sobre a História da Álgebra, Henrique entendeu que essa pode ser uma boa oportunidade de pôr em prática o que está aprendendo. Seu raciocínio é o seguinte: havia x funcionários inicialmente e cada um era responsável por executar m metros quadrados. Ele sabe que ao multiplicar a quantidade de funcionários pela quantidade de metros, antes e depois da demissão, o resultado será 72.

Será que essas informações e o raciocínio que formulou são suficientes para Henrique solucionar o problema ou ele precisa de fato retornar a ligação para o empreiteiro para saber os dados que estão faltando?

Lembre-se

Na Álgebra, as equações nos permitem encontrar os valores que desejamos para as grandezas.

Resolução da situação-problema

$$\begin{cases} x \cdot m = 72 \\ (x-4)\cdot(m+9) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{72}{x} \\ (x-4)\cdot\left(\dfrac{72}{x}+9\right) = 72 \end{cases} \text{ assim,}$$

$$(x-4)\cdot\left(\frac{72}{x}+9\right)=72 \quad \Leftrightarrow \quad 72+9x-\frac{288}{x}-36=72 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x-36=\frac{288}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 9x^2-36x=288 \quad \Leftrightarrow \quad 9x^2-36x-288=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-4x-32=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta=16+128=144 \\ x=\dfrac{4\pm 12}{2} \Rightarrow x=8 \text{ ou } x=-4 \end{cases}$$

Como x = –4 não convém, pois não pode haver um número negativo de funcionários, conclui-se que havia 8 funcionários antes da demissão, os quais deveriam executar 9 m^2 cada um. Com a demissão, restaram 4 funcionários para executar 18 m^2 cada um.

Faça você mesmo

Uma transportadora entrega, com caminhões, 60 toneladas de açúcar por dia. Por causa de problemas operacionais, em um certo dia cada caminhão foi carregado com 500 kg a menos que o usual, tendo sido necessário, alugar mais 4 caminhões. Quantos caminhões foram utilizados? Quantos quilos transportou cada caminhão nesse dia?

Faça valer a pena

1. Em 641, as invasões chegaram a Alexandria. Esta cidade, que era considerada o centro matemático do mundo, possuía uma biblioteca de acervo riquíssimo. Este acervo foi destruído durante e depois das invasões por razões que não sabemos ao certo. Isso fez que grande parte da produção matemática até então fosse perdida.

O texto descreve uma das etapas da expansão de um povo pela Mesopotâmia no século VII. Assinale a alternativa que traz a língua falada por esse povo.

a) Inglês.

b) Alemão.

c) Árabe.

d) Chinês.

e) Espanhol.

2. Após o início da expansão árabe, essa civilização passou por um período de confusão política e cultural. Em razão do súbito interesse dos árabes pelas ciências, especialmente pela matemática, Bagdá tornou-se a nova Alexandria.

O símbolo da retomada da evolução intelectual do povo árabe pode ter sido:

a) A Revolução Industrial.

b) A Queda do Império Romano.

c) A construção da "Casa da Sabedoria".

d) A indústria bélica em desenvolvimento.

e) A destruição da biblioteca de Alexandria.

3. Entre as obras mais importantes desse notável matemático árabe estão *Al-jabr wa'l muqabalah*, cujo nome deu origem a uma palavra bastante importante para os estudos matemáticos. *Al-jabr* é a origem da palavra Álgebra. Por essa razão, esse estudioso é conhecido com o "Pai da Álgebra".

O texto-base se refere a:

a) Tales de Mileto.

b) Euclides de Alexandria.

c) Pitágoras de Samus.

d) Isaac Newton.

e) al-Khwārizmī.

Seção 2.3

Os elementos de Euclides

Diálogo aberto

Euclides de Alexandria é um nome que está em evidência nas pesquisas realizadas por Henrique sobre a História da Matemática. Chegou a hora de conhecer um pouco mais esse notável matemático que tanto contribuiu para o desenvolvimento dessa ciência. Sua vida e, principalmente, sua obra certamente influenciaram o modo como pensamos matemática até hoje.

Uma situação vivida por Euclides chamou a atenção de Henrique em especial: "Indagado por um aluno sobre a utilidade prática da matéria que estava sendo vista ordenou a seu escravo que desse a ele uma moeda 'para que tivesse algum ganho com o que estava aprendendo'" (EVES, 1995, p. 167). Nosso personagem se sentiu muito empolgado por conhecer esse fato, já que vem fazendo exatamente o oposto desse aluno. Claro que, vez por outra, percebe temas de suas pesquisas envolvidos nas atividades de seu trabalho ou em situações que vivencia, mas isso não é o mais importante. É sua relação com a matemática que está em jogo. Henrique se sente especialmente diferente por compreender coisas que poucos compreendem.

Muitas vezes uma pessoa utiliza certos conhecimentos matemáticos, mas nem sempre os compreende. Um pedreiro que está levantando uma parede faz marcações retilíneas de 3 e 4 unidades de medida no chão e na parede, partindo de um mesmo ponto, e verifica que a distância entre as extremidades dos segmentos equivale a 5 unidades. Se isso ocorrer, a parede segue na vertical, caso contrário, é hora de corrigir a rota. Isso acontece porque $5^2 = 4^2 + 3^2$ e as medidas 3 e 4 são lados de um triângulo. Quando a soma dos quadrados dessas medidas equivale ao quadrado da medida do outro lado, o triângulo é retângulo. Trata-se do Teorema de Pitágoras, cuja demonstração foi um dos pontos sobre o quais Euclides se debruçou.

Esse teorema é muito utilizado na Física, na Engenharia e em outras aplicações das ciências exatas. O estudo de Euclides sobre as proporções abriu caminho para a demonstração "mais famosa" desse teorema. Henrique se interessou por compreendê-la melhor, aproveitando para expandir ainda mais seus conhecimentos matemáticos, passando agora para o campo da Geometria Plana. Você está convidado a nos acompanhar em mais essa empreitada:

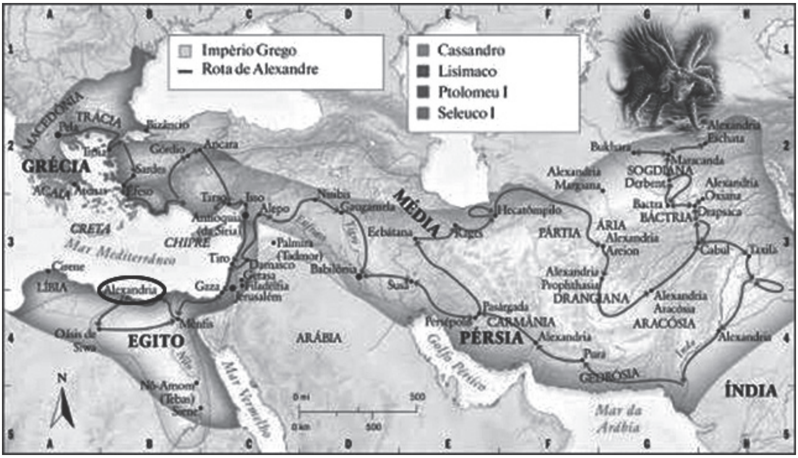
Partindo de um triângulo retângulo, cujos lados, altura e projeções ortogonais são representados por letras (variáveis), faremos a demonstração desse importante Teorema da Geometria Plana, que, como vimos, tem implicações em muitas áreas do conhecimento.

Não pode faltar

Bem pouco se sabe sobre onde e quando Euclides de Alexandria nasceu. É chamado dessa forma porque foi convidado a ir a Alexandria ensinar matemática. Essa cidade foi fundada em 332 a.C. por Alexandre, o Grande, tão logo sucedeu Filipe, seu pai, após a queda dos Estados Gregos. Nessa época o império Macedônio se expandia por diversas regiões, e novas cidades eram fundadas em locais criteriosamente escolhidos.

Alexandria ficava no entroncamento de importantes rotas comerciais. A cidade enriqueceu rapidamente, tornando-se uma das regiões mais prósperas do mundo. Cerca de 30 anos após sua fundação já tinha por volta de 500 mil habitantes. Por essa razão, Alexandre a escolheu como a capital. Veja a Figura 2.6 a seguir:

Figura 2.6 | Rota de conquistas de Alexandre (Alexandria em destaque)



Fonte: <jv-egiptologia.blogspot.com.br>. Acesso em: 17 maio 2016.

Para atrair homens sábios à cidade, deu início à construção da Universidade de Alexandria. Essa foi a primeira instituição desse gênero de que se tem notícia e desde sua implementação se assemelhava, e muito, às universidades que conhecemos hoje. Entre os professores, havia aqueles que se destacavam pela capacidade de produzir conhecimento, pela capacidade de gerenciamento do processo educacional e pela capacidade de transmitir conhecimento. Euclides se destacava, sobretudo, por esta última característica.

Dizem que a universidade contava com muitos recursos, uma arquitetura que proporcionava bem-estar aos que a frequentavam, além de salas de aula, laboratório e biblioteca bem aparelhados. Ao abrir suas portas, por volta de 300 a.C., fez que, rapidamente, Alexandria se tornasse a metrópole intelectual da civilização grega.

Acredita-se que Euclides vivia em Atenas nesse período, onde teria estudado com discípulos de Platão. Ele foi escolhido para chefiar o departamento de matemática da Universidade de Alexandria e, por sua característica pessoal de muita modéstia e grande consideração para com os outros, ganhou destaque nessa função.

Durante o período em que trabalhou na universidade escreveu e organizou muitos trabalhos importantes, como *Os dados*, *Divisão de figuras*, *Os fenômenos* e *Óptica*. No entanto, nenhum deles alcançou o status e a importância de *Os elementos*. Esta obra é composta por 13 livros, ou capítulos, cujo conteúdo, de carácter introdutório, aborda o que era considerado na época toda a matemática elementar.

Figura 2.7 | Página de rosto (em tamanho reduzido) da tradução para o inglês de *Os elementos*

Fonte: Eves (1995, p. 172).

De acordo com Eves (1995, p. 167), "nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico". São mais de 1000 edições impressas desde 1482. É uma pena que não se tenha descoberto nenhuma cópia que possa ser considerada original. As edições mais modernas dessa obra se baseiam em revisões. A primeira delas foi preparada quase 700 anos depois por Téon de Alexandria.

Assimile

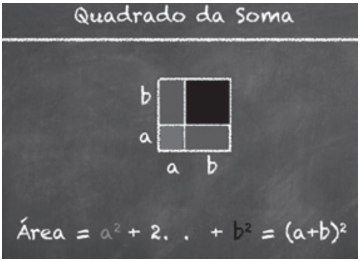
Como vimos na Seção 2.2, a maior parte do acervo da biblioteca da Universidade de Alexandria seria destruída após a invasão árabe que ocorreria alguns séculos depois. Por isso não há uma versão completa que date do período em que viveu Euclides.

Os livros ou capítulos de *Os elementos*, trazem, em sua maioria, conceitos de Geometria que até hoje são difundidos na Educação Básica. A obra também apresenta muita Teoria de Números e Álgebra Elementar, que serviu de base para o desenvolvimento da Álgebra pelos hindus e pelos árabes.

A obra contém 465 proposições divididas nesses 13 capítulos (livros). A maior parte do Livro I é trabalhada durante a Educação Fundamental e Média no Brasil. Lá encontramos teoremas importantes sobre a congruência de triângulos, construções com régua e compasso, retas paralelas, entre outros. No final desse livro encontramos uma demonstração para o Teorema de Pitágoras. Trata-se de uma demonstração essencialmente geométrica que não é aquela abordada mais frequentemente nos livros atuais. Nessa fase, Euclides ainda não se sentia à vontade com as proporções, talvez por isso tenha preferido uma forma diferente daquela que estudaremos mais adiante nesta seção.

O Livro II é o menor de todos os livros. Nele encontramos demonstrações geométricas para alguns produtos notáveis que já utilizamos neste curso. Euclides demostra por meio do cálculo de áreas que $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$, identidade que utilizamos para realizar racionalização de denominadores. Demostrou, também utilizando o mesmo método, que quaisquer que sejam a e b, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, como vemos na Figura 2.8:

Figura 2.8 | Demonstração geométrica para o Quadrado da Soma



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Para desenvolvermos os produtos a seguir, basta levarmos em consideração as identidades verificadas por Euclides:

I. $(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

II. $(x+2) \cdot (x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

Reflita

O desenvolvimento das expressões $(x+2)^2 = (x+2) \cdot (x+2)$ e $(x+2) \cdot (x-2)$ pode ser feito utilizando-se a propriedade distributiva. Verifique que o resultado obtido dessa forma é o mesmo alcançado utilizando as identidades demonstradas por Euclides no Livro I.

Os Livros III e IV se dedicam ao estudo dos círculos. Seu conteúdo não é muito diferente do que se conhece hoje sobre esse elemento geométrico. Contêm também proposições sobre polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência. Um polígono está inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices pertencem à circunferência. Um polígono está circunscrito a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes à circunferência, ou seja, interceptam-na em um único ponto.

Exemplificando

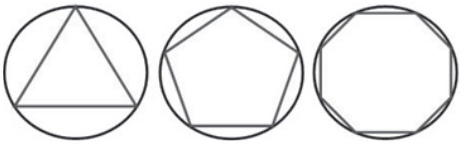
Os polígonos a seguir estão circunscritos às circunferências (Figura 2.9).

Figura 2.9 | Polígonos circunscritos

Fonte: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/poligonos-inscritos-circunscritos.htm>. Acesso em: 18 maio 2016.

Já os polígonos a seguir estão inscritos nas circunferências (Figura 2.10).

Figura 2.10 | Polígonos inscritos



Fonte: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/poligonos-inscritos-circunscritos.htm>. Acesso em: 18 maio 2016.

No Livro V, Euclides expõe magistralmente a teoria das proposições de Eudoxo. É importante esclarecer que o autor de *Os elementos* não propõe quase nada novo. A obra, como foi dito anteriormente, é uma reunião daquilo que já se conhecia em termos de matemática básica, organizada de forma sistematizada e didática. No Livro VI, essa teoria é aplicada à Geometria. Vemos proposições ligadas à semelhança de figuras planas, em especial, de triângulos. Essas proposições fundamentam a demonstração mais comum do Teorema de Pitágoras.

Pesquise mais

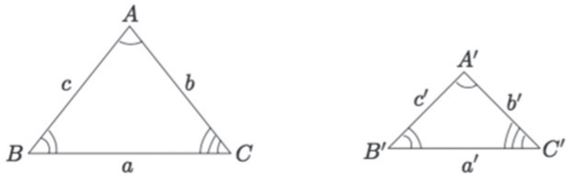
Leia mais sobre a semelhança de triângulo nas páginas 155-166 do artigo disponível em: <https://www.todamateria.com.br/semelhanca-de-triangulos/>. Acesso em: 18 maio 2016.

Em resumo, dois triângulos são semelhantes quando os três ângulos são ordenadamente congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

Na Figura 2.11, a medida do ângulo A é igual à medida de A', da mesma forma que as medidas de B e B', e de C e C' são iguais. Nesse caso, dizemos que ABC é semelhante à A'B'C' e os lados opostos aos ângulos de mesma medida são proporcionais, ou seja,

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

Figura 2.11 | Triângulos semelhantes



Fonte: <http://www.professores.uff.br/dirceuesu/GBaula9.pdf>. Acesso em: 18 maio 2016.

Nos Livros VII, VIII e IX, houve uma pausa na Geometria para discutir Teoria dos Números. Nesses livros, são tratadas questões como Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum e a noção de Número Primo.

Pesquise mais

Leia mais sobre MMC e MDC acessando o artigo disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/calculo-mmc-mdc.htm>. Acesso em: 18 maio 2016.

De acordo com o que foi estudado, todo número inteiro tem um conjunto de múltiplos e de divisores. Por exemplo, o conjunto dos múltiplos naturais de 120 é {0, 120, 240, 360,...}, enquanto o conjunto dos divisores naturais desse mesmo número é {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120}.

Em algumas situações precisamos encontrar o menor múltiplo comum (MMC), não nulo, e/ou o maior divisor comum (MDC) desses números. Uma maneira é listarmos os conjuntos correspondentes a cada um dos números e procurarmos o que desejamos. Mas isso pode ser trabalhoso.

Por isso existem métodos para que isso seja feito de maneira menos onerosa.

Um dos métodos para cálculo do MDC entre dois números é o algoritmo euclidiano. Primeiramente, dividimos os números dados (o maior pelo menor). A segunda divisão é entre o menor e o resto da primeira divisão. A seguinte é entre o resto da primeira e o resto da segunda. Fazemos isso até encontrarmos resto igual a zero. Quando isso ocorre, o resto da divisão anterior é o MDC. Normalmente utilizamos uma tabela para organizar o resultado.

Como exemplo, suponha que desejamos calcular o MDC entre 120 e 210. O primeiro passo é dividir 210 por 120 (o maior pelo menor). Essa divisão fornece quociente 1 e resto 90. Em seguida, deve-se dividir 120 por 90 (o menor pelo resto da primeira divisão), o que fornece quociente 1 e resto 30. Ao dividirmos 90 por 30 (o resto da primeira divisão pelo resto da segunda) obtemos quociente 3 e resto nulo. Nesse caso, o número 30, que é o resto da divisão anterior, é o MDC entre 210 e 120, ou seja, é o maior entre os divisores comuns desses números. Essas operações podem ser representadas e organizadas em uma tabela:

210	120	90	30
120	90	***30***	0

No Livro X, Euclides volta a relacionar os números e a Geometria. É nesse capítulo que são tratadas as grandezas incomensuráveis, que hoje conhecemos como números irracionais. São tratados números da forma $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ e $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

Por fim, os Livros XI, XII e XIII tratam da Geometria Sólida ou, como conhecemos hoje, Espacial. São abordados poliedros, cilindros, cones e esferas, assim como as interações entre esses sólidos.

Após tanta dedicação em organizar a matemática elementar da época, em especial a Geometria, não há nada mais justo que relacionar o estudo dessa parte da matemática ao autor de *Os elementos*. Por isso é comum chamarmos a geometria que estudamos na Educação Básica e em alguns cursos superiores de Geometria Euclidiana.

Hoje sabemos que não vivemos no plano, e a Geometria Euclidiana tem a maioria das proposições fundamentadas nisso. Por essa razão, além de se estudar a Geometria Euclidiana, matemáticos se debruçaram e se debruçam mais recentemente sobre problemas de Geometria não Euclidiana. Mas essa é outra extensa discussão.

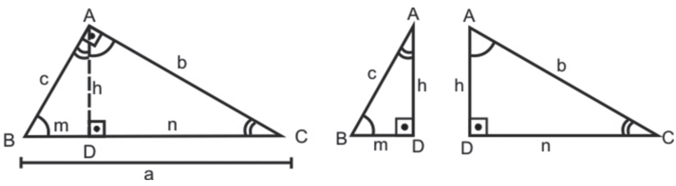
Sem medo de errar

O estudo de Euclides sobre as proporções abriu caminho para a demonstração "mais famosa" do Teorema de Pitágoras. Henrique se interessou por compreendê-la melhor, aproveitando para expandir ainda mais seus conhecimentos em Matemática, passando agora para o ramo da Geometria Plana.

Em um triângulo retângulo, aquele que possui um ângulo reto (cuja medida é 90° e simbolizamos por ⊾), chamamos de hipotenusa o lado oposto a esse ângulo e de catetos os outros dois lados. No triângulo retângulo com vértices nos pontos ***A***, ***B*** e ***C*** da Figura 2.12, a é a medida da hipotenusa, enquanto ***b*** e ***c*** são as medidas dos catetos.

Para demonstrarmos o Teorema de Pitágoras, o primeiro passo é percebermos que, ao traçarmos a altura $\overline{AD}$, relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, ele fica dividido em dois outros triângulos DBA e DAC. Temos então três triângulos, todos eles semelhantes dois a dois. Na Figura 2.12 podemos perceber que todos esses triângulos são retângulos e que os dois ângulos agudos (ângulos com medida menor que 90°) estão em todos eles.

Figura 2.12 | Relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: <http://www.matema.xpg.com.br/Demonstracoes/MatemaTeoremaPitagoras.html>. Acesso em: 18 maio 2016.

Quando dois triângulos são semelhantes, os lados correspondentes (opostos a um mesmo ângulo) são proporcionais. Montando as proporções relativas à semelhança do triângulo maior ABC com cada um dos menores, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} ah = bc \\ c^2 = am \text{ (I)} \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DCA \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Leftrightarrow \begin{cases} ah = bc \\ b^2 = an \text{ (II)} \end{cases}$$

Observe que duas das equações geradas por essas semelhanças vêm acompanhadas de numerais romanos (I) e (II). Para finalizarmos a demonstração, somaremos essas equações e, com isso, teremos:

$$c^2 + b^2 = am + an$$

$$c^2 + b^2 = a \cdot (m + n)$$

Mas, de acordo com a Figura 2.12, a soma das medidas m e n equivale ao valor da hipotenusa a. Assim:

$$c^2 + b^2 = a \cdot a$$

$$c^2 + b^2 = a^2$$

De acordo com o que foi demonstrado, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Prova-se também que se essa relação é válida, o triângulo é retângulo. Relembrando o caso da construção da parede pelo pedreiro, ao marcar segmentos de medidas 3 e 4 no chão e na parede, e verificar que a distância entre os extremos vale 5, estamos verificando que o triângulo é retângulo e, portanto, a parede segue na vertical.

Atenção

Verifique com calma as semelhanças de triângulos utilizadas na demonstração. Entenda como essa construção é essencial para acompanhar o raciocínio.

Avançando na prática

Máximo divisor comum

Como vimos, Euclides também escreveu sobre a Teoria dos Números. Entre as proposições destaca-se a que aborda a existência de um divisor comum entre dois números inteiros que é maior que todos os outros. Trata-se do Máximo Divisor Comum, popularmente conhecido como MDC.

No início do Livro VII é apresentada uma versão do que hoje conhecemos como algoritmo euclidiano para o cálculo desse valor. Para calcularmos o máximo divisor comum entre dois números devemos dividir o maior pelo menor; em seguida, dividimos o menor pelo resto da primeira divisão, depois o resto da primeira divisão pelo resto da segunda, até obtermos zero. Quando isso acontecer, o MDC será o resto da divisão anterior à que resultou resto nulo.

Com base nisso, vamos aplicar esse conhecimento para resolvermos mais uma situação-problema:

Uma empresa foi contratada para fixar postes, por onde passam os fios da rede elétrica, em uma rua em formato de "L". As medidas dos quarteirões são 200 m e 180 m. É desejável que a distância entre os postes seja sempre a mesma e a maior possível para minimizar a quantidade de postes instalados. A pergunta é: a que distância os postes devem ficar um do outro para cumprir o que se deseja?

Lembre-se

O Máximo Divisor Comum entre dois números é o maior número que divide os dois números dados, simultaneamente.

Resolução da situação-problema

Seja d a distância entre dois postes. Se desejamos colocar x postes em um dos quarteirões, 180 dividido por x (postes) fornece a distância d entre os postes dessa rua, assim como 200 dividido por y fornecerá a distância dos postes da outra, que também deve ser igual a d. Assim:

$$\frac{180}{x} = d$$

$$\frac{200}{y} = d$$

Isso equivale a afirmar que:

$$\frac{180}{d} = x$$

$$\frac{200}{d} = y$$

Mas x e y são quantidades inteiras, pois representam as quantidades de postes por quarteirão. Nesse caso, o valor de d tem de ser divisor de 180 e 200 simultaneamente. Como d tem de ser o maior possível, ele será o MDC entre 180 e 200. Nesse caso:

200	180	20
180	***<u>20</u>***	0

Portanto, a distância entre os postes será de 20 metros. Serão colocados 10 postes em um dos quarteirões e 9 no outro, totalizando 19 postes. Essa é a menor quantidade possível para que sejam satisfeitas as condições do problema.

Faça você mesmo

Uma empresa é responsável pela administração de dois hospitais. O primeiro possui 165 leitos, enquanto o segundo tem 150 leitos. Deseja-se contratar a menor quantidade possível de enfermeiras, de modo que a relação leitos por enfermeira seja a mesma nos dois hospitais. Quantas profissionais devem ser contratadas no total?

Faça valer a pena

1. Muito pouco se sabe sobre onde e quando ele nasceu. Seu nome faz referência à cidade onde escreveu sua principal obra, chamada *Os elementos*.

O texto se refere a:

a) Pitágoras de Samus.

b) Euclides de Alexandria.

c) Tales de Mileto.

d) Leonardo de Pizza.

e) Pierre de Fermat.

2. Foi fundada em 332 a.C. pelo filho do rei Filipe e ficava no entroncamento de importantes rotas comerciais. Essa cidade enriqueceu rapidamente, tornando-se uma das regiões mais prósperas do mundo. Cerca de 30 anos após sua fundação já tinha por volta de 500 mil habitantes.

O texto se refere a:

a) Atenas.

b) Roma.

c) Alexandria.

d) Paris.

e) Bagdá.

3. A obra traz muita Teoria de Números e Álgebra Elementar, que serviu de base para o desenvolvimento da Álgebra pelos hindus e pelos árabes. O livro contém 465 proposições divididas em 13 livros ou capítulos, os quais trazem, em sua maioria, conceitos de Geometria que até hoje são difundidos na Educação Básica.

O texto refere-se ao livro:

a) *Os elementos*, de Euclides.

b) *Aritmética*, de Diofante.

c) *O homem que calculava*, de Malba Tahan.

d) *Al-jabr wa'l muqabalah*, de al-Khwārizmī.

e) *Philosophiae naturalis principia mathematica*, de Isaac Newton.

Seção 2.4

História da geometria antiga e moderna

Diálogo aberto

A Geometria não começou com Euclides, certo? Na seção anterior, vimos que o trabalho de Euclides foi organizar todo o conhecimento de matemática elementar da época. Entre os tópicos estava a Geometria. O fato é que Euclides a organizou de maneira "magistral", o que rendeu a ela o nome de Geometria Euclidiana. Mas ele não a inventou, e isso precisa ficar claro!

Henrique entendeu bem a importância de Euclides, então ele se perguntou como teria surgido a Geometria. Que caminhos ela percorreu para chegar à forma que apresenta hoje? Resolveu então pesquisar. Essa investigação encerra o ciclo de pesquisas que havia proposto a si mesmo após entender que a Matemática se preocupava, essencialmente, com quantidades, grandezas e formas.

Sua pesquisa o levou novamente à Mesopotâmia e também até o Egito Antigo. Os habitantes dessas regiões eram considerados grandes agrimensores ("esticadores de cordas"), possivelmente pela necessidade de se medir novamente as terras a cada cheia dos rios Eufrates, Tigre e Nilo. Essa pode ter sido a motivação desses povos para estudar e, então, desenvolver a Geometria. Outra hipótese bastante aceita é a de que a classe sacerdotal, especialmente a egípcia, pensava em Geometria apenas por diversão e fazia os registros de suas conclusões.

Seja como for, não dá para dissociar a História da Geometria das civilizações babilônica e egípcia, principalmente pela abundância de registros, os quais interessaram nosso personagem. Pode-se conjecturar muitas coisas sobre a origem da Geometria, mas fazer História é verificar os documentos escritos que chegaram até nós. E foi isso que Henrique fez.

As leituras que realizou o levaram novamente ao Papiro Ahmes (ou Rhind). Lá encontrou registros de problemas relacionados à semelhança de triângulos e principalmente ao cálculo de áreas. Achou curiosa a associação da área de um círculo de diâmetro 9 à área de um quadrado de lado 8. Viu referências à área de triângulos, trapézios e outros polígonos. Leu também um estudo sobre volumes e, finalmente, sua pesquisa estava associada ao que tinha estudado na Educação Básica.

Uma pergunta, no entanto, ainda não havia sido respondida: o que a área de um círculo tem que ver com a área de um quadrado? Essa é uma das perguntas que tentaremos responder nesta seção. Você é nosso convidado para participar dessa última viagem de Henrique.

Não pode faltar

Como sabemos, não é conveniente arriscar a origem de qualquer assunto relacionado à Matemática, pois muitos surgiram antes mesmo do início dos registros e da escrita. De 6 mil anos para cá os registros são mais confiáveis, então é a eles que recorremos quando queremos remontar a História da Matemática.

Para Heródoto (485-420 a.C.), geógrafo e historiador grego, e Aristóteles (384-322 a.C.), filósofo, discípulo de Platão e professor de Alexandre, o Grande, a Geometria tinha raízes na civilização egípcia, justamente pela abundância de registros evidentes de seu uso. O primeiro relacionou a origem da Geometria às constantes medições de terra ocasionadas pelas cheias anuais do Rio Nilo, que levavam consigo as marcações anteriores. Os egípcios eram grandes agrimensores, que ao pé da letra significa puxadores de corda. Já Aristóteles acreditava que a classe sacerdotal egípcia estudava por lazer Matemática e, especialmente, Geometria.

O fato é que não se pode contradizer nenhum dos dois no que diz respeito à importância da civilização egípcia para o conhecimento de Geometria que temos hoje. A preocupação com essa área da matemática já podia ser observada nos desenhos encontrados em cavernas, feitos pelos homens neolíticos. É provável que eles não tivessem muitos momentos de lazer ou a necessidade de realizar muitas medições, já que a preocupação principal era a sobrevivência, mas é possível observar formas bastante interessantes em sua arte, como se vê na Figura 2.13.

Figura 2.13 | Exemplo de arte do período Neolítico

Fonte: <http://artescompartilheessaideia.blogspot.com.br/2013_05_01_archive.html>. Acesso em: 26 maio 2016.

De acordo com Eves (1995, p. 57), "a matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade". Ao longo do curso de importantes rios da África e da Ásia novas formas de sociedade foram surgindo. Entre eles destacam-se o Tigre e o Eufrates, já mencionados em nosso estudo, e o rio Nilo, no Oriente Médio. A drenagem dos pântanos, o controle de inundações e a possibilidade de irrigação eram muito favoráveis para o desenvolvimento da agricultura.

Nesse contexto, fez-se necessário o desenvolvimento tecnológico para aproveitar os recursos naturais da melhor maneira possível. Os babilônios, que viviam na região entre os rios Tigre e Eufrates, deixaram bem evidente seu entendimento sobre essa necessidade e experimentaram um desenvolvimento tecnológico cujos frutos colhemos até hoje. Eles provavelmente estavam bastante familiarizados com regras gerais para o cálculo de áreas simples como a dos retângulos, triângulos retângulos e isósceles, e de alguns outros quadriláteros. O que chama a atenção é a circunferência estar associada ao triplo de seu diâmetro. Essa associação se refere certamente ao perímetro (ou comprimento) da circunferência de diâmetro d (hoje sabemos que sua medida exata é $\pi \cdot d$.

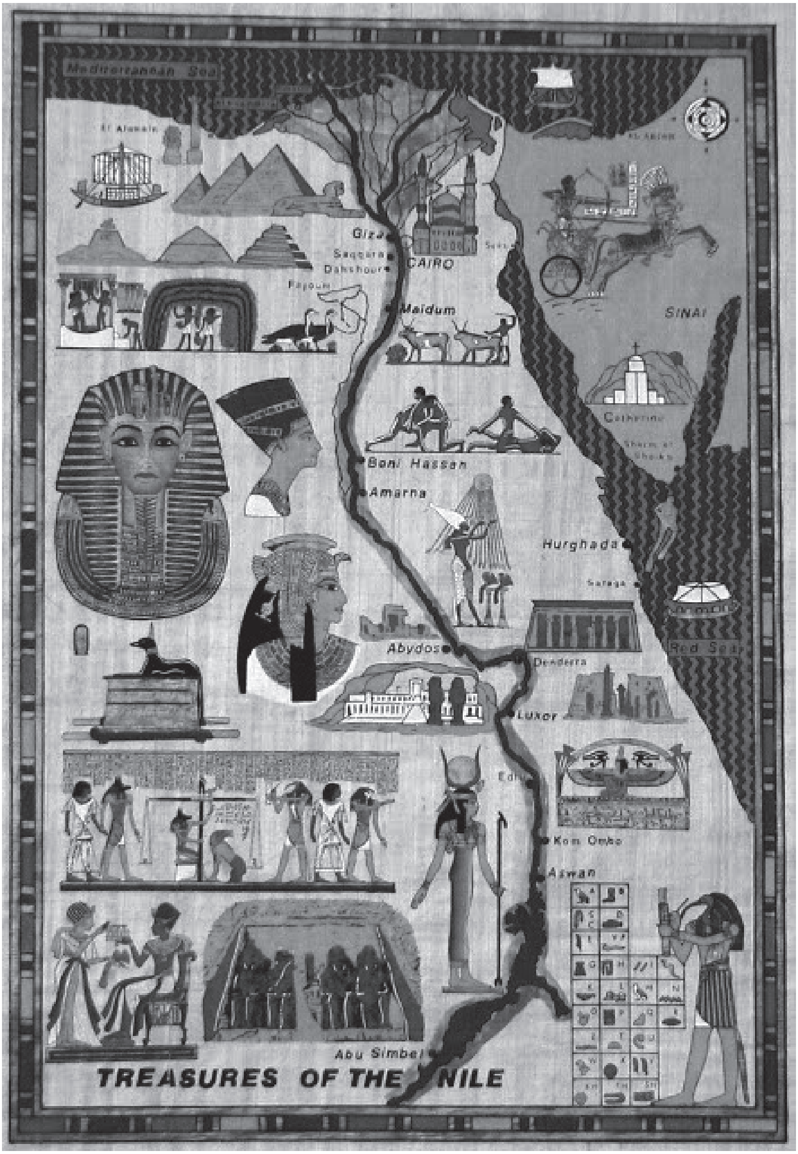
Os babilônios conheciam também algumas regras para o cálculo do volume do cilindro e, recentemente, historiadores descobriram a utilização de uma aproximação do próprio número π, escrito como $3 \text{ e } \frac{1}{8}$. Mas a característica principal da Geometria babilônica é a associação constante com elementos algébricos. Essas informações são resultado de um trabalho sistemático de arqueólogos na Mesopotâmia desde antes da metade do século passado. Museus de Paris, Berlim e Londres, assim como as Universidades de Yale, Columbia e Pensilvânia, nos Estados Unidos, têm ótimas coleções de tábuas que remontam a História da Geometria dos babilônios.

É importante esclarecer que, quando nos referimos aos babilônios, incluímos povos como os sumérios, assírios, caldeus e outros que habitavam a região entre os rios Tigre e Eufrates. Também é necessário lembrar que os registros em tábuas de argila devem-se à abundância de argila nessa região.

Os egípcios viviam às margens do Nilo, como se vê na Figura 2.14. Essa civilização se espalhou por essa região e tinha no rio a fonte de tudo o que precisava para seu sustento. O rio Nilo também era fonte de inspiração para o desenvolvimento de tecnologias para aproveitar da melhor maneira possível sua presença ali. Como vimos, Heródoto atribuiu a difusão da Geometria às medições de terra às margens do rio após cada período de cheia. As terras mais próximas às margens eram as mais disputadas, pois eram mais férteis. Nesse caso, um sistema de medição eficiente e claro reduzia questionamentos sobre a justiça do processo.

O isolamento natural da civilização egípcia protegia essa região de invasões estrangeiras. Ao contrário dos babilônios, os egípcios não experimentaram grandes períodos de turbulência política e social em decorrência de invasões. No entanto, esse isolamento e a “serenidade” do rio Nilo não obrigavam um desenvolvimento tecnológico tão extenso quanto o dos babilônios. Exceção feita ao processo de construção das pirâmides, os problemas egípcios eram bem menos complicados do que os de seus vizinhos.

Figura 2.14 | Ilustração da posição da civilização egípcia em relação ao Rio Nilo



Fonte: <http://teiadosfatos.blogspot.com.br/2012/02/egito-antigo-dadiva-do-nilo.html>. Acesso em: 26 maio 2016.

Por falar em pirâmides, a grande pirâmide de Gizé, construída por volta de 2600 a.C., que se vê ao fundo na Figura 2.15, tem números impressionantes, além de envolver muitos problemas de matemática e engenharia. A estrutura cobre uma área de 526 acres, cerca de 2.130.000 m^2. Contém mais de 2 milhões de blocos, de 2,5 toneladas cada um, em média, transportados de uma pedreira situada do outro lado do rio Nilo. Em algumas câmaras, o teto foi revestido de blocos de granito de 54 toneladas, medindo 8,2 metros de comprimento por 1,2 metro de largura, trazidos de quase mil quilômetros de distância e colocados a 30 metros do chão. De acordo com estudos recentes, os erros relativos às medições de lados e ângulos não superam 1/14.000.

Figura 2.15 | A grande pirâmide de Gizé (ao fundo)

Fonte: <http://listadedestinos.com.br/piramides-de-gize/>. Acesso em: 29 maio 2016.

Pesquise mais

Saiba mais sobre a pirâmide de Gizé acessando o site disponível em: <http://www.sohistoria.com.br/ef2/egito/piramides.php>. Acesso em: 29 maio 2016.

Retomando o percurso histórico da Geometria, a principal fonte de conhecimento sobre seu desenvolvimento na civilização egípcia são os papiros de Moscou e Rhind. Vinte e seis de seus 110 problemas são geométricos. A maioria envolve cálculo de áreas e volumes, especialmente o volume de grãos. Os egípcios assumem que a área de um círculo é igual à área de um quadrado cujo lado tem $\frac{8}{9}$ da medida do diâmetro desse círculo.

Exemplificando

Segundo o Papiro Rhind, qual seria a área de um círculo de raio 4,5 cm?

Nesse caso, se o raio mede 4,5 cm, seu diâmetro mede 9 cm e sua área será igual à área de um quadrado de lado $\frac{8}{9}$ de 9, ou seja, 8 cm. Assim, a área do círculo seria $8^2 = 64\ cm^2$.

O que sabemos hoje é que se um polígono regular está circunscrito a um círculo, sua área é o produto do semiperímetro pelo raio do círculo, independentemente da quantidade de lados do polígono. Sabendo disso, relacionar a área do círculo à área de um polígono não é uma tarefa tão complicada. Observando a Figura 2.16 é possível perceber que quanto maior o número de lados do polígono, menor é a diferença entre sua área e a área do círculo. Se desenharmos um polígono regular de 50 lados, por exemplo, a diferença tende a ser imperceptível e a área do círculo é o limite para a área de um polígono de *n* lados.

Figura 2.16 | Polígonos de 3, 5 e 8 lados, circunscritos a uma circunferência

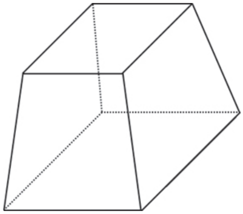
Fonte: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/poligonos-inscritos-circunscritos.htm>. Acesso em: 29 maio 2016.

Nesse caso, o produto do semiperímetro do círculo pelo seu raio é o valor em relação ao qual a área do polígono regular se aproxima quando a quantidade de lados aumenta. O limite para isso é a área do círculo, e o perímetro de um círculo vale $2\pi r$. Nesse caso, para calcularmos o semiperímetro, temos de dividir o perímetro por 2, assim, ele será igual a πr. A área A do círculo será dada por:

$$A = \pi \cdot r \cdot r$$
$$A = \pi \cdot r^2 \qquad \text{(Equação 2.1)}$$

Ainda de acordo com o Papiro Rhind, o volume de um cilindro reto é o produto da área da base pelo comprimento da altura. Por razões bastante óbvias, os egípcios se preocuparam com o volume das pirâmides. No Papiro de Moscou encontra-se um problema que envolve o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada, como o da Figura 2.17.

Figura 2.17 | Tronco de pirâmide de base quadrada



Fonte: elaborada pelo autor.

A fórmula para esse cálculo não é encontrada em qualquer outro registro oriental antigo. De acordo com o problema 14, o volume V de um tronco de altura h e bases de lados a e b é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(a^2 + ab + b^2\right) \qquad \text{(Equação 2.2)}$$

Exemplificando

Considere um tronco de pirâmide de base quadrada, altura de 15 cm e lados medindo 10 cm e 20 cm. Qual é o valor de seu volume, tendo em vista a fórmula proposta pelos egípcios?

De acordo com a descrição do tronco em questão sabemos que a = 10, b = 20 e h = 15. Portanto, $V = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot \left(10^2 + 10 \cdot 20 + 20^2\right) = 3.500\,\text{cm}^3$.

Assimile

O cilindro reto é um sólido geométrico muito observado no nosso dia a dia. Uma lata de óleo, um rolo de papel higiênico e uma pilha de CDs são exemplos desse tipo de sólido. Pensando na pilha de CDs é fácil concordar com os egípcios sobre a forma de calcular o volume do cilindro reto. Se soubermos o volume de um CD, basta multiplicarmos esse valor pela quantidade de CDs da pilha, o que corresponderia à altura dessa pilha.

Assimile

Um tronco de pirâmide é o resultado da secção (corte) de uma pirâmide por plano paralelo à base.

Reflita

Há alguma diferença entre as fórmulas vistas para o cálculo do volume do tronco?

Como vimos na seção anterior, Euclides de Alexandria se valeu de todo o conhecimento matemático desenvolvido e registrado até então para organizar sua obra *Os elementos*. Por isso a Geometria, observada desde o período Neolítico, desenvolvida por civilizações como a egípcia e a babilônica, e organizada pelos gregos, é chamada de Geometria Euclidiana. Hoje já se estuda outras formas, entre elas, a não Euclidiana.

Pesquise mais

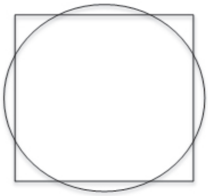
Sugerimos a seguinte leitura para conhecer um pouco mais sobre a Geometria não Euclidiana: MLODINOW, L. **A janela de Euclides**. São Paulo: Editora Geração, 2008.

A Geometria Analítica, que surgiu com René Descartes (1596-1650), é a fusão da Geometria com a Álgebra. Essa Geometria, que descreve o comportamento de figuras geométricas no plano cartesiano de acordo com suas equações, foi a alavanca que faltava para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Atribui-se à evolução dessa ferramenta o grande avanço tecnológico experimentado pela humanidade nos últimos 150 anos. Mas isso é assunto para a próxima unidade de ensino. Você não perde por esperar!

Sem medo de errar

O que a área de um quadrado tem a ver com a área de um círculo? Essa foi a pergunta que Henrique fez a si mesmo quando leu sobre a Geometria babilônica e egípcia. As duas civilizações relacionaram essas áreas sugerindo inclusive um valor para o irracional π. Provavelmente o desenho que se observa na Figura 2.18 foi a inspiração para essa relação. É como se a área exterior ao quadrado e interior ao círculo fosse equivalente àquela que é exterior ao círculo e interior ao quadrado, ou seja, a área excedente do círculo seria igual à que excede no quadrado. Uma compensaria a outra.

Figura 2.18 | Círculo e quadrado sobrepostos



Fonte: elaborada pelo autor

Utilizando a aproximação 3,14 para o número π, um círculo de diâmetro 27 cm e, portanto, raio 13,5 cm terá área aproximada de 572,3 cm^2, considerando $A = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot (13{,}5)^2$. Utilizando o método proposto pelos egípcios, registrado no Papiro Rhind, a área em questão valeria 576 cm^2, pois um círculo de diâmetro 27 cm equivaleria a um quadrado de lado 24 cm. O erro seria 3,7 cm^2, o que corresponde a 0,65% do valor da medida correta. Por isso podemos afirmar que se trata de uma ótima aproximação, principalmente para a época em que eram calculadas.

Atenção

É importante lembrar que o perímetro da circunferência que limita um círculo vale $2\pi r$ e que o semiperímetro é a metade desse valor, portanto, πr.

Avançando na prática

Volume da pirâmide

Descrição da situação-problema

Henrique havia aceitado bem o fato de o volume de um cilindro ser igual à área de sua base vezes sua altura. Para isso, pensou na pilha de CDs. Se um CD tem determinado volume e espessura igual a 1 mm, por exemplo, o volume de dez CDs empilhados será dez vezes o volume de um deles, ou seja, o que há na base vezes a altura.

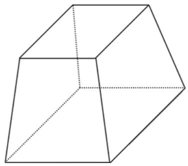
Mas, no caso da pirâmide, o que há na base não é igual ao que há nas diversas camadas até chegarmos ao topo. São sempre quadrados, mas com lados cada vez menores até termos apenas um ponto. Nesse caso, o volume não corresponde ao produto do que há na base pela altura. O volume de uma pirâmide é bem menor que o volume ocupado por um bloco retangular de mesma base e altura. E como esse volume pode ser calculado então?

Lembre-se

De acordo com os egípcios, o volume de um tronco de pirâmide de base quadrada, como o da Figura 2.19, pode ser calculado utilizando-se a equação vista no livro didático. Pra quem não se lembra, o volume V de um tronco de altura h e bases de lados a e b é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(a^2 + ab + b^2\right) \qquad \text{(Equação 2.2)}$$

Figura 2.19 | Tronco de pirâmide de base quadrada



Fonte: elaborada pelo autor.

Durante a pesquisa, você deve ter notado que, independentemente da base do tronco, seu volume pode ser calculado utilizando a

Equação 2.3, em que h é a altura do tronco, A_b é a área da base menor e A_B é a área da base maior.

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right) \qquad \text{(Equação 2.3)}$$

Quanto maior é a altura do tronco, mais ela se aproxima da altura da pirâmide e, com isso, a área da base menor se aproxima de zero. Fazendo $A_b = 0$, a Equação 2.3 fica:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(A_B + \sqrt{A_B \cdot 0} + 0\right)$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A_B \qquad \text{(Equação 2.4)}$$

Nesse caso, qual é o volume de uma das pirâmides de Gizé, cuja altura mede cerca de 146 m e tem base quadrada com lado de aproximadamente 230 m?

Resolução da situação-problema

Utilizando o valor aproximado de 230 m para o lado do quadrado que é a base da pirâmide em questão, temos que o valor da área da base A_B será $230^2 = 52.900\,\text{m}^2$. Como a altura mede 146 m, substituindo os valores na Equação 2.4 temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 146 \cdot 52900 \simeq 2.574.466,667\ \text{m}^3$$

Para se ter uma ideia, a caixa d'água da maioria das residências tem 1 metro cúbico de capacidade, ou seja, a capacidade volumétrica da pirâmide em questão equivale à capacidade de pouco mais de 2.547.466 caixas d'água como essa.

Faça você mesmo

Calcule o volume de uma pirâmide de altura $5\sqrt{3}$ cm, cuja base é um triângulo equilátero de lado 12 cm. Vale lembrar que, para calcular a área de um triângulo equilátero de lado l, deve-se utilizar $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Faça valer a pena

1. Heródoto acreditava que o desenvolvimento da Geometria egípcia estava relacionado ao fato de os egípcios serem excelentes agrimensores. Entre as medidas que constantemente realizavam estavam a da área das propriedades cujos limites (cercas) haviam seguido com o curso do Rio que banhava a região onde habitavam.

O texto refere-se ao rio:

a) Eufrates.

b) Tigre.

c) Nilo.

d) Senna.

e) Tâmisa.

2. De acordo com Eves (1995, p. 57), "a matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade". Essa afirmação refere-se ao desenvolvimento observado, principalmente no campo da Geometria, de dois povos que habitavam regiões próximas a importantes rios da África e da Ásia.

O texto refere-se aos:

a) Egípcios e babilônios.

b) Egípcios e gregos.

c) Gregos e babilônios.

d) Egípcios e persas.

e) Persas e babilônios.

3. Sua estrutura cobre uma área de 526 acres, cerca de 2.130.000 m^2. Contém mais de 2.000.000 blocos, de 2,5 toneladas cada um, em média, transportados de uma pedreira situada do outro lado do rio Nilo. Em algumas câmaras, o teto foi revestido de blocos de granito de 54 toneladas, medindo 8,2 metros de comprimento por 1,2 metro de largura, trazidos de quase mil quilômetros de distância e colocados a 30 metros do chão. De acordo com estudos recentes, os erros relativos às medições de lados e ângulos não superam 1/14.000.

O texto refere-se a uma das sete maravilhas do mundo moderno. Assinale a alternativa que a identifica corretamente.

a) Torre Eiffel.

b) Torre de Piza.

c) Grande Pirâmide de Gizé.

d) Jardins Suspensos da Babilônia.

e) Cristo Redentor.

Referências

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

História do cálculo

Convite ao estudo

Com a sistematização da geometria analítica, os problemas que dariam origem ao cálculo diferencial e integral ganharam uma ferramenta poderosa para que pudessem ser estudados mais a fundo e de maneira organizada. Unir a geometria e a álgebra, com a ajuda do plano cartesiano ortogonal, criado por Descartes, era a ideia que faltava para que o estudo com valores infinitesimais, o cálculo diferencial e o estudo das integrais avançassem definitivamente. O Renascimento Cultural na Europa, que ocorreu a partir do século XV, não marca o período em que os primeiros problemas de cálculo foram propostos e estudados, mas quando eles passaram a ser efetivamente resolvidos após a invenção atribuída a René Descartes.

Na Grécia Antiga, Zenão de Eleia (c. 490 - 430 a.C.), ao propor seus paradoxos, já mostrava preocupação com elementos infinitesimais e contínuos, em oposição aos finitos e discretos, o que, mais tarde, se tornou o estudo dos limites. Zenon foi um seguidor de Parmênides, filósofo grego que viveu no século V a.C. e se opunha à concepção pitagórica de associar números inteiros a objetos físicos e, com isso, tornava o universo discreto. A base para essa oposição foi a descoberta das grandezas incomensuráveis, o que revelou grandezas contínuas formadas por infinitos elementos muito pequenos.

No entanto, o conceito de limite, tão importante para o desenvolvimento do cálculo, só foi formalizado muitos anos mais tarde. Para ter uma ideia, a definição moderna para os limites não tem mais que 180 anos. O que se sabe é que o cálculo de áreas limitadas por curvas, o que entendemos por integral e o problema da tangente à curva de uma função, resolvido através do conceito de derivada, cujas soluções estão baseadas na ideia de limite, precederam, nessa ordem, o estudo sobre elementos infinitesimais.

Contaremos a história na ordem em que aprendemos no curso de cálculo, ou seja, nas Seções 3.1, 3.2 e 3.3 abordaremos a história dos limites, das derivadas e das integrais, nessa ordem, apesar de tudo ter ocorrido exatamente na ordem inversa. De certa forma, reconstituiremos a história como ela deveria ter ocorrido, segundo muitos estudiosos. A última peça do quebra-cabeça é a teoria dos conjuntos, que, de certa forma, amarrou a geometria analítica e o cálculo fazendo com que tudo isso pudesse contribuir efetivamente para o avanço das ciências exatas.

Ao final desta unidade, esse quebra-cabeça deve estar montado em nossas mentes. Dada uma função, uma relação entre conjuntos, devemos entendê-la quanto à sua continuidade, sobre como ela varia, isto é, em que momento ela é crescente, decrescente ou tem outra classificação e, por último, o valor da área limitado pelo traçado de seu gráfico e um dos eixos coordenados.

Contando a história da construção dessas ideias, que culminaram no impressionante avanço tecnológico experimentado nos últimos 150 anos, queremos, mais uma vez, humanizar a produção do conhecimento. Além, é claro, de ratificar que o desenvolvimento da matemática tem como principal motivação o contexto social, político e econômico ao longo do tempo. Vamos imaginar uma história e dessa vez você será o personagem principal.

Você acaba de se tornar o presidente de uma organização não governamental que busca transformar a matemática em algo mais próximo da realidade das pessoas. Seu principal objetivo é disseminar a ideia de que a matemática foi feita por pessoas e para pessoas. A existência dessa ciência se justifica pela capacidade de resolver problemas, e não criá-los. Sua principal estratégia será compreender um pouco melhor como tudo se deu para poder, através de projetos sociais, workshops e oficinas, mostrar ao mundo que podemos compreender conceitos matemáticos sem, necessariamente, dominar a matemática.

Há conceitos extremamente simples e práticos em quase tudo que se produz. O que precisamos é conhecê-los desde o início ao invés de focarmos apenas no resultado final que, muitas vezes, por não ter significado, parece não ter utilidade. E então, você topa o desafio?

Seção 3.1

História do cálculo de limites

Diálogo aberto

Nossa meta, nesta unidade, é que uma função seja conhecida por todas as suas características. Precisamos saber como ela está definida, se é contínua em algum intervalo, quando cresce, quando decresce, quando não está aumentando e nem diminuindo, se há uma área limitada pelo seu gráfico em um dos eixos e como calculá-la.

A tarefa parece complexa, mas, se resolvida por partes, é perfeitamente possível realizá-la. E isso pode ser feito de maneira visual, aplicável e contextualizada. Fazemos isso quando estudamos as disciplinas que envolvem cálculo diferencial e integral, porém o estudo se dá por meio da aplicação de regras e conceitos que nem sempre fazem tanto sentido.

A diferença aqui é que procuraremos mostrar em que contexto tudo isso surgiu. Nosso objetivo é que você perceba que a Matemática que estudamos hoje não veio pronta. Foram muitos anos de estudos, com erros e acertos, até que a humanidade pudesse contar com as ferramentas que hoje temos. Entendendo como a produção desse conhecimento se deu, é possível que você veja um pouco mais de sentido em tudo isso. A intenção é que, a partir deste estudo, você se sinta mais motivado a compreender os conceitos do cálculo e possa disseminá-los de forma mais leve.

Nesta unidade estudaremos a história dos limites, desde as primeiras ideias até sua formalização no século passado. Veremos que muito se pensou e pouco se concluiu sobre esse assunto até que se conseguisse reunir todas as ferramentas para o entendimento das questões que cercam esse estudo. A ideia de limite em todo o tempo esteve presente, foi muito utilizada de maneira implícita, mas sempre faltava alguma coisa para que ela se tornasse algo mais do que um argumento de passagem e, muitas vezes, não tão bem explicado para a resolução de outros problemas.

Lembre-se: você agora é o presidente de uma ONG que está organizando um evento, com o intuito de popularizar três conceitos matemáticos importantes de uma vez: funções, limites e o infinito. Para isso, em uma palestra, vocês falarão sobre um caso concreto, o comportamento da equação matemática, de duas incógnitas (ou variáveis) $y = \frac{1}{x}$, como exemplo de relação em que a ideia de limite está muito presente. O plano é pensar no comportamento dos valores de y conforme o valor de x vai percorrendo o conjunto dos números reais.

No entanto, como afirmado, não nos dedicaremos a isso sem antes conhecer um pouco da história sobre como tudo foi tratado desde o início. Vai ser uma conversa com muitos elementos que provocarão sua reflexão, inclusive sobre Filosofia. Isso tudo tornará esse estudo bastante significativo. Vale a pena conferir!

Não pode faltar

Observando os primeiros 300 anos da matemática Grega (por volta de 600 a.C.), é possível notar três linhas de desenvolvimento distintas e que merecem destaque. Uma delas produziu o material que mais tarde foi organizado por Euclides e gerou *Os elementos*. Outra trata de uma geometria superior que abordava curvas diferentes das retas e das circunferências, e também de superfícies diferentes do plano e da esfera. Ela cuidou de estudar problemas famosos relacionados às construções com régua e compasso, como a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

Pesquise mais

Você conhece esses problemas? Leia um pouco sobre eles acessando *Os três problemas clássicos da matemática grega*:

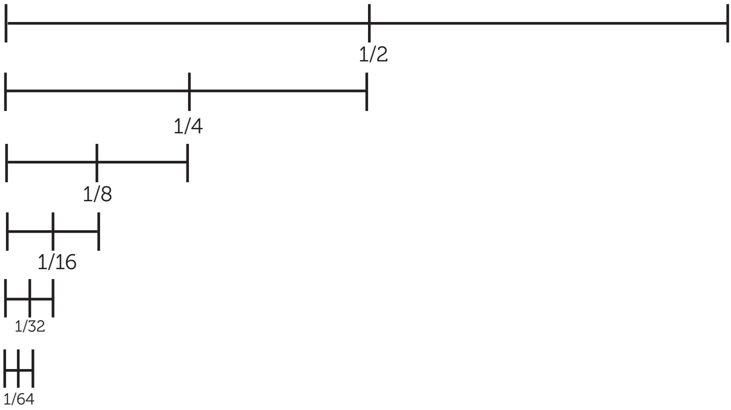
CARVALHO, João Pitombeira de. **Os três problemas clássicos da matemática grega**. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2016.

Na última, que nos interessa nesta seção, desenvolveram-se as noções relacionadas com elementos infinitesimais, infinitos e processos somatórios que, bem mais tarde, deram origem ao cálculo. Podem ser admitidas como principais preocupações dos estudiosos que seguiam essa linha a possibilidade de uma grandeza poder ser subdividida indefinidamente ou que ela fosse formada por um número muito grande de partes atômicas indivisíveis.

O filósofo Zenão de Eleia (450 a.C.), influenciado por Parmênides, filósofo grego que viveu no século V a.C., afirmava, com base em três paradoxos, que, caso essas possibilidades fossem confirmadas, o movimento ao longo de uma linha reta seria impossível. Para se contrapor a primeira hipótese afirmava, no paradoxo da dicotomia, que se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, é impossível se movimentar de um extremo ao outro, pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, mas primeiramente é necessário alcançar a quarta parte, e assim por diante, infinitamente. Nesse caso, o movimento jamais iria começar.

Para ilustrar essa afirmação, observe a Figura 3.1. Para caminharmos de um extremo ao outro de um segmento, precisamos percorrer o caminho que leva até o ponto médio. Contudo, para isso, precisamos passar pelo ponto que marca 1/4 do percurso e, antes disso, precisamos atingir 1/8 do caminho mas não conseguiremos fazer isso sem passar pelo 1/16. Se esse segmento puder ser dividido infinitamente, não seremos capazes de dar um passo sequer.

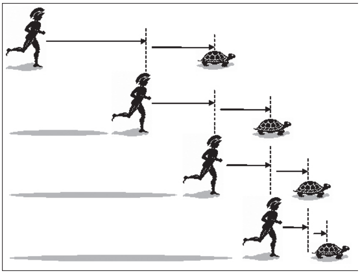
Figura 3.1 | Divisão de segmentos em partes iguais



Fonte: <http://goo.gl/Ynldlh>. Acesso em: 9 ago. 2016.

Outra maneira de pensar sobre isso é o que chamamos de paradoxo de Aquiles, ilustrado na Figura 3.2. Aquiles e uma tartaruga irão apostar corrida. Como o corredor é muito mais veloz que o animal, permite que este saia na frente. Na hipótese de haver a subdivisão indefinida do espaço, cada vez que Aquiles atingir o ponto em que a tartaruga estava, ela percorre uma nova distância, sendo impossível então alcançá-la.

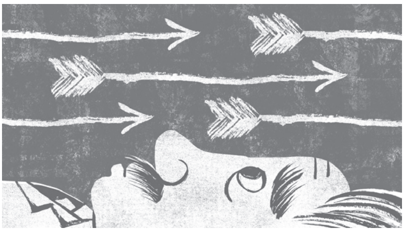
Figura 3.2 | Paradoxo de Aquiles



Fonte: <http://goo.gl/L75Id9>. Acesso em: 9 ago. 2016.

Há também o paradoxo da flecha, ilustrado na Figura 3.3. Nele, Zenon argumenta que um objeto em voo sempre ocupa um espaço igual ao seu tamanho. Para que ele se mexa, é necessário que o tempo varie uma certa quantidade. Porém, se o tempo puder ser subdivido em pedaços atomicamente indivisíveis, para que haja essa variação, precisa ocorrer a metade dela. A fim de que ocorra a metade dela, é preciso que o tempo varie um quarto daquela variação antes, e assim por diante. Nesse caso, a flecha ficaria eternamente parada.

Figura 3.3 | Paradoxo da flecha



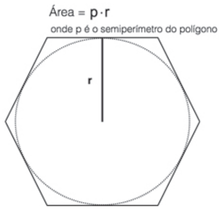
Fonte: <http://goo.gl/ofKiF1>. Acesso em: 9 ago. 2016.

Muitas são as explicações para os paradoxos de Zenão. O importante é entender que eles desafiam a crença de que a soma de infinitas partes é infinitamente grande e a de que não há um limite para as divisões sucessivas de uma grandeza. De certo modo, utilizamos essa ideia quando aproximamos a área de um círculo à área de um polígono circunscrito, com uma quantidade muito grande de lados. Nossa observação mostrou que a área do polígono tende a ser igual à área do círculo já que a diferença entre as áreas é cada vez menor.

Assimile

Vimos, na Seção 2.4, que a área do polígono podia ser calculada fazendo o produto do semiperímetro pelo raio do círculo no interior, veja a Figura 3.4. E que quanto maior o número de lados, menor é a diferença entre a área do polígono e a área do círculo. Por essa razão, para o cálculo da área do círculo, fazemos $\pi \cdot r$, que é o semiperímetro, vezes r , ou $\pi \cdot r^2$.

Figura 3.4 | Área do polígono circunscrito ao círculo de raio r



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Um hexágono regular de lado 6 cm está inscrito em uma circunferência de lado $3\sqrt{3}$ cm. Como o perímetro desse hexágono vale $6 \cdot 6 = 36$, o semiperímetro valerá 18 cm. Nesse caso, a área vale $18 \cdot 3\sqrt{3} = 54\sqrt{3} \cong 93,5$ cm^2 .Para efeito de comparação, a área de um círculo de raio $3\sqrt{3}$ cm seria $\pi \cdot \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27\pi \cong 84,8$ cm^2 .

Hoje diríamos que a área do polígono tende a área do círculo conforme à quantidade de lados dele tende ao infinito. Para isso, utilizamos a definição moderna de limite que teve a semente plantada nessas discussões sobre elementos infinitesimais na Grécia Antiga e percorreu um longo caminho até chegar àquela que estudamos no cálculo diferencial e integral.

Esse caminho tem uma parada importante no Renascimento Cultural, período vivenciado pela Europa a partir do século XV. Pouco antes disso, esse continente passou por uma série de problemas bélicos e sociais como a Guerra dos Cem Anos (1337-1453) e a Grande Peste (1348-1352), que reduziu a população da Europa a cerca de 60% em cinco anos, além de vários períodos em que as colheitas não atenderam à demanda, disseminando a fome. Nesse contexto, observou-se o crescimento do misticismo entre as pessoas, decadência econômica e, principalmente, pouca produção científica.

Durante o Renascimento, a Europa experimentou um novo despertar das atividades criativas, com o florescimento de várias áreas do conhecimento, como a arte, a literatura e as ciências. O Renascimento, calcado na revalorização do conhecimento clássico, sobretudo aquele produzido na Grécia Antiga, teve por característica a crença no potencial e nas habilidades humanas como ferramenta para compreender o universo que nos cerca. Esse ambiente criativo se tornou uma fonte bastante farta de problemas e desafios a serem trabalhados pela ciência.

Com a Reforma Protestante, que data do século XVI, iniciada quando o padre alemão Martinho Lutero propôs uma reforma do catolicismo, a autoridade da Igreja Católica é questionada de forma direta. Esse questionamento, aliado à crença no potencial do homem em compreender o universo, alavancou ainda mais a produção de conhecimento sobretudo nos assuntos relacionados à Astronomia. A Terra como centro do universo já não era um modelo cosmológico de plena aceitação.

A evolução das ideias astronômicas promovidas por sábios renascentistas como Nicolau Copérnico (1473-1543), Johann Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642) teve enormes consequências filosóficas. A ideia de que cada corpo ocupa seu lugar no espaço estava sendo substituída por uma concepção de espaço mais homogêneo e infinito. Os modelos cosmológicos tradicionais e religiosos pouco a pouco eram suplantados pelas verificações observacionais. Nesse contexto, a matemática se torna um elemento importante de argumentação. Faz-se cada vez mais necessário um estudo formal e mais aprofundado sobre todos os campos da matemática para que esta sirva de suporte para as descobertas que estão por vir.

Era hora de unir as descobertas dos gregos ao desenvolvimento da álgebra, resgatando a tradição medieval árabe e europeia também.

Vários matemáticos se destacaram nessa fase, entre eles o italiano Luca Pacioli (1445-1514); o alemão Michael Stifel (1487-1567); os italianos Girolamo Cardano (1465-1526) e Niccolò Fontana (1499-1557), que acreditavam ter a solução geral das equações cúbicas, algo similar à fórmula de Bhaskara para as quadráticas; François Viète (1540-1603), que deu importantes contribuições para o simbolismo algébrico; e Girard Desargues (1591-1666), que contribuiu de forma muito significativa para o desenvolvimento da geometria projetiva.

Contudo, quem talvez tenha tido maior destaque foi o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650). Seu livro, *O discurso do método: para bem conduzir a razão e buscar a verdade nas ciências*, de 1637, trazia um apêndice totalmente dedicado à geometria. No entanto, não se tratava de uma geometria convencional e sim da possibilidade de relacionar formas geométricas com elementos algébricos. A partir de então, podia-se libertar a geometria do uso de figuras e também dar significado às operações algébricas por meio das formas.

Reflita

É possível que uma equação com duas incógnitas (variáveis), como $y = x + 1$, tenha suas soluções (que são muitas, certo?) associadas a uma forma geométrica? E uma equação como $y = x^2 + 1$? Que formas são essas?

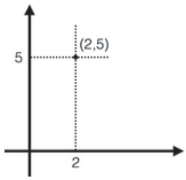
Estava sendo criada a geometria analítica, tema que merecerá nossa atenção ao longo das próximas seções desta unidade. Por hora, é preciso entender que, diante de um problema geométrico, Descartes escrevia equações e suas soluções eram, em geral, obtidas a partir de argumentos geométricos. Essa ideia representou um significativo desenvolvimento da álgebra formal, sobretudo no campo da notação. A partir de então a notação matemática assumiu uma forma muito parecida com a que temos contato hoje.

O fundamento para essa associação se constituía na representação de cada solução da equação por meio de um par ordenado. Cada par ordenado representa um ponto naquele que ficou conhecido como plano cartesiano. De maneira simplificada, podemos entendê-lo como a junção de dois eixos reais, perpendiculares, que dividem o plano em quatro quadrantes. O valor de uma das incógnitas é marcado em um deles enquanto o valor da outra é marcado no outro eixo. Traçando-se uma perpendicular a cada eixo, passando pelos marcados, o encontro dessas retas indica o ponto determinado pelo par ordenado.

Exemplificando

Na equação $y = x^2 + 1$, quando x = 2, $y = 2^2 + 1 = 5$, forma-se então o par ordenado (2,5). Nesse caso, a ordem estabelecida foi primeiro o valor de x, depois o valor de y, como fazemos normalmente. No plano cartesiano, esse ponto seria representado como na Figura 3.5.

Figura 3.5 | Ponto (2,5) representado no plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor.

A partir da contribuição de Descartes, podemos retomar a discussão sobre os limites, fazendo uso dessa importante ferramenta, a geometria analítica. Está pronto?

Para isso, observe a Figura 3.6. Cada um dos pontos do seu traçado corresponde a um par ordenado, ou seja, um valor x que originou um valor de y e, juntos, determinaram uma localização no plano cartesiano. De acordo com a figura, os valores de y parecem ser cada vez maiores à medida que utilizamos valores de x mais à direita. No entanto, o crescimento parece ser cada vez menor e há um limite físico para os valores de y representado pela reta pontilhada, que passa pelo eixo y em um ponto de altura 3.

Com esse recurso, percebemos que y = 3 é o limite para os valores de y, quando os valores de x aumentam muito, ou seja, tendem ao infinito. Simbolicamente, diríamos hoje, após a evolução nos estudos envolvendo limites, que $\lim_{x \to \infty} y = 3$ fazendo que a observação geométrica pudesse ter então, através da geometria analítica, uma notação algébrica. Essa análise ilustra o valor da contribuição de Descartes para o avanço dos estudos do cálculo diferencial e integral.

Sem medo de errar

Após conhecer um pouco mais sobre como os elementos infinitesimais foram tratados e contribuíram para o desenvolvimento da matemática ao longo da história, é hora de pensar nos argumentos para apresentação na palestra organizada pela ONG. Será tratado o exemplo do comportamento da equação matemática de duas incógnitas (ou variáveis) $y = \frac{1}{x}$, exemplo de relação em que a ideia de limite está presente.

Inicialmente, produziremos uma tabela em que anotaremos os valores de y correspondentes a alguns valores de x, escolhidos de forma arbitrária. Você pode conferir cada um dos valores calculados utilizando uma calculadora ou as operações com frações que discutimos na Unidade 1.

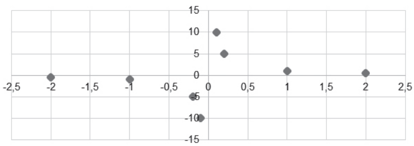
Tabela 3.1 | Valores de y calculados a partir de valores arbitrários de x

x	−2	−1	−0,2	−0,1	0,1	0,2	1	2
y	−0,5	−1	−5	−10	10	5	1	0,5

Fonte: elaborada pelo autor.

Lembrando que cada linha da tabela gera um par ordenado e este representa pontos no plano cartesiano, pode-se gerar um gráfico como o da Figura 3.6.

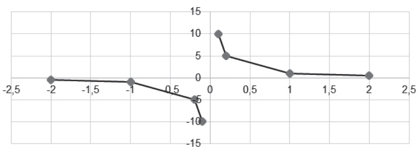
Figura 3.6 | Pontos da tabela representados no plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao ligarmos alguns dos pontos consecutivos, dois a dois, podemos perceber certas tendências do traçado da curva gerada por essa relação, além de proporcionar a oportunidade de conversarmos sobre um importante fato a respeito da divisão por zero. Observe a Figura 3.7.

Figura 3.7 | Pontos da tabela unidos por segmentos de reta



Fonte: elaborada pelo autor.

Primeiramente, vamos analisar o que ocorre no primeiro quadrante (acima e à direita): a medida que os valores de x aumentam, os valores de y diminuem, ou seja, ficam mais próximos de zero. Dizemos, utilizando os termos do cálculo que, à medida que x tende ao infinito, o valor de y tende a zero, ou melhor, o limite de $y = \frac{1}{x}$, para quando x tende ao infinito, é zero. Em notação matemática, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. No entanto, quando o valor de x se aproxima de zero, quando "caminhamos" da direita para a esquerda, na direção do eixo vertical, os valores de y ficam cada vez maiores. De acordo com a Figura 3.7, teríamos 0,5; 1; 5 e depois 10. A tendência é que esses valores se tornem ainda maiores se aproximarmos mais de zero. Poderíamos dizer que o limite de $y = \frac{1}{x}$ para quando x se aproxima de zero é infinito, ou escrever $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

O que ocorre é que, quando analisamos o terceiro quadrante (abaixo e à esquerda), vemos que, ao nos apoximarmos de zero, vindo da esquerda para a direita, o limite seria $-\infty$, aí então, de acordo com a teoria do Cálculo, teríamos que dizer que tal limite não existe pois ele deve ser o mesmo independentemente do sentido que "caminhamos". No entanto, após essa análise, pode-se perceber o motivo de evitarmos a divisão por zero. A ferramenta sobre a qual conversamos até propõe uma ideia do que ocorre mas nem mesmo ela é capaz de nos fornecer um resultado para essa operação.

Agora temos bastante material para uma palestra, não é mesmo?

Atenção

Apesar de parecer que os pontos que obtemos quando fazemos x = 2 e x = –2 estão sobre o eixo horizontal, eles não estão. Para marcá-los, é preciso deslocar, a partir desse eixo, 0,5 e -0,5, respectivamente, na direção vertical.

Avançando na prática

Depreciação no valor de um automóvel

Descrição da situação-problema

Vamos imaginar que o preço de um automóvel, após um ano de utilização, sofre uma redução de 8%, até que complete 15 anos. Isso significa dizer que após um ano possuímos, como possível valor de revenda, 92% do valor inicial. Se o automóvel custa R$ 25.000,00, por exemplo, após um ano temos $0,92 \cdot 25.000$. Se ele não for vendido nesse período, ao final do segundo ano seu valor será 92% de $0,92 \cdot 25.000$, ou seja, $0,92 \cdot 0,92 \cdot 25.000 = 0,92^2 \cdot 25.000$. Fazendo isso a cada ano, é possível perceber que, ao final de x anos, o preço y para revenda será dado por $y = 0,92^x \cdot 25.000$. Trata-se de uma equação de duas incógnitas em que para cada valor de x, obtemos um valor de y que corresponde ao preço do veículo após x anos.

A partir dessa equação, é necessário perceber que quanto maior o valor de x, menor será o valor de y. Mas o preço do carro tem um limite inferior, certo? Qual é esse limite?

Tabela 3.2 | Variação do preço do veículo que deprecia 8% ao ano

x	$y = 0,92^x \cdot 25.000$
0	R$ 25.000,00
1	R$ 23.000,00
2	R$ 21.160,00
3	R$ 19.467,20
4	R$ 17.909,82
5	R$ 16.477,04
6	R$ 15.158,88
7	R$ 13.946,17
8	R$ 12.830,47
9	R$ 11.804,03
10	R$ 10.859,71
11	R$ 9.990,93
12	R$ 9.191,66
13	R$ 8.456,33
14	R$ 7.779,82
15	R$ 7.157,44

Fonte: elaborada pelo autor.

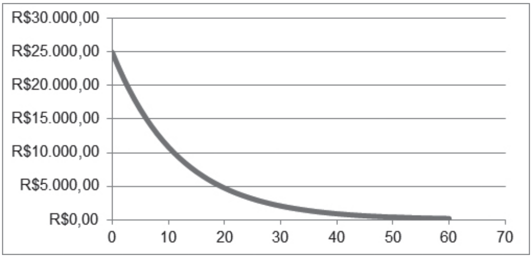
Resolução da situação-problema

Para resolver essas questões, observe primeiramente a Tabela 3.2. Conforme os anos vão passando, o valor do veículo é cada vez menor.

Além disso, vemos que no primeiro ano o valor da depreciação foi R$ 2.000,00, no segundo R$ 1.840,00, no terceiro R$ 1.692,80, o que nos faz concluir que a cada ano perde-se menos. Isso é coerente com o fato de o carro valer menos, portanto, sua depreciação será menor já que trata-se de um valor percentual. Se essa depreciação continuasse após os 15 anos previstos inicialmente, em algum momento o preço do carro seria zero?

Se perdemos 8% do valor a cada ano e ficamos com 92%, teoricamente, sempre sobraria alguma coisa. Na verdade, sobra até mais do que se perde. Nesse caso, estaríamos concordando com o princípio da divisibilidade infinita. No entanto, de acordo com Zenão, isso não deveria ser bem assim. De qualquer modo, uma certeza temos: o preço do carro não será menor que zero. Utilizando o conceito de limite, afirmaríamos que o limite de $y = 0{,}92^x \cdot 25.000$, quando x tende ao infinito, é zero. A Figura 3.8 ilustra essa situação, não deixe de observá-la com atenção antes de prosseguir.

Figura 3.8 | Gráfico da variação do preço do veículo que deprecia 8% ao ano



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se

Para a produção do gráfico, utilizamos cada linha da tabela para formar um par ordenado. Cada um dos pares ordenados é marcado no plano cartesiano e observamos a tendência da curva.

Faça você mesmo

Produza uma tabela como a 3.2 considerando que um veículo custa R$ 30.000,00, sofre uma desvalorização (depreciação) de 5% ao ano, por

10 anos. Em seguida, faça o gráfico dessa situação para ilustrar os dados da tabela. Você pode utilizar um software como o Excel, ou qualquer outro, e também pode usar os tradicionais lápis, papel, régua e borracha. O importante é fazer! Bom trabalho!

Faça valer a pena

1. Para caminharmos de um extremo ao outro de um segmento, precisamos percorrer o caminho que leva até o ponto médio. Mas, para isso, precisamos passar pelo ponto que marca 1/4 do percurso e, antes, precisamos atingir 1/8 do caminho mas não conseguiremos fazer isso sem passar pelo 1/16. Se esse segmento puder ser dividido infinitamente, não seremos capazes de dar um passo sequer.

O texto refere-se a um importante paradoxo criado para contrapor a ideia de que:

a) Algo pode ser dividido infinitamente.

b) Não se deve caminhar sobre segmentos de reta.

c) Um segmento de reta não pode ser dividido ao meio.

d) Não podemos chegar ao outro extremo de um segmento de reta.

e) Não existem segmentos de reta.

2. Para caminharmos de um extremo ao outro de um segmento, precisamos percorrer o caminho que leva até o ponto médio. Mas, para isso, precisamos passar pelo ponto que marca 1/4 do percurso e, antes, precisamos atingir 1/8 do caminho, mas não conseguiremos fazer isso sem passar pelo 1/16. Se esse segmento puder ser dividido infinitamente não seremos capazes de dar um passo sequer.

O texto refere-se ao paradoxo da dicotomia, proposto na Grécia antiga, por:

a) Pitágoras.

b) Zenão.

c) Tales.

d) Euclides.

e) Sócrates.

3. Durante um período da história, a Europa experimentou um novo despertar das atividades criativas, com florescimento de várias áreas do conhecimento, como a arte, a literatura e as ciências. Esse período ficou conhecido como:

a) A Semana de Arte Moderna.

b) A Segunda Guerra Mundial.

c) O Renascimento Cultural.

d) O Feudalismo.

e) A Guerra dos Cem Anos.

Seção 3.2

História do cálculo de derivadas

Diálogo aberto

Quando duas grandezas se relacionam, podemos dizer, em algumas situações, que uma grandeza é ou está em função da outra. Estudamos, na Seção 3.1, que o preço de um automóvel se relaciona com a quantidade de anos após a compra. Isso equivale a dizer que, na situação proposta, o preço depende do tempo transcorrido após a compra, ou ainda, o preço está em função do tempo. Nem todas as relações entre duas grandezas têm o comportamento de função, mas, na grande maioria das vezes, nos preocupamos com aquelas que têm.

Esta unidade é dedicada a estudar a função de uma forma bastante completa. Começamos entendendo como uma das variáveis se comporta quando valores infinitos ou infinitesimais são atribuídos a outra variável. Os valores de x podem receber valores muito grandes e muito pequenos, pois os estudos sobre os limites hoje são bastante consistentes.

Nesta seção, nos preocuparemos com a forma com que os valores de uma das variáveis crescem e decrescem, se é que uma dessas coisas ocorre. Em seguida, uma vez traçada a curva da função no plano cartesiano, discutiremos que tipo de informação a área entre essa curva e o eixo horizontal pode nos trazer e o contexto histórico dessa descoberta. Por fim, veremos como a teoria dos conjuntos amarrou todas essas ideias.

Por hora, o estudo sobre como o y varia à medida que x varia é o que está em pauta. A exemplo do que ocorreu com os limites, esse estudo não começou no Renascimento. Essa preocupação vem de muito antes mas sempre parecia faltar algo para que tudo que vinha sido feito ganhasse corpo. A geometria analítica e os estudos sobre os limites permitem até mesmo que a relação que rege essa variação possa ser obtida com mais facilidade.

A relação entre x e y que cuida da variação de uma função dada é chamada de derivada. Esse é o próximo assunto na pauta de eventos da ONG em que você é presidente.

Imagine que um colégio tenha convidado a ONG para falar com os seus alunos na *Semana das profissões*, realizada para o do ensino médio. A coordenação pedagógica pediuque fosse abordado o tema derivadas de uma forma simples que pudesse ser entendida não só pelos estudantes, mas também por membros da comunidade que estarão no evento. Nas reuniões da sua equipe, alguém sugeriu o seguinte problema: uma pedrinha é lançada por uma criança verticalmente para cima, e sua posição no espaço vai variar de acordo com o tempo. Sabemos que a velocidade com que a pedra sai da mão da criança é 1,8 m/s, a altura que ela está quando foi lançada é 1,6 m - a altura aproximada da criança mais o braço parcialmente esticado - e desprezaremos o atrito dela com o ar. Nosso referencial será o solo e a velocidade positiva para cima. O movimento neste caso será uniformemente variável com aceleração aproximadamente igual a $-9{,}8\,m/s^2$, a aceleração da gravidade. Utilizamos o sinal de menos, pois quando a pedra deixa a mão da criança, a aceleração se opõe ao movimento.

Foi sugerido também que seja explicada a variação da altura em relação ao tempo, como calcular o valor da altura máxima e após quantos segundos a pedrinha deve retornar ao solo. Mas sem regras e conceitos prontos. A ideia é explicar esse problema como se não tivéssemos à mão todas as ferramentas que temos hoje.

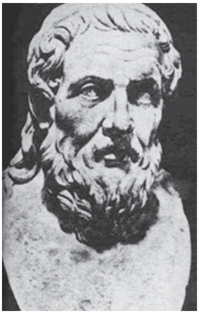
Esse problema tem como objetivo contextualizar a utilização das derivadas segundo o percurso histórico do seu desenvolvimento. A meta é enxergar em um problema simples e de fácil visualização como esse o que queremos quando calculamos a derivada de uma função. No decorrer desta seção, isso será tratado mostrando a essência da descoberta dessa importante ferramenta que mudou a história da ciência. Lembre-se de que buscamos entender, nesta unidade, do que trata cada parte do cálculo.

Olhando para as partes separadamente, entendendo como se desenvolveu, que tipo de problema resolve, tentamos dar mais sentido para essa área da Matemática. Se tudo fizer mais sentido para nós, teremos melhores condições de difundir a ideia principal da ONG: a Matemática se desenvolve para resolver problemas, e não criá-los.

Não pode faltar

Não é incorreto afirmar que a diferenciação, ou cálculo de derivadas, originou-se de problemas que envolviam o traçado de retas tangentes ou a determinação de valores máximos ou mínimos da variável dependente em uma relação entre duas variáveis. Essas considerações nos levam novamente à Grécia antiga e, posteriormente, ao Renascimento, um período de resgate da cultura grega.

Figura 3.9 | Apolônio de Perga (262-190 a.C.)



Fonte: <http://goo.gl/BOc096>. Acesso em: 5 jul. 2016.

Na Grécia antiga, encontramos Apolônio que, ao lado de Arquimedes e Euclides, é considerado um dos os três gigantes da matemática do século III a.C. Apolônio nasceu por volta de 262 a.C., na cidade de Perga, no Sul da Ásia menor. Sobre sua vida não se sabe muita coisa. Na adolescência, foi para Alexandria estudar com os sucessores de Euclides e lá ficou por muitos anos. Há registros de visitas a Pérgamo, situada no oeste da Ásia menor, onde havia uma universidade e uma biblioteca nos moldes da Alexandria. Após isso, permaneceu em Alexandria até sua morte, que ocorreu por volta de 190 a.C.

Sua principal obra, intitulada *Seções cônicas*, rendeu-lhe o apelido entre seus pares de *O grande geômetra*. Ela contém oito livros, embora apenas sete tenham chegado até nós, que tratam das cônicas e que superam completamente trabalhos anteriores sobre essas curvas, inclusive a parte de *Os elementos* dedicada a elas. Neles se observa pela primeira vez os nomes parábola, elipse e hipérboles, hoje tão amplamente estudados não só no ensino superior, mas também na educação básica.

Pesquise mais

Para conhecer um pouco melhor essas cônicas, acesse o *Ambiente dinâmico de ensino de seções cônicas*.

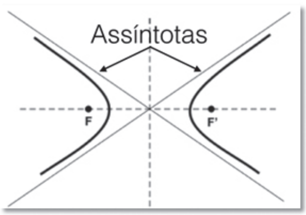
Ambiente dinâmico de ensino de seções cônicas. **As secções cônicas segundo Apolônio**. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5062_3970_ID.pdf>. Acesso em: 5 jul. 2016.

Ambiente dinâmico de ensino de seções cônicas. **Por que elipse, parábola e hipérbole**?. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/xU7kGz9Y>. Acesso em: 5 jul. 2016.

Se quiser conhecê-las ainda melhor, vale a pena ler os capítulos 2, 3 e 4 do livro *Cônicas e quádricas*, escrito por Jacir J. Venturi, com download gratuito, disponível em: <http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2016.

No livro II, Apolônio escreve sobre as propriedades de assíntotas e hipérboles conjugadas e do traçado de tangente. De maneira simplificada, assíntota é uma reta que limita o traçado de uma curva sem que toque nela. Na Figura 3.10 há o exemplo de uma hipérbole com suas assíntotas. Já a tangente, Figura 3.11, toca a curva em um único ponto.

Figura 3.10 | Hipérbole com suas assíntotas

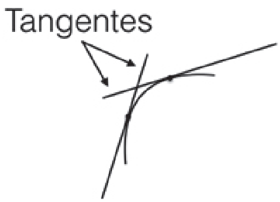


Fonte: adaptada de <http://goo.gl/KOo6Qt>. Acesso em: 5 jul. 2016.

Assimile

Na seção anterior, discutimos o problema da depreciação do valor de um automóvel ao longo de alguns anos. Ao traçar a curva da função, percebemos que ela se aproxima cada vez mais do eixo horizontal mas não toca nele, pois isso corresponderia ao carro ter preço igual a R$ 0,00. Nesse caso, podemos considerar o eixo horizontal como uma assíntota do gráfico da relação entre o preço do automóvel e o tempo transcorrido após a compra.

Figura 3.11 | Curva com duas de suas tangentes



Fonte: adaptada de <http://goo.gl/KOo6Qt>. Acesso em: 5 jul. 2016.

Em *La géométre*, o famoso terceiro apêndice do *Discurso do método*, René Descartes dedica algumas páginas ao estudo das tangentes. Nelas, encontramos explicações de alguns princípios da geometria algébrica, o que mostra uma série de avanços em relação a como pensavam os gregos, especialmente Apolônio.

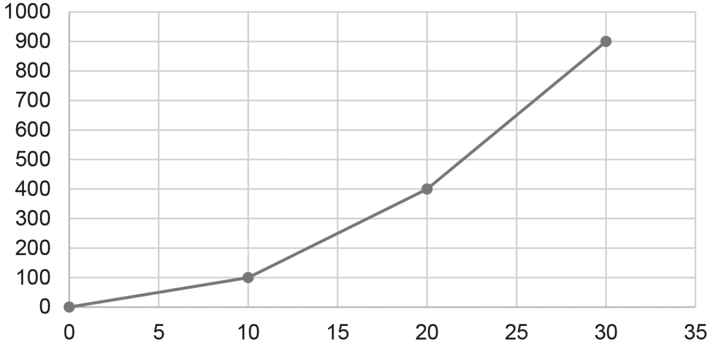
Os gregos consideravam uma variável como sendo o comprimento de um segmento, o produto entre duas variáveis como sendo a área de um retângulo e o de três como o volume de um paralelepípedo retângulo. Descartes ia muito além disso. Para ele, qualquer potência de uma variável, ou qualquer produto entre duas delas, podia ser representada por meio de segmentos unitários. Esses segmentos são aqueles que ligam dois pontos marcados no plano cartesiano. Quando dois desses pontos estão suficientemente próximos, é possível fazer o traçado da curva a partir deles. Esse é o princípio básico para construir uma geometria algébrica, o que permite tratar o problema das tangentes de maneira mais formal e eficiente.

Exemplificando

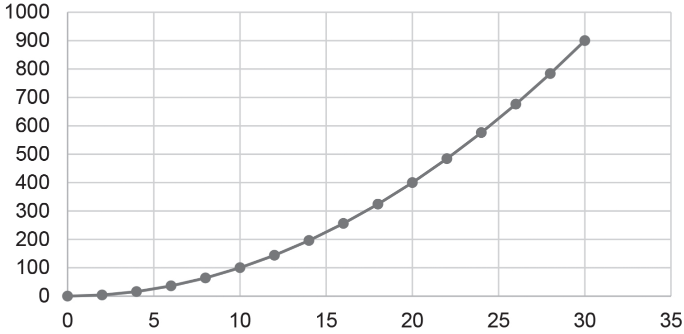
A Figura 3.12 mostra as curvas da relação $y = x^2$ para alguns valores de x, ora mais distantes, ora mais próximos, para observarmos que curvas como essas podem ser entendidas como uma composição de segmentos.

Figura 3.12 | Gráfico de $y = x^2$ com diferentes valores de x

x	0	10	20	30
y	0	100	400	900



x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
y	0	4	16	36	64	100	144	196	256	324	400	484	576	676	784	900



Fonte: elaborada pelo autor.

Enquanto Descartes definia os fundamentos da geometria analítica moderna, outro matemático francês, Pierre de Fermat (1601-1665), também se ocupava dessas ideias. Enquanto o primeiro propôs algumas poucas curvas, geradas por movimentos mecânicos, Fermat definiu muitas outras, também descritas algebricamente. Advogado por formação, reservou o melhor de seu tempo de lazer à Matemática. Não publicou muito ao longo de sua vida, mas manteve contato muito estreito com os principais matemáticos de seu tempo, por meio de correspondências. Por suas contribuições em diversos ramos da Matemática, é considerado o maior matemático francês do século XVII.

Figura 3.13 | Pierre de Fermat

Fonte: <http://goo.gl/5UeTZB>. Acesso em: 7 jul. 2016.

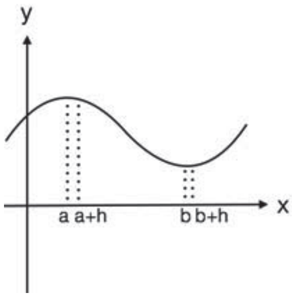
Dentre essas contribuições estão a afirmação de que não existem inteiros positivos a, b, c e n, com n>2, tal que $a^n = b^n + c^n$. Ela ficou conhecida como o *último teorema de Fermat*. Diofanto havia conjecturado esse fato, mas Fermat afirmava ter encontrado "uma prova admirável desse fato, mas a margem é demasiado estreita para contê-la". Ele se referia à margem do livro *Aritmética de Diofanto*, que continha essa conjectura. Esse teorema é notabilizado por ser aquele que tem a maior quantidade de tentativas frustradas para demonstrá-lo. A demonstração considerada correta foi feita por um matemático inglês, professor da Universidade de Princeton, chamado Andrew Wiles, em 1995, utilizando recursos que certamente Fermat não tinha à sua disposição. Nesse caso, a suposta demonstração que "a margem é demasiado estreita para contê-la" permanece desconhecida.

Pesquise mais

Para conhecer um pouco mais sobre essa demonstração, você pode ler a primeira parte do artigo *Uma demonstração maravilhosa*, de Fernando Gouvêa, escrito no mesmo ano de publicação da demonstração de Andrew Wiles. Disponível em: <http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n19/n19_Artigo03.pdf>. Acesso em: 7 jul. 2016.

No campo do cálculo diferencial e integral, Fermat se apropriou de uma observação de Johannes Kepler (1571-1630) que afirmava que os incrementos de uma função tornavam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo. Isso equivale a dizer que o y para x igual a "a", na Figura 3.14, é quase igual ao y para x igual a "a+h" sempre que h for infinitesimal, ou seja, muito pequeno.

Figura 3.14 | Diferença entre os valores y para valores de x próximos aos pontos mínimo e máximo



Fonte: elaborada pelo autor.

O mesmo aconteceria para os valores de y quando x = b e x = b+h, também na Figura 3.16. Quando y está em função de x, dizemos que y = f(x), nesse caso, nas proximidades de um ponto de máximo ou de mínimo, f(x) = f(x+h). De acordo com o que observamos no parágrafo anterior, Fermat resolvia essa equação para encontrar o ponto de máximo ou de mínimo de algumas funções. Esse raciocínio, apesar de conter algumas falhas lógicas, é muito próximo do que fazemos hoje.

Nos dias de hoje, em uma situação como esta, dizemos que $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$, ou seja, a variação dos valores de y, dividida pela variação de x, que corresponde ao incremento h, é zero sempre que h se aproxima de zero. O limite em questão é o que entendemos hoje por derivada de uma função. Entendendo melhor o que foi dito: a derivada de uma função em um ponto de mínimo ou de máximo é zero. Fermat descobriu também, utilizando a notação que tinha na época, que $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ou seja, a derivada de f, corresponde à tangente do ângulo que a reta tangente à curva formava com o eixo x, no sentido anti-horário, ou seja, a partir desse limite também era possível encontrar tal reta, já que seu coeficiente seria então conhecido.

Adaptando a nova linguagem aos cálculos de Fermat, após substituirmos x por x + h na lei de formação de uma função e calcularmos o quociente entre a diferença desse valor com o valor de f(x) e h, o valor obtido para h = 0 fornece a derivada de uma função. Por fornecer a tangente do ângulo que a reta tangente à curva forma com o eixo x, a derivada em cada ponto da função será o coeficiente angular dessa reta.

Exemplificando

Se $y = f(x) = x^2$, temos que $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$. Assim, $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$. A derivada dessa função será, portanto $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2xh - h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(2x-h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2x - h$, fazendo h = 0, temos que a derivada de $y = f(x) = x^2$ é 2x. Se desejamos obter a reta tangente à curva de y, o ponto em que x = 3; 2.3 = 6 será o coeficiente angular dessa reta.

Reflita

Por que não era possível fazer h = 0 no início dos cálculos?

Faça você mesmo

Utilizando o raciocínio proposto, calcule a derivada de $y = f(x) = 5x^2$.

Hoje sabemos que tal reta é a base do vetor cuja direção informa como a função está se comportando naquele ponto. Se o vetor aponta para cima, a reta é crescente; se aponta para baixo, é decrescente; e se for paralelo ao eixo x, naquele instante, não há crescimento nem decrescimento. De certo modo, igualar tal limite a zero é procurar pelos pontos em que não há crescimento nem decrescimento. Nesse local, teremos pontos de máximo ou de mínimo.

Nesse contexto, muitas vezes, não basta calcularmos o coeficiente angular da reta, precisamos também de sua equação. Da geometria analítica sabemos que a equação de uma reta pode ser obtida utilizando $y - y_0 = a(x - x_0)$, em que $(x_0; y_0)$ é um de seus pontos e a é seu coeficiente angular. Nesse caso, se sabemos em que ponto da função queremos traçar a reta tangente e o limite fornece o coeficiente angular, temos tudo o que precisamos.

Exemplificando

No ponto em que x = 3; 2·3 = 6 será o coeficiente angular da reta tangente à curva de $y = f(x) = x^2$. Para encontrarmos a equação da reta, precisamos somente da segunda coordenada desse ponto (y_0), já que x_0 vale 3. Fazendo $y = f(3) = 3^2 = 9$, saberemos que a reta passa por (3;9) e tem coeficiente angular 6, portanto, sua equação será dada por $y - 9 = 6(x - 3)$, ou ainda $y = 6x - 9$.

Fazendo isso, Fermat resolvia então os dois problemas que deram origem à diferenciação. Juntando essa às contribuições de Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz, principalmente, cujas histórias serão contadas na próxima seção, estava descoberto o cálculo diferencial e integral. Nos vemos lá!

Sem medo de errar

Agora é hora de resolvermos o problema da pedrinha lançada por uma criança, verticalmente para cima, e sua posição no espaço que varia de acordo com o tempo. Consideraremos que a velocidade com que a pedra sai da mão da criança vale 1,8 m/s, a altura que ela está quando foi lançada é 1,6 m, altura aproximada da criança mais o braço parcialmente esticado, e desprezaremos o atrito dela com o ar. Nosso referencial será o solo e a velocidade positiva para cima. O movimento, nesse caso, será uniformemente variável com aceleração aproximadamente igual a $-9{,}8\,m/s^2$, a aceleração da gravidade. O sinal de menos é porque quando a pedra deixa a mão da criança, a aceleração se opõe ao movimento.

Nosso interesse é sobre como a altura varia em relação ao tempo, o valor da altura máxima e após quantos segundos a pedrinha deve retornar ao solo. Mas sem regras e conceitos prontos. Pensaremos como se não tivéssemos à mão todas as ferramentas que temos hoje.

O movimento em questão é chamado de movimento uniformemente variado (MUV) e a equação que fornece a posição da pedrinha ao longo do tempo é $S(t) = S_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$, sendo que S_0 é a posição inicial, v_0 a velocidade inicial e **a** é a aceleração. No nosso problema, teremos S_0 =1,6 m, v_0 = 1,8 $\frac{m}{s}$ e a = −9,8 $\frac{m}{s^2}$.

Portanto, a equação que define a altura da pedrinha em função do tempo será $S(t) = 1{,}6 + 1{,}8t - 9{,}8\frac{t^2}{2} = 1{,}6 + 1{,}8t - 4{,}9t^2$. Começaremos pelo final, ou seja, determinaremos quando a pedrinha retornará ao solo. Consideraremos $S(t) = 0$ já que nosso referencial é o solo, ou seja, tocar o solo é o mesmo que ter altura zero. Assim,

$$0 = 1{,}6 + 1{,}8t - 4{,}9t^2$$

$$\begin{cases} a = -4{,}9 \\ b = 1{,}8 \\ c = 1{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 3{,}24 - 4\cdot(-4{,}9)\cdot 16 = 34{,}6 \\ t = \dfrac{-1{,}8 \pm \sqrt{34{,}6}}{9{,}8} \end{cases} \Leftrightarrow t \cong 0{,}42 \text{ ou } t \cong -0{,}78 \text{ (que não convém)}$$

A resposta negativa não pode ser considerada, pois o movimento se inicia no instante t = 0. Para determinarmos a altura máxima atingida pela pedra, utilizaremos o método de Fermat. Assumiremos que $S(t) = S(t+h)$, quando h é muito pequeno, na vizinhança do ponto máximo. Assim,

$$1{,}6 + 1{,}8t - 4{,}9t^2 = 1{,}6 + 1{,}8(t+h) - 4{,}9(t+h)^2 \Rightarrow 1{,}8t - 4{,}9t^2 = 1{,}8t + 1{,}8h - 4{,}9(t^2 + 2th + h^2)$$
$$-4{,}9t^2 = 1{,}8h - 4{,}9t^2 - 9{,}8th - 4{,}9h^2 \Rightarrow 0 = 1{,}8h - 9{,}8th - 4{,}9h^2 \Rightarrow 0 = h(1{,}8 - 9{,}8t - 4{,}9h)$$

Lembre-se

Uma multiplicação resulta zero quando um dos termos, ao menos, é zero.

Aqui teríamos h = 0 ou $1{,}8 - 9{,}8t - 4{,}9h =$ 0. A segunda equação, utilizando h = 0, teremos $t = \frac{1{,}8}{9{,}8} \cong 0{,}18s$. Esse é o valor de t quando a pedrinha está no ponto mais alto de sua trajetória, portanto, a altura máxima será $S(0{,}18) = 1{,}6 + 1{,}8\cdot 0{,}18 - 4{,}9\cdot 0{,}18^2 = 1{,}76\text{m}$. Aqui é importante observar que a derivada d $S(t) = 1{,}6 + 1{,}8t - 4{,}9t^2$ seria justamente $1{,}8 - 9{,}8t$, então o que fizemos na verdade foi calcular a derivada de $S(t)$ e igualá-la a zero. Não é isso que fazemos quando resolvemos alguns problemas de cálculo?

Essa derivada nos informará como a posição da pedra varia ao longo do tempo. A pedrinha no ponto mais alto para, ou seja, sua velocidade fica zero, antes de começar a cair. Fisicamente a velocidade é a variação da posição com o passar do tempo. Nesse caso, $1{,}8-9{,}8t$ é essa variação para quando h é muito pequeno, quase zero. Isso equivale a dizer que $1{,}8-9{,}8t$ informará a velocidade da pedrinha ao longo de sua trajetória, ou seja, como a posição varia ao longo do tempo, isto é, $v(t) = 1{,}8 - 9{,}8t$.

Avançando na prática

Obtendo a equação da reta tangente à curva de uma função

Descrição da situação-problema

Imagine que em uma aula de cálculo, um professor sugira o seguinte problema:

Calcule a reta tangente à curva de $f(x)=x^2+1$ *, que passa pelo ponto (2,5).*

Como você faria?

Lembre-se

Se necessário, releia o "Não pode faltar" para se lembrar de como é obtida uma equação de reta quando são dados um ponto e o coeficiente angular.

Resolução da situação-problema

Primeiramente, é preciso observar que (2,5) é, de fato, um ponto do gráfico da função proposta. Substituindo x por 2, na lei de formação, teremos $f(2)=2^2+1=5$. Assim, como $y-y_0=a\left(x-x_0\right)$ nos dará a equação que procuramos, podemos substituir x_0 por 2 e y_0 por 5, teremos então $y-5=a\left(x-2\right)$.

A letra **a** corresponde ao valor que deve ser substituído coeficiente angular dessa reta e, para obtê-lo, vamos calcular $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, o mesmo que derivar a função.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+1-x^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

Colocando h em evidência no numerador, teremos

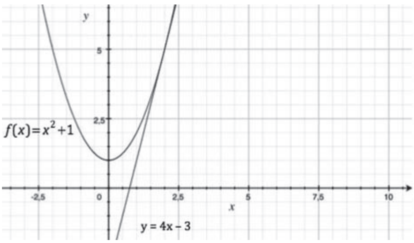
$$\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$

Nesse caso, 2x é a expressão matemática que fornece o coeficiente angular da reta tangente a f(x) para cada valor de x. Interessa-nos o coeficiente para x = 2, portanto seu valor será 2·2 = 4, assim $a=4$, então

$$y-5=4(x-2)$$
$$y-5=4x-8$$
$$y=4x-3$$

A Figura 3.15 ilustra o que acabamos de fazer. Observe que a direção que a reta sugere é de crescimento, o que se verifica com a observação do traçado da curva da função. Nesse ponto ela é, de fato, crescente.

Figura 3.15 | Reta tangente à curva de f(x) no ponto (2;5)



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

Calcule a equação da reta tangente à curva de $f(x)=x^2+1$ no ponto (–2;5) e, em seguida, no ponto (0;1). Observe que a primeira terá tendência de crescimento e a segunda será paralela ao eixo x, pois o limite será nulo para x = 0. Se preferir, faça o gráfico cartesiano de f e das retas no mesmo plano cartesiano para confirmar essa observação.

Faça valer a pena

1. Na Grécia Antiga, encontramos mais um pensador que, com Arquimedes e Euclides, é considerado um dos os três gigantes da Matemática do século III a.C. Nasceu por volta de 262 a.C., na cidade de Perga, no Sul da Ásia Menor. Sua principal obra, intitulada *Seções cônicas*, rendeu-lhe o apelido entre seus pares de grande geômetra.

O texto se refere a:

a) Sócrates.

b) Ptolomeu.

c) Tales.

d) Pitágoras.

e) Apolônio.

2. Os termos hipérbole, elipse e parábola foram lidos pela primeira vez em um livro escrito por Apolônio de Perga. O nome desse livro é:

a) *Os elementos*.

b) *Arithmética*.

c) *Principia*.

d) *Seções cônicas*.

e) *Janela de Euclides*.

3. (Vunesp, 2013) Por hipótese, considere:

$$a = b$$

Multiplique ambos os membros por a:

$$a^2 = ab$$

Subtraia de ambos os membros b^2:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

Fatore os termos de ambos os membros:

$$(a + b)(a - b) = b(a - b)$$

Simplifique os fatores comuns:

$$(a + b) = b$$

Use a hipótese de que $a = b$:

$$2b = b$$

Simplifique a equação e obtenha

$$2 = 1$$

A explicação para isso é:

a) A álgebra moderna, quando aplicada à teoria dos conjuntos, prevê tal resultado.

b) A hipótese não pode ser feita, pois como $2 = 1$, a deveria ser igual a $(b + 1)$.

c) Na simplificação dos fatores comuns, ocorreu divisão por zero, gerando o absurdo.

d) Na fatoração, faltou um termo igual a $-2ab$ no membro esquerdo.

e) Na fatoração, faltou um termo igual a $+2ab$ no membro esquerdo.

Seção 3.3

História do cálculo de integrais

Diálogo aberto

O cálculo diferencial e integral, cuja história estamos contando nesta unidade, surgiu do problema da tangente à curva de uma função e da área entre essa curva e o eixo x, “recheado” pelo conceito de limite e continuidade e pela teoria dos conjuntos. Como sabemos, esses problemas foram surgindo pontualmente nos diversos períodos históricos e, nos últimos séculos, foram juntados para compor o que se considera a área mais importante da matemática, devido à sua influência na vida das pessoas.

O problema da área sob a curva do gráfico de uma função, que será tratado nesta seção, talvez tenha sido a preocupação mais antiga dentre todas as outras três. Há registros no Papiro Rhind (ou Ahmes), que data de cerca de 1650 a.C. Isaac Barrow (1630-1677) e, posteriormente, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried W. Leibniz (1646-1716) exploraram, tantos anos depois, a relação entre a diferenciação e a integração. Por essa razão, Newton e Leibniz são considerados os inventores do cálculo. Cerca de 100 anos depois, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) acrescentou os limites ao processo de integração e, com isso, chegamos muito próximos dos processos que conhecemos e utilizamos nos dias de hoje.

O teorema fundamental do cálculo, que exploraremos nesta seção, dá a relação entre a derivada e a integral de forma precisa. A partir dele, esses conceitos estão definitivamente relacionados, sendo uma a operação inversa da outra. Entender o elo entre elas é nossa principal meta já que estamos buscando o significado das mais importantes conquistas matemáticas ao longo da história.

Só assim a ONG cumprirá sua tarefa de difundir a matemática de forma que todos possam utilizá-la, sem necessariamente dominá-la. Utilizaremos novamente o problema da pedrinha, mas de forma inversa, para que fique clara a relação que queremos mostrar. Dessa vez, portanto, partiremos da velocidade inicial e da aceleração da gravidade para determinar a posição da pedrinha ao longo do tempo.

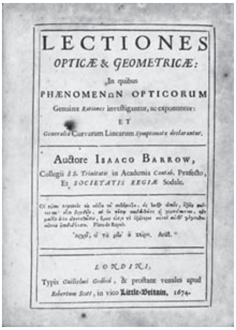
Você, como presidente da organização, é peça-chave nessa discussão. Fique atento a todas as informações que vêm a seguir para que possamos, juntos, estabelecer a ligação entre diferenciação e integração, assim, na próxima seção, encaixaremos a peça que falta: a teoria dos conjuntos.

Não pode faltar

Isaac Barrow nasceu em Londres em 1630. Mostrou-se, como muitas outras pessoas diferenciadas, muito inquieto nos tempos de escola. Quando chegou à Cambridge, começou a trilhar o caminho que o levou a ser um dos melhores especialistas em grego do seu tempo. Depois de um período como professor de geometria do Gresham College de Londres, tornou-se o primeiro ocupante da cátedra lucasiana de Cambridge. Esse título é atribuído a quem ocupa a cátedra de Matemática dessa universidade inglesa.

Devido a seus conhecimentos sobre teologia, foi convidado, em 1669, para se tornar o capelão de Carlos II e, por isso, renunciou à cátedra. Para ocupá-la, indicou um jovem colega, promissor, chamado Isaac Newton. Barrow teria sido o primeiro a reconhecer os extraordinários talentos de Newton.

Figura 3.16 | Capa de *Lectiones opticae et geometricae*, de Isaac Barrow


LECTIONES
OPTICÆ & GEOMETRICÆ:
In quibus
PHÆNOMENΩN OPTICORUM
Genuinæ Rationes investigantur, ac exponuntur:
ET
Generalia Curvarum Linearum Symptomata declarantur.

Auctore ISAACO BARROW,
Collegii S S. Trinitatis in Academia Cantab. Præfecto,
Et SOCIETATIS REGIÆ Sodale.

[illegible]

LONDINI,
Typis Gulielmi Godbid, & prostant venales apud
Robertum Scott, in vico Little-Britain, 1674.

Fonte: <http://goo.gl/Psm9sP>. Acesso em: 12 jul. 2016.

Publicou edições, com comentários de *Os elementos*, de Euclides, de *Seções cônicas*, de Apolônio, entre outros. No ano que renunciou à sua cátedra, terminou de escrever sua mais importante obra, chamada *Lectiones opticae et geometricae*. Uma parte do material desse livro foi fornecida pelo próprio Newton, fato citado e acompanhado de muitos agradecimentos no prefácio. O livro trata do estudo da óptica mas nele encontramos uma abordagem muito interessante sobre diferenciação. Há ainda indícios tênues de que Barrow foi um dos primeiros a perceber a relação entre as derivadas e as integrais.

Isaac Barrow era considerado um matemático muito conservador. Por essa razão, não teria dado tanta importância para essa relação. Sua preferência pela argumentação geométrica seria o principal impedimento para isso. Seria necessário um formalismo algébrico melhor desenvolvido para que a relação entre derivar e integrar uma função pudesse ser concretizada. Embora já utilizasse e em seus cálculos, foi Newton e, paralelamente, Leibniz que contribuíram algebricamente para a concretização dessa ideia. Mais tarde, Cauchy retomou essa discussão implementado o que faltava para que derivar e integrar se tornassem, definitivamente, uma só operação, em sentidos opostos.

Isaac Newton nasceu em 1642, no dia de natal, mesmo ano em que morreu Galileu Galilei (1564-1642), célebre físico, matemático, astrônomo e filósofo cujos trabalhos são fonte de inspiração para muito do que foi feito posteriormente no cálculo. Filho de proprietário agrícola, Newton já mostrava seus dons projetando e construindo instrumentos inspirados em ferramentas com as quais tinha contato. Ao perceber esses dons, a família optou por prorrogar sua permanência na escola, decisão que, certamente, mudou a história da Matemática.

Como matemático, está entre os melhores que o mundo conheceu. O que se destacava no trabalho de Newton era sua habilidade em abordar, matematicamente, problemas físicos. Nenhum outro matemático se mostrou tão hábil até hoje, tendo em vista os recursos que possuía à época. De forma poética, Alexandre Pope, poeta inglês contemporâneo de Newton cujos versos abordam muitas questões filosóficas, teria dito "A Natureza e as leis da Natureza jaziam ocultas na noite; Deus disse, 'Faça-se Newton', e a luz se fez" (WATTS, 2015). O próprio Leibniz, que adiante veremos que se tornou um rival de Newton, teria dito: "tomando a matemática desde o início do mundo até a época em que Newton viveu, o que ele fez foi, em grande escala, a metade melhor" (RICALDONI, 2014, p. 18).

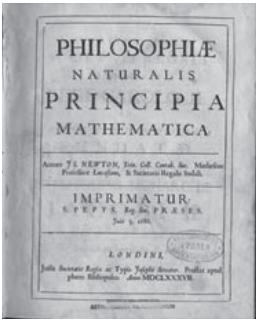
Em contraste com os elogios, duas frases atribuídas a Newton mostram uma personalidade modesta e que reconhecia o tamanho das possibilidades e a contribuição dos que o precederam.

> “Não sei o que o mundo pode pensar de mim, mas eu mesmo me considero tão somente um menino que, brincando na areia da praia, se diverte ao encontrar um seixo arredondado ou uma concha mais bonita que as comuns, enquanto o grande oceano da verdade faz indecifrável ante meus olhos.” (EVES, 1995, p. 441)

> “Se fui mais longe que os outros, é porque pudera alçar-me aos ombros de gigantes.” (BALDAN, 2015, p. 3)

No entanto, mostrava imensa aversão a questões controversas. Chegou a dizer, em algumas oportunidades, que, por considerar desagradável tal discussão, jamais publicaria algo em ciência novamente. Por esse motivo, muitas de suas descobertas só eram conhecidas tempos depois, o que aumentou a especulação sobre ser ele ou Leibniz o “verdadeiro inventor” do cálculo diferencial e integral.

Figura 3.17 | Capa de *Principia*, de Isaac Newton



Fonte: <http://goo.gl/ZVRHQD>. Acesso em: 12 jul. 2016.

Um conjunto de livros chamado *Principia* é a principal obra de Newton, ou, talvez, da história da ciência. Demonstrados de maneira magistral, utilizando principalmente a geometria grega clássica, os teoremas de *Principia* visam descrever fenômenos de movimento, sejam eles terrestres ou celestes. Até o desenvolvimento da teoria da relatividade, toda a física e a astronomia baseavam-se na hipótese de Newton, de um sistema de referência estabelecido.

Sua contribuição para o cálculo era a utilização, de forma muito consistente, das integrais para a resolução de equações cujas incógnitas eram derivadas, ou seja, equações diferenciais. Mostrando intimidade com a relação entre diferenciação e as integrais, inovando, sobretudo no campo da notação. É preciso deixar claro, no entanto, que o trabalho de Newton como um todo, dada a gama de recursos utilizados, é o que o credencia como um dos criadores do cálculo.

Gottfried W. Leibniz foi um matemático alemão, que ainda criança aprendeu latim e grego por conta própria e, aos doze anos, dominava não só o conhecimento matemático, mas também o filosófico e o teológico que se tinha na época. Exerceu durante grande parte da sua vida o serviço diplomático. Em uma missão diplomática em Paris, onde permaneceu durante algum tempo, conheceu Christiaan Huygens (1629-1695), matemático, físico e astrônomo, convencido por Leibniz a lhe dar aulas de Matemática.

Em outras missões menores, teve contato com diversos estudiosos da época e, antes mesmo de deixar Paris de forma definitiva, já havia descoberto o teorema fundamental do cálculo, desenvolvido em grande parte a partir da notação que criara e de suas ideias sobre diferenciação. Esse teorema é a chave do cadeado que une a diferenciação às integrais. Se alguém ainda tinha dúvida de que uma é a inversa da outra, essa dúvida acabava após conhecer esse teorema.

Hoje, após as contribuições significativas de Augustin-Louis Cauchy, esse teorema é dividido em duas partes. A primeira diz que se f é uma função contínua em um intervalo dado, a função F que resulta da integral de f nesse intervalo também é contínua e a derivada de F é igual a f. Isso equivale a dizer que a integral de uma função é outra função que, se for derivada, resulta na função integrada inicialmente.

Exemplificando

A integral de $y = 3x^2$ é $x^3 + k$, em que k é uma constante qualquer, pois a derivada de $x^3 + k$ é $3x^{2-1} + 0 = 3x^2$. Utilizamos nesse exemplo a regra da potência, mencionada na seção anterior, e o fato da derivada de uma constante ser nula. A regra da potência diz que a derivada de uma função da forma x^n será nx^{n-1}.

Reflita

A regra que conhecemos para a integração de uma expressão da forma x^n considera esse fato?

A segunda parte diz que a integral definida de f, contínua em um intervalo que começa em a e termina em b, qualquer, será o valor de g, substituindo o x por b, menos o valor de g, substituindo x por a. Em linguagem matemática, temos que se $f(x)$ é contínua em $[a,b]$, então,

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

sendo que a derivada de g é a função f. A função g também pode ser simbolizada por F e é chamada de primitiva de f.

Exemplificando

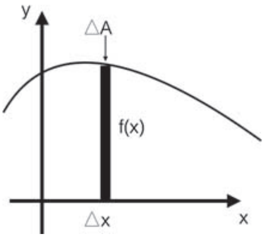
A função $y = 3x^2$ é contínua em qualquer intervalo real. De maneira simplificada, isso equivale a dizer que, ao traçarmos o gráfico dessa função utilizando lápis e papel, não será necessário, em nenhum momento, tirar o lápis do papel. Nesse caso, escolhendo aleatoriamente o intervalo [1;4], temos que $\int_1^4 3x^2dx = (4^3 + k) - (1^3 + k) = 64 + k - 1 - k = 63$, já que a primitiva dessa função, calculada no exemplo anterior, é $x^3 + k$. Via de regra, se uma expressão é da forma x^n, sua primitiva será $\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$.

Pesquise mais

A história completa sobre as integrais, a partir de Barrow até o que sabemos hoje, pode ser encontrada, de forma resumida e técnica, em *Aspectos do teorema fundamental do cálculo*, de Luiz Adauto Medeiros. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/~medeiros/LinkedDocuments/AspectosTeoremaFundamentalCalculo.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2016.

Cauchy nasceu em Paris, em 1789, filho de pais instruídos e passou por grandes escolas em sua formação, como a École Polytechnicque. Trabalhou como engenheiro o que reforçou seu interesse em resolver problemas utilizando a Matemática como ferramenta. É considerado a grande estrela da década de 1820-30. Foi o responsável por grandes avanços na área da álgebra linear, ramo da Matemática que estuda as matrizes.

Figura 3.18 | Área sob o gráfico de uma função



Fonte: elaborada pelo autor.

Durante o século do nascimento de Cauchy, a integração já tinha sido tratada como a inversa da derivação, como vimos, mas é do conceito de integral como limite da soma, em vez de antiderivação, que provieram a maioria das generalizações de integral. Na Figura 3.18, vemos uma ilustração de uma dessas generalizações. De acordo com ela, uma variação da área do retângulo, ΔA, limitado pelo eixo x e o gráfico de f, será o produto entre a variação de x, Δx, por f(x) (produto da base pela altura do triângulo). Como podemos, graças à ideia de limite, nos aproximar o quanto desejarmos de zero, a soma das áreas de infinitos retângulos como esse será igual à área sob o gráfico de f, em particular, em uma região em que ela for contínua.

Isso equivale a dizer que a soma de todas as áreas como a denotada por ΔA, que vale $f(x) \cdot \Delta x$, será a área sob o gráfico de f. Aproveitando a notação de Leibniz, que utilizava dA e dx para quando essas variações eram infinitesimais, podemos escrever $dA = f(x) \cdot dx$. Também de acordo com a notação proposta pelo matemático alemão, o símbolo $\int$ é uma forma, estilizada de desenhar a letra S, de soma. Nesse caso, a soma de todas as áreas, que fornece a área sob a curva de f, simbolizada por $\int dA = A$, será a integral de f(x), ou seja, $A = \int f(x) \cdot dx$.

Mas como $dA = f(x) \cdot dx$, temos que $\dfrac{dA}{dx} = f(x)$, então f(x) é a variação de A conforme os valores de x variam pouco. Nesse caso, f(x) é a derivada da função que fornece a área sob o gráfico de f. Assim, de acordo com o teorema fundamental do cálculo, a função A é a primitiva ou antiderivada de f.

Assimile

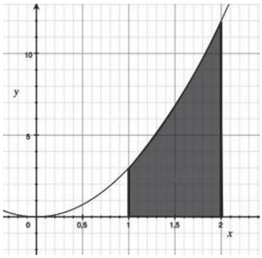
A letra grega Δ é a equivalente ao D (maiúsculo) do nosso alfabeto. Nesse caso, trocar Δ por d (minúsculo) significa trocar uma variação "grande" por uma variação "pequena", ou melhor, infinitesimal.

Portanto, somadas as contribuições de todos esses estudiosos, que viveram há mais de dois séculos antes de nós, dado um intervalo [a;b], $A = \int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$, F é a primitiva de f, e o valor obtido nesse processo fornece o valor da área sobre a curva de f(x) limitada entre os valores de x = a e x = b.

Exemplificando

A Figura 3.19 mostra o gráfico de $f(x) = 3x^2$. Calculando $\int_1^2 3x^2 dx = (2^3 + k) - (1^3 + k) = 8 + k - 1 - k = 7$, temos que a área da região limitada por x = 1, x = 2, a curva de f(x) e o eixo x, destacada na figura, vale 7 unidades área.

Figura 3.19 | Área sob o gráfico de $f(x) = 3x^2$ no intervalo [1;2]



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa ideia de associar a integração ao limite de uma soma com infinitas parcelas permite outras aplicações das integrais, entre elas o cálculo de comprimentos de linhas não retilíneas e volumes de sólidos de revolução. O importante aqui é percebermos que a partir de uma ideia aparentemente inocente, ou mesmo inútil, com algumas contribuições, podemos fazer coisas geniais, caminhando "passo a passo", utilizando a lógica matemática que foi sendo construída dessa forma. O cálculo diferencial e integral não nasceu pronto, como se viu. Ele foi se desenvolvendo, ao longo do tempo, por meio do pensamento humano, de acordo com as necessidades e utilizando argumentos simples, que juntos formam um pensamento útil e grandioso para o desenvolvimento da ciência.

Sem medo de errar

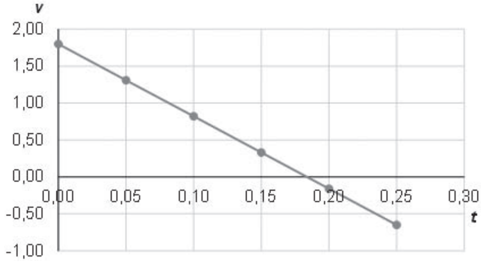
A organização não governamental que criamos, com a missão de popularizar a matemática, nos faz buscar uma solução para um problema simples, como o da pedrinha lançada por uma criança, para o alto durante uma brincadeira. Dessa vez, inverteremos o problema. Na seção anterior, a partir da equação da posição, estudamos a velocidade e, posteriormente, a aceleração utilizando derivadas. Agora é hora de, partindo da equação da velocidade, chegarmos a uma equação que fornece a posição.

Como a aceleração, constante no movimento uniformemente variado (MUV), é a variação da velocidade sobre a variação do tempo, podemos escrever que $t_0 = 0$, sendo que v é a velocidade final ao longo da variação desse tempo. Assumindo $t_0 = 0$, pode-se afirmar que $v - v_0 = at$, ou seja, $v = v_0 + at$. Nessa situação, em a velocidade inicial vale $1{,}8\,m/s$ e aconsideramos a aceleração da gravidade, que se opõe ao movimento inicialmente, $-9{,}8\,m/s^2$. Assim, partiremos da equação $v = 1{,}8 - 9{,}8t$.

Na Figura 3.20, vemos uma tabela com valores de t, variando de 0 a 0,25 segundo, para que possamos fazer o gráfico que se encontra ao lado dela.

Figura 3.20 | Comportamento da velocidade da pedrinha ao longo do tempo

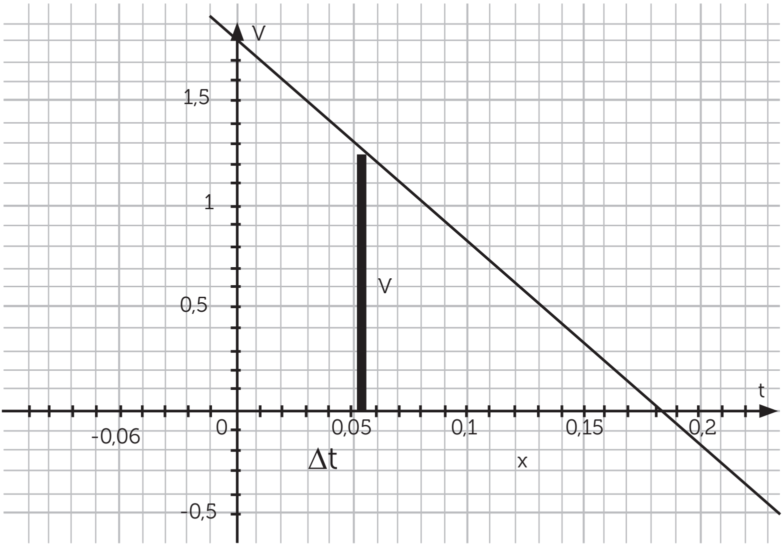
t	v = 1,8 – 9,8t
0,00	1,80
0,05	1,31
0,10	0,82
0,15	0,33
0,20	−0,16
0,25	−0,65



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 3.21, vemos o mesmo gráfico, agora sem os pontos marcados. Vemos também um retângulo cuja área vale $v \cdot \Delta t$ (base vezes altura). Mas a definição de v é a variação da posição dividida pela variação do tempo, ou seja, $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Nesse caso, o produto da velocidade pelo tempo corresponde à variação da posição, isto é, $\Delta S = v \cdot \Delta t$. Para variações infinitesimais do tempo, teremos $dS = v \cdot dt$, então, $\int dS = \int v \cdot dt$, ou ainda $S = \int v \cdot dt$ já que a soma das variações do espaço será a variação total. Nesse caso, a letra S representa o quanto o espaço variou em um determinado intervalo de tempo. A função S é a primitiva de v e, como vimos na seção anterior, a derivada de S é v, confirmando o que estudamos nesta seção. A função obtida na integração é a primitiva ou antiderivada da função integrada. Integrar uma função é realizar, primeiramente, o processo inverso da derivação. Veja a Figura 3.23.

Figura 3.21 | Gráfico da função v



Fonte: elaborada pelo autor.

A derivada da função $1,6 + 1,8t + 4,9t^2$, utilizada para determinar a posição da pedrinha na seção anterior, é, como vimos, $1,8 + 9,8t$. Essa é justamente a expressão que utilizamos como ponto de partida nessa situação-problema. O que chama a atenção é que ao integrarmos $1{,}8 + 9{,}8t$, o resultado viria acompanhado da constante k, chamada de constante de integração. No exemplo em "Não pode faltar", ela foi utilizada quando integramos a expressão $3x^2$ e obtivemos $x^3 + k$.Isso significa afirmar que $1{,}8t + 4{,}9t^2$ é apenas uma das primitivas de $1{,}8 + 9{,}8t$. Qualquer expressão da forma $k + 1{,}8t + 4{,}9t^2$ poderá ser uma dessas primitivas.

Como S é a variação da posição e $S = 1{,}8t + 4{,}9t^2$ é uma das possibilidades após a resolução da integral, substituindo S por $S_{final} - S_0$ temos que $S_{final} - S_0 = 1{,}8t - 4{,}9t^2$. Nesse caso, $S_0 + 1{,}8t - 4{,}9t^2 = 1{,}6 + 1{,}8t - 4{,}9t^2$ fornece, de fato, a posição da pedrinha.

Atenção

A integral fornecerá a variação da posição, e não a posição. O aparece na fórmula quando lembramos que qualquer variação pode ser calculada fazendo o valor final menos o valor inicial.

Avançando na prática

Depreciação de uma máquina

Descrição da situação-problema

Aqui, vamos propor uma situação de depreciação um pouco mais real do que aquela que vimos na seção anterior. Naquela oportunidade, assumimos a depreciação como percentual e constante. Agora, vamos assumir que y = f(x) é a taxa de depreciação de uma máquina e x é o tempo transcorrido, medido em meses, desde seu último recondicionamento. Assumiremos, portanto, que a taxa de depreciação é variável e depende de x. Procuraremos explicações para dois fatos utilizados na modelagem e utilização da função que dá o custo médio da máquina em questão, durante um período de tempo:

I. Utiliza-se $\int_0^{12} y \cdot dx$ para calcular a perda anual do valor da máquina.

II. A depreciação média mensal é, portanto, $D = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} y \cdot dx$.

Lembre-se

O cálculo de uma média aritmética consiste em somar todas as contribuições e dividir pela quantidade de contribuições somadas.

Resolução da situação-problema

Como y é a taxa de depreciação, cada valor de y é, na verdade, a derivada da função que fornece a depreciação para cada valor de x, ou seja, para cada quantidade de meses após o recondicionamento. Integrar essa função é, portanto, determinar a depreciação real após um intervalo de tempo. Lembre-se de que integrar, nesse caso, é determinar qual é a função derivada para que fosse obtida a função y, e esta função fornece a depreciação de acordo com as hipóteses da situação-problema.

Ao resolvermos a integral $\int_0^{12} y \cdot dx$, estamos calculando a depreciação total da máquina ao longo de 12 meses. São considerados nessa soma o valor perdido efetivamente do maquinário, que um dia precisará ser reposto, gerando um custo para a empresa. Quando essa soma é multiplicada por $\frac{1}{12}$, ela está, na verdade, sendo dividida por 12, a quantidade de meses em um ano. Fazendo isso, calcula-se o gasto mensal ao longo dos 12 meses que separaram um recondicionamento do outro. Essa equação permite repassar, mensalmente, esse custo para o preço do produto produzido pela máquina, não sendo preciso um aumento brusco nos meses em que o recondicionamento se faz necessário. Essa é a explicação do segundo fato.

Faça você mesmo

Suponha que y = 2x seja a função que fornece a taxa de variação da depreciação x meses após o último recondicionamento. Considere que um novo recondicionamento será necessário após 10 meses. Calcule o gasto G, mensal, gerado por essa demanda, sabendo que o custo do recondicionamento é R$ 250,00.

Faça valer a pena

1. Nasceu em Londres, em 1630. Quando chegou à Cambridge, começou a trilhar o caminho que o levou a ser um dos melhores especialistas em grego do seu tempo. Depois de um período como professor de geometria do Gresham College de Londres, tornou-se o primeiro ocupante da cátedra lucasiana de Cambridge. Publicou edições com comentários de *Os elementos*, de Euclides, de *Seções cônicas*, de Apolônio, entre outros, graças à sua intimidade com o idioma grego. Seu primeiro nome é o mesmo de um importante pensador que o sucedeu na cátedra em Cambridge.

O texto se refere a:

a) Isaac Barrow.

b) Isaac Newton.

c) Charles Darwin.

d) Andrew Wiles.

e) Gottfried W. Leibniz.

2. Nasceu em 1642, no dia de natal, mesmo ano em que morreu Galileu Galilei (1564-1642), célebre físico, matemático, astrônomo e filósofo cujos trabalhos são fonte de inspiração para muito do que foi feito posteriormente no cálculo. Filho de proprietário agrícola, ainda muito jovem já mostrava seus dons projetando e construindo instrumentos inspirados em ferramentas com as quais tinha contato.

O texto se refere a:

a) Isaac Barrow.

b) Isaac Newton.

c) Charles Darwin.

d) Andrew Wiles.

e) Gottfried W. Leibniz.

3. Um conjunto de livros é a principal obra de Isaac Newton, ou, talvez, da história da ciência. Demonstrados de maneira magistral, utilizando principalmente a geometria grega clássica, os teoremas visam descrever fenômenos de movimento, sejam terrestres ou celestes.

O texto se refere a:

a) *Principia.*

b) *Os elementos.*

c) *Arithmetica.*

d) *Seções cônicas.*

e) *O discurso do método.*

Seção 3.4

História da teoria de conjuntos

Diálogo aberto

Segundo Eves (1995, p. 661) “é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação acadêmica”. Muitos matemáticos do século passado defendiam que grande parte da Matemática é permeada pelo conceito de função. Nesta unidade, temos como meta entender uma função da maneira mais completa possível. Pretendemos entendê-la quanto às respostas fornecidas por ela, como essas respostas variam, como essa função pode ser representada e como podemos tirar importantes conclusões dessa representação.

Fizemos isso estudando os limites, as derivadas e as integrais, por enquanto. No entanto, em muitos momentos procuramos até mesmo evitar o termo função, pois esse conceito não tinha sido definido. Utilizamos termos como “relação entre duas variáveis”, “o que ocorre com o valor de y quando o valor de x varia”, “ ” que simboliza que y está em função de x, mesmo sem saber direito o que isso significa. É hora de acabar com essa dúvida.

Já que o conceito de função é tão importante e está implícito em grande parte da Matemática, a utilização das ferramentas matemáticas, ainda que de maneira simples e útil, o que nossa ONG propõe, pressupõe um bom entendimento desse conceito.

De tal importância é esse conceito que convidaram você, presidente da ONG, a realizar uma palestra sobre o tema para professores da educação básica. Você pensou em definir o conceito de função e apresentar todos os elementos que fazem parte dessa definição. Sua equipe sugeriu utilizar um exemplo prático, convidando os professores a pensar no que ocorre quando tomamos um táxi, que cobra R$ 3,80 de bandeirada, em um determinado horário, mais R$ 0,15, em média, por quilômetro rodado. A ideia é tentar associar os elementos concretos dessa situação aos elementos abstratos da definição de função.

Dentre esses elementos estão os conjuntos, cuja história contaremos nesta unidade, para que eles possam ser utilizados na definição de função. Até mesmo uma função é considerada um conjunto, ou seja, não há como entender o que é e como se comporta uma função, sem entender o que é e como se comporta um conjunto.

Como sempre, buscaremos esse entendimento utilizando o percurso histórico de sua criação. Preciso que você esteja comigo para que, juntos, possamos cumprir o nosso objetivo de disseminar a ideia de que a Matemática está de fato presente no nosso dia a dia e como ela pode ser entendida e utilizada sem necessariamente ser dominada. Depois de tudo isso, você pode montar sua apresentação para a palestra.

Não pode faltar

De acordo com Eves (1995, p. 660):

> **A moderna teoria matemática dos conjuntos é uma das mais notáveis criações do espírito humano. Devido ao arrojo fora do comum de algumas de suas ideias e devido a alguns dos métodos de demonstração singulares aos quais deu origem, a teoria dos conjuntos é indiscutivelmente fascinante. [...] Ela enriqueceu, tornou mais claros e generalizou muitos domínios da matemática e seu papel no estudo dos fundamentos da matemática é essencial.**

No final do século XIX, Georg Cantor (1845-1918) criou a teoria dos conjuntos, cujo impacto foi sentido por praticamente todas as áreas da Matemática. As noções de espaço e de geometria do espaço, por exemplo, experimentaram uma profunda revolução. Sem falar dos conceitos de limite, função, continuidade, derivada e integral, que nos interessa de maneira especial. Ainda segundo Eves (1995, p. 659), "mais importante porém foi a oportunidade que ela abriu para progressos matemáticos com que sequer se sonhava há cinquenta anos". Com essa teoria, a Matemática se unificou de maneira muito significativa e surgiu a possibilidade de criação de muita coisa nova em ritmo acelerado.

Cantor nasceu em S. Petersburgo, na Rússia. Quando tinha 11 anos, sua família mudou-se para Frankfurt, na Alemanha. Devido à influência religiosa de seus pais, teve muito interesse pela teologia medieval e seus argumentos sobre continuidade e sobre o infinito. Dessa forma, preferiu não seguir a sugestão do pai para se tornar engenheiro, optando pelos estudos sobre Filosofia, Física e Matemática. Estudou em algumas capitais da Europa e desenvolveu longa carreira como professor na Universidade de Halle, na Alemanha.

Interessou-se primeiramente pela teoria dos números, equações e séries trigonométricas. Em 1874, deu início aos trabalhos com a teoria dos conjuntos e a teoria do infinito. Nesta última, criou um novo campo de pesquisa em Matemática, chamado teoria dos números transfinitos. Essa teoria se baseia no tratamento do infinito atual, criando uma aritmética para os números transfinitos análoga à aritmética dos números finitos.

De certa forma, o trabalho de Cantor dá continuidade a argumentações como a do Paradoxo de Zenão. Imagine um conjunto formado por todos os números naturais positivos e outro formado por todos os números naturais pares positivos. Pode se dizer que o segundo conjunto tem a mesma quantidade de elementos do primeiro, já que $2 = 1 \cdot 2$, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 3 \cdot 2$ e assim por diante, ou seja, a cada número natural corresponde um e apenas um número par.

Em cada produto, o primeiro fator pode ser utilizado como um contador, então existe 1, 2, 3, 4, 5, ou seja, na quantidade de números naturais. Por essa razão, esses conjuntos são chamados equipotentes. Segundo a teoria de Cantor, conjuntos equipotentes têm o mesmo número cardinal ou cardinalidade, isto é, têm a mesma quantidade de elementos.

Assimile

Cardinalidade ou número cardinal é a quantidade de elementos de um conjunto e tem como símbolos mais utilizados # e n(). Se um conjunto A tem 10 elementos, dizemos que #A = 10 ou n(A) = 10, pois sua cardinalidade é 10.

O número cardinal de um conjunto infinito é chamado de número transfinito. Essa teoria abre caminho para infinitos de tamanhos diferentes. Como assim? Os números naturais são compostos de pares e ímpares. Se a quantidade de naturais é igual a de pares, como ficam os ímpares?

Antes do trabalho de Cantor, os matemáticos aceitavam apenas um infinito, hoje denotado pelo símbolo ∞, utilizado indiscriminadamente para indicar a quantidade de elementos dos dois conjuntos descritos. Com esse trabalho, passa-se a ter uma nova visão sobre a aritmética e escala para infinidades.

Veja o que acontece com um segmento de reta limitado. Este segmento contém infinitos pontos. Mas a reta que contém esse segmento também tem infinitos pontos. Porém a segunda tem, visivelmente, mais pontos, valendo-se da argumentação euclidiana de que o todo é maior que a parte. A nova visão do infinito é uma reflexão sobre ela, talvez o grande Euclides não tenha razão sobre isso. Essa reflexão, no entanto, apesar de muito interessante, vai além do que pretendemos nesta seção.

As teorias de Cantor têm algumas dificuldades lógicas e por isso delas surgiram vários paradoxos. Discussões sobre essas dificuldades geraram outros embates também no século XX. Elas surgem do fato de conjunto ser um conceito abstrato, como os números. Quando contamos associando um dedo de cada mão ao objeto, estamos contanto de forma concreta, mas quando associamos um símbolo para representar essa quantidade, o conceito fica abstrato.

Um conjunto pode ser formado por elementos concretos, como lápis de cor. Mas a ideia de agrupá-los e nomear esse agrupamento é abstrata. Quando um número é elemento de um conjunto, isso pode piorar e, se puder haver infinitos deles, pior ainda.

Figura 3.22 | Frege (à esquerda) versus Russell (à direita)

Fonte:.<http://goo.gl/9tTJV3> e <http://goo.gl/CqXzwt>. Acesso em: 20 jul. 2016.

Um dos paradoxos que surgiram na tentativa de definir um conjunto ficou conhecido como o paradoxo do Barbeiro. Foi proposto por Bertrand Russell (1872-1970), em 1902, em contraponto a uma tentativa de Gottlob Frege (1848-1925) de dar continuidade ao trabalho de Cantor.

Frege acreditava que qualquer propriedade determinava um conjunto. Então podemos definir um conjunto A, de forma abstrata, como o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Nesse caso, surge a pergunta: X pertence a si mesmo? Se a resposta for sim, então, de acordo com sua definição, ele não pode pertencer. Se não pertence a si mesmo e A é o conjunto de todos que não pertencem a si mesmo, então ele tem que pertencer. Trata-se de uma inevitável contradição. Nesse momento o conceito abstrato criado por Cantor trazia problemas lógicos aparentemente insolúveis. O paradoxo do barbeiro foi criado para se contrapor a essa crença.

Russel propôs que o barbeiro de uma vila possui os seguintes dizeres em uma placa na porta de sua barbearia: "Eu barbeio todos os habitantes da vila que não barbeiam a si próprios e nunca barbeio qualquer habitante que se barbeia". A questão que se coloca é: ele barbeia a si mesmo, ou não?

Ora, se ele se barbeia, então está violando a regra que diz que ele não barbeia ninguém que barbeia a si mesmo. Se ele não se barbeia, então ele também está violando a regra que diz que ele barbeia todos os habitantes que não se barbeiam a si próprios.

E então, o que o barbeiro deveria fazer?

A existência desses paradoxos na teoria dos conjuntos mostram de maneira muito clara que algo estava errado, talvez a tentativa de associar a lógica à teoria dos conjuntos ao invés de tratá-las como coisas complementares. Muito se escreveu desde então sobre essa possibilidade. Falando especificamente de Matemática, há uma saída muito fácil para essa discussão: basta reconstruir a teoria dos conjuntos sobre uma base axiomática suficientemente restrita para eliminar as contradições que cercam as tentativas de defini-la de outra forma.

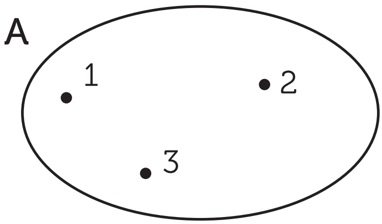
Muitos matemáticos, como Ernst Zermelo (1871-1953), Adolf A. H. Fraenkel (1891-1965), entre outros seguiram esse caminho e sempre foram criticados por adotar essa postura apenas para evitar paradoxos. Até que Henri Poincaré (1854-1912), agora com apoio de Russell, enunciou: "Por conjunto S entendemos uma coleção de objetos definidos e distintos m de nossa intuição ou de nosso pensamento; esses objetos m chamam-se elementos de S".

A teoria de Cantor mais essa definição de Poincaré evitam os paradoxos conhecidos até hoje, inclusive o do Barbeiro, do próprio Russell. A teoria dos conjuntos podia então se unir à lógica e formar os dois pilares da Matemática moderna.

Nessa definição, fica muito claro que elemento é elemento e conjunto é conjunto. Nada impede que um conjunto seja um elemento, então recorremos à lógica para, inclusive, se necessário, contrapor uma tentativa de definição nesse sentido. A teoria dos conjuntos e a lógica passam a ser aliados.

Essa teoria contempla a existência de um conjunto chamado vazio, aquele que não tem elementos. Para entender como ele pode ser representado, lembre-se de que, para representar um conjunto qualquer, utilizamos chaves, por exemplo, A = {1, 2, 3} ou fazemos um diagrama, como na Figura 3.23.

Figura 3.23 | Diagrama de Venn-Euler, utilizado para denotar um conjunto A, formado pelos números 1, 2 e 3



Fonte: elaborada pelo autor.

O vazio pode ser denotado por { }. As chaves indicam que há um conjunto e o fato de não haver nada entre elas indica que não há elementos. Podemos denotar utilizando o símbolo ∅, que indica que nada será colocado no interior do conjunto representado por um diagrama.

Na Figura 3.23, observamos que os números 1, 2 e 3 são os elementos do conjunto que, se chamamos de A, podemos dizer $1 \in A$, por exemplo. Como 4 não é um desses elementos, escrevemos que $4 \notin A$ e assim por diante. Podemos dizer também que um conjunto como o B = {1, 2}, cujos elementos são também de A e não há qualquer elemento nele que não o seja, é uma parte ou subconjunto de A. Nesse caso, escrevemos $B \subset A$, que significa que A contêm B ou B está contido em A. Note que "estar contido", "ser parte" de e "ser subconjunto de" são expressões similares.

A principal diferença entre os símbolos $\in$ e $\subset$ é que para utilizar o segundo, precisamos estar estabelecendo uma relação entre conjuntos, necessariamente. Para utilizar o primeiro, basta que aquilo que está antes de $\in$ seja um dos elementos do conjunto em questão.

Completam essa fase da definição de conjuntos dois fatos:

I. Todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

II. O vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Por essa razão, se um conjunto tem n elementos, ou seja, seu número cardinal é n, ele terá 2^n subconjuntos. O conjunto A mencionado anteriormente tem três elementos, ou seja, sua cardinalidade ou número cardinal é três. Nesse caso, ele tem $2^3 = 8$ subconjuntos, a saber: $\varnothing$, {1,2,3}, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3} e {2,3}.

Exemplificando

Considere agora um conjunto C formado pelas letras a, b, c e d, ou seja, C = {a,b,c,d}. Como esse conjunto tem quatro elementos, ele terá $2^4 = 16$ subconjuntos: { }, C, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d} e {b,c,d}.

Note que quando o conjunto tem um elemento a mais, dobra a quantidade de subconjuntos. Se dobramos algumas vezes um número, isso se transforma em uma potência de 2.

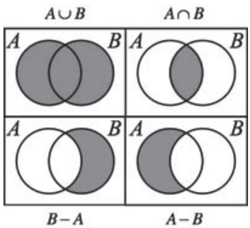
Pesquise mais

O conjunto que contém subconjuntos de um conjunto dado chama-se conjunto das partes ou conjunto potência. Leia *Conjunto das partes*, de Renata Freitas e Petrucio Viana. Disponível em: <http://www.uff.br/grupodelogica/aulas/MatDis/aula_7_partes_russell.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2016.

As principais operações entre conjuntos são a união ($\cup$), a intersecção ($\cap$) e a diferença (–). Dados dois conjuntos, o conjunto união contém todos os elementos desses conjuntos. É como se acrescentássemos os elementos de um conjunto no outro. Os elementos em comum, os do conjunto interseção, são escritos no união uma única vez. Isso ocorre pois dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos elementos, nesse caso um conjunto apresentado como {1,3,5}, por exemplo, seria igual a {1,1,1,3,3,5}. Os elementos são os mesmos, só muda a quantidade com a qual os números 1 e 3 são escritos.

Dados dois conjuntos A e B, $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$, quando fazemos A – B, a diferença entre A e B, consideramos os elementos de A que não estão em B, ou seja, os não comuns. Quando fazemos B – A, a diferença entre B e A consideramos os elementos de B não comuns a A. A Figura 3.24 ilustra algumas possibilidades dessas operações.

Figura 3.24 | Operações entre conjuntos



Fonte: <http://goo.gl/PKM9A2>. Acesso em: 20 jul. 2016.

Reflita

Dados os conjuntos A = {1,2,3,4} e B = {3,4,5}, baseando-se na Figura 3.24, como seriam os conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ e $B - A$?

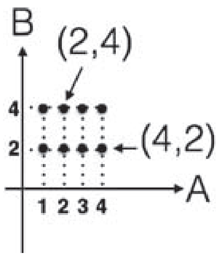
Assimile

Observe que A – B e B – A são, em geral, subconjuntos diferentes, o primeiro de A e o segundo de B.

Também é uma operação entre conjuntos aquela que chamamos de produto cartesiano. Dados dois conjuntos A e B, são elementos do produto cartesiano, A×B, todos os pares ordenados, (x;y), em que x é elemento de A, $x \in A$, e y é elemento de B, $y \in B$. Na Figura 3.25, vemos o produto cartesiano A×B, em que A = {1,2,3,4} e B = {2,4}, já representado no plano cartesiano. No destaque, a diferença entre os pares ordenados (2,4) e (4,2). No primeiro, 2 é elemento de A e 4 de B, no segundo, 4 pertence à A e 2 pertence à B.

Chamamos de relação entre dois conjuntos qualquer subconjunto ou parte de um par ordenado. Quando são dados dois conjuntos e uma restrição, que pode ser uma expressão matemática ou uma condição literal, alguns elementos do produto cartesiano podem não ser considerados.

Figura 3.25 | Representação de A×B no plano cartesiano



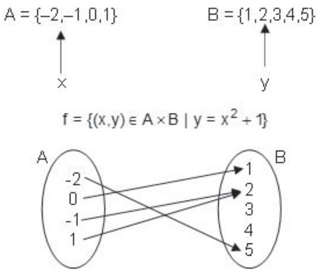
Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Imagine uma relação entre os conjuntos A e B, cujos elementos do produto cartesiano estão representados na Figura 3.25, em que só serão considerados os pares ordenados da forma (x,y) em que $x \geq y$, denotado matematicamente por $R = \{(x;y) \in A \times B \,/\, x \geq y\}$. Só poderíamos então considerar (2,2), (3,2) e (4,4). Veja que o fato de especificarmos que x tem que ser maior ou igual a y restringiu o produto cartesiano a um conjunto com três pares ordenados. Cada restrição fornecerá uma relação diferente entre A e B.

Uma função é uma relação em que cada elemento do primeiro conjunto, que chamamos de domínio, forma um único par ordenado com um elemento do segundo conjunto, chamado de contradomínio. Uma função de um conjunto A, qualquer, em um conjunto B, também qualquer, será um subconjunto do produto cartesiano entre A e B, A×B, cuja restrição garante que todo elemento de A formará um único par ordenado com um elemento de B, como ilustrado na Figura 3.26.

Figura 3.26 | Exemplo de função de $A = \{-2,-1,0,1\}$ em $B = \{1,2,3,4,5\}$



Fonte: <http://goo.gl/VCVlDb>. Acesso em: 7 ago. 2016.

Uma situação bastante presente no dia a dia das pessoas ilustra de forma muito significativa esse conceito. O que ela nos diz é que temos uma função na palma de nossa mão. Veja só:

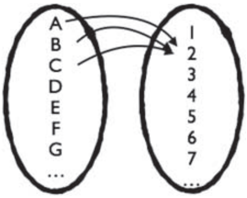
Figura 3.27 | Teclado de um telefone qualquer

Fonte: <http://goo.gl/eiDwYk>. Acesso em: 21 jul. 2016.

Os teclados dos telefones (e não só dos celulares) são, em geral, como o da Figura 3.27. Neles observamos números e letras em algumas das teclas. A ideia, muito antes da existência dos celulares, era, quando os teclados começaram a se apresentar assim, associar palavras a números de telefone. Sobretudo nomes de produtos ou serviços que seriam adquiridos pelo telefone. Por exemplo, uma cidade cujo prefixo é 345, o telefone 345PIZZA pode ser o número de uma pizzaria sem que a pessoa precise memorizar a sequência numérica 34574992, que corresponde à digitação de 345PIZZA.

Essa situação funciona bem pois todas as letras têm um único número associado. A letra A, por exemplo, corresponde ao 2 e apenas ao 2, a letra B também, a letra H corresponde ao número 4 e apenas ao número 4, ou seja, após pensar em uma palavra, haverá uma única sequência numérica associada a ela. Nesse caso, o telefone fará a ligação sem problemas. Isso porque a situação descrita representa uma correspondência em que cada elemento do conjunto que tem as letras corresponde a um único elemento do conjunto que tem os números.

Figura 3.28 | Letras do teclado telefônico e algumas correspondências com o número indicado



Fonte: elaborada pelo autor.

Matematicamente, podemos dizer que cada letra forma um único par ordenado com um número, ou seja, há uma função cujo domínio é um conjunto que tem as letras do alfabeto. O contradomínino é um conjunto que tem os algarismos e a lei de formação é a composição do teclado, ou seja, a maneira como as letras foram alocadas nas teclas numéricas. Observe o trocadilho: **funciona** porque é uma **função**.

O contrário não funcionaria. Se ao receber uma sequência numérica tentarmos adivinhar qual é a palavra, ou seja, primeiro o número depois a letra, não teríamos sucesso. Isso ocorre porque nem todos os números têm letras e cada número tem mais de uma letra, ou seja, não é uma função.

É preciso observar que o fato das teclas que têm o número 1 e o número 0 não possuírem letras não traz problemas para a situação de associar letras a números (aquela que funciona). O que ocorre é que não haverá 0 e 1 nas sequências numéricas associadas às palavras. Além disso, o fato de um número ter mais de uma letra também não é um problema, já que a sequência 345PREGO, representaria 34577346, então não ligaríamos na pizzaria para comprar pregos.

Talvez uma possibilidade (remota) de dar errado seria chegarmos a uma cidade em que esse serviço não foi divulgado e discássemos um número utilizando palavras para tentar comprar algo. Corremos o risco de um outro produto, esse sim devidamente anunciado, ter letras que discam para o mesmo número que você discou e, então, surgiria um constrangimento. A dica é utilizar essa ideia apenas se o produto estiver devidamente anunciado.

No contexto das funções reais, em que A e B são subconjuntos do conjunto dos reais, R, vejamos a formulação de Lejeune Dirichlet (1805-1859) sobre o que seria uma função antes mesmo da teoria dos conjuntos de Cantor:

> **Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por uma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função de x. A variável x, a qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada de variável dependente. (EVES, 1995, p. 661)**

Exemplificando

Imagine uma relação entre os conjuntos B = {2,4} e A = {1,2,3,4}, em que só serão considerados os pares ordenados da forma (x,y) em que $y = \frac{x}{2}$. Só poderíamos então considerar (2,1) e (4,2). Veja que o fato de especificarmos que y tem que ser a metade de x, x elemento de B e y elemento de A, restringiu o produto cartesiano a um conjunto com três pares ordenados. Todos os elementos de B formam um único par ordenado, então podemos afirmar que se trata de uma função. Dizemos que essa função é de B em A ou de B para A e, utilizando símbolos, podemos escrever f: B→A. O conjunto formado pelos números 1 e 2, {1,2}, que tem como elementos os valores associados do contradomínio é chamado de imagem da função. Nesse caso, 1 é a imagem de 2 e 2 é a imagem de 4. Nessa função, portanto, B é o domínio, A é o contradomínio e {1,2} o conjunto imagem de f. A função f será um conjunto que contém os pares ordenados (2,1) e (4,2), ou seja, f = {(2,1), (4,2)}.

A noção de agrupamento de elementos, ou seja, de conjunto parece ser implícita ao ser humano. Lembre-se de que o ato primitivo de contar era feito agrupando-se elementos. Então, definições utilizando essa ideia existiram antes mesmo da formalização da teoria de Cantor. Seu papel foi organizar as ideias, propor representações adequadas e o papel dos que o sucederam foi corrigir a teoria para evitar contradições. Assim se fez a teoria dos conjuntos.

Sem medo de errar

É hora de pensarmos juntos no que ocorre quando tomamos um táxi, que cobra R$ 3,80 de bandeirada, em um determinado horário, mais R$ 0,15, em média por quilômetro rodado. Tentaremos associar os elementos concretos dessa situação aos elementos abstratos da definição de função. Iniciaremos considerando que x representará a quantidade de quilômetros percorridos e y, o preço da corrida. Veja a Tabela 3.3.

Tabela 3.3 | Variação do preço da corrida de táxi em função da quantidade de quilômetros percorridos

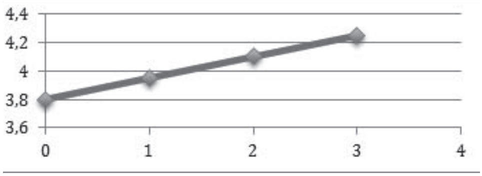
km	Preço
0	$3,80 = 3,80 + 0 \cdot 0,15$
1	$3,95 = 3,80 + 0,15 = 3,80 + 1 \cdot 0,15$
2	$4,10 = 3,80 + 0,30 = 3,80 + 2 \cdot 0,15$
3	$4,25 = 3,80 + 0,45 = 3,80 + 3 \cdot 0,15$
...	
x	$y = 3,80 + x \cdot 0,15$

Fonte: elaborada pelo autor.

A quantidade de quilômetros, na prática, é um número decimal, com duas casas decimais, iniciando em 0,00, ou seja, 0. Um conjunto que contenha esses números será o domínio da função que fornece o preço da corrida de acordo com a quantidade de quilômetros percorridos. O contradomínio, como não há problemas se um número será associado ou não, pode ser o próprio conjunto dos números reais. Nesse caso, nossa função será de A em R, ou, com símbolos, $f:A \to R$.

A expressão $y = 3{,}80 + x \cdot 0{,}15$ é a lei de formação de f que faz com que nem todos os pares ordenados formados por elementos de A e R sejam utilizados. Os pares que utilizaremos terão um valor de A na primeira posição e o valor de y obtido na segunda, por exemplo, (3;4,25). Esses pares ordenados permitem a representação dessa função no plano cartesiano, como se vê na Figura 3.28.

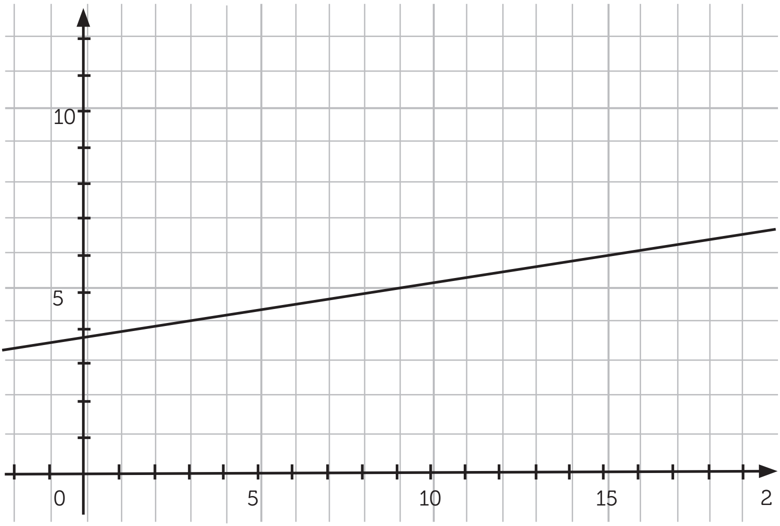
Figura 3.28 | Pontos da Tabela 3.5 representados no plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que os pontos parecem estar alinhados. Utilizando valores de x mais próximos, vemos que, de fato, o gráfico de f será uma linha reta. Como se vê na Figura 3.29. Os valores à esquerda do eixo y são apenas teóricos já que a quantidade mínima de quilômetros, no nosso contexto, é zero.

Figura 3.29 | Gráfico de y = 3,80+0,15x



Fonte: elaborada pelo autor.

Veja que, de fato, trata-se de uma função, pois cada elemento do domínio definido, a quantidade de quilômetros, fornecerá um único preço. Caso contrário, uma mesma corrida, em um mesmo dia e horário, poderia ter preços diferentes ou, dependendo do trajeto, o motorista precisaria solicitar que fossem percorridos mais alguns metros, pois para aquela quantidade "não tem preço".

Além disso, o taxímetro, um elemento bem concreto, é o representante físico da lei de formação. Ele está, de alguma forma, programado para receber os valores de x e transformá-los em y, para que o passageiro possa pagar pela corrida. Por isso, há quem diga que uma função é máquina transformadora de valores de um conjunto em um único valor de outro conjunto. Nesse caso, o taxímetro seria essa máquina.

Atenção

Quando modelamos uma situação como essa, não devemos nos preocupar, necessariamente, com os valores de y. É muito mais importante entender como eles são calculados para que possa ser estabelecida a lei de formação da função que descreve o processo.

Agora que você já tem elementos suficientes sobre o conceito de função, que tal montar aquela apresentação para os professores? Faça uma apresentação de slides com os principais pontos e acrescente os detalhes que considerar necessários.

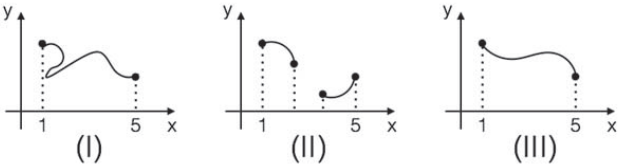
Avançando na prática

Gráfico de uma função

Descrição da situação-problema

Em uma aula de cálculo, um professor desenhou na lousa três gráficos de relações de A em R, ou seja, $f:A \rightarrow R$, em que A é o intervalo fechado de 1 a 5, que, portanto, contém todos os números reais entre eles e também 1 e 5. O conjunto A pode ser representado por $[1;5]$. E o conjunto R é o conjunto dos números reais. Esses gráficos estão na Figura 3.30.

Figura 3.30 | Gráficos de três relações de [1;5] em R



Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, questionou seus alunos: qual desses gráficos pode ser o gráfico de uma função e por quê? Você sabe a resposta?

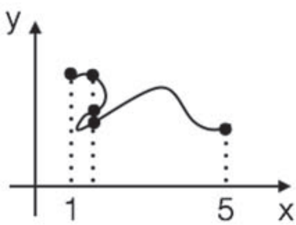
Lembre-se

A relação será uma função se, e somente se, cada elemento de A formar um único par ordenado com um elemento de R.

Resolução da situação-problema

O gráfico (I) não pode ser uma função de A em R pois próximo do ponto em que x = 1, de acordo com o traçado do gráfico, alguns valores de x formarão mais de um par ordenado. A Figura 3.31 ilustra a situação de um desses pontos.

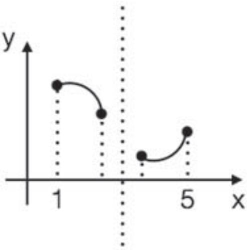
Figura 3.31 | Valor de x que forma três pares ordenados



Fonte: elaborada pelo autor.

No gráfico (II), não teremos esse problema. O traçado da curva não tem voltas no sentido horizontal. No entanto, há uma falha no traçado. Isso equivale a dizer que alguns valores de x não formam pares ordenados, então não haverá pontos sobre eles. A Figura 3.32 ilustra a situação de um desse pontos.

Figura 3.32 | Ponto do intervalo [1,5] que não forma par ordenado



Fonte: elaborada pelo autor

No gráfico (III), nenhum desses problemas ocorre. Todos os valores de x, no intervalo [1,5], formam par ordenado e apenas um. Isso caracteriza esse gráfico com o gráfico de uma função. Nesse caso, a resposta correta é: o gráfico (III) pode representar uma função, pois, de acordo como o traçado que se vê, todos os valores de x do domínio correspondem a um único valor de y.

Faça você mesmo

Você saberia dizer por que $y = \frac{1}{x}$ não pode ser a lei de formação de uma função de R em R, ou seja, f:R→R?

Faça valer a pena

1. No final do século XIX, foi criada a teoria dos conjuntos, cujo impacto foi sentido por praticamente todas as áreas da matemática. As noções de espaço e de geometria do espaço, por exemplo, experimentaram uma profunda revolução. Sem falar dos conceitos de limite, função, continuidade, derivada e integral.

Atribui-se a criação dessa teoria ao matemático russo:

a) Georg Cantor.

b) Isaac Newton.

c) Gottfried W. Leibniz.

d) Mikhail Gorbachev.

e) Leonhard Euler.

2. O barbeiro de uma vila possui os seguintes dizeres em uma placa na porta de sua barbearia: “Eu barbeio todos os habitantes da vila que não barbeiam a si próprios e nunca barbeio qualquer habitante que se barbeia”. A questão que se coloca é: ele barbeia a si mesmo ou não?

O paradoxo do barbeiro é uma criação de:

a) Georg Cantor.

b) Bertrand Russell.

c) Zenão de Eleia.

d) Apolônio de Perga.

e) Leonhard Euler.

3. “Por conjunto S entendemos uma coleção de objetos definidos e distintos m de nossa intuição ou de nosso pensamento; esses objetos m chamam-se elementos de S”. Essa é a definição de conjuntos universalmente aceita que evita paradoxos como o paradoxo do barbeiro de Bertrand Russell.

A definição anterior, que teve o apoio de Bertrand Russell, é atribuída a:

a) Georg Cantor.

b) Isaac Newton.

c) Henri Poicaré.

d) Zenão de Eleia.

e) Leonhard Euler.

Referências

BALDAN, Merilin. **Notas sobre o debate entre a modernidade e a tradição nas ideias pedagógicas nas décadas de 1920 e 1930**: o esboço de um conflito. 2015. 169 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

CARVALHO, Joao Pitombeira de. **Os três problemas clássicos da matemática grega**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica. Departamento de Matemática. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2016.

CORREIA, Mário César Ludgero Fernandes. As secções cônicas segundo Apolônio. In: CORREIA, Mário César Ludgero Fernandes. **Diferentes abordagens ao estudo das cônicas**. 2013. 130 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2013. p. 10-18. Disponível em: <http://www.adesc.blog.br/crbst_3.html#anchor-2-3>. Acesso em: 5 jul. 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

FREITAS, Renata de; VIANA, Petrucio. **Conjunto das partes**. Niterói: Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. 2013. Disponível em: <http://www.uff.br/grupodelogica/aulas/MatDis/aula_7_partes_russell.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2016.

GOUVÊA, Fernando Q. Uma demonstração maravilhosa. **Matemática Universitária**, São Paulo, n. 19, p. 16-43, dez. 1995. Disponível em: <http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n19/n19_Artigo03.pdf>. Acesso em: 7 jul. 2016.

MEDEIROS, Luis Adauto. **Aspectos do teorema fundamental do cálculo**. Belém: Universidade Federal do Pará. Faculdade de matemática, 2008. Disponível em: http://www.im.ufrj.br/~medeiros/LinkedDocuments/AspectosTeoremaFundamentalCalculo.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2016.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAEDUFMG, 2013.

RICALDONI, Márcio Augusto Gama. **Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no ensino de cálculo**: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções reais. 2014. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.

SILVA, Geni Schulz. Por que elipse, parábola e hipérbole? **Revista do Professor de Matemática**, n. 7, p. 43-44, 1985.

STEWART, J. **Cálculo**.7. ed. Sao Paulo: Cengage Learning, 2013. V. 1.

VENTURI, Jacir J. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Unificado, 2003. Disponível em: <http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2016.

WATTS, Duncan J. **Tudo é óbvio**: quando você sabe a resposta. 5. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2015

História da matemática: tendências no ensino da matemática

Convite ao estudo

Nesta unidade, convido você a participar de um novo projeto. Preocupado com os rumos que a humanidade vem tomando, no tocante à evolução dos meios de comunicação, à geopolítica e à economia, você, como professor de estudantes secundaristas, decide seguir as principais tendências no ensino de matemática. Sua principal ambição nesse projeto é mostrar, por meio dessas tendências, que a Matemática é capaz de incluir, resgatar (cultural e intelectualmente), capacitar e, portanto, trazer muitos benefícios para a vida das pessoas.

A forma como ela vinha sendo ensinada notadamente afastou muitas pessoas. Com a evolução da ciência, a nova divisão do globo terrestre, as relações econômicas e as telecomunicações, novas demandas tecnológicas surgiram. Por isso, fez-se necessário o recrutamento de pessoas que, precocemente, eram capazes de compreender e desenvolver a matemática para que esta pudesse acompanhar e contribuir para esse processo.

Tendo em vista os avanços dos últimos 150 anos, parece que esse plano deu certo, mas a que preço? As novas tecnologias, formas de comunicação que interferem na "nova ordem mundial" também trouxeram desigualdades que antes não existiam de maneira tão acentuada, ou não eram percebidas.

A Matemática não é, obviamente, a responsável por tudo o que deu errado. O que parece não ter sido adequado foi a forma, ou o fim, de sua utilização. O que nosso projeto pretende é que ela passe a ser, prioritariamente, utilizada para fins pacíficos na humanidade. Busca-se, portanto, desmistificar os conceitos para que se possa atingir mais pessoas e a “Matemática para o bem” possa ser difundida. Aliás, esse pode ser o nome do nosso projeto.

O primeiro passo é conhecer essas tendências. Para isso, seguiremos pela mesma trilha, ou seja, a cada seção trataremos de um assunto específico da matemática com o olhar do tema a ser abordado. Nesse caso, esta disciplina continuará sendo uma oportunidade para revermos conceitos importantes para sua formação como profissional das ciências exatas.

Seção 4.1

História da matemática no ensino

Diálogo aberto

No processo de retomada do interesse em aprender Matemática, nada melhor do que perceber que ela não é "coisa do outro mundo". Talvez muitas pessoas pensem assim pela quantidade de conceitos abstratos com os quais tiveram contato durante a fase escolar. Esses conceitos são, de fato, muito importantes para o desenvolvimento do raciocínio lógico. Posteriormente, podem ser utilizados para a aplicação da Matemática em problemas mais elaborados.

O que parece, muitas vezes, é que tais conceitos se tornaram prioritários em detrimento de apresentar a Matemática como algo concreto. A operação $-6 + 4 = -2$, é apresentada, prioritariamente, como um conjunto de regras determinadas pelos operadores, sinais e símbolos que vemos nela. Não seria melhor entendê-la como uma situação em que a pessoa tem uma dívida de R$ 6,00 e conseguiu pagar R$ 4,00? Isso significaria, portanto, que a pessoa ainda deve R$ 2,00. Não é necessário falar em regra de sinais ou o que se deve fazer numa ou noutra situação. É possível compreender a matemática por diferentes vieses.

A Matemática, ao se tornar um conjunto de regras, por vezes sem sentido e aplicação, ficará, de fato, dissociada da vida e do cotidiano do aluno. Nesse caso, aprender logaritmos, razões trigonométricas e álgebra linear, por exemplo, será muito mais um transtorno que um acúmulo de conhecimentos que podem ser muito úteis ao longo da vida.

Uma questão prática nos dirá, mais uma vez, o que precisamos aprender, ou seja, que ferramenta matemática utilizar e como ela será utilizada. A história da matemática se apresentará como estratégia para o desenvolvimento desse aprendizado. É a primeira tendência em educação matemática de que trataremos: a inclusão da história como ferramenta efetiva de ensino.

Num artigo, o pesquisador do INPA Philip M. Fearnside sugere um modelo matemático para acompanhamento do desmatamento da Floresta Amazônica. Uma equipe multidisciplinar garantirá que ele se mantenha constante ao longo do tempo, com medidas de sensibilização da sociedade e fiscalização. Nós, como profissionais das ciências exatas, nos preocuparemos com o número de anos necessários para que a área de desmatamento da Amazônia dobre seu valor, a partir do que foi observado. Suponha que o dobro da área observada hoje é o limite para que atitudes mais contundentes sejam necessárias para frear o desmatamento.

Pretendemos, portanto, contribuir, da nossa maneira, com a manutenção daquele bioma, naquela região única do planeta Terra. Essa seria a nossa contribuição para a manutenção da vida e não para sua destruição. Fazendo isso, a matemática terá, certamente, um significado diferente para você.

Não pode faltar

Desde o início da década de 1980, a história da matemática vem se consolidando como área do conhecimento e investigação de quem se preocupa com a educação matemática. Ela pode desempenhar um papel importante na aplicação de alguns conceitos que parecem estar somente na teoria, sem contexto e sem propósitos. Por essa razão e com esse enfoque temos guiado nossos estudos desde o princípio.

Sabemos que a matemática tem muita história diversos personagens de todos os tipos: alguns são gênios, outros nem tanto, cometem erros e acertos. Há reis e príncipes de fato, ou em suas áreas, e realizaram seu trabalho em épocas de paz, de guerra e fizeram a história de seu tempo.

Mostrar esses personagens, bem como suas obras, humaniza a abordagem dos conceitos. Levar em conta os percalços da produção do conhecimento mostra que nem tudo sempre dá certo como gostaríamos. O erro também ensina e é necessário para que a ciência evolua. Dessa forma, mostramos que o esforço dessas personagens foi necessário e futuramente pôde ser recompensado. Essas pessoas se tornaram, no mínimo, imortais. Falamos delas, muitas vezes, milhares de anos após sua morte.

Quantos anos de história foram necessários para que pudéssemos estabelecer nosso sistema de numeração? Quantas tentativas não tiveram o resultado desejado (o que é um resultado)? Veremos a seguir que os logaritmos sequer foram inventados por um matemático profissional, mas por um interessado que não mediu esforços, aceitou sugestões, avançou, retrocedeu, ou seja, vivenciou a experiência. Podemos abrir mão de tantos argumentos positivos para que alguém aprenda matemática?

As contribuições vieram de muitos povos diferentes. Alguns deles hoje são vítimas de preconceito e discriminação. Povos africanos produziram conhecimentos extremamente significativos e que contribuem para a descoberta de novos saberes. Conta-se que os mapas do metrô de Londres não contêm as reais direções dos seus trilhos. São grafos, de origem africana, que buscam representar uma situação real de forma mais organizada e didática.

Os árabes, como vimos em unidades anteriores, se empenharam em aprender o conhecimento até então produzido pelos gregos e contribuíram brilhantemente. Lembre-se de que a palavra álgebra tem origem árabe, devido àquele que é considerado seu inventor.

Segundo Fauvel (2001, p. 3-6):

> **[...] não é difícil encontrarmos boas razões para justificar o uso da História no ensino da Matemática. A História da Matemática: ajuda a aumentar a motivação para a aprendizagem; dá à Matemática uma face humana; mostra aos alunos como os conceitos são desenvolvidos, auxiliando sua compreensão; muda a percepção dos alunos sobre a Matemática; ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade.**

Esse mesmo autor deixa claro, entretanto, que é necessário que o professor de Matemática possua formação sólida não só na Matemática, como também em sua história. Por essa razão, os cursos de licenciatura em Matemática têm incluído em sua grade essa disciplina. O estudo do professor por conta própria, ainda que seja norteado por bibliografia de qualidade, não o qualifica totalmente para que possa utilizar essa ferramenta de ensino. A troca de ideias com professores e outros alunos é fundamental.

Evita-se com isso um equívoco frequente que é a utilização da história da matemática apenas como ilustração, apresentação de fatos históricos, personagens ou datas. Isso pode até nos afastar do nosso objetivo, pois pode dar a falsa ideia de que a produção do conhecimento matemático é para poucos "escolhidos".

Contra essa tendência, priorizamos, em cada unidade, alguns conhecimentos que foram produzidos em determinados momentos históricos, e não a história da matemática em si. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) encontramos a sugestão de não tratar a história da matemática como conteúdo ou assunto específico. O que faz diferença, na opinião de diversos educadores, entre eles os que prepararam o documento nacional, é a articulação entre os conteúdos e sua história. No mesmo documento lemos que "[...] conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural." (BRASIL, 1997, p. 34)

Nesse sentido, estamos no caminho certo. E por isso continuaremos dessa forma.

Nesta seção, não abriremos mão de discutir um conteúdo em si com ajuda da história da matemática. Dois dos autores em que estamos nos baseando para contar a história da matemática, Carl B. Boyer (1996) e Howard Eves (1995), fizeram suas obras com essa abordagem.

Segundo D'Ambrosio (1999, p. 97):

> **As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.**

A utilização da história da matemática pode auxiliar em outra tendência em educação matemática que trataremos na próxima seção: o resgate da identidade cultural. É uma discussão importante porque historicamente, em alguns momentos, o próprio conhecimento matemático teve papel de segregação social. Uma parte do aprendizado era "guardada" para alguns para que se tornassem diferentes, melhores. É fato que o conhecimento melhora uma pessoa, mas isso não pode ser em detrimento de outra.

Em resumo, e segundo Miguel e Miorim (2011, p. 53), a abordagem histórica dos conteúdos nas aulas de matemática serve como apoio para atingir objetivos pedagógicos que levem os alunos a perceber:

> (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.

Um dos conceitos que gera "arrepios" e parece ser para poucos é o logaritmo. Que tal uma abordagem mais contextualizada desse tema, seguida de um problema que pode ser resolvido utilizando essa ferramenta?

Atribui-se a invenção dos logaritmos ao escocês John Napier (ou Neper) (1550-1617), administrador de grandes propriedades rurais. Não era sequer matemático profissional. Interessou-se fundamentalmente por questões ligadas a aspectos computacionais da matemática e trigonometria. Foi a partir desse interesse que se deparou com a necessidade do desenvolvimento de uma ferramenta que o auxiliasse a resolver algumas de suas inquietações. A principal delas era a necessidade de reduzir multiplicações e divisões a somas e subtrações, o que já sabia fazer utilizando razões trigonométricas.

É interessante ressaltar que uma das ferramentas matemáticas mais utilizadas em diversas áreas do conhecimento humano foi inventada por uma pessoa "comum", interessada em matemática, mas de forma descompromissada, pois não a tinha como profissão. Ele foi capaz de produzir conhecimento novo a partir daquilo que já sabia e vivia, ou seja, a partir do seu contexto cultural.

A intenção de Napier era clara: eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões. Para isso, observou duas sequências numéricas bastante conhecidas, a Progressão Geométrica (PG) e a Progressão Aritmética (PA).

Exemplificando

As sequências (3;6;12;24;48) e (3;5;7;9;11) são respectivamente PG e PA em que o primeiro termo é 3. Note que a primeira sequência tem, na verdade, os elementos 3, 3 vezes 2, 6 vezes 2, 12 vezes 2 e 24 vezes 2, ou seja, poderíamos escrever $(3;3\cdot 2;6\cdot 2;12\cdot 2;24\cdot 2)$ ou ainda $(3;3\cdot 2;3\cdot 2^2;3\cdot 2^3;3\cdot 2^4)$. Da mesma forma, a segunda sequência tem, na verdade, os elementos 3, 3 mais 2, 5 mais 2, 7 mais 2 e 9 mais 2, ou seja poderíamos escrever $(3;3+2;5+2;7+2;9+2)$ ou ainda $(3;3+2;3+2\cdot 2;3+3\cdot 2;3+4\cdot 2)$. Na PG, portanto, obtemos um elemento multiplicando o anterior por uma constante. Já na PA, o elemento é obtido somando uma constante.

Pesquise mais

Para conhecer melhor ou se lembrar dessas sequências, faça a leitura do capítulo 9 do livro:

PAVIONE, Damares. **Matemática e raciocínio lógico**. São Paulo: Saraiva, 2012. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788502169401/cfi/164!/4/4@0.00:26.1>. Acesso em: 16 set. 2016.

Assim, se considerarmos a sequência $(5;5^2;5^3;5^4;...)$, por exemplo, que é uma progressão geométrica, cujo termo inicial e constante é 5, os expoentes formam a progressão aritmética (1,2,3,4;...). Na primeira, cada termo é multiplicado por 5 para obter o próximo. Na segunda sequência, a PA, somamos 1 a cada elemento para obter o próximo.

Reflita

Na potenciação, ao multiplicarmos potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

John Napier chamou os expoentes de logaritmos e sua abordagem foi publicada em 1614, num texto intitulado *Mirifici logarthmorum canonis descriptio* (Figura 4.1). Obviamente, essa abordagem continha muitos outros elementos além do que foi apresentado, mas a consequência dela é que nos interessa.

Figura 4.1 | Capa do texto produzido por John Napier que traz a invenção dos logaritmos

Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/John_Napier>. Acesso em: 4 set. 2016.

Ao ler esse texto, o professor de geometria do Gresham College de Londres e, posteriormente, da Universidade de Oxford Henry Briggs (1561-1631) viajou até Edimburgo, capital da Escócia, onde vivia Napier, para prestar sua homenagem ao homem que inventara os logaritmos. Durante a conversa, perceberam que a ferramenta seria mais útil se o logaritmo de 1 fosse 0 e logaritmo de 10 fosse 1, estabelecendo os logaritmos decimais, ou briggsianos, que hoje são os mais comuns e são chamados de logaritmos de base 10. Ao calcularmos o log de um número obtemos o expoente que transforma o número dez nesse número.

Exemplificando

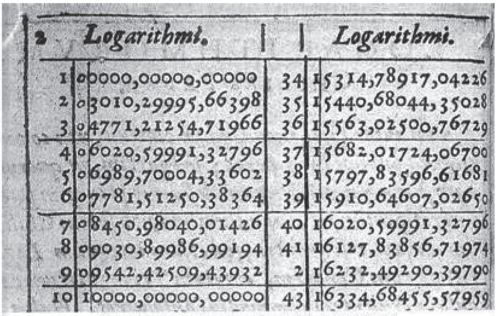
Se tiver uma calculadora científica à sua disposição, pressione o botão que tem o LOG e, em seguida, 1000. Após pressionar o símbolo de =, a calculadora devolverá 3. Por quê? Porque 3 é o expoente que transforma o número 10 no número 1000, ou seja, $10^3 = 1000$. Nesse caso, $\log_{10} 1000 = 3$, que se lê logaritmo de 1000, na base 10 é 3, pois $10^3 = 1000$.

Faça você mesmo

Verifique que logaritmo de um milhão é 6 e que log 0,01 = –2.

Como $10^0 = 1$ e $10^1 = 10$, teremos $\log_{10} 1 = 0$ e $\log_{10} 10 = 1$. Como o logaritmo de base 10 é o mais utilizado, a base não precisa ser escrita, nesse caso podemos escrever $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 1$, ou ainda, de acordo com o exemplo anterior, $\log 1000 = 3$. Briggs devotou parte de sua vida a produzir uma tábua (tabela) de logaritmos para números que não são potências conhecidas de 10, como 2, 3, 4, 11, 12, 13, 21, 22, 23, por exemplo. Com o auxílio de Adriaen Vlacq (1600-1660), um livreiro e editor holandês, obteve os logaritmos decimais de 1 a 100.000, com catorze casas decimais.

Figura 4.2 | Tábua de logaritmos de Briggs



2	Logarithmi.		Logarithmi.
1	00000,00000,00000	34	15314,78917,04226
2	03010,29995,66398	35	15440,68044,35028
3	04771,21254,71966	36	15563,02500,76729
4	06020,59991,32796	37	15682,01724,06700
5	06989,70004,33602	38	15797,83596,61681
6	07781,51250,38364	39	15910,64607,02650
7	08450,98040,01426	40	16020,59991,32796
8	09030,89986,99194	41	16127,83856,71974
9	09542,42509,43932	2	16232,49290,39790
10	10000,00000,00000	43	16334,68455,57959

Fonte: adaptada de <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000300004>. Acesso em: 4 set. 2016.

O logaritmo de Napier ficou com a base e, um número irracional conhecido como número de Euler, cujo valor é aproximadamente 2,718, e foi amplamente utilizado na abordagem em seu livro. O símbolo para esse logaritmo é LN, então, $\ln 1$ significa $\log_e 1$ e também vale zero, pois qualquer número, exceto o próprio zero, quando elevado a 0, dá 1. De maneira análoga, $\ln e$ significa $\log_e e$ e vale 1, pois qualquer número elevado a 1 resulta nele mesmo.

Hoje sabemos que a base 10 e a base e não são as únicas, mas continuam sendo as mais utilizadas. Independentemente da base utilizada, desde que satisfeitas as condições de existência, os logaritmos têm algumas propriedades operatórias muito importantes, dentre as quais destacaremos duas:

1. $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$ (logaritmo da multiplicação é igual à soma dos logaritmos).

2. $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$ (logaritmo de uma potência).

Exemplificando

1. $\log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$, essa propriedade foi muito útil para Briggs, pois todo inteiro que não é primo, exceto 0 e 1, podem ser escritos como multiplicação de números primos. Após calcular os logaritmos de 2 e de 3, pôde obter todos os dos múltiplos de 2, de 3 e de 6, por exemplo.

2. $\log_2 5^{10} = 10 \cdot \log_2 5$, essa propriedade permite calcular o logaritmo de qualquer potência de um número cujo logaritmo seja conhecido.

Reflita

Podemos calcular o logaritmo de qualquer número em qualquer base? Tente calcular o logaritmo de –3 na base 10, por exemplo. E se a base for negativa? E se for 0? E se for 1?

Assimile

Para que um logaritmo exista, a base tem que ser positiva e diferente de 1. Isso exclui os números negativos, o zero e o número 1. Por essa razão, não fará sentido o logaritmo de 0 nem de um número negativo. Essas são as condições de existência dos logaritmos.

A maravilhosa invenção de Napier, incrementada por Briggs, foi adotada rapidamente por toda a Europa, com muito entusiasmo. Na astronomia, em especial, os logaritmos parecem ter sido muito significativos. Pierre-Simon Laplace (1749-1827) chegou a dizer que "ao diminuir o trabalho, [o logaritmo] dobrou a vida dos astrônomos" (EVES, 1995, p. 346). Outros astrônomos como Bonaventura Cavalieri (1598-1647) e Johannes Kepler, já mencionado na Unidade 3 por sua contribuição ao cálculo diferencial e integral, se encarregaram em espalhar a "boa nova" por todo o velho continente.

Sem medo de errar

Num artigo, o pesquisador do INPA Philip M. Fearnside sugere, após anos de estudos, um modelo matemático para o cálculo da área de desmatamento a função $D(t) = D(0) \cdot e^{kt}$ em que $D(t)$ fornece a área de desmatamento no instante t, medido em anos desde o instante inicial, $D(0)$ a área de desmatamento no instante inicial t=0 e k a taxa média anual de desmatamento da região.

Admitiremos que tal modelo seja representativo da realidade e que a taxa média anual de desmatamento k da Amazônia seja 0,6%, ou seja, k = 0,006. Uma equipe multidisciplinar garantirá que ele se mantenha constante ao longo do tempo, com medidas de sensibilização da sociedade e fiscalização. Nós, como profissionais das ciências exatas, nos preocuparemos com o número de anos necessários para que a área de desmatamento da Amazônia dobre seu valor, a partir do que foi observado. Fomos informados que o dobro da área observada hoje é o limite para que atitudes mais contundentes sejam necessárias a fim de frear o desmatamento.

Segundo o modelo, a área desmatada hoje é representada por $D(0)$, nesse caso, o dobro dessa área pode ser representado por $2 \cdot D(0)$. Nosso objetivo é tentar entender quantos anos se passarão até que $D(t) = 2 \cdot D(0)$. Como $D(t) = D(0) \cdot e^{0{,}006t}$, de acordo com o modelo, então o objetivo passa a ser calcular o valor de t para que $e^{0{,}006t} = 2$.

O estudo de John Napier tem a resposta precisa para essa questão. O produto 0,006t é o expoente que transforma a base e no número 2. Isso equivale a dizer que $0{,}006t = \log_e 2 = \ln 2$. Nesse caso, $t = \dfrac{\ln 2}{0{,}006}$. Utilizando uma calculadora científica, que tem a tecla LN, obtemos $\ln 2 \cong 0{,}6931$, portanto, $t \cong \dfrac{0{,}6931}{0{,}006} \cong 115{,}5 \text{ anos}$, ou seja, 115 anos e meio. Isso indica que, com essa taxa, nossos bisnetos provavelmente viverão nesse cenário. Já é hora de tentarmos mudar para que as futuras gerações não sofram o impacto das atitudes que nossa geração vem tomando. Enquanto isso, há que se tentar reflorestar o que já vem sendo desmatado. É preciso lembrar que uma boa porcentagem da Amazônia já está desmatada.

Atenção

Ao fazermos a substituição $D(t) = 2 \cdot D(0)$, fazemos $2 \cdot D(0) = D(0) \cdot e^{0,006t}$, e a partir daí concluímos que $e^{0,006t}$ tem que ser igual a dois, uma vez que os dois membros da equação estão multiplicados por $D(0)$, então ele pode ser cancelado.

Avançando na prática

Espécie de aves em extinção

Descrição da situação-problema

Envolvemo-nos num projeto que consiste em acompanhar o crescimento de uma população de aves ameaçada de extinção. Sabemos que numa determinada região há 250 indivíduos e a cada 5 anos essa população pode aumentar 20%. Enquanto os outros profissionais pensam no que têm de fazer para garantir que essa taxa se concretize, nós, profissionais das ciências exatas, faremos um modelo que permita acompanhar esse crescimento e calcular o tempo necessário para que essa população triplique. Se essa população chegar a 750 indivíduos, naquela região, a espécie que estamos acompanhando sai do grupo ameaçado de extinção.

Lembre-se

Para calcularmos uma variação percentual de 20%, basta multiplicar o valor inicial por 1,20, pois, fazendo isso, estamos calculando 120% do que já tínhamos, ou seja, 100% que é o que já havia, mais o aumento de 20%.

Resolução da situação-problema

O Quadro 4.1 mostra a evolução da população, de acordo com os parâmetros apresentados, nos primeiros 20 anos. A análise desse quadro nos auxiliará a entender como o crescimento se comporta de maneira geral. Essa etapa do processo é chamada de modelagem.

Quadro 4.1 | Evolução da quantidade de indivíduos a cada 5 anos nos primeiros 20 anos

Tempo (t) [anos]	População [quantidade de indivíduos]
0	250
5	$250 \cdot 1,20$
10	$250 \cdot 1,20 \cdot 1,20 = 250 \cdot 1,20^2$
15	$250 \cdot 1,20 \cdot 1,20 \cdot 1,20 = 250 \cdot 1,20^3$
20	$250 \cdot 1,20 \cdot 1,20 \cdot 1,20 \cdot 1,20 = 250 \cdot 1,20^4$

Fonte: elaborado pelo autor.

Observando atentamente a segunda coluna do quadro, vemos que a quantidade de indivíduos poder ser calculada sempre da mesma forma. A cada variação do tempo, o número 250 fica multiplicado por uma potência de 1,20. Mesmo quando o tempo é 0 ou 1, podemos pensar em $250 \cdot 1,20^0$ e $250 \cdot 1,20^1$, respectivamente. Olhando mais de perto, podemos assumir que o expoente do fator de correção percentual 1,20 é a quantidade de intervalos de 5 anos observados na primeira coluna.

Se dividirmos o número 5 por 5, o número 10 por 5, o número 15 por 5 e o número 20 por 5, já que o intervalo é de cinco anos, obtemos justamente o expoente de 1,20, certo? Num intervalo qualquer t, devemos então fazer $\frac{t}{5}$. Nesse caso, podemos dizer que a quantidade Q de indivíduos após t anos é dada por $250 \cdot 1,20^t$, ou seja, $Q(t) = 250 \cdot 1,20^t$.

Gostaríamos de saber qual o valor de t para que a quantidade Q(t) seja igual a 750. Fazendo $750 = 250 \cdot 1,20^t$, precisamos de um valor de t que faça com que tenhamos $1,20^t = 3$, certo?

Essa equação é chamada de equação exponencial e precisamos encontrar o expoente que transforma o número 1,20 no número 3. Isso te lembra alguma coisa?

Lembrando que logaritmo é o expoente que faz um número se transformar em outro, pela potenciação $1,20^t = 3$, t é o logaritmo de 3 na base 1,20, ou seja $t = \log_{1,20} 3$.

O problema é que 1,20 não é uma base conhecida, mas se dois números são iguais, então eles têm o mesmo logaritmo. Nesse caso, se $1{,}20^t = 3$, então $\log 1{,}20^t = \log 3$. Note que utilizamos logaritmo de base 10, por isso a base não está aparente, justamente por ser uma base "tabelada" ou presente na calculadora científica. Utilizando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos que $\log 1{,}20^t = \log 3 \Leftrightarrow t \cdot \log 1{,}20 = \log 3$, ou seja, $t = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}20} \cong \dfrac{0{,}4771}{0{,}0792} \cong 6 \text{ anos}$.

Faça você mesmo

Calcule o tempo necessário para que a população quadruplique, ou seja, chegue a 1.000 aves, utilizando os dois métodos descritos.

Faça valer a pena

1. Marque a alternativa que completa mais adequadamente a frase: A história da matemática...

a) vem se consolidando como área do conhecimento e investigação de quem se preocupa com a educação matemática.

b) deve ser utilizada em sala de aula apenas como ilustração, apresentação de fatos históricos, personagens ou datas.

c) é totalmente desnecessária no que se refere a estratégias de ensino de matemática.

d) é pouco conhecida, então não deve ser utilizada nas aulas de matemática.

e) mostra que não há qualquer conexão entre o desenvolvimento da matemática e o contexto sociocultural da história da humanidade.

2. Atribui-se a invenção dos logaritmos a um administrador de grandes propriedades rurais. Não era sequer matemático profissional. Interessou-se fundamentalmente por questões ligadas a aspectos computacionais da matemática e trigonometria.

O texto se refere ao escocês:

a) John Napier.

b) Henry Briggs.

c) Bonaventura Cavalieri.

d) Pierre-Simon Laplace.

e) Johannes Kepler.

3. Dado um número real, o conjunto ordenado, ou sequência, em que cada elemento a partir do primeiro (dado) é obtido somando-se uma constante, é chamado de:

a) Progressão aritmética.

b) Progressão geométrica.

c) Sequência de Fibonacci.

d) Série harmônica.

e) Sequência de potências.

Seção 4.2

Apresentação das características de diferentes tendências no ensino da matemática

Diálogo aberto

Na seção anterior, vimos que a inserção da história da matemática, de forma sistemática e consistente, pode auxiliar na retomada do interesse das pessoas em aprender matemática. Apresentando o percurso histórico, os personagens, os problemas que podem ser resolvidos, pode-se dar um pouco mais de significado aos conceitos abstratos que temos que saber para utilizar a matemática, sobretudo no ensino superior.

Essa não é a única tendência atual no ensino da matemática. Muitas pessoas têm se debruçado sobre ideias para que esse ensino possa ser mais efetivo e significativo sem que se perca a essência: é necessário que algumas pessoas desenvolvam o pensamento matemático de forma profunda e abstrata, mas isso não significa que todos precisem. As discussões nesse campo são muito amplas. Algumas tentativas funcionam com um grupo, mas não com outro.

Há muito o que estudar e muito a se avançar para que o objetivo seja atingido. Diversos são os oponentes nesse processo. Os alunos ainda são muito cobrados pelos conceitos abstratos que conseguem absorver e, geralmente, nem se dão conta que há prática por trás deles.

Como queremos uma matemática mais significativa e que atinja mais pessoas, precisamos conhecer o que está sendo feito e perceber o que pode ser inserido no nosso trabalho didático, que busca propostas para que a matemática deixe de ser um peso para a maioria das pessoas e passe a ser um instrumento efetivo de desenvolvimento de raciocínio lógico, inclusão e resgate cultural. E pode, além disso, ajudar os alunos no objetivo de serem profissionais melhores nas áreas que escolherem e, por que não, tomarem atitudes mais assertivas no dia a dia.

Você, como professor de matemática, continua com seu projeto de mostrar os benefícios proporcionados à vida das pessoas por meio da matemática. O problema que você tentará resolver para que esse tema seja desenvolvido de forma concreta fala sobre o termo acessibilidade, que busca incluir a pessoa com deficiência na participação de atividades cotidianas. Entre outras coisas, trata do acesso para cadeira de rodas através de rampas. Você pretende demonstrar a matemática envolvida no projeto de uma rampa que forneça acesso a um desnível de 0,90 m.

Conheceremos um pouco do percurso histórico de uma ferramenta útil nesse tipo de problema. A matemática, nesse caso, está sendo utilizada com o propósito de melhorar a vida dos cadeirantes, o que é muito motivador, você não acha?

Não pode faltar

Dependendo do contexto, perguntar quais são as tendências em educação matemática pode gerar diversas respostas. É possível que se fale sobre a utilização da história da matemática, da modelagem, da tecnologia da informação e da comunicação. Alguém pode dizer que, dentro de um processo de avanço acelerado das ciências, buscando respostas rápidas para os problemas e demandas atuais, o ensino da álgebra, do pensamento matemático avançado e da psicologia da educação matemática são as tendências do momento. Estabelecendo o contraponto a esse último, é possível que a resposta envolva os termos inclusão, filosofia da educação matemática ou mesmo valores éticos no ensino de matemática.

De certo modo, e a seu tempo, temos observado cada uma dessas concepções e características no último século. Talvez uma seja consequência da outra. É possível até mesmo que elas se misturem em alguns aspectos. Nesse caso, por não haver uma resposta única para essa pergunta, não focaremos uma ou outra. Vamos nos preocupar com a contribuição dessas formas de pensar o ensino para entender o que se tem buscado hoje nas salas de aulas.

A própria palavra tendência pode nos remeter a vários caminhos. Ela se origina do termo, em latim, *tendentia*, que significa 'direciona para' ou 'inclina para'. Atualmente, podemos pensar em tendência como sinônimo de disposição natural ou instintiva, pendor, propensão, inclinação, vocação, motivação. Veja que cada uma das possibilidades citadas anteriormente pode se encaixar com uma das formas de compreender o sentido da palavra.

Utilizar a história da matemática, modelagem, jogos, recursos computacionais, entre eles a internet, faz parte das práticas didáticas que estão sendo adotadas no ensino. Acredita-se que a abordagem por diversos vieses motiva os alunos, os inclui, estimula vocações e, com isso, o ensino se torna mais abrangente.

A preocupação com a álgebra e, por consequência, com o cálculo diferencial e integral e a teoria dos conjuntos entra no aspecto da temporalidade. No tempo em que a matemática foi abordada dessa forma, nas salas de aula, ela se fazia extremamente necessária, era quase uma disposição natural. As grandes guerras e a Guerra Fria foram fatores determinantes para essa tendência.

Em meados do século XX, a ênfase na abstração e a preocupação com a análise das estruturas matemáticas chamou a atenção de quem se interessava por educação matemática. Essa fase ficou conhecida como Movimento da Matemática Moderna. Considera-se que o termo "moderna" foi muito motivador na época, pois dava a ideia de algo novo e, portanto, intrigante. Essa reformulação na maneira de ensinar matemática foi muito influenciadora e abrangente. Acredita-se que ela atingiu seus objetivos de trazer uma parte matemática que antes era abordada apenas no ensino superior para a educação básica. Com isso, esperava-se que talentos fossem descobertos precocemente. Por essa influência, até hoje iniciamos os estudos mais elaborados da matemática, aquela que começa a ser apresentada no ensino médio, introduzindo a teoria dos conjuntos e, em seguida, utilizamos de forma persistente as ideias que derivam dessa abordagem, sobretudo no que diz respeito à notação.

A partir desse momento, verifica-se de forma mais objetiva a necessidade de um estudo epistemológico do ensino da matemática. Até então, poucos trabalhos, encontros e discussões foram observados. O ensino nada mais era que uma subárea da matemática à qual não se dava muito valor.

Entende-se por epistemologia o conjunto de conhecimentos sobre a origem, a natureza, as etapas e os limites do conhecimento humano, a teoria do conhecimento. Trata-se de um estudo crítico das premissas, das conclusões e dos métodos dos diferentes ramos do conhecimento científico, das teorias e das práticas. É também conhecida como a teoria da ciência. No ensino da matemática, ela trata fundamentalmente sobre o que é importante ser ensinado, com que enfoque, em que formato, com que objetivo e para quem.

Somada aos estudos metodológicos mais específicos, que dizem respeito à forma como os conteúdos matemáticos são apresentados, é possível determinar como a matemática deve ser ensinada, que partes dela são essenciais e compreender as razões para que seja feito dessa forma. Obviamente, sempre houve preocupação em relação a como ensinar matemática mas, à medida que esta se desenvolve e são apresentadas mais e mais aplicações, ensiná-la de forma significativa e eficiente se torna algo cada vez mais necessário e desafiador.

Esse desafio inclui também aspectos de inclusão, resgate cultural, autoestima, entre outros, que foram se perdendo devido à sistematização exagerada do ensino matemático. Cada vez mais a matemática se mostra como ciência cristalizada, inacessível, capaz de resolver tudo, mas para poucos. A ideia de que foi sendo construída pouco a pouco, para resolver problemas pontuais, muitas vezes simples, fica de lado para que ela se torne um valor de diferenciação cultural e social. Hoje em dia, a matemática ensinada na escola pública nem sempre é a mesma ensinada na rede particular, para citar apenas um exemplo. Em certa medida, ela pode ser considerada como um fator de segregação.

Nesse contexto, nossa preocupação enquanto pessoas que utilizam, disseminam ou ensinam a matemática, se torna cada vez mais pertinente. Conhecer todos esses fatores nos ajudará, certamente, a propor maneiras de utilizar melhor essa ciência, que sempre teve status de curiosa, desafiadora e fascinante, mas hoje, se tornou o "calcanhar de Aquiles" de muitos estudantes.

Analisando atentamente o cotidiano escolar, é possível perceber que as crianças que chegam à escola normalmente gostam de matemática, mas é igualmente possível constatar que esse gosto diminui tão logo os alunos avançam pelos diversos ciclos do sistema de ensino. Esse processo resulta no desenvolvimento de um sentimento de aversão, apatia e incapacidade diante da matemática.

Muito se tem discutido sobre competências e habilidades que devem ser desenvolvidas no período escolar. A criação do Exame Nacional do Ensino Médio e dos Parâmetros Curriculares Nacionais contribuiu muito para isso. Paralelamente, o papel da escola vem sendo discutido. É certo que esta sempre teve como objetivo zelar pela preparação do estudante para enfrentar a realidade. Como a realidade vem se transformando rapidamente, parece que o movimento da escola para realizar seus objetivos é insuficiente. A melhora no ensino da matemática pode ser um grande propulsor na retomada desse caminho.

Reflita

Como foi sua experiência com matemática na educação básica? Você considera que a escola cumpriu seu objetivo em lhe preparar para os problemas que tem que resolver na educação superior? O que faltou? Motivação? Empenho? Estratégias mais interessantes?

Devemos discutir também a diferença entre aprendizado e desenvolvimento. Apenas o aprendizado efetivo e repleto de significado gera desenvolvimento. É claro que o aprendiz tem um papel importante nisso e, por essa razão, a tentativa de reformulação das práticas pedagógicas tem que começar nos primeiros anos da vida escolar. A criança ainda não tem total consciência de quantas decisões é capaz de tomar. Acredita que há muito a aprender. Frustra-se menos com o aquilo que não consegue fazer. Além disso, ainda não tem o preconceito em relação ao que está prestes a aprender e, com isso, acaba decidindo, mais facilmente, por levar adiante a proposta feita.

É nesse momento que a história do conteúdo que será tratado, a contextualização deste e a sua aplicação em outras áreas do conhecimento tem mais chance de prover um ensino significativo. Com isso, acredita-se que o estudante fica mais tempo empenhado em querer aprender. Nós, no nível de ensino em que nos encontramos, temos que, primeiramente, vencer os preconceitos. Isso exigirá ainda mais dessas estratégias de ensino.

Deixando de lado esses preconceitos, como se fossemos crianças, é hora de ler algumas linhas sobre a história da trigonometria. Faremos isso para que, em seguida, possamos ter contato com a contextualização das relações que conheceremos durante essa leitura. No momento em que as relações trigonométricas não forem mais um problema tão grande, estaremos aptos a enxergar a matemática como algo que está presente no cotidiano, que pode ser utilizado de maneira simples e, além disso, nos fazer sentir bem.

Nossa história começa, novamente, no Egito antigo. O problema 56 do Papiro Rhind (ou Ahmes), já mencionado em muitos momentos nesta disciplina, contém rudimentos da trigonometria e uma teoria sobre semelhança de triângulos. Na construção de pirâmides, era essencial manter a inclinação de suas faces. Essa preocupação pode ter levado os egípcios a desenvolverem ao menos uma das relações trigonométricas que conhecemos hoje.

Há muitos sinais de algumas dessas relações nas obras do grego Arquimedes, grande geômetra e discípulo de Euclides. Ele teria sido o inventor de muitas máquinas engenhosas que evitavam a aproximação de inimigos durantes as guerras, que eram comuns na época em que viveu (entre 300 e 200 a.C.). Atribui-se a ele, além das leis matemáticas que orientam a construção de alavancas, muitos princípios hidrostáticos.

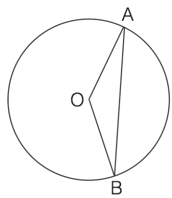
Pesquise mais

Leia um pouco mais sobre a história e as contribuições de Arquimedes acessando o material disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/6688>. Acesso em: 11 set. 2016.

No *Os elementos* de Euclides há menções sobre importantes conclusões da trigonometria, mas, na essência, esse ramo da matemática relaciona ângulos com segmentos e a noção de ângulos nos tempos de Euclides ainda era incipiente.Os estudos em astronomia, que avançavam graças à obra de Euclides de Alexandria, mais uma vez foram determinantes para o desenvolvimento da matemática, indicando a necessidade de sistematização dos conceitos trigonométricos.

Inicialmente, essas relações se deram num círculo, quando um ângulo central era determinado. Esses ângulos determinam arcos sobre a circunferência que limita o círculo. O segmento que une os extremos desses arcos é chamado de corda, veja na Figura 4.3. Nesta figura, sobre a circunferência de centro no ponto O, o ângulo AÔB gera o arco com extremos nos pontos A e B. O segmento que também tem extremos nesses pontos é o que chamamos de corda. A relação entre a corda e o ângulo é o principal objeto de estudo da trigonometria. Essa corda, em muitos problemas, media a distância entre dois astros.

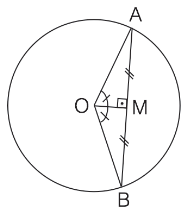
Figura 4.3 | Circunferência de centro em O e corda com extremos em A e B



Fonte: elaborada pelo autor.

Era sabido na época que o segmento com extremos em O e na corda AB, até o seu ponto médio, é perpendicular à corda e dividirá o ângulo AÔB ao meio. De maneira análoga, ao traçarmos um segmento com extremos em O e na corda AB, perpendicular à corda, o ponto de encontro é o ponto médio dessa corda e divide o ângulo AÔB em dois ângulos de mesma medida. Veja a Figura 4.4.

Figura 4.4 | Segmento com extremos em O e na corda AB (no ponto M)



Fonte: elaborada pelo autor.

Aumentando ou diminuindo o raio do círculo, se o ângulo AÔB for mantido, os "novos triângulos" com vértices nos pontos O, A e M serão semelhantes, ou seja, os novos segmentos com extremos em

A e M, chamados de semicorda, serão proporcionais àquele traçado inicialmente. Se a medida do raio OA e da semicorda AM medem, inicialmente, r e s e, após o aumento o raio passa a medir R e a semicorda S, temos que $\frac{r}{R}=\frac{s}{S}$, ou ainda, $\frac{S}{R}=\frac{s}{r}$. Isso equivale a dizer que a semicorda é proporcional ao raio do círculo se a medida ângulo AÔB for sempre a mesma. A razão dessa proporção é chamada de seno do ângulo AÔB.

Exemplificando

Se o ângulo AÔB medisse 80°, então o ângulo AÔB mediria 40°. Dividindo-se a medida da semicorda pelo tamanho do raio do círculo, mantendo AÔB em 80°, o resultado dessa divisão é o Seno de 40°, que representamos por sen(40°). Essa razão se encontra tabelada e seu valor é aproximadamente 0,6428.

Se a divisão fosse entre a medida do segmento OM e a do raio OA, também teríamos sempre o mesmo valor, independentemente do raio escolhido, se o ângulo for mantido. Nesse caso, a constante de proporcionalidade se chama cosseno. Na verdade, qualquer que seja o par de lados escolhido, haverá uma relação trigonométrica associada. Nesse caso, cada relação trigonométrica é a razão de proporcionalidade entre dois lados de um triângulo retângulo.

Para resolução da situação-problema a seguir, que será a primeira contextualização das definições cuja história foi brevemente abordada há pouco, precisamos ainda conhecer a tangente.

Assimile

Ainda de acordo com a Figura 4.4, a tangente do ângulo AÔB será a razão entre os segmentos AM e OM, que são os catetos, oposto e adjacente a esse ângulo, no triângulo retângulo OAM.

Exemplificando

Se o ângulo AÔB medisse 100°, então o ângulo AÔB mediria 50°. A divisão entre a medida de AM e a medida de OM é a tangente de 50°, que representamos por tg(50°). Essa razão se encontra tabelada e seu valor é aproximadamente 1,1918.

Sem medo de errar

Falaremos concretamente sobre o termo acessibilidade, que busca incluir a pessoa com deficiência na participação de atividades cotidianas. Entre outras coisas, trata do acesso para cadeira de rodas por meio de rampas. A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) regulamentou a construção dessas rampas. A inclinação com o plano horizontal deve variar de 5% a 8%, de acordo com o Quadro 4.2.

Quadro 4.2 | Regulamentação para construção de rampas de acessibilidade

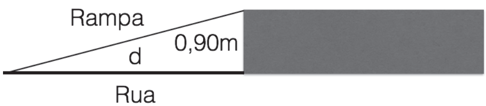
Desnível	Inclinação máxima
Mais de 1 m	5%
De 80 cm a 1 m	6,25%
Até 80 cm	8,33%

Fonte: Brasil (2004).

Suponhamos que seja preciso construir uma rampa num local em que o desnível tem altura de 0,90 m. De quanto deverá ser o afastamento mínimo, a fim de que essa rampa fique de acordo com o regulamento estabelecido pela ABNT?

A inclinação mencionada no quadro é a porcentagem entre o desnível e o afastamento do início da rampa. Essa porcentagem é, na verdade, aquilo que definimos como tangente do ângulo que a rampa forma com o nível do chão. O esquema da Figura 4.5 ilustra a situação.

Figura 4.5 | Rampa que será construída para acesso de cadeirantes



Fonte: elaborada pelo autor.

Precisamos que $\frac{0,90}{d} = 6,25\% = 0,0625$, ou seja, $d = \frac{0,90}{0,0625} = 14,4\text{m}$. É o mesmo que dizer que a tangente do ângulo tem que ser 0,0625, ou seja, o ângulo entre a rampa e o nível do solo tem que ter entre 3 e 4 graus. Veja o Quadro 4.3.

Quadro 4.3 | Quadro trigonométrico para ângulos de 0 a 4 graus

Graus	Radianos	Seno	Cosseno	Tangente
0	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000
1	0,017453	0,017452	0,999848	0,017455
2	0,034907	0,034899	0,999391	0,034921
3	0,052360	0,052336	0,998630	0,052408
4	0,069813	0,069756	0,997564	0,069927

Fonte: elaborado pelo autor.

Atenção

O alto valor da distância se deve ao grande desnível. Para efeito de comparação, 0,90 m é mais do que a altura padrão de uma pia.

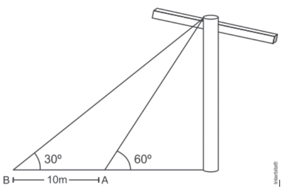
Avançando na prática

Na aula prática de edificações

Descrição da situação-problema

Em uma aula prática, um professor de um curso superior de edificações pede para que seus alunos determinem a altura de um poste que fica nas instalações da instituição, porém não é possível chegar nem no topo do poste, nem em sua base. Para realizar tal medida, são disponibilizados para os alunos uma trena (fita métrica) e um teodolito (aparelho que mede ângulos). É realizado o seguinte procedimento: crava-se uma estaca no ponto A a x metros da base do poste e mede-se o ângulo formado entre o topo do poste e o solo, que é de 60° (sessenta graus), em seguida, afastando-se 10 m (dez metros) em linha reta do ponto A e cravando uma nova estaca no ponto B, mede-se novamente o ângulo entre o topo do poste e o solo, que é de 30° (trinta graus). A Figura 4.6 ilustra a situação.

Figura 4.6 | Ilustração da situação-problema proposta.



Fonte: adaptada de IFSC (2015).

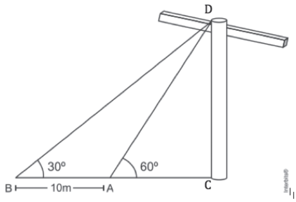
Lembre-se

Lembre-se de que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° e que se um triângulo tem dois ângulos de mesma medida, ele é chamado de isósceles e terá dois lados de mesma medida.

Resolução da situação-problema

Consideraremos que a base e o topo do poste são os pontos C e D, respectivamente. Veja a Figura 4.7.

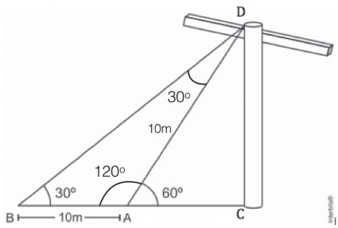
Figura 4.7 | Ilustração da situação-problema proposta



Fonte: adaptada de Vestibular do IFSC (2015).

Nesse caso, o ângulo BÂD mede 120°, pois é o complemento do ângulo CÂD que mede 60° (quando dois ângulos são complementares, a soma de suas medidas vale 180°). Sendo assim, o ângulo BÂD medirá 30°, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo também vale 180°. Dessa forma, o triângulo BAD é isósceles, pois tem dois ângulos de mesma medida. Isso nos faz concluir que o segmento AD também mede 10 m. Veja a Figura 4.8.

Figura 4.8 | Ilustração da situação-problema proposta



Fonte: adaptada de Vestibular do IFSC (2015).

Assim, no triângulo ACD a hipotenusa mede 10 m e o cateto oposto ao ângulo de 60° é a altura do poste. A divisão entre a altura e a medida 10 m é o seno de 60°. Utilizando uma tabela trigonométrica, ou uma calculadora científica, é possível verificar que esse seno vale, aproximadamente, 0,8660. Nesse caso, $\frac{altura}{10} = 0,8660$, portanto, altura = 8,66 m. Descobrimos, utilizando os recursos disponíveis, que o poste em questão mede 8,66 m de altura.

Faça você mesmo

Quais as medidas dos segmentos AC, BC e BD?

Faça valer a pena

1. Dentre as alternativas, escolha aquela que NÃO é considerada uma tendência no ensino de matemática:

a) Utilização da história da matemática como recurso didático.

b) Utilização da internet como fonte de pesquisa e motivação para os estudantes.

c) Utilização da modelagem matemática como recurso didático.

d) Utilização de jogos e desafios em sala de aula.

e) Utilização de estratégias de memorização de conteúdos, sem levar em conta seu significado.

2. Tendo em vista o contexto da educação matemática, é incorreto afirmar que:

a) As grandes guerras e, posteriormente, a Guerra Fria influenciaram na forma como a matemática é ensinada até os dias de hoje.

b) Muito tem se discutido sobre competências e habilidades que devem ser desenvolvidas no período escolar.

c) Qualquer tipo de aprendizado levará ao desenvolvimento do educando.

d) A melhora no ensino da matemática pode ser um grande propulsor na busca pelos objetivos da educação como um todo.

e) A história da matemática, se bem utilizada, pode trazer muitos ganhos pedagógicos.

3. Conjunto de conhecimentos sobre a origem, a natureza, as etapas e os limites do conhecimento humano, a teoria do conhecimento. Trata-se de um estudo crítico das premissas, das conclusões e dos métodos dos diferentes ramos do conhecimento científico, das teorias e das práticas.

Assinale a alternativa que apresenta a palavra cujo significado está descrito no texto:

a) Epistemologia.

b) Lógica.

c) Numerologia.

d) Pedagogia.

e) Astrologia.

Seção 4.3

A etnomatemática

Diálogo aberto

De todas as tendências em educação matemática, a etnomatemática talvez seja aquela que mais se encaixa no nosso projeto. O Movimento da Matemática Moderna, que pregava um currículo comum, ou seja, uma única visão sobre a matemática, teve como uma de suas consequências a não valorização do conhecimento que o aluno trazia para a sala de aula. Contra isso, os educadores passaram a voltar seus olhares para os vendedores de rua, para os pedreiros, artesãos, donas de casa, entre outros, que têm sua própria matemática e que é muitas vezes alheia ao que se aprende nos meios acadêmicos.

Nós, que hoje ocupamos a posição de professores que desejam ensinar matemática de forma significativa, inclusiva e para fins pacíficos, não podemos deixar de ter esse olhar. O que existe por trás de todas essas matemáticas pode até não envolver conceitos tão simples, mas são de fácil utilização. Isso mostra que para utilizar a matemática não é preciso dominá-la. Um entendimento mínimo do que há de importante no método, para que ele, eventualmente, possa sofrer alterações se necessário, é essencial. Depois disso, é só utilizar.

Alguns autores chamaram de sociomatemática, matemática espontânea, informal, oprimida, escondida ou popular, até que, em 1985, o professor Ubiratan D'Ambrósio chamou-a de etnomatemática. A partir de então, muitos grupos de pesquisa têm realizado trabalhos sobre essa área do conhecimento.

Nosso principal objetivo é conhecê-la um pouco melhor e entender como e se ela pode ser utilizada em sala de aula, que benefícios pode trazer. Será que conseguimos ensinar geometria a partir da experiência de um pedreiro ou de um artesão? Será que conseguimos ensinar fração a partir da experiência de uma cozinheira? Te desafio a encontrar, nesse livro didático, exemplos que respondem a cada uma dessas perguntas.

Como a etnomatemática tem como principal motivação fazer uma educação diferente daquela que vem sendo feita, iremos refletir sobre as seguintes questões: o que a atividade de um pedreiro tem a ver com o teorema de Pitágoras? Que matemática podemos aprender comendo uma pizza? Quais outros exemplos dessa matemática informal podem contribuir para o ensino de matemática?

Não pode faltar

A chamada cultura ocidental, que tem seu "berço" na Grécia antiga, sempre se ocupou em tentar explicar a realidade. Em diferentes momentos presenciamos grandes mentes debruçando-se em problemas, estabelecendo ferramentas, dando respostas e interferindo na realidade. Paralelamente a isso, muitas outras civilizações, talvez um pouco menos influentes, foram, ao longo da história, desenvolvendo sua própria matemática e sua própria ciência.

Em linhas gerais, o estudo de como esse conhecimento foi e é produzido por esses grupos, que parece ter se perdido ou sequer foi "descoberto", chama-se etnomatemática. Nesta seção, pretendemos desenvolver um pouco melhor esse tema, abordando sua história e suas concepções. Conhecendo bem esse universo, nos apropriaremos dessa tendência em educação matemática para levar adiante nosso projeto de humanização e popularização da matemática entre os estudantes.

Termos como etnociência, etnolinguística, etnobotânica, etnozoologia, etnoastronomia etc., já vinham sendo utilizados desde o final do século XIX. No entanto, suas concepções se assemelham muito pouco com o que entendemos hoje por etnomatemática. A etnozoologia foi definida como o conhecimento positivo que os nativos possuem a respeito dos animais. Aqui, o termo positivo é uma referência direta ao positivismo que, durante um período de tempo, norteou a produção de conhecimento científico. Essa definição carrega, no entanto, certa carga de preconceito, como uma das definições anteriores de etnociência, quando dizia ser o ramo da etnologia que se dedica a comparar os conceitos positivos das sociedades exóticas com aqueles que a ciência ocidental formalizou.

O prefixo etno se refere à etnia, ou seja, a um grupo de pessoas que compartilha a mesma cultura, a mesma língua, tem seus ritos e seus valores próprios. Um grupo étnico tem, portanto, características culturais e sociais bem delimitadas que o diferenciam de outros grupos. Atualmente, a etnociência é vista de uma forma distinta daquela de quando o termo surgiu. Ela está relacionada à descoberta e à valorização da ciência de outras etnias diferentes da "nossa". Nesse caso, ao prefixo "etno" se acrescenta o sistema de conhecimentos e cognições observadas nos grupos étnicos, por isso chama-se etnociência.

Na década de 1970, os educadores perceberam que a sala de aula vinha sofrendo com os aspectos negativos da metodologia proposta pelo Movimento da Matemática Moderna. Nesse momento, uma série de termos passaram a ser utilizados para designar uma possível solução para essa situação. Cláudia Zalavski (1917-2006), pesquisadora americana, chamou de sóciomatemática a forma como povos africanos utilizavam matemática no seu dia a dia e como isso influenciou na evolução dessa ciência. Outros chamaram de matemática informal, matemática escondida, entre outros termos.

O professor emérito da Universidade Estadual de Campinas, Ubiratan D'Ambrósio, propôs, pela primeira vez, o termo etnomatemática. D'Ambrósio, que é filho de professor, iniciou sua carreira auxiliando seu pai no curso preparatório para concursos públicos que ele mantinha em sua casa. Preparava exercícios para ilustrar os conceitos teóricos dados por seu pai e ensinava aos alunos. Estudou matemática e filosofia na década de 1950. Devido à turbulência política no país nesse período, decidiu dar continuidade à carreira de professor em universidades norte-americanas.

Quando recebeu uma carta do próprio Zeferino Vaz, que conduziu a construção, o estabelecimento e o desenvolvimento da Unicamp, e que hoje empresta seu nome ao campus, D' Ambrósio se sentiu seduzido a retornar ao Brasil. Hoje em dia, encontra-se aposentado, mas frequenta, com certa assiduidade, as aulas que seus orientandos e ex-orientandos ministram, sobretudo na educação básica. Relata frequentemente em suas palestras e entrevistas o encantamento com a curiosidade manifestada pelas crianças em relação à matemática.

Por essa razão, preocupa-se com os motivos que levam esse encantamento a diminuir ou, até desaparecer com o passar dos anos.

Na tentativa de contribuir para a manutenção ou resgate desse encantamento, publicou, em 1985, *Ethnomatematics and its place in the history of pedagogy of mathematics - for the learning of mahthematics*. Desde então, presenteou-nos com muitas outras obras sobre etnomatemática e temas afins. É adepto da transdisciplinaridade, termo que defende, em linhas gerais, a educação além da sala de aula, das disciplinas e da grade curricular. Sobre essa teoria, afirma que, "A transdisciplinaridade é o reconhecimento de que não há espaço nem tempo culturais privilegiados que permitam julgar e hierarquizar – como mais corretos e verdadeiros – complexos de explicações e de convivência com a realidade (D'AMBRÓSIO, 1997, p. 11).

O método que utilizamos para aprender e ensinar, que chamamos de moderno, baseia-se no fato de que para conhecer algo, explicar um fato ou fenômeno, precisamos recorrer a disciplinas que têm métodos específicos e objetos próprios de estudo. Esse método pode ser caracterizado pelo reducionismo. O problema novo é associado a um outro problema, cuja solução é conhecida, e o mesmo processo é então utilizado para resolvê-lo. Esse tipo de abordagem é uma herança de René Descartes e sua principal obra, *O discurso do método*.

Desde o século XVI, no entanto, quando viveu Descartes, já se previa que essa forma de enxergar a natureza e resolver seus problemas teria que ser revista. Em 1699, De Fontenelle, então secretário da Academia de Ciências de Paris, afirmou: "Até agora a Academia considera a natureza só por parcelas... Talvez chegará o momento em que todos esses membros dispersos (as disciplinas) se unirão em um corpo regular; e se são como se deseja, juntar-se-ão por si mesmas de certa forma" (DE FONTENELLE, 1699, p. XIX).

A transdisciplinaridade busca ir além dessas parcelas. Vai além até mesmo do que hoje chamamos de interdisciplinaridade, pois esta, apesar de pregar que o ensino vai além de uma ou outra disciplina, ainda reconhece a existência dos muros entres elas. O que se deseja é que esses muros sejam esquecidos. Com isso, espera-se despertar a criatividade e gerar os questionamentos que produzirão o conhecimento. Essa é a questão básica da etnomatemática.

Pesquise mais

Para conhecer um pouco mais sobre a vida e a obra desse célebre educador matemático, acesse o site disponível em: <http://ubiratandambrosio.blogspot.com.br> ou <http://professorubiratandambrosio.blogspot.com.br>. Acesso em: 20 set. 2016.

Para o professor Ubiratan D'Ambrósio (1997, p. 104), "a ciência moderna nasceu quando o Velho Mundo se deslumbrava com a nova realidade que representou o Novo Mundo". Ao chegar ao novo mundo, o colonizador tratou, rapidamente, de impor sua cultura ao tentar ensinar o que "era certo", fazendo com que muito do conhecimento que preexistente se perdesse. A busca dos historiadores das ciências por esse conhecimento, que muitas vezes foi relegado a segundo plano, é, de acordo com D'Ambrósio, fator determinante para os novos rumos que, para esse educador, a matemática deve trilhar.

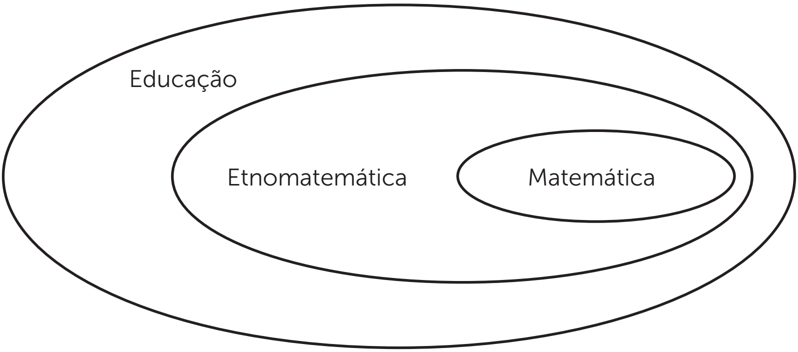
Em todas as culturas podemos encontrar manifestações relacionadas com o que hoje chamamos de matemática. Em todas elas conseguimos identificar, de uma forma ou de outra, processos de organização, classificação, contagem, medição etc. Isso permitiu que pudéssemos trilhar, até aqui, o caminho da história da matemática. Há, portanto, muitas matemáticas espalhadas pelo mundo.

A própria matemática como aprendemos hoje é um exemplo de etnomatemática. Ela se originou e foi desenvolvida principalmente na Europa, em regiões próximas ao mediterrâneo. Consolidou-se após significativas contribuições indianas e islâmicas, como vimos nas unidades anteriores. Assumiu sua forma atual a partir dos séculos XVI e XVII e então se espalhou pelo mundo, muitas vezes por imposição.

No nosso estudo, conhecemos alguns dos grandes heróis da matemática, isto é, indivíduos historicamente apontados como responsáveis pela produção, avanço e consolidação dessa ciência. Eles foram identificados desde os impérios antigos da África, na antiguidade grega, posteriormente vieram seus discípulos e, na Idade Moderna, nos países centrais da Europa, sobretudo Inglaterra, França, Itália e Alemanha. Os nomes mais lembrados são Tales, Zenão, Pitágoras, Euclides, Descartes, Galileu, Newton, Leibniz, entre tantos outros. A maioria deles originária do Norte do Mediterrâneo.

Nesse contexto, de acordo com a concepção de D'Ambrósio e Paulus Gerdes, da Universidade Pedagógica de Moçambique, a matemática é um subconjunto da etnomatemática que, por sua vez, é um subconjunto da educação (Figura 4.9). Organizando melhor as ideias, a etnomatemática reúne em sua prática algumas das tendências já abordadas: envolve o uso da história da matemática, a busca pelo resgate cultural e a inclusão do estudante, além de preservar por mais tempo o gosto do aluno pelo saber, pois cada aula pode ser uma nova descoberta.

Figura 4.9 | Concepção mais moderna de etnomatemática



Fonte: elaborada pelo autor.

Algumas perguntas ainda precisam ser feitas:

1. E os outros tantos "heróis" cujas contribuições nem sequer conhecemos?

2. Como são essas matemáticas que se perderam ao longo do tempo ou ainda são desconhecidas?

3. O que elas podem nos ensinar?

A pesquisa em etnomatemática busca, entre outros objetivos, encontrar esses heróis, entender suas contribuições a fim de ampliar a noção de que a "nossa" matemática não é uma verdade absoluta, não é uma ciência pronta, já que ela poderia até mesmo ter seguido outros caminhos se tivesse outras influências. Eventualmente, até um caminho de paz, ao invés de um caminho de "guerra". Paz que, segundo o próprio professor Ubiratan D'Ambrósio (1997, p. 11), pode ser encontrada por essa nova concepção quando afirma, baseado no que disseram Albert Einstein Russell, "Esqueçam-se de tudo e lembrem-se da humanidade". Ainda segundo D'Ambrósio (2005, p. 106), "A Matemática tem grande responsabilidade nos esforços para se atingir o ideal de uma educação para a paz, em todas as suas dimensões. [...] Minha proposta é fazer uma Educação para a Paz e, em particular, uma Educação Matemática para a Paz".

Reflita

Se a matemática tivesse seguido outros caminhos, as formas geométricas poderiam ter outros nomes, o sistema de numeração poderia ter outros símbolos, outras bases etc. As medições poderiam ter outras unidades diferentes daquelas que utilizamos normalmente. Veja na Figura 4.10 quantas formas diferentes daquelas que normalmente tratamos estão presentes na cultura indígena.

Figura 4.10 | Arte indígena

Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=22037>. Acesso em: 22 set. 2016.

Exemplificando

Os povos indígenas usualmente contam o tempo a partir das lunações, que são as fases da Lua. O tempo de gestação que hoje contamos em semanas (40 em média) é comumente associado à quantidade de ciclos lunares. Quem nunca conversou com uma pessoa mais experiente que, quando questionada sobre quando seria a data de chegada de um bebê, disse: quando virar a lua ele nasce?

Assimile

Sabe-se que nenhuma tribo brasileira possui um sistema de numeração. Algumas delas possuem designação para os três primeiros números.

Acima de três os índios consideram que há muitos. A contagem indígena, no Brasil, é, portanto, "um", "dois", "três" e "muitos".

Sem medo de errar

Voltando aos questionamentos do início desta seção: será que conseguimos ensinar geometria a partir da experiência de um pedreiro ou de um artesão? Será que conseguimos ensinar fração a partir da experiência de uma cozinheira? Encontre, neste livro didático, exemplos que respondem a cada uma dessas perguntas.

Na Unidade 2, quando utilizamos a história da geometria para conversar sobre essa importante área da matemática, falamos sobre como um pedreiro pode proceder para garantir o esquadro de uma parede. Ele se vale do fato de que o Teorema de Pitágoras vale para quando o triângulo é retângulo, ou seja, possui um ângulo reto. Na prática, ele determina na parede um segmento de tamanho três e no chão um de tamanho quatro, de forma que ambos comecem no mesmo ponto. Se os outros extremos desses segmentos distam 5 unidades, então a parede está "no prumo".

Na primeira unidade utilizamos a imagem de uma pizza para explicar conceitos relativos às frações. Desde pequenas as crianças vão às pizzarias com seus pais. Nesse caso, não seria interessante nos valermos desse conceito para introduzir as operações com fração antes de apresentar as "famosas" regrinhas? Pense nesse questionamento numa sala de aula a um aluno do ensino básico: se você e seus pais forem a uma pizzaria e cada um comer um pedaço de uma pizza de 8 pedaços, que fração da pizza foi consumida? Que fração ainda sobrará? Isso trará a matemática para o cotidiano do aluno.

Atenção

É preciso fazer uma pesquisa cuidadosa por temas desenvolvidos durante a disciplina em que a matemática intrínseca de uma pessoa ou de um povo possa auxiliar um professor na explicação de algum conceito da matemática formal.

Pesquise por outros exemplos dentre os tratados neste livro didático ou em outro material de sua escolha e liste situações em que a etnomatemática se faz presente, descrevendo a qual conteúdo da matemática escolar está associado.

Avançando na prática

A comunicação do pajé

Descrição da situação-problema

Observe o problema a seguir:

> Em uma aldeia indígena, o pajé conversava com seu totem por meio de um alfabeto musical. Tal alfabeto era formado por batidas feitas em cinco tambores de diferentes sons e tamanhos. Se cada letra do alfabeto era formada por três batidas, sendo uma em cada tambor diferente, é possível afirmar quantas letras tem esse alfabeto? Como isso seria possível?

A comunicação, sobretudo a falada, tem se desenvolvido muito nos últimos anos. Uma maneira de enviar mensagens rápidas foi amplamente utilizada no século passado e chamava-se telégrafo. Para que essa comunicação seja possível, era necessário estabelecer um conjunto de códigos que se diferenciavam pela quantidade de toques e o tempo de duração de cada um deles. Alguma semelhança com o sistema de comunicação do pajé?

Você seria capaz de utilizar a situação descrita para, após abordar a história dos telégrafos numa sala de aula, ensinar algum conteúdo matemático?

Lembre-se

Essa seria a utilização de conceitos da etnomatemática de maneira bastante ampla.

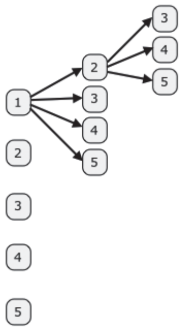
Resolução da situação-problema

O pajé, ao tentar se comunicar, deve escolher um dos tambores para bater pela primeira vez, outro para dar o segundo toque e, por último, o terceiro. Trata-se de um problema típico de contagem em que o agente deve fazer três escolhas, a primeira com cinco opções, a segunda com quatro opções e a terceira com três.

Você, como professor de matemática de uma turma, poderia providenciar alguns tambores, pedir para que os alunos tocassem um pouco. Em seguida, poderia propor o problema e pedir para que eles fizessem algumas tentativas para formar letras. Numerar os tambores ou associar nomes (ou letras) a cada um deles também pode ajudar.

Feito isso, você poderia trabalhar a questão dos registros das diferentes letras possíveis. Fazer um diagrama de árvore, como o da Figura 4.11, que mostra uma parte dele, seria uma ótima opção. Seguindo essas ideias, você estaria dando uma ótima aula de análise combinatória, de forma dialógica, ou seja, de forma significativa e estaria abordando assuntos do ramo dos processos de contagem.

Figura 4.11 | Diagrama de árvore com as possibilidades de formar letras ao tocar os tambores 1, 2, 3, 4 ou 5



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

Pense na mesma situação utilizando menos tambores para entender como se dá o processo de contagem.

Faça valer a pena

1. Atualmente, a etnociência é vista de uma forma diferente de quando o termo surgiu. Assinale a alternativa que se refere a essa nova forma de entender esse termo:

a) Ela está relacionada à descoberta e à valorização da ciência de outras etnias.

b) Ela propõe a substituição da ciência dos povos estudados pela ciência ocidental.

c) Ela está focada em entender como os índios fazem ciência para poder contestar esse conhecimento.

d) Apesar do prefixo etno, nada tem a ver com o estudo da ciência de povos pelo mundo.

e) A palavra tem que ser desmembrada em Et (E), No (Não) e Ciência para ser entendida.

2. O primeiro educador a utilizar o termo etnomatemática, no contexto em que conhecemos hoje, chama-se:

a) Ubiratan D'Ambrosio.

b) Paulo Freire.

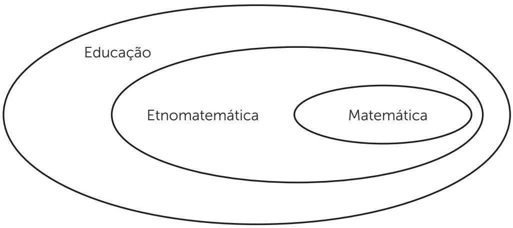
c) Paulus Gerdes.

d) Zeferino Vaz.

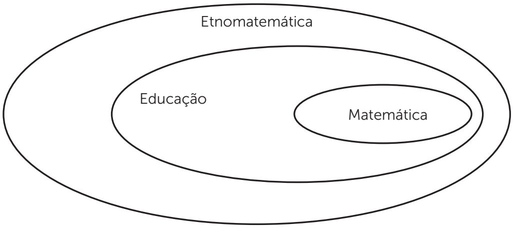
e) Jean Piaget.

3. Assinale a alternativa cuja figura contempla a concepção mais moderna de etnomatemática:

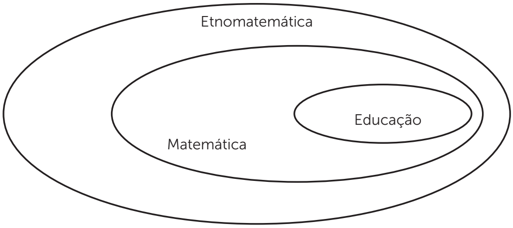
a)



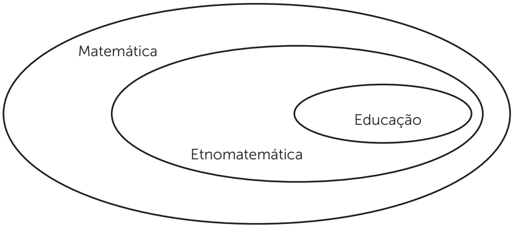
b)


Etnomatemática
Educação
Matemática

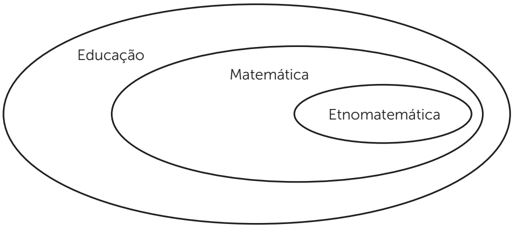
c)


Etnomatemática
Educação
Matemática

d)


Matemática
Educação
Etnomatemática

e)


Educação
Matemática
Etnomatemática

Seção 4.4

A aprendizagem significativa

Diálogo aberto

Durante seus estudos sobre tendências em educação matemática você, professor dessa disciplina, depara-se com as ideias de David Paul Ausubel (1918-2008) sobre ensino e aprendizagem. Em especial, sua convicção de que aprender significativamente é ampliar e reconfigurar ideias já existentes na estrutura do pensamento para, assim, ter acesso a novos conteúdos e fazer relações com os que já possui.

Nessa época do ano letivo, você tem o compromisso de ensinar a seus alunos o produto matricial. É o momento de mostrar como deve ser realizada a operação de multiplicação entre matrizes. Muitos livros trazem os passos desse cálculo de maneira bastante estruturada e organizada, porém sem muito significado. Não seria uma boa hora para inovar? E se pudéssemos apresentar essa operação a partir de um projeto que motivasse os alunos e possibilitasse o aprendizado dessa operação de forma significativa?

É exatamente isso que vamos fazer nesta seção. Nosso projeto consistirá na produção do cardápio de uma lanchonete. Para facilitar, nossa lanchonete vai oferecer somente dois tipos de lanches. Os alunos vão escolher que ingredientes serão colocados entre os pães e farão a cotação de preços em dois supermercados da região. Em seguida, determinarão o preço de custo de cada lanche (pensando apenas nos ingredientes). Por último, definirão um percentual sobre esse valor, a fim de cobrir os outros custos e ter certo lucro.

O leiaute do cardápio será desenvolvido também pelos estudantes. Para isso, podem pedir ajuda ao professor de artes. Se desejarem um lanche no padrão considerado saudável, os professores de ciências e educação física podem contribuir. O cardápio pode ter ainda informações em inglês ou em espanhol para o caso de a lanchonete receber um visitante estrangeiro. Nesse caso, os professores de língua estrangeira podem ajudar.

Por último, os alunos poderão pensar num jingle ou num vídeo promocional da lanchonete. Isso pode ser motivador, principalmente porque a matemática envolvida tende a ser muito simples. Basta você elaborar tabelas para ajudá-los na organização das ideias. Talvez sejam necessárias algumas dicas sobre as unidades que os ingredientes têm na receita e no supermercado.

Por fim, um breve histórico da álgebra linear e a apresentação das operações entre as matrizes fará o fechamento da atividade. Tudo isso baseado nas ideias de aprendizagem significativa que serão apresentadas a seguir.

Não pode faltar

David Paul Ausubel nasceu em 1918, em Nova York. Passou por certo sofrimento durante sua educação básica devido à estrutura do ensino na época, influenciada pelo behaviorismo, que acreditava fortemente na influência do meio sobre sujeito. O que o estudante seria capaz de aprender era fruto do ensino, sem que fosse levado em consideração o que ele já sabia ou conhecia. Aquilo que se acreditava ser necessário aprender era ensinado, sem considerar a história pessoal do educando nem suas necessidades.

Pesquise mais

Faça uma breve pesquisa sobre behaviorismo, acessando o site disponível em: <http://www.unicamp.br/iel/site/alunos/publicacoes/textos/b00008.htm>. Acesso em: 25 set. 2016.

Ausubel estudou medicina, especializou-se em psiquiatria e, durante um período de sua vida acadêmica, dedicou-se à psicologia educacional. Foi o primeiro a propor o conceito de aprendizagem significativa que desenvolveremos nesta seção. Para ele, a história dos estudantes tem que ser levada em consideração e, portanto, o principal papel do professor é propor atividades que favoreçam o aprendizado a partir do que o aluno já conhece e já é capaz de fazer.

É possível encontrar certa compatibilidade dos conceitos desenvolvidos pelo norte-americano com outras teorias também desenvolvidas no século passado. Dentre essas, destaca-se a que trata do desenvolvimento cognitivo, de Jean William Fritz Piaget (1896-1980). Fundador da epistemologia genética, teoria do conhecimento que se baseia no estudo da gênese psicológica do pensamento humano, o pesquisador suíço (Figura 4.12) acreditava na potencialidade dos indivíduos para lidar com as situações às quais eram submetidos. O meio age, prioritariamente, como fator de estímulo, no bom e no mal sentido. A partir do estímulo, de acordo com sua idade e com seu desenvolvimento até então, o indivíduo reage de uma ou de outra maneira.

Figura 4.12 | Jean Piaget

Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Jean_Piaget>. Acesso em: 25 set. 2016.

Pesquise mais

Você pode conhecer um pouco mais sobre o trabalho de Piaget acessando o site disponível em: <http://www.unicamp.br/iel/site/alunos/publicacoes/textos/d00005.htm>. Acesso em: 25 set. 2016.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 137), "[...] se quiséssemos reduzir a psicologia educacional em um único princípio, este seria: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que sabe e baseie nisso seus ensinamentos".

De acordo com esse educador, podemos dividir a aprendizagem significativa em três tipos. O tipo mais "básico" ficou conhecido como representacional. Os outros dois tipos estão condicionados a este. Esse tipo de aprendizagem consiste em compreender o significado de símbolos e termos que fundamentam o conceito que será desenvolvido.

Outro tipo é o aprendizado do conceito em si. Eles podem ser abstratos ou concretos e seu significado está associado a símbolos ou termos matemáticos. Aprender esse conceito é saber distingui-lo dos demais e reconhecer seus atributos essenciais.

Por último, temos a aprendizagem proposicional. Entende-se por proposição a junção de dois ou mais conceitos utilizando-se conectivos lógicos. Aprender uma proposição significa não só aprender os conceitos de forma isolada, mas também ser capaz de conectá-los, ou seja, entender o significado das ideias que são expressas através da combinação delas.

Ausubel não descarta a importância da memorização no aprendizado. Ele considera a aprendizagem por memorização e a significativa como atividades que em muitos momentos se complementam. No que diz respeito ao aprendizado mais básico, propor a memorização pode ser uma estratégia para que, posteriormente, atinja-se a aprendizagem significativa.

Exemplificando

A memorização da tabuada ilustra o fato mencionado. Trata-se de uma operação básica identificada por seus símbolos próprios, decorrente da operação de soma. Memorizar os resultados de algumas multiplicações pode poupar o cérebro de, a todo momento, refletir sobre o resultado, fornecendo tempo e energia para que novos conceitos, talvez mais relevantes, sejam absorvidos. Podemos pensar no papel da multiplicação em si no desenvolvimento de estratégias de contagem. Posteriormente, essas estratégias de contagem podem auxiliar no estudo das probabilidades.

O essencial para que haja aprendizagem significativa é que o aluno possa estabelecer relações efetivas, e não arbitrárias, entre um conhecimento novo e algo relevante presente na sua estrutura cognitiva. Às vezes, os novos conhecimentos são menos amplos do que aqueles preexistentes, e algumas vezes, mais. Em outras oportunidades, eles apenas agregam, mas deve haver um elo.

Para que os objetivos propostos sejam atingidos, podemos nos valer de um recurso didático chamado de organizadores prévios. Uma estratégia elaborada pelo educador, para que a estrutura cognitiva seja manipulada, deliberadamente, a fim de que o novo conceito encontre uma "âncora" para se estabelecer. Normalmente, utilizam-se questões mais gerais do tema a ser tratado ou definições iniciais, até mesmo arbitrárias, para, preparar o terreno. Quando chega o novo conhecimento, o estudante é capaz de atribuir significado àquilo que é apresentado.

O papel do educador na escolha desses organizadores é de fundamental importância. É ele quem vai selecionar o que deve ser dito no momento preliminar e com que relevância. O tema em si irá se "agarrar" ao que for feito nesse momento para que se atinja o aprendizado significativo. Nessa etapa, podemos e devemos utilizar de outras ferramentas didáticas, como apresentações multimídia, jogos, pesquisas na internet etc.

Reflita

Veja que o processo de aprendizagem, segundo Ausubel, depende de fatores intrínsecos ao aluno, como histórico e motivação, mas também de fatores externos, como a formação e a motivação do professor, a estrutura escolar, o tempo para o ensino etc.

Segundo Vygotsky (1989, p. 101), professor de literatura bielorrusso bastante interessado em educação, e outro autor do século XX cujas ideias se identificam com as de Ausubel: "[...] o aprendizado não é desenvolvimento; entretanto, o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer".

Ao buscar o aprendizado significativo, procuramos atingir uma das finalidades da educação matemática: buscar maneiras para que os alunos aprendam matemática de modo que sejam capazes de se lembrar de seus conceitos, quando for necessário, ou porque buscam novos conhecimentos ou precisam resolver problemas não só na sua vida acadêmica, mas também fora dela. O conhecimento através desse tipo de aprendizagem, segundo o próprio Ausubel, acompanha o aluno por mais tempo e, mesmo se esquecido, é facilmente retomado quando necessário.

Nessa busca, a modelagem matemática, que se apresenta como uma das tendências em educação matemática mais atuais, é uma alternativa pedagógica para que a aprendizagem significativa dos conhecimentos matemáticos possa ocorrer. Apesar das incertezas sobre como avaliar um projeto desenvolvido a partir desse enfoque, essa alternativa tem trazido bons frutos para o desenvolvimento das práticas pedagógicas.

Como vimos, a matemática se desenvolve quando busca respostas para perguntas que ela mesma se faz ou quando o homem deseja compreender fenômenos ou desenvolver-se física, social ou culturalmente. Para que se realizem esses desejos ou se encontrem respostas para essas perguntas, são utilizadas representações simbólicas e relações que chamamos de modelos matemáticos. A atividade de criar, validar, aplicar e desenvolver modelos desse tipo é chamada de modelagem matemática.

Experiências com esse tipo de abordagem datam da década de 1970. O professor Ubiratan D'Ambrósio e, como consequência, a Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), contribuiu muito para o seu desenvolvimento. Paralelamente a isso, outras instituições trabalhavam com essas estratégias de ensino, com destaque para o primeiro curso de especialização que utilizou a modelagem matemática, oferecido pela Universidade Estadual do Centro-Oeste, em 1983, quando era conhecida como Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, em Guarapuava, no Paraná. Três anos mais tarde, novamente na Unicamp, é apresentado aquele que se considera o primeiro trabalho acadêmico com o termo modelagem matemática no título.

O ensino da matemática utilizando essa estratégia pode ser inserido no cotidiano dos alunos de forma gradual. Num primeiro momento, o professor apresenta o modelo, os dados coletados e desenvolve o raciocínio para a solução do problema em questão. Num segundo momento, os alunos podem participar um pouco mais, coletando os dados, por exemplo. O ápice dessa abordagem é quando o aluno escolhe o problema a ser estudado, coleta os dados, pesquisa e desenvolve o modelo e apresenta a resolução. Os alunos do nível superior de escolarização são mais aptos a cumprir as exigências desse último, mas estudos mostram que projetos assim podem ser realizados no ensino médio.

A história da matemática, bem como conceitos fundamentais da ferramenta a ser utilizada, pode ser trabalhada como organizador prévio. Os novos conceitos e como estes podem ser relacionados com outros preexistentes ou não, vão surgindo à medida que o problema vai sendo resolvido e novas demandas aparecem.

O problema que utilizaremos nesta seção trata de conceitos da álgebra linear. Essa área da matemática é responsável pelo estudo das matrizes. Entendemos por matriz o conjunto, ordenado, de números, dispostos nas linhas e colunas de uma tabela. Uma matriz é representada por uma letra maiúscula do nosso alfabeto, seguida da quantidade de linhas e colunas que a tabela possui. Cada número (elemento) é representado pela mesma letra que dá nome à matriz com grafia minúscula seguida da linha e da coluna ocupada por ele.

Exemplificando

A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ pode ser representada por A_{2x3}, já que tem duas linhas e três colunas, e o elemento 3, por exemplo, seria representado por a_{13}, já que ocupa a primeira linha e terceira coluna.

Assimile

Os parênteses podem ser utilizados como separador para o conjunto de números que compõe a matriz. Pode-se também utilizar colchetes.

Essa seria uma forma de preparar o terreno antes do trabalho, que envolverá Modelagem matemática, ser apresentado. Podemos incluir algumas operações como soma e subtração matricial, que são simples. Pode-se ainda apresentar um breve histórico da álgebra linear à introdução do tema.

A descoberta da álgebra matricial está relacionada ao matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) e consiste na formulação de uma metodologia para que muitos números sejam operados ao mesmo tempo. Mais tarde, as matrizes se tornaram bastante úteis na programação de computadores. Atribui-se a existência dos computadores pessoais à utilização das matrizes para realização das tarefas de processamento das máquinas, o que diminui, e muito, o tamanho dos componentes necessários para seu funcionamento. Nesse processo, pessoas como Bill Gates e Steve Jobs tiveram papel importante.

Trazer informações como essas, de maneira mais detalhada, após uma pesquisa que o professor deve realizar e, principalmente, mencionar nomes como esses, que estão relacionados ao sucesso, pode ser muito inspirador. Depois disso, o trabalho pode ser proposto. Adotaremos um nível intermediário na abordagem de um tema via modelagem matemática. Os alunos serão responsáveis por certas escolhas e pela coleta de dados. Algumas questões, no entanto, serão direcionadas.

Os quadros serão propostas por você, professor, que também fará os esclarecimentos sobre a preocupação que se deve ter com as unidades dos dados coletados. É hora de colocar a "mão na massa"!

Sem medo de errar

Para confecção do cardápio da lanchonete, é preciso estabelecer os preços dos lanches. Feito isso, os alunos poderão se preocupar com os elementos que cercam o ponto central do projeto. Para que o projeto trate da multiplicação matricial e os dados sejam manipulados da maneira correta, o ideal é que sejam preenchidos quadros como os que estão na Figura 4.13. Neles estamos supondo que os lanches serão os tradicionais X-Salada e X-Bacon.

Figura 4.13 | Sugestão de quadros para alocação dos dados coletados

	Pão	Carne	Queijo	Alface	Tomate	Bacon
X-Salada	1	1	40g	2 folhas	3 fatias	0g
X-Bacon	1	1	30g	1 folha	2 fatias	30g

	Supermercado 1	Supermercado 2
Pão		
Carne		
Queijo		
Alface		
Tomate		
Bacon		

	Supermercado 1	Supermercado 2
X-Salada		
X-Bacon		

Fonte: elaborada pelo autor.

Há que se ter cuidado na hora de fazer a pesquisa de preços. A alface, por exemplo, não é vendida por folhas, assim como o tomate não é vendido por fatias. O preço unitário de cada item, que deve ser lançado nos quadros, deve levar em consideração a unidade contida no quadro com os ingredientes e suas quantidades. Será uma ótima oportunidade para o aluno exercitar seu poder de estimar quantidades e realizar cálculos com grandezas proporcionais.

Completado o quadro com os preços unitários, nas devidas unidades, é preciso que a quantidade de cada ingrediente seja multiplicada pelo preço correspondente. Devemos fazer 1 vez o preço de um pão no Supermercado 1, 1 vez o preço de uma carne, 40 vezes o preço do grama de queijo, 2 vezes o preço de uma folha de alface, 3 vezes o preço de uma fatia de tomate e 0 vezes o preço do grama de bacon. O custo do X-Salada, se os ingredientes forem adquiridos no Supermercado 1, será a soma dos valores obtidos com essas multiplicações. Depois, é só repetir o processo utilizando os preços unitários coletados no Supermercado 2.

Para calcular os custos do X-Bacon, com os ingredientes comprados nos Supermercados 1 e 2 devemos fazer o mesmo. Como isso, completamos o terceiro quadro.

Quando possuímos o preço unitário de uma camiseta, por exemplo, e decidimos comprar três dessas camisetas, multiplicamos esse preço por três, ou seja, quantidade vezes preço unitário fornece o valor da compra. A diferença nesse projeto é que são várias quantidades com seus preços unitários correspondentes, alocados nas linhas e colunas de um quadro, ou seja, representados na forma de matriz. Nesse caso, o que fizemos foi multiplicar essas matrizes.

É muito provável que, quando o método de multiplicação matricial for apresentado para esses alunos, de maneira formal, não será tão distante de sua realidade. É provável que ele passe a interagir com as matrizes de maneira mais natural, já que observou, numa situação bastante prática e simples, sua utilização.

! Atenção

O método para multiplicação matricial consiste em copiar cada linha da primeira matriz, como se fosse uma coluna, ao lado de cada coluna da segunda matriz, para que, em seguida, as multiplicações sejam efetuadas e esses produtos possam ser somados. Cada vez que esse processo é realizado, obtemos um único elemento da matriz resultante.

Avançando na prática

Matemática e esportes

Descrição da situação-problema

E se pensássemos juntos num projeto em que conteúdos de matemática pudessem ser aprendidos a partir de questões relacionadas aos esportes? A cada dois anos, grande parte das pessoas se mobilizam com a chegada da Copa do Mundo ou das Olimpíadas. Pode ser uma ótima oportunidade para ensinar matemática, você não acha?

Você seria capaz de pensar numa situação-problema cuja modelagem pudesse fazer com que alguns conteúdos matemáticos importantes fossem ensinados? Os grandes eventos esportivos, como foi dito, são capazes de mobilizar muitas pessoas em torno deles. Mesmo aquelas que não são adeptas à prática esportiva, muitas vezes, se interessam por questões que cercam esses eventos. Impactos sociais e culturais decorrentes da promoção de competições esportivas abrangentes são muito discutidas em mídias sociais, por exemplo.

Nesse contexto, não seria uma proposta bastante abrangente? Que tal pensarmos em atividades que possam suscitar essas discussões?

Lembre-se

O projeto deve prever, de alguma forma, a participação efetiva dos alunos. Para que o novo conhecimento se instale, além de haver conhecimentos preestabelecidos, o problema tem que ser incorporado pelo estudante. Só assim, ele buscará as soluções para as questões que encontrar pelo caminho e com isso se desenvolverá.

Resolução da situação-problema

Não há uma única resposta para essa proposta. Há, na verdade, sugestões que podem ser fornecidas e você, professor, deve desenvolvê-las ou criar novas possibilidades. Pode até mesmo não considerar o que foi proposto e elaborar sua própria sugestão de atividade. A reflexão em si será uma tarefa bastante significativa e poderá ser muito agradável. Lembre-se de que o "papel aceita tudo" inicialmente, depois instalamos os filtros, de acordo com as possibilidades que temos.

Dependendo da disponibilidade de material, humano ou não, fazemos nossas escolhas. Elas também dependem da disposição, ou seja, da motivação não só do professor, mas também da turma. Tudo isso tem que ser avaliado.

Sugiro, como possibilidade de projeto que englobaria o que foi apontado e discutido na seção, a construção da quadra poliesportiva numa escola municipal. Faria essa sugestão de forma bem ampla: tentaria ir desde de o projeto, o custo e os conhecimentos envolvidos para a execução, até a elaboração de textos argumentativos que seriam direcionados ao poder público ou a instituições privada que mostrassem a importância dessa quadra no contexto escolar.

Numa situação como essa são esperadas sugestões e soluções apresentadas pelos alunos que nem sequer haviam passado pelas nossas cabeças. Isso enriqueceria demais o projeto, então precisa ser incentivado. Mesmo que não dê em nada, pois dar em nada também é um resultado.

Faça você mesmo

Outra proposta bem atrativa é a execução de um festival de música, de dança ou de qualquer outra manifestação artística. As preocupações que assolam essa organização podem propiciar a apresentação e a discussão de muitos conhecimentos matemáticos. Você poderia listar alguns deles?

Faça valer a pena

1. Um professor levou seus alunos no restaurante com o objetivo de ensinar uma operação entre matrizes. Após consultar o dono do estabelecimento, escreveu a matriz C, que fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usadas num restaurante. Depois, perguntou sobre a composição dos pratos padrão, mais carne e sem salada. Com essa informação escreveu a matriz P.

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz que fornece o custo total dos pratos fornecidos pelo restaurante:

a) É obtida multiplicando-se a matriz P pela matriz C.

b) É obtida dividindo-se a matriz P pela matriz C.

c) É obtida somando-se a matriz P pela matriz C.

d) É obtida subtraindo-se a matriz P da matriz C.

e) Não pode ser obtida a partir das matrizes P e C.

2. Um professor levou seus alunos no restaurante com o objetivo de ensinar uma operação entre matrizes. Após consultar o dono do estabelecimento, escreveu a matriz C, que fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada utilizadas. Depois, perguntou sobre a composição dos pratos padrão, mais carne e sem salada. Com essa informação, escreveu a matriz P:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz que fornece o custo total dos pratos fornecidos pelo restaurante é:

a) $\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

3. (Adaptado de: UFRRJ, 2003) Simone e duas vizinhas se encontraram após fazerem uma pesquisa de preços em três mercados. Os resultados dessa pesquisa estão nos quadros a seguir.

Quantidade comprada por cada amiga			
	Carne	Arroz	Café
Laura	20 kg	3 pct	4 pct
Simone	5 kg	2 pct	2 pct
Lisa	10 kg	2 pct	3 pct

Preço dos insumos em cada mercado			
	Marcado A	Mercado B	Mercado C
Carne (kg)	R$ 6,00	R$ 5,50	R$ 5,50
Arroz (5 kg)	R$ 4,00	R$ 4,50	R$ 3,00
Café (500g)	R$ 2,00	R$ 2,00	R$ 3,00

Considerando três itens de suas listas, a saber: carne, arroz e café, e os preços desses insumos em cada mercado, conforme mostram os quadros anteriores, é correto afirmar que:

a) Lisa e Simone gastarão menos comprando no mercado C do que gastariam no mercado B.

b) Simone e Lisa gastarão menos comprando no mercado B do que gastariam nos mercados A ou C.

c) As três gastarão menos comprando no mercado A do que gastariam no mercado B.

d) Laura e Simone gastarão menos comprando no mercado C do que gastariam nos mercados A ou B.

e) Laura e Lisa gastarão menos comprando no mercado B do que gastariam no mercado C.

Referências

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Tradução de Eva Nick. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. NBR 9050:2004, de 30 de junho de 2004. **Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ, 31 maio 2004. Disponível em: <http://www.pessoacomdeficiencia.gov.br/app/sites/default/files/arquivos/[field_generico_imagens-filefield-description]_24.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2016.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115.

__________. **Transdisciplinaridade**. São Paulo: Palas Athena, 1997.

__________. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, abr. 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 22 set. 2016.

__________. **Ciência multicultural**. 2016. Disponível em: <http://www.ufpa.br/ensinofts/etnomatematica.html>. Acesso em: 22 set. 2016.

DE FONTENELLE, B. de. **Histoire de l'académie des sciences**, 1699. p. xix.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

FAUVEL, J. Using history in mathematics education. For the learning of mathematics, v. 11, n. 2, p. 3-6, Jun. 1991. In: CURY, H. N. (Org.). **Formação de professores de matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 129-165.

IFSC. **Caderno de prova**: exame de classificação 2015/1. Disponível em: <http://www.ifsc.edu.br/arquivos/ingresso/provas/2015-1/Prova-Concomitante+capa.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2016.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História da matemática**: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção tendências em educação matemática).

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

Anotações

ISBN 978-85-8482-588-2
9 788584 825882 >