

Geometria analítica e algebra vetorial

Geometria analítica e álgebra vetorial

Leonardo Alcântara Portes Cláudia Marques de Oliveira Farias

© 2016 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Alberto S. Santana
Ana Lucia Jankovic Barduchi
Camila Cardoso Rotella
Cristiane Lisandra Danna
Danielly Nunes Andrade Noé
Emanuel Santana
Grasiele Aparecida Lourenço
Lidiane Cristina Vivaldini Olo
Paulo Heraldo Costa do Valle
Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

André Luís Delvas Fróes Junior Francisco Dias

Editorial

Adilson Braga Fontes
André Augusto de Andrade Ramos
Cristiane Lisandra Danna
Diogo Ribeiro Garcia
Emanuel Santana
Erick Silva Griep
Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Portes, Leonardo Alcântara

P224g Geometria analítica e álgebra vetorial / Leonardo Alcântara Portes, Cláudia Marques de Oliveira Farias. – Londrina : Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016. 224 p.

ISBN 978-85-8482-669-8

 Álgebra vetorial. 2. Geometria analítica. 3. Álgebra. 4. Cálculo vetorial. I. Farias, Cláudia Marques de Oliveira. II Título.

CDD 512

2016
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 – Londrina – PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Unidade 1 Matrizes e sistemas	7
Seção 1.1 - Matrizes: definição e operações	9
Seção 1.2 - Determinantes	
Seção 1.3 - Sistemas de equações lineares	
Seção 1.4 - Matriz inversa	
Unidade 2 Vetores no plano e no espaço	67
Seção 2.1 - Vetores: definição e segmentos orientados	69
Seção 2.2 - Módulo ou norma de um vetor	83
Seção 2.3 - Decomposição de vetores	93
Seção 2.4 - Operação com vetores	10
Unidade 3 Produto escalar e vetorial	11
Seção 3.1 - Combinação linear de vetores	119
Seção 3.2 - Produto escalar e ângulo entre dois vetores	12
Seção 3.3 - Projeção de um vetor sobre outro vetor	14
Seção 3.4 - Produto vetorial e aplicações	15
Unidade 4 Equações de retas e planos	16
Seção 4.1 - Equação vetorial de uma reta	17:
Seção 4.2 - Equação geral do plano	18
	19
Seção 4.3 - Distância entre dois pontos	

Palavras do autor

Olá, aluno. Seja bem-vindo!

Nesta unidade curricular serão apresentados os conceitos de geometria analítica que encontra na álgebra seu aliado mais significativo. Não somente na álgebra elementar, mas, principalmente, na álgebra vetorial.

Frequentemente usamos os conceitos de geometria analítica e nem percebemos. Algumas atividades exigem seu uso mais efetivo, outras menos, mas os usamos sem perceber. Um cidadão que utiliza o GPS, por exemplo. Este aparelho capta sinais de vários satélites e estes calculam a velocidade que recebeu e enviou a informação, por meio de ondas eletromagnéticas, na velocidade da luz. Calculando as distâncias, esses satélites determinam a posição exata na superfície da Terra, da informação enviada pelo cidadão. O GPS utiliza coordenadas fornecidas por satélites traçando uma esfera com centro em cada satélite, e a partir da interseção dessas esferas, ele calcula a posição, a altura, a latitude e a longitude. Essa compreensão nada mais é do que o sistema de coordenadas.

Serão explorados também os conceitos da álgebra vetorial, e talvez este seja um assunto novo para você. Vetor é um objeto matemático que desempenha um papel extremamente relevante nesta unidade, pois, como foi exposto, a geometria analítica tem a álgebra vetorial como sua mais importante aliada, e isso logo se tornará claro. Suponhamos que um carro se locomove a 120 km/h. Podemos obter uma informação ainda mais precisa dizendo que um carro vai do norte ao sul a 120 km/h. Ou seja, além de fornecermos a velocidade também informamos o sentido e a direção em que o carro anda. Essas são as características de um vetor.

Mesmo que você tenha tido pouco contato com esses conceitos, espero que o fato de a geometria analítica e a álgebra vetorial estarem tão presentes em nossa vida diária estimule seu interesse, tornando seus momentos de estudo agradáveis, proporcionando conhecimento dos fundamentos elementares da álgebra vetorial aplicada à geometria analítica que apoie o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.

Esse material está dividido em 4 unidades de ensino. Cada uma delas subdividida em 4 seções de autoestudo, totalizando 16 seções. Na Unidade 1 serão explorados

as matrizes e os sistemas e, na Unidade 2, vetores no plano e no espaço. A Unidade 3 abordará o plano escalar e o plano vetorial e finalmente, na Unidade 4, trataremos sobre as equações de retas e planos.

Desejo-lhe muito sucesso!

Matrizes e sistemas

Convite ao estudo

Frequentemente encontramos em jornais, revistas e também na internet, informações organizadas numericamente em forma de tabelas, ou seja, com linhas e colunas. Veja um caso na Tabela 1.1, por exemplo:

Tabela 1.1 | Campeonato brasileiro de futebol de 2015 – série A

Classificação	Time	Р	J	V	Е	D	GP	GC	SG
1	Corinthians	81	38	24	9	5	71	31	40
2	Atlético-MG	69	38	21	6	11	65	47	18
3	Grêmio	68	38	20	8	10	52	32	20
4	São Paulo	62	38	18	8	12	53	47	6

Fonte: Confederação Brasileira de Futebol (2015).

O apresentado na Tabela 1.1 é um exemplo do que denominamos na Matemática de matriz. Na maioria das vezes, quando se estuda matrizes, dá-se maior importância na preparação para o cálculo de determinantes, pois é a partir desse tema que se adquire conhecimento para a resolução de sistemas lineares. Entretanto, nem sempre fica claro que no sistema linear estamos utilizando uma matriz.

Esse estudo superficial de matrizes faz com que você não perceba o quanto as aplicações de matrizes são importantes em nosso dia a dia. É possível utilizar os conceitos que serão abordados nesta unidade em várias aplicações práticas, nos problemas do nosso cotidiano, na Física, na Engenharia, na computação gráfica, em gestão de negócios. Vejamos uma situação que fará com que você perceba como o uso de matrizes pode facilitar a gestão de negócios.

Suponha que você seja proprietário de uma confeitaria e que no dia a dia ocorram diversas situações que necessitem de um tratamento de informações de maneira organizada para facilitar a gestão dos negócios. Para saber que preços serão repassados ao consumidor final, você decidiu investigar seus custos por meio de matrizes para estabelecer preços e obter os lucros desejados. No decorrer desta unidade mais dessas situações serão propostas a você. Esteja preparado.

Seção 1.1

Matrizes: definição e operações

Diálogo aberto

Imagine que você seja o proprietário de uma confeitaria e recebeu a encomenda de três tipos diferentes de doces: brigadeiro, beijinho e bicho-de-pé. Nessas receitas foram utilizados quatro ingredientes (x, y, z, t) em várias proporções, conforme mostra a Tabela 1.2.

Tabela 1.2 | Doces

Doces	Х	у	z	t
Brigadeiro	3	6	1	3
Beijinho	4	4	2	2
Bicho-de-pé	0	1	1	6

Fonte: elaborada pelo autor.

Os preços de cada ingrediente utilizado estão na Tabela 1.3.

Tabela 1.3 | Ingredientes

Ingredientes	Preço
X	R\$ 0,20
У	R\$ 0,80
Z	R\$ 1,20
t	R\$ 2,80

Fonte: elaborada pelo autor.

A partir das informações anteriores, como determinar a matriz que registra o custo de cada receita? Pretendemos que você perceba que a resposta a esse problema será uma nova matriz obtida efetuando o produto dos valores contidos

na Tabela 1.2 e na Tabela 1.3. Com essa compreensão você poderá resolver essa e outras situações buscando aprimorar seus conhecimentos sobre multiplicação de matrizes. Vamos lá?

Não pode faltar

Matrizes

As matrizes são representações de informações numéricas em tabelas, organizadas em linhas e colunas. Formalmente, podemos definir matriz como a seguir:



Assimile

Sejam m e n números naturais não nulos, ou seja, diferentes de zero. Uma matriz $m \times n$ (lê-se: m por n) é uma tabela de $m \cdot n$ números reais, com m linhas (fileiras horizontais) e n colunas (fileiras verticais).

Observe alguns exemplos de matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz 1×3 ;

 $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ é uma matriz 2×1 . A escrita $m \times n$ indica a **ordem** da matriz: A tem ordem 1 por 3 e B tem ordem 2 por 1.

Representação de uma matriz

Vamos considerar uma matriz A do tipo $m \times n$. Qualquer **elemento** dessa matriz A será representado pelo símbolo a_{ij} , em que o índice i se refere à linha em que o elemento a_{ij} se encontra, e o índice j se refere à coluna.

De maneira geral, representamos a matriz A do tipo $m \times n$ por $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{m \times n}$, em que i e j são números inteiros positivos e a_{ij} é um elemento qualquer de A. Veja exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$. O elemento:

- a_{11} é aquele que está na linha 1 e coluna 1 e é igual a -2;
- **a**₁₂ é aquele que está na linha 1 e coluna 2 e é igual a 0;
- a_{21} é aquele que está na linha 2 e coluna 1 e é igual a 1;

- a_{22} é aquele que está na linha 2 e coluna 2 e é igual a -1;
- a_{31} é aquele que está na linha 3 e coluna 1 e é igual a 0;
- \boldsymbol{a}_{32} é aquele que está na linha 3 e coluna 2 e é igual a -1.



Exemplificando

Escreva a matriz $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ii})_{2i:2}$, em que $\mathbf{a}_{ii} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Resolução: Como A é uma matriz do tipo 2×3 , então: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Fazendo $a_{ii} = 2i + j$, temos:

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

$$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$$

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
 $a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ $a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ $a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ $a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$ $a_{23} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

Deste modo, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.



Faça você mesmo

Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2,2}$, em que $a_{ij} = i + 3j$.

Tipos especiais de matrizes

Por apresentarem características especiais, algumas matrizes merecem certo destaque. Vejamos alguns tipos especiais de matrizes:

Matriz linha: é formada por uma única linha.

$$A = (0 \ 1 \ 2 \ -1)$$
 é uma matriz linha 1×4 .

Matriz coluna: é formada por uma única coluna.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$
 é uma matriz coluna 3×1 .

U1

• Matriz nula: é aquela em que todos os seus elementos são iguais a zero.

Podemos representar uma matriz nula $m \times n$ por $0_{m \times n}$.

$$0_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ \'e uma matriz nula } 2\times 4 \ .$$

• Matriz quadrada: é aquela em que o número de linhas é igual ao de colunas.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \sqrt{9} & 4 \end{bmatrix}$$
 é uma matriz quadrada 2×2 . Também podemos dizer que

A é uma matriz quadrada de ordem 2.



Assimile

Se uma matriz A é quadrada de ordem n, chamamos de **diagonal principal** de A aquela em que os elementos com índices da linha são iguais aos índices da coluna, ou seja, se A é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos a_{11} , a_{22} e a_{33} formam a diagonal principal de A.

Chamamos de **diagonal secundária** de $A_{3\times3}$, aquela formada pelos elementos a_{13} , a_{22} e a_{31} .

Matriz transposta

A matriz transposta de A (indicamos por A^t) é obtida aos trocarmos as linhas pelas colunas de A, nessa ordem. Se:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
, a transposta de $A \in A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \text{ a transposta de } B \notin B^t = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -4 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Observe que se a matriz B é do tipo 2×3 , a sua transposta será 3×2 .

Igualdade de matrizes: elementos correspondentes

Dizemos que duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ são iguais se todos os seus

elementos correspondentes são iguais, ou seja, sendo $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$, temos que A = B quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$.



Exemplificando

Sejam
$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 2 \end{pmatrix}$$
 e $B = \begin{pmatrix} d & 3 \\ 1 & c \end{pmatrix}$. Determine *a, b, c* e *d* para que se tenha $A = B$.

Resolução:

Para que as matrizes A e B sejam iguais, devemos ter: $a=1,\ b=3,\ c=2,\ d=1$

Operações com matrizes

• Adição de matrizes

A soma das matrizes A e B de mesma ordem resulta na matriz C, também de mesma ordem, tal que cada um de seus elementos é a soma dos elementos correspondentes de A e B. Mais formalmente:



Assimile

Sejam A e B duas matrizes do mesmo tipo, $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$. A soma de A com B é a matriz $C = \left(c_{ij}\right)_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \le i \le m$ e para $1 \le j \le n$.



Exemplificando

Dadas as matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
 e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determine $C = A + B$.

Resolução:

Efetuando
$$A + B$$
, temos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+3 \\ 1+1 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = C$.

Propriedades da adição de matrizes

Sejam A, B e C matrizes do mesmo tipo $m \times n$ e $0_{m \times n}$ a matriz nula, também do mesmo tipo $m \times n$. Valem as seguintes propriedades:

- 1. Comutativa: A + B = B + A.
- 2. Associativa: (A+B)+C=A+(B+C).
- 3. Existência do elemento neutro: existe N tal que A + N = N + A = A, qualquer que seja A do tipo $m \times n$. Veja que N é a matriz nula do tipo $m \times n$, isto é, $N = 0_{m \times n}$.
- 4. Existência do oposto ou simétrico: existe $A^{"}$ tal que $A + A^{"} = 0_{m \times n}$, ou seja, $A^{"}$ é o oposto ou simétrico de A.

Matriz oposta

Sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz, chamamos de -A a matriz que representa a oposta de A, tal que $A + (-A) = 0_{m \times n}$, sendo $0_{m \times n}$ a matriz nula. Obtemos a matriz -A trocando o sinal de cada um dos elementos da matriz A.

Exemplo: se
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
, então $-A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Subtração de matrizes

Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ duas matrizes do mesmo tipo. Chamamos de diferença entre A e B (representada por A - B) a matriz soma de A com a oposta de B, ou seja: A - B = A + (-B).



Exemplificando

Sejam
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$
 e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Determine $A - B$.

Resolução:

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 + (-1) & 1 + 2 & 0 + 1 \\ 3 + 2 & 4 + 3 & -1 + (-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$



Faça você mesmo

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, determine a diferença A - B

• Multiplicação de um número real por uma matriz

Sejam k um número real e uma matriz $\mathbf{A} = \left(\mathbf{a}_{ij}\right)_{m \times n}$. O produto de k pela matriz A, representado por $k \cdot A$, é uma matriz $\mathbf{B} = \left(\mathbf{b}_{ij}\right)_{m \times n}$ em que $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}$ para qualquer $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para qualquer $j \in \{1, 2, ..., n\}$, isto é, obtemos a matriz B multiplicando o número real k por cada um dos elementos da matriz A.

Observe que se $A = (2 \ 1 \ 1)$, então $2 \cdot A = (2 \cdot 2 \ 2 \cdot 1 \ 2 \cdot 1) = (4 \ 2 \ 2)$.



Exemplificando

Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, determine $\mathbf{3} \cdot \mathbf{A}$.

Resolução:

Se
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
, então $3 \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$.



Faça você mesmo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, obtenha as matrizes:

a) -2 · A

b) **5** · **A**

Propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz

Sejam A e B matrizes do mesmo tipo e k e g números reais. Valem as seguintes propriedades:

1.
$$k \cdot (g \cdot A) = (k \cdot g) \cdot A$$

2.
$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

3.
$$(k+g) \cdot A = k \cdot A + g \cdot A$$

$$4. \qquad \mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

• Multiplicação de matrizes

A seguir está definida uma das operações mais importantes entre matrizes, o produto matricial.



Assimile

Dadas as matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ e $B = \left(b_{jk}\right)_{n \times p}$, o produto de A por B é uma matriz $C = \left(c_{ik}\right)_{m \times p}$ em que $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$; para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para todo $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

A definição de multiplicação de matrizes só garante a existência do produto $A \cdot B$ se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Além disso, a nova matriz terá a mesma quantidade de linhas que A e a mesma quantidade de colunas que B. Por exemplo, se A é uma matriz do tipo $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ e B é uma matriz do tipo $\mathbf{3} \times \mathbf{5}$, então existe a matriz C e sua ordem é $\mathbf{3} \times \mathbf{5}$.

Acompanhe a seguir como calcular o produto de duas matrizes e os procedimentos para obter cada elemento da matriz $C = A \cdot B$.



Exemplificando

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, determine $A \cdot B$. Resolução:

Como A é do tipo 2×2 e B é do tipo 2×3 , então $C = A \cdot B$ existe e é do tipo 2×3 . Escrevendo de forma genérica os elementos de C, temos:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Da definição, $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k}$, temos que:

• c_{11} é o resultado da multiplicação da linha 1 de A pela coluna 1 de B:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$

• \mathbf{c}_{12} é o resultado da multiplicação da linha 1 de A pela coluna 2 de B:

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$$
.

• \mathbf{c}_{13} é o resultado da multiplicação da linha 1 de A pela coluna 3 de B:

$$c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11.$$

• \mathbf{c}_{21} é o resultado da multiplicação da linha 2 de A pela coluna 1 de B:

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

• \mathbf{c}_{22} é o resultado da multiplicação da linha 2 de A pela coluna 2 de B:

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10$$

• c_{23} é o resultado da multiplicação da linha 2 de A pela coluna 3 de B:

$$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 6$$

Assim, substituindo os valores em cada entrada da matriz C, temos:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 15 & 11 \\ 5 & 10 & 6 \end{bmatrix}.$$



Reflita

Sempre é possível multiplicar duas matrizes quadradas de mesma ordem? Em relação à matriz resultante dessa multiplicação, o que se pode afirmar?

Propriedades da multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$, $C_{p \times q}$, $D_{r \times m}$ e $E_{m \times n}$. Valem as seguintes propriedades:

- 1. Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- 2. Distributiva à direita em relação à adição: $(A + E) \cdot B = A \cdot B + E \cdot B$.
- 3. Distributiva à esquerda em relação à adição: $D \cdot (A + E) = D \cdot A + D \cdot E$.



Atenção

1. A multiplicação de matrizes **não é comutativa**, isto é, geralmente $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Existem casos em que podemos fazer somente uma das multiplicações. Exemplo: se A é do tipo 2×3 e B é do tipo 3×4 , então:

- existe $A \cdot B$ e é do tipo 2×4 (simbolicamente: $\exists (A \cdot B)_{2X4}$);
- não existe $B \cdot A$, pois o número de colunas de B é diferente do número de linha de A (simbolicamente: $\mathfrak{A}(B \cdot A)$).

Se existirem $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e se AB = BA (um caso particular), dizemos que A e B comutam.

Veja o caso das matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Temos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix} = B \cdot A$$
. Logo, $A \in B$ comutam.

2. É possível que o produto de duas matrizes seja a matriz nula sem que nenhuma delas seja nula. Isso ocorre porque **não vale a lei do cancelamento** do produto na multiplicação de matrizes como vale para os números reais.

Veja um caso: A propriedade do cancelamento diz que se $a \cdot b = 0$, então a = 0 ou b = 0. No caso das matrizes, suponha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0_{2\times 2} \ e \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0_{2\times 2} \ .$$
 Temos: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Pesquise mais

Sabemos que, pela definição formal, a operação de multiplicação de matrizes não é de fácil entendimento. Para esclarecer possíveis dúvidas, assista ao vídeo explicativo em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/alg-2-old-content/matrix-multiplication-alg2/v/multiplying-a-matrix-by-a-matrix. Acesso em: 17 jan. 2016.

Sem medo de errar

Vamos retomar o problema proposto no início desta seção: você é o proprietário de uma confeitaria e recebeu a encomenda de três tipos diferentes de doces: brigadeiro, beijinho e bicho-de-pé. Você utilizou, nessas receitas, quatro ingredientes (x,y,z,t) em várias proporções. Devemos determinar a matriz que registra o preço final de cada receita.

Para resolvermos, utilizaremos os conceitos sobre multiplicação de matrizes.

Veja que a Tabela 1.2 (Doces) é do tipo $\mathbf{3} \times \mathbf{4}$, ou seja, possui 3 linhas e 4 colunas, e a Tabela 1.3 (Ingredientes) é do tipo $\mathbf{4} \times \mathbf{1}$, ou seja, 4 linhas e 1 coluna. Podemos observar, nessas informações, um dado muito importante: o número de colunas da matriz A (Tabela 1.2) é igual ao número de linhas da matriz B (Tabela 1.3), o que pela definição de multiplicação de matrizes, garante a existência da matriz produto $\mathbf{C_{3\times 1}}$.

Sendo
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} e B = \begin{bmatrix} 0,20 \\ 0,80 \\ 1,20 \\ 2,80 \end{bmatrix}$$
 as matrizes dadas, temos $C_{3\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$,

em que:

$$C_{3\times 1} = A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0, 20 + 6 \cdot 0, 80 + 1 \cdot 1, 20 + 3 \cdot 2, 80 \\ 4 \cdot 0, 20 + 4 \cdot 0, 80 + 2 \cdot 1, 20 + 2 \cdot 2, 80 \\ 0 \cdot 0, 20 + 1 \cdot 0, 80 + 1 \cdot 1, 20 + 6 \cdot 2, 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, 60 + 4, 80 + 1, 20 + 8, 40 \\ 0, 80 + 3, 20 + 2, 40 + 5, 60 \\ 0 + 0, 80 + 1, 20 + 16, 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15, 00 \\ 12, 00 \\ 18, 80 \end{bmatrix}$$

Lembre-se que a matriz C fornece o custo de cada receita: Brigadeiro = R\$ 15,00

Beijinho = R\$ 12,00

Bicho-de-pé = R\$ 18,80

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Controlando a frequência					
Competência de fundamentos de área	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.				
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar os conceitos de matrizes nas resoluções de problemas do dia a dia.				
3. Conteúdos relacionados	Operações com matrizes.				
	Suponha que você seja gerente de um pub e seu patrão pediu para fazer um levantamento sobre a frequência de pessoas em um fim de semana. Você apresentou ao seu patrão os seguintes dados: Tabela 1.4 Frequência				
	Frequência	Rapazes	Moças		
	Sábado	80	60		
4. Descrição da situação-problema	Domingo	?	75		
	Fonte: elaborada pelo autor. Você acabou esquecendo-se de informar um dos campos da tabela, mas sabia que a arrecadação nos dois dias deste fim de semana tinha sido a mesma. Sabendo que o valor do ingresso para rapazes é R\$ 15,00 e para moças é R\$ 12,00, resolva: a) Represente a matriz que fornece a arrecadação do pub em cada dia. b) Determine o número de rapazes que compraram ingresso no domingo.				
5. Resolução da situação-problema	Escrevendo a Tabela 1.4 em notação matricial, temos que: $A = \begin{pmatrix} 80 & 60 \\ x & 75 \end{pmatrix}.$ Observe que os valores dos ingressos representam uma matriz coluna do tipo 2×1 , assim, temos: $B = \begin{pmatrix} 15,00 \\ 12,00 \end{pmatrix}.$				

a) Utilizando a multiplicação de matrizes, segue que:

$$\begin{pmatrix} 80 & 60 \\ x & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15,00 \\ 12,00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \cdot 15 + 60 \cdot 12 \\ x \cdot 15 + 75 \cdot 12 \end{pmatrix}$$

Assim, $80 \cdot 15 + 60 \cdot 12$ representa a arrecadação no sábado e $x \cdot 15 + 75 \cdot 12$ representa a arrecadação de domingo.

b) Para determinarmos o número de rapazes devemos igualar os elementos da matriz que representa a arrecadação de cada dia. Assim temos:

$$\begin{pmatrix} 80 & 60 \\ x & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15,00 \\ 12,00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \cdot 15 + 60 \cdot 12 \\ x \cdot 15 + 75 \cdot 12 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 80 & 60 \\ x & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1920 \\ 15x + 900 \end{pmatrix}$$

$$1920 = 15x + 900 \Rightarrow x = 68$$

Portanto, o número de rapazes que compraram ingresso no domingo foi 68.



Lembre-se

A definição de multiplicação de matrizes só garante a existência do produto $A \cdot B$ se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Faça valer a pena

1. Você aprendeu que a matriz transposta é obtida trocando, ordenadamente, as linhas pelas colunas da matriz original. Seja a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{2 \sim 3}$, em que $a_{ij} = 3i - 2j$. Que alternativa representa a matriz A^t ?

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C) \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

e)
$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Resolva a equação matricial $\begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 3 \\ 8 & 12 & 5 \end{bmatrix}$ e assinale a alternativa que contém a matriz X.

a)
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

e)
$$\begin{pmatrix} -9 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3; define-se $A^2 = A \cdot A$. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, que alternativa representa a matriz A^2 ?

a)
$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 18 & 21 & 12 \\ 12 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

U1

b)
$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 18 & 21 & 12 \\ 12 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

c)
$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 21 & 12 & 18 \\ 12 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

c)
$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 21 & 12 & 18 \\ 12 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

d) $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 \\ 21 & 18 & 12 \\ 12 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

e)
$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 18 & 21 & 12 \\ 20 & 21 & 12 \end{pmatrix}$$

Seção 1.2

Determinantes

Diálogo aberto

Olá, aluno!

Na seção anterior deste livro didático, você estudou sobre matrizes e as operações com matrizes, lembra? Pois bem, nesta seção você poderá perceber um pouco das relações que a matemática tem entre um e outro conteúdo. Nesse caso, as matrizes se relacionam com um tipo de função, a função determinante, que associa um número real a uma matriz quadrada, e é este tipo de função que discutiremos nesta etapa, dedicando maior atenção à utilização de algumas ferramentas que nos permitirão calcular essa função, auxiliando a resolução de problemas de várias engenharias.

Imagine que você recebeu em sua confeitaria mais uma encomenda, agora para uma grande festa. Serão servidos 600 pedaços de bolo como os da Figura 1.1.

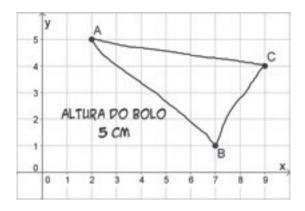




 $Fonte: \\ < http://www.istockphoto.com/br/foto/sufl%C3\%AA-de-leite-gm497393669-41784700?st = \\ _p_fatia\%20de\%20bolo\%20com\%20cereja>. Acesso em: 15 fev. 2016.$

Para fornecer um orçamento, você precisa calcular o volume de bolo que será utilizado para produzir os 600 pedaços e, para isso, terá que se basear no rascunho dado pelo comprador para estimar o tamanho da fatia. O rascunho pode ser visto na Figura 1.2. E agora, o que fazer para calcular o volume de bolo?

Figura 1.2 | Rascunho da base do bolo



Fonte: elaborada pelo autor.

Para que você consiga resolver esse e outros problemas, é necessário que veja alguns conceitos sobre determinantes e, mais especificamente, sobre algumas regras que lhe permitirão calculá-los. Então, vamos lá?

Não pode faltar

Determinante é um tipo de função que associa um número real f(X) a uma matriz quadrada (X). Convencionaremos det(A) para representar o determinante de A. Em alguns livros podemos encontrar |A| ou $\det \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ como representação para o determinante de A.



Atenção

Não confunda a notação |A|, que indica o determinante da matriz A, com módulo (ou valor absoluto).

Propriedades dos determinantes

Seja $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})_{n \times n}$ uma matriz quadrada de ordem n, com $\mathbf{n} \in \mathbb{R}$.

1. O determinante de A se anula (det(A) = 0) se:

- a matriz A apresentar uma linha ou uma coluna nula, ou seja, todos os elementos da linha ou da coluna iguais a zero;
 - a matriz A apresentar duas linhas ou duas colunas iguais;
- a matriz A tiver duas linhas ou duas colunas proporcionais, isto é, os elementos de uma são múltiplos da outra.
- 2. Se A é uma matriz triangular superior ou triangular inferior, seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, valendo a propriedade, também, se A é diagonal.
- 3. Seja k um escalar não nulo. Se B é uma matriz resultante da multiplicação de somente uma linha ou somente uma coluna de A por k, então $det(B) = k \cdot det(A)$.
- 4. Se B é a matriz que resulta quando permutamos duas linhas ou duas colunas de A, então det(B) = -det(A).
- 5. Se somarmos uma linha ou uma coluna com um múltiplo de outra, obtemos uma nova matriz B. Nesse caso, A e B são ditas equivalentes e det(B) = det(A).
 - 6. $\det(A^t) = \det(A)$.
 - 7. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, com $\det(A) \neq 0$.
 - 8. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.



Reflita

Podemos definir o determinante de matrizes de qualquer tipo?

Operando com os elementos de uma matriz

Conseguimos obter o determinante de uma matriz quadrada executando operações com seus elementos:

1. Matrizes de ordem 1×1 :

Sendo A uma matriz de ordem n = 1, o determinante de A será seu único elemento.

Exemplo: $A = (a_{11})$, então $det(A) = a_{11}$.

2. Matrizes de ordem 2×2 :

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n=2, ou seja, uma matriz do tipo 2×2 , o determinante da matriz A é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo: Se
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
, então $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

3. Matrizes de ordem 3×3

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n=3, isto é, uma matriz do tipo $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$, podemos definir seu determinante por meio de um método prático, chamado regra de Sarrus.

Regra de Sarrus

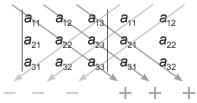
Seja
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
 uma matriz quadrada de ordem 3. O cálculo de

determinantes por meio da regra de Sarrus consiste em:

 1°) Escrever as duas primeiras colunas da matriz A ao lado da última coluna, à direita de A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2º) Iniciando de cima, da esquerda para a direta, devemos somar os produtos dos elementos das diagonais de mesma direção que a principal. Também de cima, da direita para a esquerda, devemos subtrair os produtos dos elementos das diagonais de mesma direção que a secundária:



Agora, realizando cálculos elementares, o determinante da matriz A, conforme a regra de Sarrus, é definido por:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$



Exemplificando

Dada a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
, calcule o seu determinante.

Resolução:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = (2 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 3) - (0 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 5)$$
$$det(A) = (10 + 0 + 0) - (0 + 6 + 5) = 10 - 11 = -1$$



Faça você mesmo

Dada a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
, calcule o seu determinante por meio da regra de Sarrus.

4. Caso $n \times n$, com $n \ge 3$:

Sendo A uma matriz de ordem $n \ge 3$, utilizamos o **Teorema de Laplace** para definirmos o seu determinante. Contudo, para compreensão do mesmo, algumas definições são necessárias, vejamos:

Menor complementar

Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz quadrada de ordem $n \ge 3$. Chamamos de **menor** complementar do elemento a_{ij} de A, o determinante da matriz que obtemos eliminando a linha i e a coluna j. Representamos por D_{ij} o menor complementar do elemento a_{ii} da matriz A.



Exemplificando

Determine o menor complementar do elemento a_{32} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
Resolução:

Eliminando a linha 3 e a coluna 2 de A, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
, então $D_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2$.

Assim, o menor complementar do elemento a_{32} é -2.



Faça você mesmo

Seja
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
 uma matriz quadrada do tipo 3×3 . Determine o

menor complementar dos elementos $\, {\it a}_{\rm 21} \,$ e $\, {\it a}_{\rm 33} \,$.

Cofator

Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz quadrada de ordem n, com $n \ge 3$. Chamamos de **cofator** do elemento a_{ij} , o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar D_{ij} do mesmo elemento a_{ij} da matriz A. Representamos o cofator do elemento a_{ij} por A_{ij} , logo:

$$A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Com base nas definições expostas, podemos agora descrever o **Teorema de Laplace**:



Assimile

O determinante de $A = (a_{ij})_{n \times n}$, uma matriz quadrada de ordem n, com $n \ge 3$, é igual à soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna pelos seus respectivos cofatores.

Desse modo, dada a matriz
$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
, se escolhermos a

primeira coluna como referência, então, conforme o Teorema de Laplace, temos que:

$$\det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + \ldots + a_{n1} \cdot A_{n1}$$



Atenção

Podemos empregar o Teorema de Laplace escolhendo como referência qualquer linha ou qualquer coluna da matriz dada. Para facilitar os cálculos é conveniente escolhermos a linha ou a coluna com a maior quantidade de zeros.



Exemplificando

Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule seu determinante por meio do

Teorema de Laplace.

Resolução:

É conveniente escolhermos a linha 2 ou a coluna 3 como referência pelo fato de apresentarem maior quantidade de zeros em relação as demais. Optando pela linha 2, temos:

$$\det(A) = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}.$$

$$\det(A) = 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = 6.$$



Faça você mesmo

Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, calcule o seu determinante utilizando

o Teorema de Laplace.



Pesquise mais

Saiba mais sobre o desenvolvimento de Laplace acessando o vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=RhNEjyQUAF4. Acesso em: 15 jan. 2016.

Acesse também o material para aprofundamento dos estudos sobre o Teorema de Laplace. disponível em:

https://cursinhodapoliusp.files.wordpress.com/2012/07/material-determinantes.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2016.

Sem medo de errar

o cálculo de um determinante.

Retomando o problema proposto no início desta seção, como calcular o volume de bolo considerando as especificações da Figura 1.2?

Para sabermos qual será o volume de bolo a ser preparado, precisamos, antes de tudo, calcular a área da base do mesmo nas dimensões do rascunho feito pelo cliente. Faremos uso do método de cálculo de área por determinantes utilizando as coordenadas dos pontos.

O rascunho fornecido pelo cliente representa a área, em ${\bf cm}^2$, da base de cada pedaço de bolo que precisa ser preparado, com vértices nos pontos A=(2,5), B=(7,1) e C=(9,4). Podemos perceber que ficaria um tanto complicado calcular essa área por meio da conhecida fórmula ${\bf A}_{\!\! \Delta}={b\cdot h\over 2}\,$, pois quais seriam as medidas da base (b) e da altura (h)? Para simplificar este problema, existe um meio mais prático para obtermos a área de qualquer triângulo conhecendo as coordenadas de seus vértices, o qual envolve

A área de um triângulo pode ser calculada por meio da fórmula

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right|, \text{ em que } x_i \text{ e } y_i \text{ são as coordenadas } x \text{ e } y \text{ de cada}$$

um dos vértices. Para este caso, os vértices são A=(2,5), B=(7,1) e C=(9,4),

então
$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$
. Calculamos primeiro o determinante:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 1 & 7 & 1 & = (2 + 45 + 28) - (9 + 8 + 35) = 75 - 52 = 23.$$

$$9 & 4 & 1 & 9 & 4 & 9$$

Voltando à fórmula, temos
$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| 23 \right| = \frac{1}{2} 23 = \frac{23}{2} = 11,5$$
, ou seja, a área da

base de cada pedaço de bolo é 11,5 cm².

Para obtermos o volume de cada pedaço de bolo, precisamos multiplicar a área da base pela altura fornecida no rascunho do cliente, assim:

$$V = A_A \cdot h \Rightarrow V = 11,5 \cdot 5 \Rightarrow V = 57,5 \text{ cm}^3$$
.

Mas a confeitaria precisa preparar 600 pedaços iguais, então:

$$V_{total} = 600 \cdot 57, 5 \Rightarrow V_{total} = 34500 \text{ cm}^3 \text{ de bolo.}$$

Conhecendo o volume de bolo, em centímetros cúbicos, é possível determinar um orçamento para o cliente.



Atenção

O método de cálculo de área utilizado anteriormente pode ser estendido para qualquer polígono, uma vez que é possível decompô-lo em triângulos.

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Custos de reforma						
Competência de fundamentos de área	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.					
2. Objetivos de aprendizagem	Conhecer e aplicar métodos práticos de cálculo de determinantes como ferramenta para análise e resolução de problemas.					
3. Conteúdos relacionados	Regra de Sarrus e Teorema de Laplace.					
4. Descrição da situação-problema	Regra de Sarrus e Teorema de Laplace. Imagine que você seja o síndico do edifício onde reside e, para deixá-lo mais bonito, decidiu, junto com o conselho de moradores, pintar o piso do pátio. Mas para não ultrapassar o orçamento de R\$ 1.000,00 destinado às reformas, precisa saber antes qual será o custo dessa pintura. A Figura 1.3 representa a área a ser pintada com vértices nos pontos A = (1,1), B = (10,1), C = (15,6) e D = (5,10). Sabendo que o metro quadrado da tinta escolhida custa R\$ 7,50, qual será o gasto no fim da reforma? Figura 1.3 Piso do pátios					

Você aprendeu como calcular a área de uma região triangular por meio do determinante da matriz formada pelas coordenadas dos vértices, lembra? Pois bem, temos agora um quadrilátero e para calcularmos sua área, basta que esta seja dividida em dois triângulos. Ao final dos cálculos, somamos as duas áreas triangulares e obtemos a área do quadrilátero. Vejamos então:

Sabemos que a área do triângulo, conhecendo as coordenadas dos vértices, é obtida por meio da fórmula $A_\Delta = \frac{\left| \det \right|}{2}$. Dividimos a área total traçando uma diagonal que vai do ponto A = (1,1) até o ponto C = (15,6), obtendo, assim, dois triângulos Δ_1 e Δ_2 .

O primeiro temos vértices nos pontos A = (1,1), C = (15,6)

e
$$D=\left(5,10\right)$$
, então $\det\left(\Delta_{1}\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\15&6&1\\5&10&1\end{vmatrix}$. Calculando por

$$\det(\Delta_1) = 1 \cdot (150 - 30) - 1 \cdot (10 - 5) + 1 \cdot (6 - 15)$$
$$\det(\Delta_1) = 120 - 5 - 9 = 106$$

$$Logo, A_{\Delta_1} = \frac{|106|}{2} = 53 \text{ m}^2.$$

O segundo tem os vértices nos pontos A = (1,1), B = (10,1)

e
$$C=\left(15,6\right)$$
, então $\det\left(\Delta_{_{1}}\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\10&1&1\\15&6&1\end{vmatrix}$. Calculando por

$$det\left(\Delta_{_1}\right) = 1 \cdot \left(60 - 15\right) - 1 \cdot \left(6 - 15\right) + 1 \cdot \left(1 - 10\right)$$

$$det\left(\Delta_{_1}\right)=45+9-9=45$$

Logo,
$$A_{\Delta_1} = \frac{|45|}{2} = 22,5 \text{ m}^2$$

Somando as áreas das duas regiões triangulares temos:

$$A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2} = A_{\Box} = 53 + 22, 5 = 75, 5 \text{ m}^2$$

5. Resolução da situação-problema

Já sabemos a área do piso do pátio, agora precisamos saber quanto custará a reforma: se cada m^2 de tinta custa R\$ 7,50 e o piso do pátio tem uma área de 75,5 m^2 , então $75,5\cdot7,50=566,25$, ou seja, será gasto na reforma o valor de R\$ 566,25 e o orçamento não será ultrapassado.

Faça valer a pena

- **1.** Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $\det(A) + \det(B)$ e $\det(A+B)$ e marque a alternativa que contém, respectivamente, esses valores:
- a) 1 e 10.
- b) 4 e 5.
- c) 5 e 10.
- d) 3 e 10.
- e) 10 e 4.
- **2.** Sejam D_1 o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ e D_2 o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Para quais valores reais de a teremos $D_1 + 2D_2 = 0$?
- a) a = 4 ou a = 2.
- b) a = 8 ou a = 0.
- c) a = 8 ou a = 1.
- d) a = 0 ou a = 1.
- e) a = 8 ou a = -8.

- **3.** Seja $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, onde $a_{ij} = 4i 3j$. Calcule o determinante de A e marque a opção correta.
- a) 8.
- b) -12.
- c) 12.
- d) 10.
- e) -8.

Seção 1.3

Sistemas de equações lineares

Diálogo aberto

Olá, aluno!

Você se recorda de que na aula anterior precisou calcular a área da base da fatia de bolo utilizando um determinante? Determinante é uma função que associa os elementos de uma matriz com um número. Uma ferramenta de cálculo de área diferente daquela que todos estamos habituados, não é mesmo? Dando sequência ao estudo de matrizes, podemos abrir caminho para outras possibilidades. Nesta seção você verá que as matrizes têm relação estreita com os sistemas lineares e é sobre isso que discutiremos nesta etapa, dedicando maior atenção à utilização de uma ferramenta que nos permitirá encontrar as soluções de um sistema de equações, permitindo solucionar problemas do dia a dia.

Imagine que sua confeitaria tenha recebido mais uma encomenda de doces para uma festa e, como você já havia calculado anteriormente o preço de custo de cada receita, pôde estabelecer os preços de venda de cada tipo de doce. Ficou decidido que a unidade de brigadeiro custaria R\$ 1,50, de beijinho R\$ 2,00 e de bicho-de-pé R\$ 3,50. A taxa de entrega é de R\$ 10,00. Para essa festa, foi encomendado um total de 250 unidades de doces e, ao fazer a entrega, você recebeu um cheque de R\$ 570,00.

Sabendo que a quantidade de bichos-de-pé corresponde a 2/3 do número de brigadeiros, qual foi a quantidade de beijinhos?

Para que você consiga resolver esse e outros problemas, é necessário que veja alguns conceitos sobre sistemas de equações lineares e, mais especificamente, sobre o método que lhe permitirá resolvê-los. Vamos lá?

Não pode faltar

Sistemas de equações lineares

• Equação Linear



Assimile

Equação linear é uma equação em que os expoentes de todas as incógnitas (ou variáveis) são sempre iguais a 1 e, mais ainda, em uma equação linear não há termo misto, isto é, ela não pode apresentar o produto de duas ou mais variáveis.

Exemplo de equação linear:

$$x + 5y - 350z = 9$$

Já as equações abaixo são não lineares:

a)
$$x^2 + 2y^2 - z = 1$$

b)
$$x^3 - y = 0$$

$$C) \qquad x + yz = 5$$

d)
$$x^2 - yz^2 - z = -4$$

De modo mais preciso, equação linear é toda equação nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ que pode ser escrita na forma $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n = b$, onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são coeficientes reais e b, também um número real, é o **termo independente** da equação. Assim, uma equação linear é uma equação de grau 1 (ou de 1º grau), com uma ou mais variáveis (ou incógnitas).

Sistema linear é um conjunto $m \times n$, com m equações lineares e $x_1, x_2, ..., x_n$ incógnitas. São exemplos de sistemas lineares:

$$\begin{cases} x-2y+2z=1\\ x+2y+z=-2 \text{ sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas.} \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

•
$$\begin{cases} x - 2y - z + w = 1 \\ -x + y - z + 2w = 7 \end{cases}$$
 sistema linear com 2 equações e 4 incógnitas.

Por estarmos interessados no estudo dos métodos de resolução de sistemas lineares do tipo $m \times n$, com $m \ge n > 2$, não nos aprofundaremos no estudo de sistemas de equações lineares do tipo 2×2 , mas vale lembrar que podemos encontrar suas possíveis soluções através dos **métodos da adição**, **comparação** ou **substituição**.



Lembre-se

Relembre os métodos de resolução de um sistema linear do tipo 2×2 acessando o vídeo disponível em: https://goo.gl/JZc1UE. Acesso em: 14 fey 2016

• Solução de um sistema

Uma sequência $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ de números reais é solução de um sistema linear de n incógnitas se satisfaz cada uma das equações desse sistema.



Exemplificando

O par ordenado (3, 2) é solução do sistema $\begin{cases} x+y=5\\ 2x-y=4 \end{cases}$ Resolução: $\begin{cases} 4x+5y=22 \end{cases}$

Substituindo x por 3 e y por 2 em cada uma das equações temos:

$$\begin{cases} x + y = 5 & \rightarrow 3 + 2 = 5 \Rightarrow (V) \\ 2x - y = 4 & \rightarrow 2 \cdot 3 - 2 = 4 \Rightarrow (V) \\ 4x + 5y = 22 \rightarrow 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 22 \Rightarrow (V) \end{cases}$$

Como todas as sentenças são verdadeiras, então o par ordenado (3, 2) é solução do sistema dado.



Reflita

É sempre possível encontrar a solução de um sistema linear?

Com relação à solução de um sistema linear, temos três possibilidades:

- O sistema possui uma única solução e é classificado por **(SPD) Sistema** possível e determinado;
- O sistema possui infinitas soluções e é classificado por **(SPI) Sistema** possível e indeterminado;

• O sistema não tem solução e é classificado por (SI) – Sistema impossível, sendo $S = \emptyset$ (conjunto vazio) o seu conjunto solução.

Matrizes associadas a um sistema

É possível associar quatro matrizes a um sistema linear em que os seus elementos são os coeficientes das equações que o compõem, além das incógnitas. É uma maneira de representar o sistema que facilitará sua resolução!

Matriz incompleta

É formada somente pelos coeficientes que acompanham as incógnitas. Um

exemplo de matriz incompleta associada ao sistema
$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 5x + 7y = 2 \end{cases} \text{ \'e } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Observe que os números à direita da igualdade ficaram de fora, ou seja, não fazem parte da matriz incompleta.

• Matriz completa ou matriz aumentada

É formada pelos coeficientes das variáveis mais os termos independentes de cada equação do sistema. Assim, a matriz aumentada do sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 5x + 7y = 2 \end{cases}$ é $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$. Repare que a matriz B difere da matriz A apresentada anteriormente pelo acréscimo da terceira coluna.

Matriz das incógnitas

Essa é uma matriz coluna formada pelas incógnitas do sistema. Para o exemplo anterior, a matriz das incógnitas é $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Matriz dos termos independentes

Essa é uma matriz coluna formada pelos termos independentes de cada equação. Para o exemplo anterior, a matriz dos termos independentes é $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

• Representação matricial de um sistema

Podemos representar um sistema de equações lineares na forma matricial, utilizando o processo de multiplicação de matrizes.



Exemplificando

Determine a representação matricial associada ao sistema $\begin{cases} 5x + 6y = 2\\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ Resolução:

Escrevendo o produto da matriz dos coeficientes com a matriz das incógnitas e igualando à matriz dos termos independentes, temos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 6y \\ 4x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 6y = 2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

Nesse caso, $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ é a representação matricial do sistema dado.



Faça você mesmo

Determine o sistema associado à representação matricial dada:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

• Sistemas escalonados e matriz triangular superior

Um sistema linear $m \times n$ será dito escalonado quando a matriz completa $B_{m \times (n+1)}$ associada a esse sistema for escalonada. Segundo Lima (2009, p. 106), a matriz B "é escalonada quando o primeiro elemento não nulo de cada uma de suas linhas está à esquerda do primeiro elemento não nulo de cada uma das linhas subsequentes e, além disso, as linhas nulas (se houver) estão abaixo das demais".

Considerando a matriz completa associada ao sistema $\begin{cases} x-y+2z=5\\ 0x+2y-3z=7 \end{cases}$ ou 0x+0y+4z=2

simplesmente $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2y - 3z = 7, & \text{temos} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ que \'e escalonada}$

(conforme definido anteriormente). Se observarmos a matriz incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
 associada a esse sistema, veremos que é uma **matriz triangular**

superior, onde os seus elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos. Desse modo, dizemos que a matriz está na **forma de escada** ou **escalonada** e que o sistema linear é triangular superior.

Resolução de sistemas lineares

Uma ferramenta para resolver sistemas lineares é o método da eliminação de Gauss com pivoteamento, que consiste em transformar o sistema dado em outro sistema triangular superior, facilitando sua resolução. Para isso, realizamos algumas operações chamadas operações elementares:

- Permutar (trocar de posição) duas equações do sistema;
- Multiplicar uma das equações por uma constante não nula;
- Substituir uma equação multiplicando-a por um escalar e adicionando (ou subtraindo) com alguma outra equação.



Atenção

Ao efetuarmos qualquer uma das operações elementares sobre as equações do sistema, as soluções continuarão sendo as mesmas. Veja que essas operações são aplicadas somente sobre os coeficientes do sistema, as variáveis não se alteram. Assim, podemos utilizar somente a matriz de coeficientes, isto é, a matriz aumentada do sistema para efetuarmos os cálculos e transformá-la em uma matriz na forma de escada.

Sendo assim, valem as operações elementares também sobre as linhas da matriz aumentada associada ao sistema:

- Permutar (trocar de posição), duas linhas ou duas colunas da matriz;
- Multiplicar uma das linhas da matriz aumentada por uma constante não nula;
- Substituir uma linha da matriz aumentada multiplicando-a por um escalar e adicionando (ou subtraindo) com alguma outra linha.

Processo de escalonamento: eliminação de Gauss com pivoteamento

Considere a matriz aumentada
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$
 associada ao sistema $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=4 \end{cases}$. À medida que cada passo para o escalonamento for dado, $-x+y+2z=-5$

vamos apresentando a matriz resultante das operações elementares até chegarmos à forma de escada. Acompanhe os passos:

Passo 1. Identifique a 1ª coluna, da esquerda para a direita da matriz, que não seja formada somente de zeros.

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 4 \\
-1 & 1 & 2 & -5
\end{pmatrix}$$

— Coluna não nula.

O elemento $a_{11} = 1$ será o **pivô** que servirá de base para os cálculos.



Atenção

Para que ocorra a transformação da matriz original na matriz escalonada, é necessário que as operações sejam feitas em cada um dos elementos da linha.

Passo 2. Iniciaremos o escalonamento chamando cada linha da matriz aumentada por L_1 , L_2 e L_3 , e as novas linhas por L^{\prime}_1 , L^{\prime}_2 e L^{\prime}_3 . Escrevemos as operações que serão feitas em cada linha para gerar a nova matriz:

- Repetimos a linha à qual pertence o pivô: $L'_1 = L_1$;
- A linha L'_2 é o resultado de $\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot L_1 L_2 = \frac{1}{1} \cdot L_1 L_2 = L_1 L_2$;
- ightharpoonup A linha L'_3 é o resultado de $\frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot L_1 L_3 = -\frac{1}{1} \cdot L_1 L_3 = -L_1 L_3$.

Passo 3. Observe que já eliminamos o elemento a_{21} e a_{31} abaixo do pivô. Agora precisamos eliminar o elemento a_{32} . Para isso, iniciamos a segunda iteração escolhendo como pivô o elemento a_{22} .

Repetimos a 1ª e a 2ª linhas, que já estão no formato desejado, e começamos a partir do elemento a_{32} . A matriz resultante da segunda iteração será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} L_{3}^{"} = L_{2}^{"}$$

$$L_{3}^{"} = \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot L_{2}^{"} - L_{3}^{"} = \frac{-2}{2} \cdot L_{2}^{"} - L_{3}^{"} = -L_{2}^{"} - L_{3}^{"}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Repare que a matriz obtida na segunda iteração é escalonada, conforme definido anteriormente. Podemos, assim, definir os valores de *x*, *y* e *z* por **retrossubstituição** ou **substituição** retroativa (da última para a primeira) nas equações do sistema.

Voltando a matriz escalonada à forma de sistema, temos $\begin{cases} x+y-z=0\\ 2y-2z=-4\\ 3z=-1 \end{cases}$

Da equação 3 temos:
$$3z = -1 \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$$
.

Substituindo z na equação 2, temos:
$$2y - 2z = -4 \Rightarrow 2y - 2\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 \Rightarrow y = -\frac{7}{3}$$

Substituindo
$$y$$
 e z na 1ª equação, temos: $x + \left(-\frac{7}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x = 2$.

Portanto, a solução do sistema dado é
$$S = \left(2, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$
.



Pesquise mais

Tire suas dúvidas sobre o método de escalonamento de Gauss com pivoteamento acessando o *link* disponível em: http://goo.gl/A0U873. Acesso em: 14 fev. 2016.

Sistemas lineares homogêneos

Um sistema linear é dito homogêneo quando os termos independentes de cada uma de suas equações são iguais à zero.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$
 é um exemplo de sistema homogêneo.
$$2x - 4y = 0$$



Exemplificando

Determine se o sistema $\begin{cases} 7x - 14y = 0 \\ -x + 2y = 0 & \text{\'e homogêneo.} \\ 2x - 6 = 0 \end{cases}$

Da equação 3 temos que $2x-6=0 \Rightarrow 2x=6$. Desse modo, o sistema fica $\begin{cases} 7x-14y=0\\ -x+2y=0 \end{cases}$. Portanto, não é homogêneo, pois os 2x=6

termos independentes do sistema não são todos nulos.



Faça você mesmo

Determine se
$$\begin{cases} x+y - z - 3 = 0 \\ x-2y+z-1 = 0 \text{ \'e um sistema homogêneo.} \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Uma propriedade característica dos sistemas homogêneos é que ele sempre admite a sequência $\underbrace{\left(0,\ 0,\ ...,\ 0\right)}_{n\ zeros}$ como solução. Este tipo de solução é chamada

de **solução trivial**. Assim, podemos afirmar que todo sistema homogêneo é possível, pois admite, pelo menos, a solução nula ou trivial. Havendo outras soluções além da solução nula, o sistema é (SPI) – sistema possível e indeterminado, sendo suas outras soluções chamadas de **não triviais**.



Pesquise mais

Acesse os materiais e saiba mais sobre resolução de sistemas lineares e suas aplicações. Disponível em: http://goo.gl/UHgydi e <a href="http://goo.gl/UHgydi e http://goo.gl/UHgydi e http://goo.gl/UHgydi e http://goo.gl/UHgyd

Sem medo de errar

Vamos retomar o problema proposto no início desta seção: como não sabemos as quantidades de cada um dos doces, vamos atribuir x, y e z para brigadeiros, beijinhos e bichos-de-pé, respectivamente. Assim, temos que x+y+z=250 unidades. Com os valores de cada doce e com a taxa de entrega, temos 1,5x+2y+3,5z+10=570. Finalmente, sobre a quantidade de bichos-de-pé em relação à quantidade de brigadeiros, temos $z=\frac{2}{3}x$.

Observe que temos três equações lineares e podemos montar com elas o

sistema linear
$$\begin{cases} x + y + z = 250 \\ 1,5x + 2y + 3,5z + 10 = 570 \\ z = \frac{2}{3}x \end{cases}$$

Da 3ª equação temos: $3z = 2x \Rightarrow 2x - 3z = 0$

Da $2^{\underline{a}}$ equação temos: 1,5x + 2y + 3,5z + 10 = 570

$$\Rightarrow$$
 1,5x + 2y + 3,5z = 570 - 10 \Rightarrow 1,5x + 2y + 3,5z = 560

O próximo passo para resolvermos é escrever a matriz aumentada associada ao sistema, para então efetuarmos o escalonamento por meio do método de eliminação de Gauss. Assim, a matriz aumentada associada ao sistema

$$\stackrel{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 250 \\
1,5 & 2 & 3,5 & 560 \\
2 & 0 & -3 & 0
\end{pmatrix}.$$

Realizando operações elementares sobre linhas, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 250 \\ 1,5 & 2 & 3,5 & 560 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} L'_{1} = L_{1}$$

$$L'_{2} = 1,5 \cdot L_{1} - L_{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 250 \\ 0 & -0,5 & -2 & -185 \\ 0 & 2 & 5 & 500 \end{pmatrix}$$

Observe que na primeira iteração conseguimos tornar nulos os elementos ${\it a}_{21}$ e ${\it a}_{31}$ da matriz aumentada. Agora, falta tornar nulo o elemento ${\it a}_{32}$ para que tenhamos uma matriz escalonada.

Adotando o mesmo procedimento, mas tendo como pivô o elemento a_{22} da matriz. Escrevemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 250 \\ 0 & -0.5 & -2 & -185 \\ 0 & 2 & 5 & 500 \end{pmatrix} L \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1' = \mathbf{L}_1' \\ \mathbf{L}_2' = \mathbf{L}_2' \\ \mathbf{L}_3' = \frac{2}{-0.5} \cdot \mathbf{L}_2' - \mathbf{L}_3' \Rightarrow \mathbf{L}_3' = -4 \cdot \mathbf{L}_2' - \mathbf{L}_3' \\ \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 250 \\ 0 & -0.5 & -2 & -185 \\ 0 & 0 & 3 & 240 \end{pmatrix}$$

Assim, obtemos a matriz escalonada ou matriz na forma de escada na segunda iteração.

Agora, retornamos ao sistema:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 250 \\ 0 & -0.5 & -2 & -185 \\ 0 & 0 & 3 & 240 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 250 \\ -0.5y - 2z = -185 \\ 3z = 240 \end{cases}$$

Com o sistema escalonado, fica fácil a sua resolução. Da 3ª equação temos:

$$3z = 240 \Rightarrow z = 80$$
. Substituindo z na $2^{\underline{a}}$ equação:

$$-0.5y - 2z = -185 \Rightarrow -0.5y - 2.80 = -185 \Rightarrow -0.5y - 160 = -185 \Rightarrow -0.5y = -185 + 160$$

 $\Rightarrow -0.5y = -25 \Rightarrow y = 50$

Por fim, substituímos y e z na 1ª equação:

$$x + y + z = 250 \Rightarrow x + 50 + 80 = 250 \Rightarrow x = 250 - 50 - 80 \Rightarrow x = 120$$
.

Portanto, foram entregues 120 unidades de brigadeiro, 50 unidades de beijinho e 80 unidades de bichos-de-pé.

Matrizes e sistemas

49

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

	Promoção do dia					
Competência de fundamentos de área	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometri. Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicado em problemas ligados à Engenharia.					
2. Objetivos de aprendizagem	Conhecer e aplicar o método de escalonamento como ferramenta para a resolução de problemas que envolvem sistemas de equações lineares.					
3. Conteúdos relacionados	Sistemas de equações lineares e escalonamento de Gauss com pivoteamento.					
4. Descrição da situação-problema	Você recebeu tantas encomendas em sua confeitaria que decidiu fazer uma promoção por três dias consecutivos: sexta-feira, sábado e domingo. Após esse período, foi feito um levantamento das vendas que revelou o seguinte: Na sexta-feira, foram vendidos 1 cento de brigadeiros, 2 centos de beijinhos e 3 centos de bichos-de-pé, arrecadando-se R\$ 260,00. No sábado, foram vendidos 2 centos de brigadeiros, 1 cento de beijinhos e 1 cento de bichos-de-pé, somando R\$ 150,00. No domingo, foram vendidos 4 centos de brigadeiros, 3 centos de beijinhos e 1 cento de bichos-de-pé, totalizando R\$ 290,00. Qual foi o preço cobrado por cada cento dos 3 tipos de doces durante os dias de promoção?					
5. Resolução da situação-problema	Observe que para cada dia de promoção podemos obter uma equação linear e, assim, montar um sistema linear com três equações e três variáveis. Vamos representar o valor de cada cento de brigadeiro, beijinho e bicho-de-pé por $a,b\in c$, respectivamente. $ \begin{array}{l} \text{sexta-feira} \\ \text{sabado} \\ \text{2}a+b+c=150 \\ \text{domingo} \\ \text{4}a+3b+c=290 \\ \text{Escrevendo a matriz aumentada associada ao sistema, temos:} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 260 \\ 2 & 1 & 1 & 150 \\ 4 & 3 & 1 & 290 \\ \end{pmatrix}. \\ \text{Estabelecendo o elemento} \textbf{a}_{11} \text{ como pivô e} \\ \text{realizando operações elementares sobre linhas, temos:} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 260 \\ 2 & 1 & 1 & 150 \\ 4 & 3 & 1 & 290 \\ \end{pmatrix} \begin{array}{l} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = 2L_1 - L_2 \Rightarrow \\ 0 & 3 & 5 & 370 \\ 0 & 5 & 11 & 750 \\ \end{pmatrix} $					

Observe que na primeira iteração conseguimos tornar nulos os elementos ${\it a_{21}}$ e ${\it a_{31}}$ da matriz aumentada. Agora, falta anular o elemento ${\it a_{32}}$ para que tenhamos uma matriz escalonada, o que facilitará a resolução do nosso sistema.

Adotando o mesmo procedimento para a segunda iteração, mas tendo como pivô o elemento a_{22} da matriz, escrevemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 260 \\ 0 & 3 & 5 & 370 \\ 0 & 5 & 11 & 750 \end{pmatrix} L_{3}^{"} = L_{2}^{"} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 260 \\ 0 & 3 & 5 & 370 \\ L_{3}^{"} = \frac{5}{3}L_{2}^{"} - L_{3}^{"} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 260 \\ 0 & 3 & 5 & 370 \\ 0 & 0 & -8 & -400 \end{pmatrix}$$

Assim, obtemos a matriz escalonada.

Voltamos ao sistema, mas na forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 260 \\ 0 & 3 & 5 & 370 \\ 0 & 0 & -8 & -400 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2b+3c=260 \\ 3b+5c=370 \\ -8c=-400 \end{cases}$$

Agora, com o sistema escalonado, da 3ª equação temos:

$$-8c = -400 \Rightarrow c = 50$$

Substituindo c na 2ª equação, temos:

$$3b + 5c = 370 \Rightarrow 3b + 5 \cdot 50 = 370 \Rightarrow 3b = 370 - 250 \Rightarrow 3b = 120 \Rightarrow b = 40$$

Substituindo b e c na 1ª equação, temos:

$$a + 2b + 3c = 260 \Rightarrow a + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 50 = 260$$

 $a + 80 + 150 = 260 \Rightarrow a = 260 - 230 \Rightarrow a = 30$

Portanto, durante o período de promoção, cada cento de brigadeiro custou R\$ 30,00, de beijinho R\$ 40,00 e de bicho-de-pé R\$ 50,00.

Faça valer a pena

1. Observe as seguintes equações:

$$a - b + 2c = 3$$

$$|1\rangle \quad x + \frac{1}{y} = 4$$

|||)
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = x_5$$

$$| \lor \rangle \ a^2 + b + c = 1$$

$$\forall$$
 $a-b=2$

Assinale a alternativa que contém somente equações lineares.

- a) I, II, III.
- b) II, III, IV.

- c) I, III, V.
- d) II, IV, V.
- e) III, IV, V.
- **2.** Dados os pares ordenados (2, -3), (2, 7) e (5, 3), verifique quais são soluções da equação linear 2x y = 7.
- a) Somente (2, -3) é solução.
- b) Os pares ordenados (2, -3) e (5, 3) são soluções.
- c) Os pares ordenados (2, 7) e (5, 3) são soluções.
- d) Nenhum par ordenado é solução.
- e) Todos os pares ordenados são soluções.
- **3.** Em um supermercado, o quilograma de feijão custa R\$ 6,00 e o de carne custa R\$ 15,00. Você comprou *x* quilos de feijão e *y* quilos de carne, gastando o total de R\$ 99,00. Sabendo que *x* e *y* são números naturais:
- I) Escreva a equação linear que relaciona as variáveis x e y.
- II) Apresente duas possíveis soluções para essa situação, isto é, quantos quilos de feijão e de carne você comprou?

Agora, marque a opção correta para I e para II, respectivamente.

- a) 15x + 6y = 99; (21,8),(3,18).
- b) 6x + 15y = 99; (1,28),(5,18).
- C) 15x + 6y = 99; (1,14),(3,9).
- d) 6x + 15y = 99; (14,1),(9,3).
- e) 6x + 15y = 99; (2,8),(3,18).

Seção 1.4

Matriz inversa

Diálogo aberto

Olá, aluno!

Na seção anterior, você estudou sistemas de equações lineares e pôde aplicar seus novos conhecimentos, além dos conceitos de matrizes e determinantes, para controlar e aumentar o fluxo de vendas de doces da sua confeitaria ao fazer uma promoção de fim de semana. Agora, imagine que sua avó te deixou como herança uma doce receita de família que certamente será um sucesso de vendas na sua confeitaria. Entretanto, no envelope entregue por sua tia, continha uma folha de papel escrito apenas o seguinte:

"Querido neto, para ter acesso ao nosso tesouro, você precisa descobrir o segredo que abre o cofre localizado atrás do armário na casa da tia Lourdes. Decodifique, digite a **palavra secreta** e pegue a receita, ela é sua!".

A palavra codificada é
$$S = \begin{pmatrix} 29 & 11 & 42 & 31 \\ 16 & 06 & 30 & 16 \end{pmatrix}$$
 e a chave para desvendá-la é $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de modo que $C \cdot P = S$, com P sendo a **palavra secreta** que abre o

cofre, traduzida de sua forma numérica para alfabética fazendo correspondência entre letras e números conforme Tabela 1.5 onde o símbolo # representa espaços entre as palavras.

Tabela 1.5 | Correspondências

А	В	С	D	Е	F	G	Н		J	К	L	М	Ν	0
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
Р	Q	R	S	Т	U	V	W	Χ	Υ	Z	#		į	?
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	00

Fonte: elaborada pelo autor.

Qual é a palavra secreta que dá acesso à receita?

Para resolver esse problema, é necessário que vejamos alguns conceitos sobre matriz inversa e como encontrá-la. Vamos lá?

Não pode faltar

Matriz inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é dita invertível (ou inversível) se existir uma matriz quadrada B, de mesma ordem, tal que: $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Assim, chamamos a matriz B de inversa da matriz A, e indicamos por A^{-1} e

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$



Lembre-se

A matriz I_n representa a matriz identidade de ordem n.



Exemplificando

Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz invertível. A matriz inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
, pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \quad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Propriedades da matriz inversa

- I) Se A é uma matriz invertível, então A^{-1} também é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- II) Se $A \in B$ são duas matrizes invertíveis, então AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
- III) Se A é invertível, então $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

IV) Se A é uma matriz invertível, então $\det(A) \neq 0$.

$$\forall) \quad \det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(A\right)}.$$

Observe em (II) que a inversa do produto é igual ao produto das inversas na posição contrária. Lembre-se de que no produto de matrizes a ordem é importante!



Exemplificando

Sejam
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ matrizes invertíveis e $AB = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Mostre que $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Resolução: Suponha $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e lembre-se que $A \cdot A^{-1} = I_2$, logo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2c + 3a & 2d + 3b \\ c + a & d + b \end{pmatrix}}_{2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2}$$

Podemos escrever dois sistemas lineares a partir da igualdade anterior:

$$\begin{cases} 2c + 3a = 1 \\ c + a = 0 \end{cases} e \begin{cases} 2d + 3b = 0 \\ d + b = 1 \end{cases}$$

Ao serem resolvidos encontramos a=1, b=-2, c=-1 e d=3. Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
. De modo semelhante, calcula-se $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & -11/3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Agora,
$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & -11/3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}.$$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

Matriz singular e matriz não singular

Seja A uma matriz do tipo $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$. Se A é invertível, sua inversa é única e, assim, dizemos que A é **não singular**. Caso contrário, isto é, se A não admite inversa, dizemos que A é **singular** (HOWARD; RORRES, 2001).

Invertibilidade de matrizes

Para determinar a matriz inversa de uma matriz quadrada de ordem *n*, podemos utilizar vários métodos, entretanto, após o estudo dos sistemas de equações lineares e do estudo de determinantes, daremos maior atenção a dois métodos em particular:

- Método baseado na resolução de sistemas;
- Método da matriz adjunta.
- Método baseado na resolução de sistemas

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ uma matriz do tipo 2×2 escrita em sua forma genérica. Como não conhecemos a matriz inversa A^{-1} , escrevemos sempre $A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

como uma matriz genérica de mesma ordem. Desse modo, pela multiplicação de matrizes temos que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}e + a_{12}g & a_{11}f + a_{12}h \\ a_{21}e + a_{22}g & a_{21}f + a_{22}h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do conceito de igualdade de matrizes, formam-se os sistemas de equações lineares e, assim, encontra-se a matriz inversa:

$$\begin{cases} a_{11}e + a_{12}g = 1 \\ a_{21}e + a_{22}g = 0 \end{cases} \in \begin{cases} a_{11}f + a_{12}h = 0 \\ a_{21}f + a_{22}h = 1 \end{cases}$$



Exemplificando

Utilizando o método baseado na resolução de sistemas, verifique se a matriz inversa da matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ existe.

Resolução:

Se \boldsymbol{A}^{-1} existir, então $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I_2}$. Como não conhecemos \boldsymbol{A}^{-1} ,

escrevemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como uma matriz genérica de mesma

ordem. Desse modo, pela multiplicação de matrizes temos que:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a + 3c & 5b + 3d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do conceito de igualdade de matrizes, seguem os sistemas de equações lineares:

1)
$$\begin{cases} 5a + 3c = 1 \\ 3a + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Da 2}^{\underline{a}} \text{ equação: } a = -\frac{2}{3}c.$$

Substituindo $a=-\frac{2}{3}c$ na 1ª equação: $5\left(-\frac{2}{3}c\right)+3c=1 \Rightarrow c=-3$

Consequentemente: $a = \frac{-2 \cdot (-3)}{3} \Rightarrow a = 2$

2)
$$\begin{cases} 5b + 3d = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Da 2}^{\underline{a}} \text{ equação: } b = \frac{1 - 2d}{3}$$

Substituindo $b = \frac{1-2d}{3}$ na 1ª equação: $5\left(\frac{1-2}{3}d\right) + 3d = 0 \Rightarrow d = 5$.

Consequentemente: $b = \frac{1 - 2 \cdot 5}{3} \Rightarrow b = -3$

Portanto, a inversa da matriz A existe, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ e é única. Logo, A é uma matriz não singular.



Faça você mesmo

Verifique se a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ é invertível. Em caso positivo, determine sua matriz inversa.



Reflita

A matriz nula $\mathbf{0}_{2\times 2}$ e a matriz identidade \mathbf{I}_2 são invertíveis? Verifique!



Pesquise mais

Acesse o vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch? v=mmkA8n0KLS4> (acesso em: 3 mar. 2016) e entenda o processo de inversão de matrizes por meio do método dos sistemas lineares.

Método da matriz adjunta

Para inverter uma matriz A do tipo $n \times n$ utilizando o método da matriz adjunta, utilizamos o determinante de A, além da matriz adjunta de A, denotado por adj(A). Com esse método, a inversa A^{-1} de uma matriz A será dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A), \quad \det(A) \neq 0$$



Assimile

Para que uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ tenha uma inversa, é necessário e suficiente que $det(A) \neq 0$. Nesse caso, A é não singular. Se det(A) = 0 então, A é singular e não admite inversa.

Para a compreensão do método, é necessário definirmos matriz adjunta.

Na seção anterior deste livro didático, você estudou sobre cofator $A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} \cdot D_{ij}$, onde D_{ij} é o menor complementar do elemento a_{ij} da matriz $A_{n \times n}$. Pois bem, com os cofatores de cada um dos elementos de $A_{n \times n}$, formamos uma nova matriz chamada de **matriz dos cofatores** de A, que representaremos por cof(A). Assim, a **matriz adjunta**, denotada por adj(A), é a transposta da matriz dos cofatores de A.

$$adj(A) = (cof(A))^t$$



Exemplificando

Seja
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
, obtenha a matriz $adj(A)$.

Resolução

O primeiro passo para encontrar a matriz adjunta de ${\cal A}$ é determinar a matriz dos cofatores de ${\cal A}$, calculando o cofator de cada um dos seus elementos. Assim:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Portanto, temos que $cof(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ é a matriz dos cofatores de A.

Como a matriz adjunta de A é a transposta da matriz dos cofatores de A,

então
$$adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$
 é a matriz adjunta de A .

Com base na definição de matriz adjunta, podemos voltar ao método de determinação da matriz inversa. Tomando o exemplo anterior, vejamos:

Como já determinamos a matriz adjunta de A, e sabendo que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$, $\det(A) \neq 0$, falta calcularmos o determinante de A.

Pelo Teorema de Laplace, escolhendo a linha 2 da matriz, temos: $\det(A) = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} \Rightarrow \det(A) = 2 \cdot (-7) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \Rightarrow \det(A) = -8 \neq 0$. Portanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

 \acute{e} a inversa da matriz \boldsymbol{A} .



Pesquise mais

Entenda melhor o processo de inversão de matrizes por meio do método da matriz adjunta. Vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=j__vbdjUYKc. Acesso em: 24 fev. 2016.

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto no início desta seção, veremos que um método simples para codificar e decodificar mensagens compreende utilizar as matrizes $C \in \mathbf{C}^{-1}$ de ordem n.

O remetente (sua avó) utilizou a matriz C para codificar a palavra secreta, e o destinatário (você) deverá utilizar a matriz C^{-1} para decifrar o código (decodificar) e descobri-la. Veia o porquê:

A matriz a ser descoberta é P e, para isso, você deve utilizar a igualdade $C \cdot P = S$, pois:

$$C \cdot P = S \Rightarrow \underbrace{C^{-1} \cdot C}_{I_2} \cdot P = C^{-1} \cdot S \Rightarrow I_2 \cdot P = C^{-1} \cdot S \Rightarrow P = C^{-1} \cdot S$$

Lembrando que as ordens das matrizes são $C_{2\times 2}$, $P_{2\times 4}$, $S_{2\times 4}$ e $C_{2\times 2}^{-1}$, $C^{-1}\cdot C=I_2$ (pois C^{-1} e C são matrizes inversas) e $I_2\cdot P=P$ (propriedade do produto matricial).

Com a dedução anterior, $P = C^{-1} \cdot S$, a matriz P poderá ser calculada efetuando o produto matricial $C^{-1} \cdot S$ em que S é conhecida (matriz codificada) e C^{-1} é a matriz inversa da chave C que sua avó lhe forneceu.

Logo, o passo seguinte é encontrar a inversa da matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Então:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{C^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Pela igualdade de}$$

matrizes formamos dois sistemas de equações lineares:

1)
$$\begin{cases} a+2c=1 \\ a+c=0 \end{cases}$$
 \Rightarrow a = -1; c = 1 2) $\begin{cases} b+2d=0 \\ b+d=1 \end{cases}$ \Rightarrow b = 2; d = -1

Portanto, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Para obtermos a palavra secreta P, precisamos

multiplicar a matriz C^{-1} pela matriz codificada S, assim: $C^{-1} \cdot S = P$.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 & 11 & 42 & 31 \\ 16 & 06 & 30 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 03 & 01 & 18 & 01 \\ 13 & 05 & 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Relacionando a matriz P às letras do alfabeto na Tabela 1.5 combinada, temos:

$$\frac{03}{C}$$
, $\frac{01}{A}$, $\frac{18}{R}$, $\frac{01}{A}$, $\frac{13}{M}$, $\frac{05}{E}$, $\frac{12}{L}$, $\frac{15}{O}$

Portanto, a palavra secreta é CARAMELO.



Pesquise mais

saiba mais sobre os princípios básicos da criptografia acessando o vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=vj7DpfQ pa0>. Acesso em: 25 fev. 2016.



Atenção

A existência da inversa de C para a resolução desse problema foi fundamental, pois $P = C^{-1} \cdot S$. Não somente nesse caso, mas também para a resolução de um sistema linear, a existência da inversa é um fato importante. Lembre-se de que todo sistema linear pode ser escrito da forma Ax = b. Logo, se A possui inversa ou é não singular ($\det(A) \neq 0$):

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow Ix = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Ou seja, a solução do sistema linear Ax = b existe, é igual a $x = A^{-1}b$ e é única. Em outras palavras, temos um SPD. Caso A não possua inversa, o sistema Ax = b pode ser classificado em SI ou SPI, dependendo de análise mais criteriosa.

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Cheesecake diferente									
Competência de fundamentos de área	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.								
2. Objetivos de aprendizagem	Conhecer e aplicar métodos de cálculo de matriz inversa como ferramenta para análise e resolução de problemas.								
3. Conteúdos relacionados	Matriz de cofatores; Matriz transposta; Matriz adjunta; Determinantes; Sistemas lineares.								
4. Descrição da situação-problema									
5. Resolução da situação-problema	O primeiro passo é encontrar a inversa da matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, pois $P = C^{-1} \cdot S$. Então: $ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+4c & b+4d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $								

62

Pela igualdade de matrizes formamos dois sistemas de equações

lineares,
$$\begin{cases} a+4c=1\\ a+3c=0 \end{cases} \in \begin{cases} b+4d=0\\ b+3d=1 \end{cases}$$
 cujas soluções são $c=1$, $a=-3$, $d=-1$ e $b=4$. Portanto, $c^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 4\\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Para obtermos os ingredientes secretos P, precisamos multiplicar a matriz \mathbf{C}^{-1} pela matriz codificada S, ou seja, $P = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{S}$, o que pode ser feito com o auxílio de um computador utilizando um software como o GeoGebra ou uma planilha eletrônica, obtendo:

$$P = \begin{pmatrix} 02 & 07 & 14 & 02 & 14 & 11 & 00 & 19 & 04 & 26 & 02 & 17 & 04 & 12 & 04 \\ 26 & 03 & 04 & 26 & 16 & 20 & 04 & 08 & 09 & 14 & 26 & 14 & 21 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

Relacionando a matriz P aos símbolos da Tabela 1.6, temos:

Estes são os ingredientes secretos da torta

Faça valer a pena

1. Determine, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e marque a opção que a contém:

a)
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

b)
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

c)
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

d) Não existe A^{-1}

e)
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

U1

2. Assinale a alternativa que contém a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$
:

- a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $c) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
- d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
- **3.** Assinale a opção que contém a matriz inversa da matriz identidade de ordem 2:
- a) $\left(I_2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- b) $(I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $C) \quad \left(I_2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- d) $(I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $e) \quad \left(I_2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Referências

BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra linear. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980. 411 p.

CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE FUTEBOL - CBF. **Campeonato brasileiro de futebol**: série A. 2015. Disponível em: http://www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro-serie-a/classificacao/2015#.VpkPlfkrLIU. Acesso em: 15 jan. 2016.

HOWARD, Anton; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução: Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. 572 p.

KHAN Academy. **Multiplicação de matrizes**. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/alg-2-old-content/matrix-multiplication-alg2/v/multiplying-a-matrix-by-a-matrix>. Acesso em: 17 jan. 2016.

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à álgebra linear**: com aplicações. Tradução: Alessandra Bosquilha. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LAY, David C. Álgebra linear e suas aplicações. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LEON, Steven J. Álgebra linear com aplicações. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LIMA, Elon Lages. Álgebra linear. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

SANDOVAL JUNIOR, Leonidas. **Álgebra linear**: para ciências econômicas, contábeis e da administração. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

STRANG, Gilbert. Álgebra linear e suas aplicações. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

Vetores no plano e no espaço

Convite ao estudo

Olá, aluno!

Vamos contar a história de Antônio e sua esposa, Maria. Antônio sempre teve um sonho de comprar uma casa na beira de um rio e ter um barco para pescar. Sua esposa viu um anúncio pela internet e, para agradá-lo, resolveu comprar um pequeno rancho com um barco na beira de um grande rio em uma cidade longe de onde moravam. Resolveram então visitar o local para conhecer e desfrutar da nova aquisição.

Ao saírem de casa, após andar alguns quilômetros, Antônio percebeu que havia esquecido o endereço de seu novo rancho. Como Maria lembrava a cidade onde se situava o rancho e o nome do rancho que compraram, resolveram seguir viagem.

Chegando na cidade onde se situava o rancho, pararam em um posto de gasolina e pediram informação sobre como chegar lá. Antônio e Maria ficaram surpresos com a resposta:

 – É só descer as quadras e lá na frente virar algumas quadras que vocês chegarão – disse o frentista.

Talvez possamos estar enganados, mas acho que nem você nem nós conseguiríamos encontrar o endereço. Para isso, precisaríamos de informações adicionais como:

Quantas quadras? Qual a direção: direita ou esquerda? Qual o sentido: este que estamos seguindo, ou voltando?

Essas informações são cruciais para que consigamos encontrar o endereço. Outras situações de nosso cotidiano também exigem essas mesmas informações: **módulo (comprimento), direção** e **sentido**.

Quando envolvemos grandezas que necessitam dessas informações, dizemos que são **grandezas vetoriais**, ou seja, aquelas que necessitam de módulo, direção e sentido, como: velocidade, força, aceleração etc.

Seção 2.1

Vetores: definição e segmentos orientados

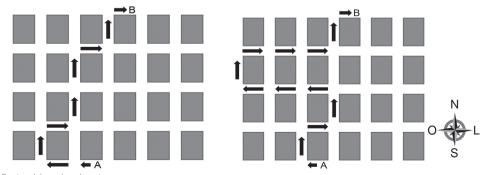
Diálogo aberto

Vetores são importantes ferramentas para a Geometria Analítica, sendo muito utilizados não só na Matemática, mas também em Química, em Física, nas Engenharias etc. Na Química, por exemplo, aplicam-se operações com vetores no estudo da polaridade das moléculas, que leva em consideração a geometria molecular. Na Física, o uso de vetores para cálculo das forças, de velocidade, torque, posição, deslocamento, ou para estudos de situações em planos inclinados, é indispensável! Já na Engenharia as aplicações são ainda maiores, podendo ser usados para fixar as dimensões de vigas e treliças para a sustentação de estruturas, na construção de pontes etc.

Justamente essa ferramenta (vetor) que ajudará Antônio na seguinte situação: ele e sua esposa estão parados no Ponto A do mapa (Figura 2.1) e precisam chegar no endereço desejado (ponto B). Sem as informações corretas ele teria diversas possibilidades. Para que ele consiga chegar no seu objetivo, vamos tentar ajudá-lo!

Na Figura 2.1 percebemos como é importante indicar o módulo (comprimento), a direção e o sentido de uma grandeza como na indicação de um endereço. Como exemplos, indicamos, na Figura 2.1, alguns caminhos que Antônio pode seguir partindo de sua posição inicial.

Figura 2.1 | Quadras



Fonte: elaborada pelo autor.

Vetores no plano e no espaço 69

Se Antônio sair de onde está e dirigir 3 quadras para o norte, em direção a *B*, ele estará em uma quadra (ponto *C*) onde teria 2 caminhos para se chegar a *B* percorrendo uma distância mínima. Quais seriam estes caminhos?

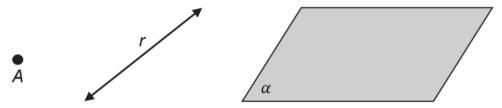
Se Antônio dirigir 3 quadras para o Leste, 2 para o Norte, 5 para a Oeste, 2 para o Norte, 1 para Oeste e mais 4 quadras para o Sul, a quantas quadras ele estaria de seu endereço (ponto *B*)?

Não pode faltar

Para resolver o problema proposto inicialmente e outros que podem surgir, precisamos de alguns conceitos importantes.

Ponto, reta e plano: São conceitos primitivos e, portanto, aceitos sem definição. Para denotar um ponto, usamos uma letra maiúscula do nosso alfabeto; para reta usaremos uma letra minúscula do nosso alfabeto; e para plano usaremos letras minúsculas do alfabeto grego.

Figura 2.2 | Ponto, reta e plano

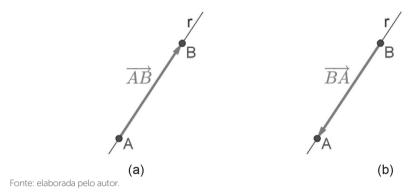


Fonte: elaborada pelo autor.

Apesar de não podermos definir esses elementos, podemos descrevê-los facilmente. Um ponto pode ser comparado com um furo, um pequeno buraco, o pingo da letra i etc. A reta pode ser vista como o conjunto de infinitos pontos, uma linha de caderno, as linhas de um campo de futebol entre outros. Já o plano pode ser comparado com a superfície lisa de uma parede, do quadro etc.

Segmento e segmento orientado: Segmento é qualquer trecho de uma reta delimitado por dois pontos, A e B, por exemplo. Costuma-se denotá-lo pelas letras correspondentes aos pontos que o delimitam. Em um segmento de reta AB podemos adotar duas orientações: de A (origem) para B (extremidade); de B (origem) para A (extremidade). Indicamos essa orientação inserindo uma seta sobre AB.

Figura 2.3 | Segmento orientado: (a) de A para B; (b) de B para A



Principais características de segmentos orientados

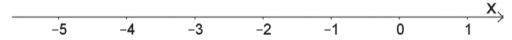


Assimile

Módulo: Dizemos que a distância do ponto A até o ponto B é o módulo do segmento \overline{AB} isto é, o módulo de \overline{AB} é o seu comprimento. A notação que normalmente utilizamos para representar módulo de \overline{AB} é \overline{AB} .

Você pode entender facilmente essa questão imaginando a reta numérica. Imagine uma pessoa que está na origem (ponto zero) e caminha até o ponto 5, ela andou 5 espaços. Se ela sai da origem e anda até o ponto -5, ela também andou 5 espaços, ou seja, o módulo ou distância da caminhada é 5.

Figura 2.4 | Reta numérica



Fonte: elaborada pelo autor.

Em resumo, módulo é a distância de um ponto até outro ponto em qualquer direção.



Assimile

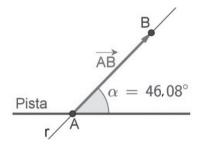
Direção: A direção do segmento orientado \overline{AB} pode ser compreendida ao observarmos a inclinação da reta r que passa por A e B, sobre a qual o segmento orientado se encontra. Ela pode ser horizontal, vertical ou inclinada.

Se seu segmento está sobre o eixo x, por exemplo, dizemos que a direção dele é horizontal. Se o segmento está sobre o eixo y, dizemos que ele está na vertical. O segmento também pode ter a direção inclinada, como na Figura 2.5.

Exemplo:

Observe o segmento \overrightarrow{AB} da Figura 2.5. Agora suponha que ele seja o trajeto de decolagem de um avião. Podemos, então, dizer que sua direção é inclinada 46,08° em relação à pista de decolagem.

Figura 2.5 | Decolagem



Fonte: elaborada pelo autor.



Assimile

Sentido: Definimos o sentido do segmento \overrightarrow{AB} a partir da origem para a extremidade, ou seja, \overrightarrow{AB} é de A para B e \overrightarrow{BA} é de B para A.

Conforme podemos observar ainda na Figura 2.5, dizemos que \overrightarrow{AB} tem sentido de sudoeste para nordeste.

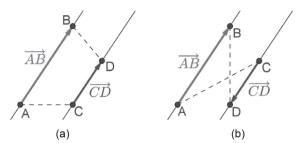
Tipos de segmentos orientados

Segmento nulo: São segmentos cujo módulo é igual a zero. Nesse caso, o segmento se reduz a um único ponto.

Segmentos opostos: Considere que \overrightarrow{AB} seja um segmento orientado. Dizemos que o segmento \overrightarrow{BA} é o seu oposto, pois tem o mesmo módulo, mesma direção, mas sentido contrário de \overrightarrow{AB} .

Exemplo: Suponha que os segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} tenham a mesma direção e as retas de AB e CD não são coincidentes, isto é, são retas diferentes. Se os segmentos \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BD} não se interceptam, dizemos que \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} têm o mesmo sentido, caso contrário, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} têm sentidos opostos. Veja Figura 2.6.

Figura 2.6 | Segmentos orientados: (a) de mesma direção; (b) opostos

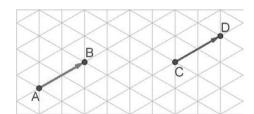


Fonte: elaborada pelo autor.

Segmentos equipolentes: Dois segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Para representamos a relação de equipolência entre \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} utilizaremos a notação $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ (onde se lê: o segmento \overrightarrow{AB} é equipolente ao segmento \overrightarrow{CD}).

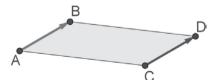
Figura 2.7 | Segmentos equipolentes $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Estes segmentos podem pertencer à mesma reta ou não. Se os segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} não pertencem à mesma reta, como na Figura 2.8, para que \overrightarrow{AB} seja equipolente a \overrightarrow{CD} , é necessário que $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{BD}//\overrightarrow{AC}$ e, ou seja, \overrightarrow{ABDC} deve ser um paralelogramo.

Figura 2.8 | Segmentos equipolentes



Fonte: elaborada pelo autor.

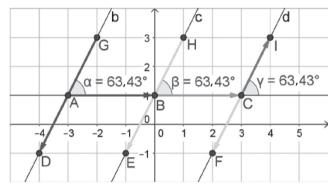
Direção e sentido



Exemplificando

Observe a Figura 2.9 e responda:

Figura 2.9 | Retas e segmentos orientados



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) As retas b, c e d têm a mesma inclinação? Por quê?
- b) Apresente pelo menos dois segmentos orientados determinados a partir de $A,B\in\mathcal{C}.$
- c) Apresente pelo menos dois segmentos orientados opostos.
- d) Apresente pelo menos dois segmentos orientados equipolentes.

Resposta:

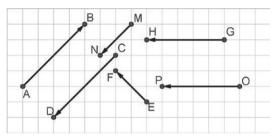
- a) Sim. Pois os ângulos α , β e γ têm a mesma medida.
- b) \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{CF} . Nesse caso você poderia ter escolhido qualquer segmento que saia de B, A ou C.
- c) \overrightarrow{CF} e \overrightarrow{CI} . Podemos escolher quaisquer segmentos que têm a mesma origem e sentidos contrários.
- d) \overline{GD} e \overline{HE} . Nesse item podemos escolher quaisquer segmentos que tenham a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo.



Faça você mesmo

Considere o plano quadriculado da Figura 2.10, em que estão representados os segmentos: \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{EF} , \overrightarrow{GH} , \overrightarrow{MN} e \overrightarrow{OP} .

Figura 2.10 | Segmentos



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, responda:

- a) \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são segmentos opostos?
- b) \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são segmentos de módulos iguais, direção e sentidos diferentes?
- c) \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{GH} são segmentos de mesmo módulo, direção e sentido?
- d) \overrightarrow{GH} e \overrightarrow{OP} são segmentos equipolentes?

Vetor

Com base em tudo o que foi visto até o momento, podemos definir **vetor**. Mas o que é isso afinal? Bem, o conceito de vetor é simples. Vetor é constituído por três coisas: um número positivo que dá seu comprimento (módulo), uma direção e um sentido.

Denominamos vetor \overrightarrow{AB} o conjunto de todos os segmentos que possuem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido de \overrightarrow{AB} , ou seja, o conjunto de segmentos equipolentes a \overrightarrow{AB} .

Exemplo: observe a Figura 2.11. O conjunto de todos os segmentos equipolentes a \overrightarrow{AB} formam o vetor \overrightarrow{AB} . Além disso, cada um dos segmentos desenhados na Figura 2.11 é um dos representantes de \overrightarrow{AB} .

Figura 2.11 | Alguns representantes do vetor \overline{AB}



Fonte: elaborada pelo autor.



Atenção

Não confunda segmento orientado com vetor! Entenda o conceito de representante acessando o material disponível em: http://www.basica2.ufba.br/apostilas/vetores/Apost1-1.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2016.



Pesquise mais

Aprofunde seus conhecimentos sobre vetores acessando o livro disponível em: http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf. Acesso em: 28 abr. 2016.



Reflita

Grandezas escalares não precisam de direção e sentido, sendo necessário apenas seu módulo. Veja alguns exemplos:

Grandezas vetoriais: velocidade, aceleração, força etc.

Grandezas escalares: massa, tempo, área etc.

Casos particulares

Vetor nulo: Representado por $\vec{0}$ o vetor nulo tem a origem coincidindo com sua extremidade

Vetores paralelos: indicamos por \vec{x} // \vec{y} dois vetores paralelos, pois têm a mesma direção, não necessariamente tendo o mesmo módulo e sentido.

Figura 2.12 | Vetores paralelos



Fonte: elaborada pelo autor.



Atenção

Quando dois vetores forem paralelos, o ângulo entre eles será de 0° ou 180°. Quando forem perpendiculares, o ângulo será de 90°.

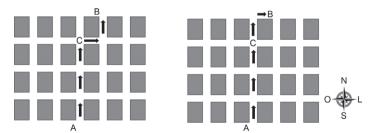
O ângulo entre dois vetores é o menor ângulo formado entre dois representantes dos respectivos vetores que possuam mesma origem.

Sem medo de errar

Antônio e sua esposa estão parados no ponto A do mapa e precisam chegar no endereço desejado (ponto B). Sem as informações corretas eles teriam diversas possibilidades. Se Antônio sair de onde está e dirigir 3 quadras para o Norte, ele estará em um ponto onde teria 2 caminhos para se chegar a B percorrendo a distância mínima. Quais seriam estes caminhos?

Você pode observar que Antônio, após dirigir 3 quadras em direção ao seu objetivo, que é o ponto B, está situado no ponto C (observe Figura 2.13 para ver direções). Ele pode então tomar dois caminhos: O primeiro, por exemplo, pode ser andar uma quadra para o Leste e depois mais uma para o Norte em direção a B; outra maneira é caminhar primeiro para o Norte, e depois uma quadra para o Leste, como mostra a Figura 2.13.

Figura 2.13 | Possíveis caminhos a serem percorridos por Antônio



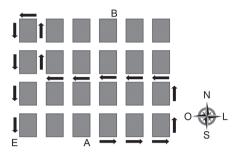
Fonte: elaborada pelo autor.

Se Antônio dirigir 3 quadras para o Leste, 2 para o Norte, 5 para a Oeste, 2 para o Norte, uma para Oeste e mais 4 quadras para o Sul, a quantas quadras ele estaria de seu endereço de destino (ponto *B*)?

Escrevendo o caminho que Antônio percorreu podemos notar, como na Figura 2.14, que ele está situado no ponto *E*. Contando as quadras do ponto *E* até o ponto *B*, temos que a distância de Antônio até seu objetivo são 8 quadras. Note que isso é o

mesmo que dizer que a distância do ponto E ao ponto B é 8 unidades (não em linha reta).

Figura 2.14 | Caminho



Fonte: elaborada pelo autor.

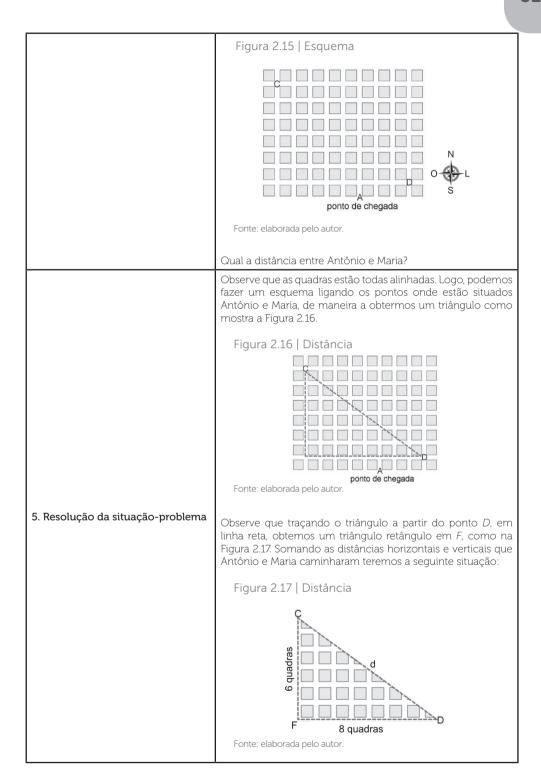
Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

	Diário de viagem
1. Competências	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.
2. Objetivos de aprendizagem	Compreender e interpretar geometricamente os vetores, aplicando os fundamentos da álgebra vetorial na solução de problemas.
3. Conteúdos relacionados	Grandezas escalares e vetoriais; Tipos de segmentos orientados; Vetores.
4. Descrição da situação-problema	Suponha que Antônio e sua esposa não tiveram nenhuma informação sobre o endereço desejado. Para tentar encontrar o endereço mais rápido eles decidem se separar. Antônio andou 3 quadras para a Leste e mais uma para o Norte, chegando no ponto <i>D</i> . Maria, sua esposa, anda 5 para Oeste e 7 quadras para Norte, chegando no ponto <i>C</i> . Nesse momento Maria resolve ligar para seu marido e pergunta onde ele está. Como não conhecem a cidade vamos ajudá-los a determinar a distância entre eles, em linha reta.



Utilizando o teorema de Pitágoras para encontrar a distância entre eles temos:

$$d^2 = 6^2 + 8^2$$

$$d^2 = 36 + 64$$

$$d^2 = 100$$

$$d = 10$$
 quadras

Logo Antônio e Maria estão a 10 quadras de distância um do outro.

Faça valer a pena

- 1. Marque a alternativa que contém uma grandeza vetorial:
- a) A massa de uma bola de basquete.
- b) O espaço-tempo percorrido para ir de uma cidade a outra.
- c) A força necessária para levantar um objeto de 60 kg.
- d) A densidade da água.
- e) A temperatura corporal de uma criança em estado febril.
- **2.** Sobre segmentos equipolentes, podemos afirmar que eles têm:
- a) A mesma direção, o mesmo sentido e módulos diferentes.
- b) Direções diferentes, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.
- c) A mesma direção, sentidos diferentes e o mesmo comprimento.
- d) A mesma direção, o mesmo módulo e o mesmo comprimento.
- e) A mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.
- **3.** Das afirmações a seguir, verifique quais se referem a grandezas escalares e quais a grandezas vetoriais:
- I Um jogo de futebol dura 90 minutos.
- II Um automóvel esportivo atinge a marca 200 km/h.

III – Para colocar uma caixa em uma prateleira é necessária uma força de 150 N.

IV – Aquela praça tem uma área de 300 m².

V-O deslocamento de um avião, em direção ao sul do país, foi de 1.720 km.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta:

- a) Vetorial, vetorial, escalar, escalar, escalar.
- b) Vetorial, escalar, escalar, vetorial, escalar.
- c) Escalar, escalar, vetorial, escalar, escalar.
- d) Vetorial, escalar, vetorial, vetorial, escalar.
- e) Escalar, vetorial, vetorial, escalar, vetorial.

Seção 2.2

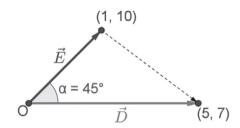
Módulo ou norma de um vetor

Diálogo aberto

Olá, aluno!

Você lembra que na seção anterior estudou sobre vetores? Lembra que você tentou encontrar o caminho para um endereço sem ter todas as informações? Esperamos que tenha percebido que era necessário ter informações como direção, sentido e módulo, que nada mais são do que vetores. Nessa seção, você aprenderá a calcular o módulo (comprimento) do percurso, e as diferentes maneiras de se fazer esse cálculo. Suponha que para ter mais chances de encontrar o endereço desejado, Antônio e sua esposa decidiram se separar. Antônio percorreu o caminho representado pelo vetor $\vec{\boldsymbol{D}}$ e Maria percorreu o caminho representado pelo vetor $\vec{\boldsymbol{E}}$ como na Figura 2.18. Suponha agora que conheçamos o ponto onde cada um se encontra. Através do cálculo do módulo de um vetor podemos determinar a distância entre eles.

Figura 2.18 | Caminho percorrido por Antônio e sua esposa (em km)



Fonte: elaborada pelo autor.

Qual foi a distância percorrida por Antônio e por Maria? E qual a distância entre eles?

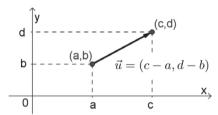
Para que você consiga resolver esse e outros problemas, é necessário que veja alguns conceitos sobre vetores, mais especificamente, saber como calcular o módulo de um vetor. Vamos lá?

Não pode faltar

Coordenadas de um vetor

Seja o vetor \vec{u} com origem no ponto de coordenadas (a,b) e extremidade no ponto de coordenadas (c,d). As coordenadas de \vec{u} são (c-a,d-b), como mostra a Figura 2.19.

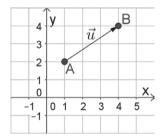
Figura 2.19 | Vetor $\vec{u} = (c - a, d - b)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplo: Um vetor tem origem no ponto (1, 2) e extremidade em (4, 4). Logo dizemos que esse vetor tem coordenadas (3, 2). Este vetor está fora da origem, como podemos ver na Figura 2.20.

Figura 2.20 | Coordenadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Módulo ou norma de um vetor no plano



Assimile

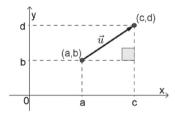
Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa (a) é igual à soma dos quadrados dos catetos ($b \in c$).

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para calcularmos o módulo de um vetor basta utilizarmos o teorema de Pitágoras como mostra a Figura 2.21:

Figura 2.21 | Triângulo retângulo definido a partir de \vec{u}



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que o vetor \vec{u} representa a hipotenusa do triângulo retângulo. Sendo seus catetos (c-a) e (d-b) calculamos o módulo do vetor \vec{u} por Pitágoras. Logo:

$$|\vec{u}| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$



Atenção

O comprimento de um vetor é numericamente igual à distância entre os pontos que compõem a sua origem e a sua extremidade. Logo, você pode obter a distância entre esses pontos por meio do cálculo do módulo do vetor que os têm como extremidades.

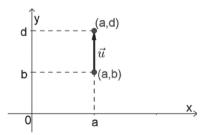
Exemplo: Um vetor \vec{u} tem origem no ponto (1, 2) e extremidade em (4, 4). Logo dizemos que o módulo de \vec{u} é:

$$|\vec{u}| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Logo, o módulo de \vec{u} é $\sqrt{13}$.

Dois casos particulares sobre módulo de vetores são analisados na Figura 2.22 e Figura 2.23.

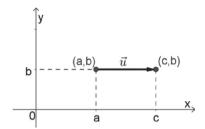
Figura 2.22 | Vetor perpendicular



Fonte: elaborada pelo autor.

Quando o vetor está na vertical não se forma um triângulo retângulo como na Figura 2.21 e seu módulo é dado por (d-b).

Figura 2.23 | Vetor horizontal



Fonte: elaborada pelo autor.

Quando o vetor está na horizontal também não se forma um triângulo retângulo e seu módulo é dado por (c-a). Contudo, em ambos os casos, o módulo pode ser obtido pela fórmula $|\vec{u}| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$, sendo esta podendo ser usada para qualquer vetor no plano.



Assimile

Vetor unitário

É todo vetor cujo módulo vale 1.

$$|\vec{u}| = 1$$



Exemplificando

Encontre o módulo do vetor $\vec{u} = (0,-1)$.

Resolução:

$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

Logo, $\vec{u} = (0, -1)$ é unitário.



Faça você mesmo

Determine o módulo do vetor com origem em:

- a) (0,0) e extremidade em (-5,12);
- b) (-3,10) e extremidade em (-2,3).

Versor de um vetor

Seja \vec{u} um vetor não nulo. Dizemos que \vec{v} é um *versor* de \vec{u} se $|\vec{v}| = 1$ e ambos têm mesma direção e mesmo sentido.



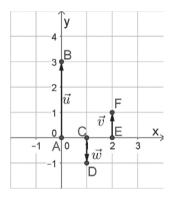
Lembre-se

Lembra-se de que na seção anterior foi descrito que vetores paralelos são aqueles que formam ângulos de 0° ou 180°? Pois bem, quando dois vetores formam esses ângulos entre si, eles possuem a mesma direção e vice-versa. Com isso, você também pode pensar que um dado vetor e o seu versor são paralelos.

Por convenção o vetor nulo é paralelo a qualquer outro.

Exemplo: Observe na Figura 2.24 que $|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$. Como \vec{u} e \vec{v} têm a mesma direção e mesmo sentido dizemos que \vec{v} é um versor de \vec{u} . Já \vec{w} e \vec{u} têm a mesma direção, mas sentidos opostos, logo \vec{w} não é versor de \vec{u} .

Figura 2.24 | Versor



Fonte: elaborada pelo autor.



Assimile

Determinação de um versor

Para encontrar o versor de um vetor $\vec{u} = (a,b)$ basta dividi-lo pelo seu módulo, $|\vec{u}|$. Desse modo, o versor de \vec{u} , denotado por $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ e dado por:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{a}{|\vec{u}|}, \frac{b}{|\vec{u}|}\right)$$



Exemplificando

Encontre o versor do vetor $\vec{u} = (3,4)$.

Resolução:

$$\left| \vec{u} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Logo, o versor de \vec{u} é $\left| \vec{u} \right| = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$.



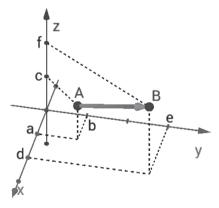
Pesquise mais

Acesse o material a partir da página 64 e aprofunde seus conhecimentos sobre vetores. Disponível em: <www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf>. Acesso em: 17 jun. 2016.

Vetores no espaço

Seja o plano de eixos coordenados \overrightarrow{Ox} , \overrightarrow{Oy} e \overrightarrow{Oz} representado na Figura 2.25 e o vetor \overrightarrow{u} , com origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto de coordenadas (a,b,c).

Figura 2.25 | Versor



Fonte: elaborada pelo autor.

Para calcular o módulo de vetores no espaço basta tomarmos sua origem (a,b,c)e extremidades em (d,e,f) e, analogamente, aos vetores no plano temos:

$$\vec{u} = \sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2}$$
.



Reflita

Como obter essa fórmula a partir do teorema de Pitágoras?



Assimile

Determinação de um versor no espaço

Para encontrar o versor de um vetor $\vec{u}=(a,b,c)$ basta dividi-lo pelo seu módulo, $|\vec{u}|$. Desse modo, o versor de \vec{u} , denotado por $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, é dado por:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\mathbf{a}}{|\vec{u}|}, \frac{\mathbf{b}}{|\vec{u}|}, \frac{\mathbf{c}}{|\vec{u}|}\right).$$

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto no início desta seção, sabemos que o módulo de um vetor \vec{u} de origem (a, b) e extremidade (c, d) é dado por:

$$|\vec{u}| = \sqrt{(C-a)^2 + (d-b)^2}$$

Nesse caso, para calcular a distância percorrida por Antônio e Maria, adotando que eles tenham saído da origem, temos:

Para Antônio:
$$\overrightarrow{D} = (5,7)$$
.

Para Maria:
$$\vec{E} = (1,10)$$

$$\left| \overrightarrow{D} \right| = \sqrt{5^2 + 7^2}$$

$$\left| \vec{E} \right| = \sqrt{1^2 + 10^2}$$

$$\left| \overrightarrow{D} \right| = \sqrt{74}$$

$$\left| \overrightarrow{E} \right| = \sqrt{101}$$

Para calcular a distância entre Antônio e Maria, precisamos primeiramente perceber que, após os deslocamentos, eles pararam nos pontos de coordenadas (5,7) e (1,10).

Como visto anteriormente, para calcular a distância entre esses dois pontos, determinamos o vetor que os possui como extremidades e calculamos o comprimento desse vetor. Essa será a distância entre Antônio e sua esposa. Considere que esse vetor seja \vec{v} , cuja origem é o ponto de coordenadas (5,7) e extremidade é o ponto de coordenadas (1,10). O módulo de \vec{v} será:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1-5)^2 + (10-7)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$$

$$= 5$$

Logo, a distância entre os pontos (5,7) e (1,10) é 5 unidades. Por sua vez, a distância entre esses dois pontos é a distância entre Antônio e sua esposa, ou seja, 5 km.

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

	Velocidade do projétil
1. Competências	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.
2. Objetivos de aprendizagem	Familiarizar-se com vetores e alguns conceitos sobre vetores e sua decomposição. Analisar esses conceitos e utilizar algumas ferramentas que permitirão determinar os módulos de suas componentes e a sua aplicação na resolução de problemas.
3. Conteúdos relacionados	Vetores no plano e no espaço; módulo de vetores.
4. Descrição da situação-problema	Uma cidade A está situada em um mapa sobre o ponto de coordenadas (63, 152), dada em quilômetros. Uma outra cidade B está situada no mesmo mapa sobre o ponto de coordenadas (73, 182). Qual a distância entre essas duas cidades?
5. Resolução da situação-problema	Para calcular a distância entre as duas cidades, precisamos calcular a distâncias entre os pontos de coordenadas (63, 152) e (73, 182). Mas para isso, calculamos o módulo do vetor com origem em um dos pontos e extremidade no outro. Considerando \vec{u} de origem (63, 152) e extremidade (73, 182), temos: $ \vec{u} = \sqrt{(73-63)^2 + (182-152)^2} $ $ \vec{u} = \sqrt{100+900} $

 $\left| \vec{u} \right| = \sqrt{1000}$

 $\left| \vec{u} \right| = 10\sqrt{10}$

Logo, a distância entre as cidades é de aproximadamente 31,62 km.

Faça valer a pena

1. Observe o vetor de coordenadas $\vec{R} = (-3, -4)$. Determine o módulo do vetor \vec{R} :

a) $\left| \overrightarrow{R} \right| = 3$

b) $|\vec{R}| = 4$

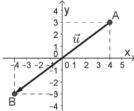
c) $|\vec{R}| = 5$

d) $|\vec{R}| = 8$

e) $\left| \overrightarrow{R} \right| = 7$

2. Observe o vetor abaixo. Podemos afirmar que o valor do módulo do vetor \vec{u} é:

Figura 2.26 | Vetor \vec{u}



Fonte: elaborada pelo autor.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{12}$

b) $|\vec{u}| = 11$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$

d) $|\vec{u}| = 10$

e) $|\vec{u}| = \sqrt{10}$

- **3.** Sendo x = a > 0 e y = -12 as coordenadas de um vetor \vec{S} , qual o valor da coordenada **a** do vetor \vec{S} , de modo que $|\vec{S}| = 13$?
- a) a = 3
- b) a = 12
- c) a = 5
- d) a = 4
- e) a = 7

Seção 2.3

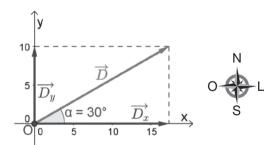
Decomposição de vetores

Diálogo aberto

Olá, aluno!

Você lembra que na seção anterior estudou sobre módulo e norma de vetores? Lembra que você aprendeu a calcular o módulo de um vetor partindo da origem e também partindo de outro ponto qualquer? Para isso, você aprendeu duas fórmulas decorrentes do teorema de Pitágoras. Pois bem, nesta seção você verá que um vetor, aquele que indica o módulo (comprimento) do percurso, pode ser expresso em termos de outros vetores que o compõem e, a partir disso, diversas possibilidades surgirão. Suponha que na sequência à situação descrita na última seção, Antônio resolvesse ir na direção Sudoeste-Nordeste, percorrendo 20 km, conforme Figura 2.27 ($|\vec{D}| = 20 \text{ km}$). Através de vetores podemos determinar a distância que Antônio andou em relação ao Norte e a Leste.

Figura 2.27 | Distância



Fonte: elaborada pelo autor.

E quais são essas distâncias?

Para que você consiga resolver esse e outros problemas, é necessário que veja alguns conceitos sobre vetores e decomposição de vetores, e mais especificamente, analisar e utilizar algumas ferramentas diferentes que lhe permitirão determinar os módulos de suas componentes \vec{D}_{x} e \vec{D}_{v} . Vamos lá?

Não pode faltar

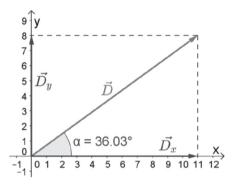
Decomposição de vetores no plano (\mathbb{R}^2)

Decompor um vetor implica em encontrar dois ou mais vetores que o compõem.

Componentes de um vetor

Seja \overrightarrow{D} um vetor no plano xy e \overrightarrow{D} faz um ângulo α qualquer com o eixo das abscissas (x). Podemos representar o vetor \overrightarrow{D} por meio de suas componentes \overrightarrow{D}_x (projeção no eixo x) e \overrightarrow{D}_v (projeção no eixo y).

Figura 2.28 | Componentes



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 2.28 mostra o vetor \vec{D} sendo representado por suas componentes \vec{D}_x e \vec{D}_v no plano xy.

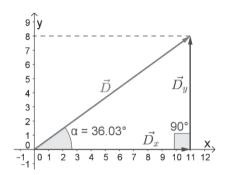


Lembre-se

As componentes de um vetor são grandezas escalares que tanto podem ser positivas quanto negativas.

Se deslocarmos a componente \vec{D}_y do vetor \vec{D} de modo que ele esteja paralelo ao eixo y, os três vetores, \vec{D}_x , \vec{D}_y e \vec{D} formam um triângulo retângulo, mostrado na Figura 2.29, em que valem as propriedades geométricas de triângulos.

Figura 2.29 | Triângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Relações trigonométricas na decomposição de vetores no plano

Observe a Figura 2.29. Podemos perceber que a partir das definições de seno e cosseno de um ângulo, temos que:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{D_x}{\left|\overrightarrow{D}\right|} \Rightarrow D_x = \left|\overrightarrow{D}\right| \cos \alpha$$

Portanto, o módulo da componente \overrightarrow{D}_x do vetor \overrightarrow{D} é determinado por $|\overrightarrow{D}_x| = |\overrightarrow{D}| \cos \alpha$.

Temos, ainda, que:

$$sen \ \alpha = \frac{cateto \ oposto}{hipotenusa} \Rightarrow sen \ \alpha = \frac{D_y}{|\overrightarrow{D}|} \Rightarrow D_y = |\overrightarrow{D}| \ sen \ \alpha$$

Portanto, o módulo da componente \vec{D}_{v} do vetor \vec{D} é determinado por:

$$\left| \overrightarrow{D}_{y} \right| = \left| \overrightarrow{D} \right|$$
 sen α

Para calcular o ângulo
$$\alpha$$
 : tg $\alpha = \frac{D_y}{D_x}$, $\log \alpha = arc \ tg \left(\frac{D_y}{D_x}\right)$.



Reflita

Analisando a relação $\left| \overrightarrow{D}_x \right| = \left| \overrightarrow{D} \right| \cos \alpha$, você acha que ela funciona em qualquer caso? A resposta é não. Note que na Figura 2.29 o ângulo α é menor ou igual a 90° e, nesse caso, $\cos \alpha \geq 0$. Contudo, caso $\alpha > 90$ °, temos $\cos \alpha < 0$ e a relação $\left| \overrightarrow{D}_x \right| = \left| \overrightarrow{D} \right| \cos \alpha$ seria falsa. Considerando o caso geral, $0 \leq \alpha \leq 180$ °, a relação é, na verdade, $\left| \overrightarrow{D}_x \right| = \left| \overrightarrow{D} \right| |\cos \alpha|$.

Já a relação $|\overrightarrow{D}_y| = |\overrightarrow{D}|$ sen α é sempre válida, pois $\sec \alpha \ge 0$ para $0^{\circ} \le \alpha \le 180^{\circ}$, pois no contexto de vetores são considerados sempre ângulos medidos a partir da horizontal com valores entre 0° e 180° .



Atenção

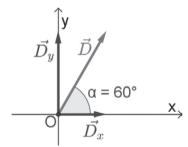
O módulo ou a norma de um vetor \overrightarrow{D} pode ser denotada por $|\overrightarrow{D}|$, D ou $||\overrightarrow{D}||$. Os vetores $|\overrightarrow{D}|_x$ e $|\overrightarrow{D}|_y$ são as componentes de $|\overrightarrow{D}|_y$, de coordenadas $|\overrightarrow{D}|_y = (D_y, D_y)$.



Exemplificando

Observe a Figura 2.30 e determine as coordenadas do vetor resultante, sabendo que D = 20 m.

Figura 2.30 | Vetor \vec{D} e suas componentes, com $\alpha = 60^{\circ}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

As coordenadas de \overrightarrow{D} são (D_{ν}, D_{ν}) , logo:

$$D_x = D\cos\alpha = 20\cdot\cos60^\circ$$

$$D_x = 20.0,5 \Rightarrow D_x = 10 \text{ m}$$

E temos que:

$$D_y = 20 \cdot \text{sen } 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$D_y = 10 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow D_y \cong 17.3 \text{ m}$$

Portanto,
$$D_x = 10 \text{ m} \in D_y = 17,3 \text{ m}$$



Exemplificando

Determine as componentes do vetor resultante \overrightarrow{D} que faz um ângulo com de 45° com o eixo x e cujo módulo $|\overrightarrow{D}|$ = 12.

Resolução:

$$D_x = 12 \cdot \cos 45^\circ$$

$$D_x \cong 12 \cdot 0.71 \Rightarrow D_x = 8.64 \text{ m} \Rightarrow \overrightarrow{D_x} = (8.64; 0)$$

E temos que:

$$D_v = 12 \cdot \text{sen } 45^\circ \cong 12 \cdot 0.71$$

$$D_y = 8,64 \text{ m} \Rightarrow \overrightarrow{D_y} = (0; 8,64)$$

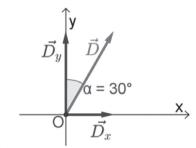
Portanto, as componentes de \overrightarrow{D} são $\overrightarrow{D_x} = (8,64; 0) \in \overrightarrow{D_y} = (0; 8,64)$.



Faça você mesmo

Determine as componentes do vetor resultante, representado na Figura 2.31, sabendo que $|\vec{D}| = 40 \text{ m}$.

Figura 2.31 | Vetor \overrightarrow{D} e suas componentes, com α = 30°



Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Tire suas dúvidas sobre o processo de cálculo do módulo das componentes de um vetor acessando o vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=KmwbGlJv4Ro. Acesso em: 28 mar. 2016.

Expressão analítica de vetores

Vetores no plano (\mathbb{R}^2)

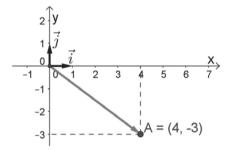
Um par ordenado (x,y) é um vetor no \mathbb{R}^2 o qual podemos denotar $\vec{u}=(x,y)$.

Todo vetor no \mathbb{R}^2 pode ser escrito em função de $\vec{i}=(1,0)$ e $\vec{j}=(0,1)$ chamados de **versores**, em que $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$, posicionados nos eixos cartesianos Ox e Oy, respectivamente (Figura 2.32).

O conjunto de versores $\{\vec{i},\vec{j}\}=\{(1,0),(0,1)\}$ é denominado **base canônica do plano**. Assim, um vetor no \mathbb{R}^2 pode ser escrito como $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$, onde x e y são as coordenadas de \vec{u} . A forma $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ é denominada **expressão analítica** do vetor \vec{u} .

Exemplo: Seja o vetor $\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Podemos reescrever o vetor \vec{u} na forma de par ordenado $\vec{u} = (4, -3)$ e ainda representá-lo no plano como mostra a Figura 2.32.

Figura 2.32 | Vetor $\vec{u} = (4, -3) = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

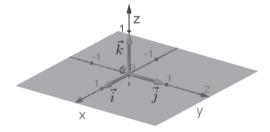


Fonte: elaborada pelo autor.

Vetores no espaço tridimensional (\mathbb{R}^3)

Um vetor \vec{v} no \mathbb{R}^3 é uma tripla ordenada (x,y,z) e podemos escrever $\vec{v}=(x,y,z)$. Da mesma forma que no \mathbb{R}^2 , podemos escrever qualquer vetor do \mathbb{R}^3 em função dos versores $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$, em que $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, posicionados, respectivamente, nos eixos Ox, Oy e Oz (Figura 2.33).

Figura 2.33 | Vetores unitários \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}

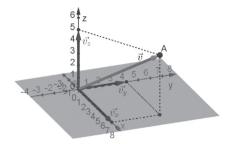


Fonte: elaborada pelo autor.

O conjunto de versores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é a base canônica do espaço. Desse modo, um vetor no que x, y e z são coordenadas de \vec{v} .

Exemplo: Se $\vec{v} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, podemos escrever $\vec{v} = (7,4,5)$ e representá-lo num sistema de eixos como na Figura 2.34.

Figura 2.34 | Vetores no \mathbb{R}^3



Fonte: elaborada pelo autor.

Decomposição de vetores no espaço (\mathbb{R}^3)

Seja \vec{v} um vetor no espaço de coordenadas xyz e θ_x , θ_y e θ_z os ângulos que \vec{v} faz com cada um dos eixos x, y e z. Podemos encontrar as componentes \vec{v}_x , \vec{v}_y e \vec{v}_z adotando o mesmo processo definido para vetores no plano. Desse modo:



Assimile

$$\overrightarrow{v_x} = (v \cos \theta_x, 0, 0)$$
 $\overrightarrow{v_y} = (0, v \cos \theta_y, 0)$ $\overrightarrow{v_z} = (0, 0, v \cos \theta_z)$



Exemplificando

Seja \vec{v} um vetor no espaço de coordenadas xyz e θ_x , θ_y e θ_z os ângulos que \vec{v} faz com cada um dos eixos x, y e z. Sabendo que $\theta_x = 30^\circ$, $\theta_y = 50^\circ$, $\theta_z = 40^\circ$ e que $|\vec{v}| = 5$, calcule as componentes do vetor \vec{v} . Resposta: Sabemos que $\vec{v}_x = (v\cos\theta_x, 0, 0)$, $\vec{v}_y = (0, v\cos\theta_y, 0)$ e $\vec{v}_z = (0, 0, v\cos\theta_z)$. Então temos:

$$\overrightarrow{v_x} = 5.\cos 30^\circ$$
 $\overrightarrow{v_y} = 5 \cdot \cos 50^\circ$ $\overrightarrow{v_z} = 5 \cdot \cos 40^\circ$
= $5 \cdot 0.87$ = $5 \cdot 0.64$ = $5 \cdot 0.77$
= 4.35 = 3.2 = 3.85

Logo:
$$\overrightarrow{v_x} = (4,35; 0; 0)$$
, $\overrightarrow{v_y} = (0; 3,2; 0) \in \overrightarrow{v_z} = (0; 0; 3,85)$.



Pesquise mais

Acesse o material disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/GA_CAP_02.pdf>. Acesso em: 28 maio 2016.

Veja também o vídeo disponível em: https://www.youtube.com/ watch?v=AzelppzQ_KY> (acesso em: 28 maio 2016) e amplie seus conhecimentos sobre vetores.

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto no início desta seção, Antônio percorreu uma distância de 20 km na direção Sudoeste-Nordeste, ou seja, se representarmos sua trajetória por meio de um vetor \vec{D} , seu módulo será 20 km. Além disso, veja que a direção Oeste-Leste está associada ao eixo x e a direção Sul-Norte está associada ao eixo y na Figura 2.27. Com isso, a direção tomada por Antônio faz com o eixo x um ângulo de 30° e o sentido do deslocamento é de Sudoeste para Nordeste.

A distância percorrida para Leste está representada pelo vetor $\overline{D_x}$, ou seja, a componente de \overline{D} sobre o eixo x. A distância percorrida para o Norte está representada pelo vetor $\overline{D_y}$, ou seja, a componente de \overline{D} sobre o eixo y. Sabemos que as componentes de um vetor no plano são determinadas por:

$$D_x = D \cos \alpha \in D_v = D \operatorname{sen} \overline{\alpha}$$

em que α é o ângulo formado entre o vetor \overrightarrow{D} e o eixo x.

Logo, calculando o módulo dessas componentes, temos:

$$D_x = D \cdot \cos \alpha = 20 \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
 17,321 km
 $D_y = D \cdot \sin \alpha = 20 \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ km

Portanto, Antônio andou um equivalente a 17,321 km para o Leste e 10 km em direção ao Norte.



Faça você mesmo

Quais vetores representam os deslocamentos para o Leste e para o Norte realizados por Antônio? Escreva sua expressão analítica.

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafíamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com a de seus colegas.

seus colegas.				
	Velocidade do projétil			
1. Competências	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.			
2. Objetivos de aprendizagem	Familiarizar-se com vetores e alguns conceitos sobre vetores e sua decomposição. Analisar esses conceitos, suas formas analíticas e utilizar algumas ferramentas que lhe permitirão determinar os módulos de suas componentes e a sua aplicação na resolução de problemas.			
3. Conteúdos relacionados	Vetores no plano e no espaço; decomposição de vetores.			
4. Descrição da situação-problema	Um projétil é lançado a partir do solo em uma direção que forma uma inclinação de 45° com o solo e uma velocidade de 400 m/s, determine o módulo das componentes da velocidade $\overrightarrow{v_x}$ e $\overrightarrow{v_y}$ desse projétil.			
5. Resolução da situação-problema	Traçando as componentes v_x e v_y da velocidade, temos: Figura 2.35 Esquema gráfico			

Faça valer a pena

1.	Α	decomposição	de	um	vetor	implica	em	encontrar	dois	ou	mais
ve	tor	es que o compô	óem	١.							

Complete as lacunas da sentença a seguir:

Podemos representar o vetor por meio de suas \vec{D}_x
e \overrightarrow{D}_y . \overrightarrow{D}_x é a componente do vetor original que representa a
de \overrightarrow{D} ao longo do e $\overrightarrow{D_v}$ representa o módulo da projeção
de $\vec{\boldsymbol{D}}$ ao longo do
Agora, assinale a alternativa CORRETA:
a) resultante $\overrightarrow{\textbf{\textit{D}}}$; projeções; componente; eixo x ; eixo y .
b) resultante $\overrightarrow{\textbf{\textit{p}}}$; componentes; projeção; eixo y ; eixo x .
c) componente; projeções; resultante; eixo x; eixo y.
d) resultante $\overrightarrow{\textbf{\textit{D}}}$; componentes; projeção; eixo x ; eixo y .
e) projeção; componentes; projeção; eixo y; eixo x.

- **2.** A coordenada x de um vetor \overrightarrow{R} é $R_x=0,22$. Encontre o valor do ângulo α formado entre esse vetor e o eixo x sabendo que $|\overrightarrow{R}|=0,44$:
- a) $\alpha = 30^{\circ}$
- b) $\alpha=40^{\circ}$
- c) $\alpha = 60^{\circ}$
- d) $\alpha = 35^{\circ}$
- e) $\alpha = 120^{\circ}$
- **3.** Um vetor \vec{D} de módulo igual a 50 cm faz um ângulo $\alpha = 60^{\circ}$ com o eixo das abscissas. Quais são coordenadas x e y do vetor \vec{D} , nessa ordem?
- a) 25 cm, 25,5 cm
- b) 30 cm, 40,3 cm
- c) 25 cm, 43,3 cm
- d) 30 cm, 53,3 cm
- e) 43 cm, 25,5 cm

Seção 2.4

Operação com vetores

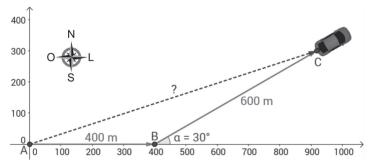
Diálogo aberto

Olá, aluno!

Você se lembra que na seção anterior estudou sobre decomposição de vetores? Lembra que você aprendeu a calcular a componente em relação ao eixo x (\vec{D}_x), e em relação ao eixo y (\vec{D}_y)? Para isto você aprendeu duas fórmulas que utilizam a trigonometria no triângulo retângulo. Lembra também que estudou as expressões analíticas dos vetores no plano e no espaço?

Pois bem, nesta seção você verá que podemos realizar operações com vetores. Além disso, você aprenderá sobre isso encarando mais um problema surgido na viagem de Antônio: suponha que ele percorra 400 m para leste e depois 600 m na direção nordeste inclinada 30° com a direção oeste-leste conforme Figura 2.36. Através da adição de vetores podemos determinar a distância que Antônio está em relação ao ponto inicial em linha reta.

Figura 2.36 | Distância



Fonte: elaborada pelo autor.

E qual é a distância em linha reta de Antônio até seu ponto de saída?

Para que você consiga resolver esse e outros problemas, é necessário que veja alguns conceitos sobre operações com vetores. Vamos lá?

Não pode faltar

Adição geométrica

Você deve ter percebido que umas das aplicações de vetores é a representação de deslocamentos, certo? A Figura 2.36, por exemplo, mostra dois deslocamentos sucessivos realizados por Antônio, sendo que cada um foi representado por um vetor.

Seguindo essa ideia, vamos imaginar que um móvel, inicialmente parado em um ponto A, realize um deslocamento representado por \vec{u} , indo parar no ponto B, conforme Figura 2.37.

Figura 2.37 | Deslocamento de A por um vetor \vec{u}

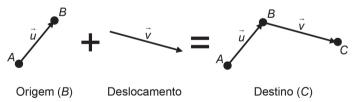


Fonte: elaborada pelo autor.

Assim como sugere a imagem, podemos escrever A + U = B deslocamento destino

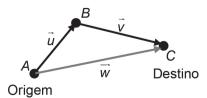
Considere ainda que, após realizar o deslocamento \vec{u} , o móvel faça um novo deslocamento \vec{v} , parando no ponto C (Figura 2.38).

Figura 2.38 | Deslocamento de B por um vetor \vec{v}



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 2.39 | Deslocamento de A por um vetor $\overrightarrow{\textbf{\textit{w}}}$



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com o raciocínio anterior, $\vec{B} + \vec{v} = \vec{C}$, além disso: origem deslocamento destino

$$\underbrace{A}_{\text{origem}} + \underbrace{v}_{\text{deslocamento}} + \underbrace{v}_{\text{deslocamento}} = \underbrace{C}_{\text{destino}}$$

Concorda que o móvel poderia ter chegado ao ponto C realizando um único deslocamento em linha reta? Se chamarmos de \overline{w} esse deslocamento, temos o representado na Figura 2.39. Logo, $\underline{A} + \underline{w} = \underline{C}$. Comparando essa igualdade com a anterior, temos:

 $\overrightarrow{\underline{w}} = \overrightarrow{\underline{u}} + \overrightarrow{\underline{v}}$, ou seja, o deslocamento \overrightarrow{w} é igual (ou deslocamento deslocamento deslocamento equivalente) à soma dos deslocamentos \overrightarrow{u} e \overrightarrow{v} .

O que queremos que perceba com toda essa discussão é que a adição de vetores está associada a um aspecto geométrico que pode ser percebido facilmente ao pensarmos em deslocamentos, por exemplo. Essa interpretação é válida para qualquer aplicação de vetores ao se realizar uma adição geométrica, isto é:

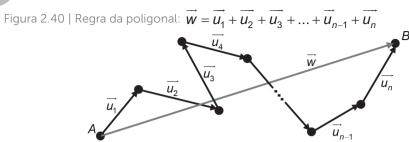


Assimile

Para adicionar geometricamente dois vetores \vec{u} e \vec{v} , seguimos os seguintes passos (acompanhe a seguência observando a Figura 2.39):

- (1) consideramos um ponto de partida, por exemplo A, e escolhemos um representante de \vec{u} que possui A como origem;
- (2) determinamos um ponto B que é a extremidade deste representante de \vec{u} ;
- (3) escolhemos um representante de \vec{v} que possui como origem o ponto \vec{B} :
- (4) determinamos o ponto C, extremidade deste representando de \vec{v} ;
- (5) a soma geométrica $\vec{u} + \vec{v}$ será o vetor \vec{w} que possui entre seus representantes o vetor que possui origem A e extremidade B.

Aplicando esse mesmo raciocínio a sucessivos deslocamentos, obtemos a denominada **regra da poligonal** (Figura 2.40). Veja que na construção da poligonal que a origem de cada vetor (exceto o primeiro) é a extremidade do vetor imediatamente anterior.



Fonte: elaborada pelo autor.

Adição algébrica

Além da adição geométrica, podemos também pensar na adição algébrica de vetores, ou seja, adição de suas componentes. Sejam dois vetores $\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ e $\vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$ de \mathbb{R}^3 . Podemos encontrar o vetor soma $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$, também chamado vetor resultante, pela adição algébrica de suas componentes em cada direção.

$$\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$$

 $\vec{r} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \Rightarrow \vec{r} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k} \Rightarrow \vec{r} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$
Temos ainda:

$$\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$$

 $\vec{r} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{r} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

As propriedades que enunciarmos a seguir são muito importantes no estudo de vetores. Elas são como se fossem "as regras do jogo" ao realizar operações vetoriais.

Propriedades da soma de vetores

Para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , em especial para vetores de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , são válidas as seguintes propriedades:

1) Comutativa:
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$
;

Ou seja, podemos permutar a ordem da soma que o resultado não se altera.

II) Associativa:
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$
;

Podemos associar os vetores de qualquer maneira que a soma não se altera.

III) Elemento neutro: existe um vetor
$$\vec{0}$$
 tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$;

O elemento neutro é aquele que desempenha um papel semelhante ao número zero. Qualquer outro somado com ele não tem seu valor alterado.

IV) Oposto: existe um vetor
$$-\vec{u}$$
 tal que $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\left(-\vec{u}\right)+\vec{u}=\vec{0}$.

Geometricamente, o vetor oposto é aquele que possui o mesmo módulo, mesma direção, mas sentido contrário ao vetor em questão.

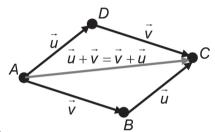


Atenção

A propriedade (I) de comutatividade também é conhecida como **regra do paralelogramo**, facilmente compreendida por meio da Figura 2.41.

A diagonal do paralelogramo construída a partir dos vetores \vec{u} e \vec{v} representa a soma desses vetores. Associando isso a deslocamentos, qualquer que seja o caminho tomado, o destino é o mesmo, o ponto C.

Figura 2.41 | Paralelogramo



Fonte: elaborada pelo autor.

Subtração de vetores

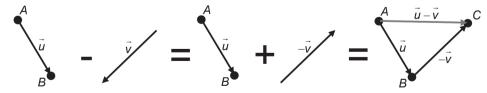


Reflita

Tomando por base o apresentado até agora, como você acha que seria a subtração de dois vetores?

É bem simples, veja primeiramente a interpretação geométrica por meio da Figura 2.42, lembrando da propriedade (IV) da adição.

Figura 2.42 | Subtração de vetores



Fonte: elaborada pelo autor.

Vetores no plano e no espaço 107

Basicamente, uma subtração de vetores é semelhante a uma adição, uma vez que subtrair o segundo do primeiro é o mesmo que adicionar o primeiro ao oposto do segundo, ou seja:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Algebricamente, dados dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \in \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ de \mathbb{R}^3 , temos:

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

Temos ainda:

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$$

 $\vec{r} = (x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{r} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$



Exemplificando

Sejam os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{i}$ e $\vec{v} = 7\vec{i} + 6\vec{j}$. Calcule:

a)
$$\vec{r} = \vec{\mu} + \vec{v}$$

b)
$$\vec{r} = \vec{\mu} - \vec{\nu}$$

Resolução: Utilizando o apresentado até o momento, temos:

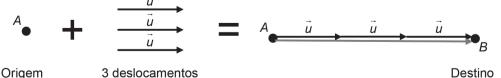
a)
$$\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$$
 \Rightarrow $\vec{r} = (3+7)\vec{i} + (5+6)\vec{j}$ \Rightarrow $\vec{r} = 10\vec{i} + 11\vec{j} = (10,11)$

b)
$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$$
 \Rightarrow $\vec{r} = (3-7)\vec{i} + (5-6)\vec{j}$ \Rightarrow $\vec{r} = -4\vec{i} - 1\vec{j} = (-4, -1)$

Produto de um escalar por um vetor

O que ocorre se realizarmos três deslocamentos sucessivos de mesmo módulo, direção e sentido? Geometricamente, teríamos o apresentado na Figura 2.43.

Figura 2.43 | Três deslocamentos iguais a ${\it u}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Note que, assim como a Figura 2.43 sugere, três deslocamentos iguais a \vec{u} poderiam ser substituídos por um único deslocamento que denotaremos $3\vec{u}$. Algebricamente, a notação $3\vec{u}$ indica o produto do número 3 pelo vetor \vec{u} , ou seja, $3\vec{u}=3\cdot\vec{u}$. Observe que o vetor $3\vec{u}$ tem a mesma direção e sentido que \vec{u} . Além disso, o seu módulo foi multiplicado por 3.



Assimile

Dado um número real k, também denominado escalar, não nulo, e um vetor \vec{u} , o produto de k por \vec{u} tem como resultado um novo vetor $\vec{v} = k\vec{u}$ tal que:

- (1) \vec{ku} e \vec{u} têm a mesma direção (são paralelos);
- (2) se k > 0, então $k\vec{u}$ e \vec{u} têm o mesmo sentido;
- (3) se k < 0, então \vec{ku} e \vec{u} têm sentidos opostos;
- (4) se k = 0, então $\vec{ku} = \vec{0}$;
- (5) $k\vec{u}$ tem módulo igual a $|k|\cdot|\vec{u}|$, ou seja, módulo de \vec{u} multiplicado pelo valor absoluto de k.

Veja no exemplo a seguir alguns casos particulares do produto \vec{ku} para alguns valores de k.



Exemplificando

Represente geometricamente o produto \vec{ku} para k igual a 1, -1, 1/2, -2 e 0.

Resolução: De acordo com os itens (1)-(5) apresentados anteriormente, o produto de: 1 pelo vetor \vec{u} tem como resultado o próprio vetor; -1 pelo vetor \vec{u} tem como resultado outro vetor de mesma direção, sentido oposto e módulo igual a $|-1| \cdot |\vec{u}| = |\vec{u}|$, ou seja, o oposto de \vec{u} ; 1/2 pelo vetor \vec{u} tem como resultado outro vetor de mesma direção e sentido, mas de módulo igual à metade do módulo de \vec{u} ; -2 pelo vetor \vec{u} tem como resultado outro vetor de mesma direção, sentido oposto e módulo igual ao dobro do módulo de \vec{u} ; 0 pelo vetor \vec{u} tem como resultado o vetor nulo. Representando-os geometricamente, temos o exposto na Figura 2.9.

Vetores no plano e no espaço 109

Algebricamente, dados $k \in \vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, temos:

$$k\vec{u} = k \cdot \vec{u} = k \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \right) = k x_1 \vec{i} + k y_1 \vec{j} + k z_1 \vec{k}$$

Além disso, de acordo com Venturi (2015, p. 69), sejam:

m e n escalares quaisquer e $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{w}}$ vetores arbitrários:

I) Propriedade associativa em relação aos escalares.

$$m(n\vec{v}) = n(m\vec{v}) = (mn)\vec{v}$$

II) Propriedade distributiva em relação à adição de escalares.

$$(m+n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$$

III) Propriedade distributiva em relação à adição de vetores.

$$m(\vec{v} + \vec{w}) = m\vec{v} + m\vec{w}$$



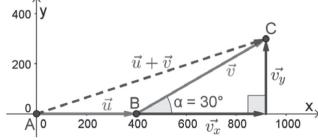
Pesquise mais

Amplie seus conhecimentos sobre vetores com o material disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/vetores.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2016.

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto no início desta seção, sabemos que Antônio percorreu 400 m para Leste (deslocamento \vec{u} , com $|\vec{u}|$ = 400 m) e depois 600 m na direção Nordeste (deslocamento \vec{v} , com $|\vec{v}|$ = 600 m) inclinada 30° com a direção oeste-leste, indo do ponto A ao ponto C passando por B, conforme Figura 2.44.

Figura 2.44 | Caminho percorrido por Antônio e outros possíveis



Fonte: elaborada pelo autor.

Nosso objetivo é obter $|\vec{u} + \vec{v}|$, ou seja, a distância em linha reta entre o ponto inicial A e o ponto final C. Para alcançá-lo, primeiramente precisamos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ para depois calcular seu módulo.

Observe que, de acordo com o que vimos nesta seção, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$. Portanto, se soubermos as coordenadas de \overrightarrow{u} , $\overrightarrow{v_x}$ e $\overrightarrow{v_y}$, podemos determinar as de \overrightarrow{AC} . Em relação às componentes de \overrightarrow{v} , temos:

$$v_x = |\vec{v}| \cos \alpha = 600 \cdot \cos 30^\circ = 600 \frac{\sqrt{3}}{2} = 300 \sqrt{3}$$

$$v_y = |\vec{v}| \sin \alpha = 600 \cdot \sin 30^\circ = 600 \frac{1}{2} = 300$$

Logo, $\overrightarrow{v_x} = (300\sqrt{3}, 0)$ e $\overrightarrow{v_y} = (0, 300)$, pois possuem, respectivamente, direções x e y. Além do mais, $\overrightarrow{u} = (400, 0)$ e $\overrightarrow{v} = (300\sqrt{3}, 300)$. Com isso, somos capazes de calcular as coordenadas de \overrightarrow{AC} e o seu módulo:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (400, 0) + (300\sqrt{3}, 300) = (400 + 300\sqrt{3}, 300)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(400 + 300\sqrt{3})^2 + 300^2} = \sqrt{160000 + 240000\sqrt{3} + 270000 + 90000}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{520000 + 240000\sqrt{3}} \, \Box \sqrt{520000 + 415692,194} \, \Box \, 967,312 \, m$$

Portanto, podemos concluir que a distância do ponto inicial A até onde Antônio se encontra após os dois deslocamentos, ponto C, é aproximadamente 967,312 m.

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com a de seus colegas

Soma de vetores		
1. Competências	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.	
2. Objetivos de aprendizagem	Familiarizar-se com vetores e os conceitos sobre operações de vetores em diferentes direções e utilizar algumas ferramentas que lhe permitirão determinar distâncias através dos módulos dos vetores e a sua aplicação na resolução de problemas.	
3. Conteúdos relacionados	Operações com vetores.	

Vetores no plano e no espaço

111

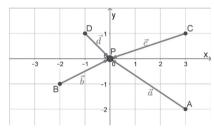
Uma das aplicações de vetores é na representação de forças, como no caso do projeto de estruturas de concreto e estruturas metálicas. Um dos cálculos comumente realizados nesse caso é o da **força resultante** que é obtida por meio da adição de todas as forças atuantes.

Considere que o ponto P (móvel) representado na Figura 2.45

comece a sofrer a atuação das forças \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} .

Figura 2.45 | Forças atuando sobre P

4. Descrição da situação-problema



Fonte: elaborada pelo autor.

Qual a força resultante, seu módulo e para qual quadrante o ponto irá se mover?

Para determinar a força resultante, precisamos determinar as coordenadas de cada um dos vetores que as representam, como seque:

$$\vec{a} = (0 - 3, 0 - (-2)) = (-3, 2) = -3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{b} = (0 - (-2), 0 - (-1)) = (2, 1) = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{c} = (0 - 3, 0 - 1) = (-3, -1) = -3\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{d} = (0 - (-1), 0 - 1) = (1, -1) = \vec{i} - \vec{j}$$

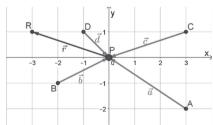
Logo, a força resultante será:

$$\vec{r} = (-3, 2) + (2, 1) + (-3, -1) + (1, -1) = (-3, 1) = -3\vec{i} + \vec{j}$$

e seu módulo: $\left|\vec{r}\right| = \sqrt{\left(-3\right)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \;\; \text{N (Newtons)}$

5. Resolução da situação-problema

Representando a força resultante no plano, temos a Figura 2.46. Figura 2.46 | Forças atuando sobre *P*



Fonte: elaborada pelo autor.

Como é possível perceber, a resultante de todas as forças aponta para o segundo quadrante, direção e sentido que o ponto P começará a se mover.

Faça valer a pena

- **1.** Sejam os vetores $\vec{u} = (2, -3, 5)$, $\vec{v} = (0, 1, 4)$ e $\vec{w} = (-4, 0, 5)$. Podemos afirmar que o vetor resultante $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ é:
- a) $\vec{r} = (2, -2, 0)$
- b) $\vec{r} = (2,0,10)$
- c) $\vec{r} = (-2, -2, 14)$
- d) $\vec{r} = (-2, -3, 10)$
- e) $\vec{r} = (-6, -2, 14)$
- **2.** Sejam os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{v} = -3\vec{i} + 7\vec{j}$. Podemos afirmar que o vetor resultante \vec{r} , tal que $\vec{r} = 3\vec{u} 2\vec{v}$, é:
- a) $\vec{r} = (12,5)$
- b) $\vec{r} = (5,11)$
- c) $\vec{r} = (12, -2)$
- d) $\vec{r} = (-1,11)$
- e) $\vec{r} = (3, -2)$
- **3.** Um objeto está sob ação de três forças coplanares conforme a Figura 2.47. O valor da força resultante é:

Figura 2.47 | Forças atuando sobre um objeto

$F_1 = 20 \text{ N}$	Α		F ₂	= 6	0 N	
	F ₃	= 30	N			
	,					

Fonte: elaborada pelo autor.

- a) 110 N
- b) 70 N
- c) 60 N
- d) 50 N
- e) 30 N

Referências

ANTON, H. Álgebra linear com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra linear. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 2. ed. São Paulo: Mc Graw-Hill, 1986-1987.

CALLOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. Álgebra linear e aplicações. 4. ed. São Paulo: Atual, 1983.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. Um curso de álgebra linear. São Paulo: Edusp, 2001.

VENTURI, J. J. Álgebra vetorial e geometria analítica. 10. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2015. Disponível em: <www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2016.

Produto escalar e vetorial

Convite ao estudo

Olá, aluno.

Para iniciar mais uma unidade de ensino, vamos supor que você seja contratado por uma siderúrgica e que seja designado como responsável pela linha de produção. Nessa empresa você terá que realizar vários trabalhos, como cortes de chapas por meio de programação de máquinas de corte, instalação de estruturas de trabalho que envolvam treliças e confecção de componentes para robôs da linha de produção.

Para executar esses trabalhos, programar as máquinas e os robôs será necessário utilizar vetores de uma maneira mais aprofundada. Além disso, você será responsável também por resolver outros problemas pertinentes à linha de produção.

Algumas situações que aparecerão no dia a dia envolverão conteúdos essenciais desta unidade: veremos combinação linear de vetores, produto escalar, vetorial e aplicações, projeção de um vetor sobre outro vetor, ângulos entre vetores etc.

Pronto para começar? Vamos lá.

Seção 3.1

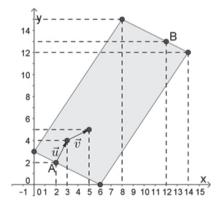
Combinação linear de vetores

Diálogo aberto

A combinação linear entre vetores é extremamente importante para a Geometria Analítica, tendo várias aplicações não só em Matemática, mas em outras áreas, principalmente na Engenharia. Nesta área, as aplicações desse conteúdo são amplas, estabelecendo relações entre vetores que nos proporcionam condições para determinar direções de cortes, ângulos entre barras ou placas, pontos de fixação de estruturas etc.

É exatamente a combinação linear que ajudará você em suas tarefas na linha de produção. Suponha que, em seu primeiro trabalho, uma chapa metálica de formato igual a um paralelogramo precise ser cortada ao meio. Os cantos da chapa estão posicionados sobre pontos em um plano cartesiano, como indicado na Figura 3.1.

Figura 3.1 | Chapa metálica



Fonte: elaborada pelo autor.

Dois cortes já foram realizados e estão indicados pelos vetores \vec{u} e \vec{v} . Os demais cortes deverão ser idênticos aos realizados até agora, ou seja, de mesma direção, sentido e comprimento, e, além disso, o último corte deverá terminar no

ponto B. Para programar a máquina de corte, você deverá calcular quantos cortes iguais a \vec{u} e quantos iguais a \vec{v} ainda serão necessários.

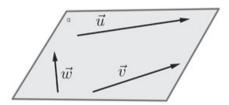
E agora, qual o passo a passo para a realização dessa tarefa? Para responder a essa e outras perguntas que podem surgir, precisamos conhecer alguns conceitos importantes.

Não pode faltar

Vetores coplanares

Dizemos que os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são vetores coplanares se eles possuírem representantes em um mesmo plano α , conforme ilustra a Figura 3.2.

Figura 3.2 | Vetores coplanares



Fonte: elaborada pelo autor.



Reflita

Dois vetores são sempre coplanares. Três vetores podem ser coplanares ou não.

Combinação linear de vetores

Dizemos que um vetor \vec{v} é a combinação linear de n vetores \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , ..., \vec{u}_n se existirem os escalares k_1 , k_2 , ..., k_n , tal que $\vec{v} = \mathbb{I} k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2 + ... + k_n \vec{u}_n$.



Exemplificando

Sejam $\vec{u}=(1,-2,0)$, $\vec{v}=(-3,6,0)$ e \vec{w} vetores do \mathbb{R}^3 . Se \vec{w} é a combinação linear de \vec{u} e \vec{v} , tal que $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$, quais as coordenadas do vetor \vec{w} ?

Primeiramente, dizemos que 2 e 3 são coeficientes da combinação linear que forma o vetor \overrightarrow{w} . Calculando o vetor \overrightarrow{w} , temos:

$$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

 $\vec{w} = 2(1, -2, 0) + 3(-3, 6, 0)$

 $\vec{w} = (2 - 9, -4 + 18, 0)$

 $\vec{w} = (-7, 14, 0)$

Logo, (-7, 14, 0) são as coordenadas do vetor \vec{w} .

Sendo $\overrightarrow{w}=(x_n,y_n,z_n)$ um vetor formado pela combinação linear de $\overrightarrow{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\overrightarrow{v}=(x_2,y_2,z_2)$, então $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{au}+\overrightarrow{bv}$. Podemos também escrever o vetor \overrightarrow{w} da seguinte maneira:

$$\overrightarrow{w} = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2)$$
 $(x_n, y_n, z_n) = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2)$
Logo, temos: $x_n = ax_1 + bx_2$ $y_n = ay_1 + by_2$ $z_n = az_1 + bz_2$

Resolvendo o sistema anterior, encontramos os coeficientes a e b da combinação linear.

Como já vimos na Seção 2.1 deste livro didático, um sistema pode ser escrito na forma de equação matricial, logo, para a combinação linear anterior:

$$\vec{w} = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2)$$

$$(x_n, y_n, z_n) = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2) \implies \begin{cases} x_n = ax_1 + bx_2 \\ y_n = ay_1 + by_2 \\ z_n = az_1 + bz_2 \end{cases}$$

Temos a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = a \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + b \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$



Exemplificando

O vetor $\vec{w} = (7,2,9)$ é a combinação linear dos vetores $\vec{u} = (2,1,3)$ e $\vec{v} = (1,0,1)$. Quais os coeficientes dessa combinação?

Podemos escrever o vetor \overrightarrow{w} como combinação linear dos vetores \overrightarrow{u} e \overrightarrow{v} , logo:

$$(7,2,9) = a \times (2,1,3) + b \times (1,0,1)$$

O que nos conduz ao sistema:

$$2a + b = 7$$

$$a + 0b = 2$$

$$3a + b = 9$$

Resolvendo o sistema, temos da segunda equação que a = 2. Substituindo o valor de a na 1^a ou na 3^a equação, temos que b = 3. Logo, a solução do sistema é a = 2 e b = 3, ou seja,

$$\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$$
.

Vetores linearmente independentes

Dizemos que um conjunto de vetores $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$,..., $\overrightarrow{u_n}$ é **linearmente independente** (LI) se a equação $a_1 \times \overrightarrow{u_1} + a_2 \times \overrightarrow{u_2} + ... + a_n \times \overrightarrow{u_n} = 0$ tiver como solução apenas $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. Isso é o mesmo que dizer que o sistema gerado por esses vetores é homogêneo e sua única solução é a trivial, ou seja, (0,0,...,0).



Exemplificando

Observe os vetores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,1,0)$ e $\vec{w}=(1,0,0)$. Para verificar se os vetores são LI, escrevemos a equação $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=0$, ou ainda:

$$a \times (1,1,1) + b \times (1,1,0) + c \times (1,0,0) = 0$$
 \Rightarrow
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Como a = 0, substituindo na 2ª equação encontramos b = 0. Substituindo esses dois valores na 1ª equação, temos que c = \vec{u} . Então, a única solução do sistema é $\{(0,0,0)\}$ e os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são linearmente independentes.

Vetores linearmente dependentes

Um conjunto de vetores $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_n}$ é **linearmente dependente** (LD) se o sistema linear homogêneo $a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + ... + a_n\overrightarrow{u_n} = 0$ admitir pelo menos uma solução diferente da trivial (0, 0, ..., 0).



Exemplificando

Observe os vetores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,-1,3)$ e $\vec{w}=(1,-5,3)$. Para verificar se os vetores são LD, escrevemos a equação $\vec{xu}+\vec{yv}+\vec{zw}=0$, ou ainda:

$$x \times (1,1,1) + y \times (2,-1,3) + z \times (1,-5,3) = 0$$

Para resolver o sistema, isolamos x na 1^a equação obtendo:

$$x = -2y - z$$

Substituindo x na 2^a e 3^a equações, obtemos:

$$-2y-z-y-5z=0$$
 \Rightarrow $-3y-6z=0$ \Rightarrow $y=-2z$

$$-2y-z+3y+3z=0$$
 \Rightarrow $y+2z=0$ \Rightarrow $y=-2z$

Logo, temos infinitas soluções, tal que y = -2z. Fazendo z = a, temos que a solução geral do sistema é qualquer tripla da forma $\{(3a, -2a, a)\}$.

Então, além da solução trivial $\{(0,0,0)\}$, o sistema admite infinitas soluções, por exemplo, $\{(3,-2,1)\}$, obtida para a=1. Portanto, os vetores \overrightarrow{u} , \overrightarrow{v} e \overrightarrow{w} são linearmente dependentes.



Reflita

O versor de um vetor dado e o próprio vetor são sempre linearmente dependentes. Os versores $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ e $\vec{k}=(0,0,1)$ são linearmente independentes.



Faça você mesmo

Verifique se os vetores $\vec{u} = (2,2,-1)$, $\vec{v} = (1,-2,1)$ e $\vec{w} = (1,-4,0)$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes.

Além do modo já apresentado, há ainda outra maneira prática de verificar se três vetores do 3 são linearmente independentes ou dependentes. Isso envolve o cálculo de um determinante. Veja:



Assimile

Sejam os vetores $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$. Para verificar se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são linearmente dependentes ou independentes, escrevemos o sistema:

$$au_x + bv_x + cw_x = 0$$

$$au_y + bv_y + cw_y = 0$$

$$au_z + bv_z + cw_z = 0$$

Que pode ser representado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
u_x & v_x & w_x \\
u_y & v_y & w_y \\
u_z & v_z & w_z
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a \\
b \\
c
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}$$

Sendo D a matriz dos coeficientes do sistema, temos que:

- Se $\det D = 0$, o sistema formado pelos vetores tem mais de uma solução, ou seja, pelo menos uma solução diferente da solução trivial, então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são linearmente dependentes (LD).
- Se **det** *D* ≠ **0**, o sistema é possível e determinado, ou seja, tem uma única solução, que é a solução trivial. Então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são linearmente independentes (LI).



Reflita

Dados quaisquer <u>dois</u> vetores, eles serão LD se, e somente se, forem paralelos.

Dados quaisquer <u>três</u> vetores, eles serão coplanares se, e somente se, forem LD.



Exemplificando

Considere os vetores $\vec{u} = (5,1,-1)$, $\vec{v} = (0,-2,4)$ e $\vec{w} = (-10,-2,2)$.

Vamos verificar se esses vetores são coplanares ou não coplanares.

Escrevendo a matriz D dos coeficientes do sistema, temos:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante, temos:

$$\det D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-20 - 40 + 0) - (-20 - 40 + 0) = 0$$

Logo, det D = 0. Então $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}$ e $\vec{\boldsymbol{w}}$ são LD e, consequentemente, coplanares.



Reflita

Em um grupo de vetores ${\it W}_1$, ${\it W}_2$, ..., ${\it W}_n$, se algum dos vetores for múltiplo de outro vetor do mesmo grupo, então a sequência será linearmente dependente.

Em um conjunto de vetores $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_n}$ se algum dos vetores for gerado pelos demais vetores, ou seja, for combinação linear de outros desses vetores, então a sequência será linearmente dependente.

Para entender melhor essas afirmações, lembre-se das propriedades de determinantes.



Pesquise mais

Aprofunde seus conhecimentos sobre combinação linear de vetores e vetores linearmente dependentes e independentes acessando o artigo disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/GA_CAP_03.pdf. Acesso em: 25 jun. 2016.

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto inicialmente, lembre-se de que uma chapa metálica de formato igual a um paralelogramo precisava ser cortada ao meio e que dois cortes já foram realizados e estão indicados pelos vetores \vec{u} e \vec{v} . Você deve programar a máquina de corte calculando quantos cortes iguais a \vec{u} e quantos iguais a \vec{v} ainda serão necessários.

Para isso, primeiro precisamos determinar α e β tais que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \overrightarrow{AB}$, ou seja, quais as constantes α e β tais que a combinação linear de \vec{u} e \vec{v} vai gerar o vetor \overrightarrow{AB} , conforme a Figura 3.1. Observe que o vetor \overrightarrow{AB} tem origem no ponto (2,2) e extremidade no ponto (12,13), logo $\overrightarrow{AB} = (10,11)$. Veja também que $\vec{u} = (1,2)$ e $\vec{v} = (2,1)$. Substituindo os valores em $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \overrightarrow{AB}$, obtemos:

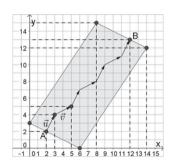
$$\alpha (1,2) + \beta (2,1) = (10,11)$$
 \Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 10 \\ 2\alpha + \beta = 11 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos da 1ª equação $\alpha=10-2\beta$. Substituindo na 2ª equação, temos:

$$2 \times (10 - 2\beta) + \beta = 11 \implies 20 - 4\beta + \beta = 11 \implies -3\beta = -9 \Rightarrow \beta = 3$$

Como $\beta=3$, temos $\alpha=10-2\beta\Rightarrow\alpha=4$. Logo, a solução do sistema é $\alpha=4$ e $\beta=3$. Então serão necessários quatro cortes idênticos a \vec{v} e três cortes idênticos a \vec{u} . Podemos acrescentar esses cortes à Figura 3.1 e obter a representação da Figura 3.3:

Figura 3.3 | Chapa cortada



Fonte: elaborada pelo autor.



Atenção

Há mais de uma maneira de realizar os cortes, pois:

$$4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}$$
, e também
 $4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{v}$, entre outras.

Mas a disposição que corta a chapa ao meio é somente a primeira.

Avançando na prática

Pratique mais

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

seus colegas.				
	Instalação de treliças			
1. Competências	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.			
2. Objetivos de aprendizagem	Compreender e interpretar geometricamente os vetores, aplicando os fundamentos da álgebra vetorial na solução de problemas.			
3. Conteúdos relacionados	Sistemas, equações matriciais, combinação linear, vetores linearmente dependentes e independentes.			
4. Descrição da situação-problema	Para fazer a instalação de uma treliça, um engenheiro utilizou um programa que compara cada haste da treliça com um vetor. Colocando os dados no sistema, tem-se que as hastes da treliça se comportam apenas de três maneiras, ou seja, três vetores. Esses vetores são representados por $\vec{u}=(5,1,-2)$, $\vec{v}=(2,-4,1)$ e $\vec{w}=(6,1,2)$. O sistema dá como resposta um vetor resultante, que é a combinação dos vetores "hastes", e a quantidade de cada um dos tipos de hastes. Nesse caso, o vetor resultante foi $\vec{r}=(66,-10,9)$. Descubra a quantidade de cada uma das hastes.			
5. Resolução da situação-problema	Chamamos as quantidades de cada haste de a , b e c . Construindo a combinação linear, temos: $a \times (5,1,-2) + b \times (2,-4,1) + c \times (6,1,2) = (66,-10,9)$, que resulta no sistema: $5a + 2b + 6c = 66$ $a - 4b + c = -10$ $-2a + b + 2c = 9$ Isolamos a na 2^a equação: $a = 4b - c - 10$. Substituindo a na 1^a e 3^a equações, temos que: $5 \times (4b - c - 10) + 2b + 6c = 66 \Rightarrow 22b + c = 116$ $-2 \times (4b - c - 10) + b + 2c = 9 \Rightarrow -7b + 4c = -11$ $c = 116 - 22b$ Dessas duas últimas equações, isolamos c na 1^a : $-7b + 4 \times (116 - 22b) = -11 \Rightarrow -95b = -475 \Rightarrow b = 5$ Substituindo na última equação, obtemos o valor de b : Voltando no 2^a sistema e substituindo b , encontramos $c = 6$, e no 1^a sistema, substituindo $c = 6$ 0, e no $c = 6$ 1, for am necessárias 4 hastes do tipo representado pelo vetor $c = 6$ 1, $c = 6$ 2, $c = 6$ 3, $c = 6$ 4, $c = 6$ 4, $c = 6$ 5, $c = 6$ 5, $c = 6$ 5, $c = 6$ 6, $c = 6$ 7, $c = 6$ 9, $c $			

Faça valer a pena

- **1.** Observe os escalares p, q, $r \in \mathbb{R}$, tal que (1,2,3) = p(1,0,0) + q(1,1,0) + r(1,1,1). Podemos afirmar que o valor da expressão 2p + 3q r é:
- a) 9
- b) 15
- c) -8
- d) -13
- e) 16
- **2.** Determine o valor de α para que o vetor $\vec{u} = (-1, \alpha, -7)$ seja combinação linear dos vetores $\vec{u}_1 = (1, -3, 2)$ e $\vec{u}_2 = (2, 4, -1)$.
- a) $\alpha = 18$.
- b) $\alpha = -21$.
- c) $\alpha = -11$.
- d) $\alpha = 24$.
- e) $\alpha = 13$.
- **3.** Encontre uma relação entre x, y e z de modo que (x,y,z) seja combinação linear dos vetores (1,-3,2) e (2,4,-1).
- a) x = z.
- b) x y 2z = 0.
- c) x + y = 0.
- d) x = y = z = 0.
- e) y z = 0.

Seção 3.2

Produto escalar e ângulo entre dois vetores

Diálogo aberto

Olá, aluno!

Você se lembra que, na seção anterior, estudou sobre combinação linear de vetores? Lembra que calculou quantos cortes precisava fazer naquela placa? Esperamos que você tenha percebido que em situações como aquela é possível usar a combinação linear de vetores para encontrar a quantidade de cada vetor que será utilizada. Suponha agora que a empresa em que trabalha precisa montar a estrutura metálica de um galpão e que você deve determinar o ângulo entre as barras metálicas dessa estrutura, como na Figura 3.4.

Suponha que você já conseguiu determinar as direções das barras, e que essas estão representadas pelos vetores $\vec{u} = (2,1,5)$ e $\vec{v} = (-1,-3,4)$. Agora é preciso determinar o ângulo entre esses dois vetores.

Para conseguir resolver esse problema e outros envolvendo ângulo entre vetores, precisamos saber calcular o produto escalar entre eles.

Figura 3.4 | Estrutura metálica



Fonte: http://goo.gl/El7PgM. Acesso em: 9 ago. 2016.

Não pode faltar

Nesta seção estudaremos o produto escalar e o ângulo entre vetores. Esses conteúdos têm grandes aplicações, principalmente na engenharia. Com eles podemos calcular ângulos entre estruturas, barras metálicas, entre outras. Na próxima seção usaremos esses conhecimentos para calcular projeções de vetores, que têm grande utilização na engenharia.

Produto escalar entre vetores

Dados dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, o produto escalar desses dois vetores (e denotamos $\vec{u} \cdot \vec{v}$) é o número real $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2 + z_1 \times z_2$.

Considerando os vetores $\vec{u} = (2,3,-7)$ e $\vec{v} = (8,-5,6)$, por exemplo, o produto escalar entre \vec{u} e \vec{v} é obtido efetuando:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 8 + 3 \times (-5) + (-7) \times 6 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 16 - 15 - 42$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -41$$

Logo, o produto escalar entre $\vec{\mu}$ e \vec{v} é o número real -41.



Exemplificando

O produto escalar entre os vetores $\vec{u} = (4, x, -1)$ e $\vec{v} = (x, 7, -5)$ é 38. Encontre o valor de x.

Resolução: Calculando o produto escalar, temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = X_1 \times X_2 + Y_1 \times Y_2 + Z_1 \times Z_2$$

38 = 4 × x + x × 7 + (-1) × (-5) \Rightarrow 38 = 11x + 5 \Rightarrow 11x = 33 \Rightarrow x = 3

Logo, o valor de x para que o produto escalar seja $\vec{u} \cdot \vec{v} = 38$, é 3.

Propriedades do produto escalar

As propriedades do produto escalar nos auxiliam na resolução de algumas situações. Para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} e um escalar k, temos:

I.
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$
 (comutatividade)

Inverter a ordem dos vetores em um produto escalar não altera o resultado.

$$|| \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{v}}|^2$$

O produto escalar de um vetor por ele mesmo é igual ao quadrado de seu módulo.

$$||| \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

O produto escalar de um vetor por uma soma de outros dois é igual à soma dos produtos escalares, do primeiro com o segundo somado com o produto do primeiro com o terceiro.

$$\forall \ (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Mudar o escalar de posição não altera o resultado final.

V.
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \le |\vec{u}| \times |\vec{v}|$$
, conhecida como desigualdade de Schwarz.

Essa propriedade será abordada no decorrer desta seção, quando será apresentada outra expressão para o produto escalar.

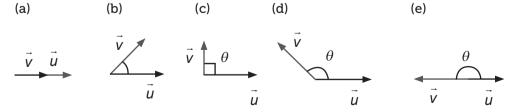
$$\forall \mathsf{I}. |\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \text{ , conhecida como desigualdade triangular.}$$

Os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{u} + \vec{v} formam, geometricamente, um triângulo. Essa desigualdade indica que um dos lados desse triângulo nunca terá comprimento maior que a soma dos outros dois.

Ângulo entre dois vetores

O ângulo θ entre dois vetores é a medida da menor abertura entre esses vetores, com $0 \le \theta \le 180^{\circ}$, levando em conta seu sentido. Temos cinco casos de ângulos entre vetores que merecem destaque.

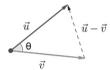
Figura 3.5 | Ângulo entre vetores: (a) $\theta=0^\circ$; (b) $0^\circ < \theta < 90^\circ$; (c) $\theta=90^\circ$; (d) $90^\circ < \theta < 180^\circ$; (e) $\theta=180^\circ$



Fonte: elaborada pelo autor.

Outra maneira de calcular o produto escalar

Figura 3.6 | Produto escalar e ângulo entre vetores



Fonte: elaborada pelo autor.

O produto escalar de dois vetores \vec{u} e \vec{v} também pode ser dado pela expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$, em que θ representa o ângulo entre os vetores, como na Figura 3.5.

Para demonstrar essa fórmula, usamos a lei dos cossenos no triângulo da Figura 3.6:

$$\left| \vec{u} - \vec{v} \right|^2 = \left| \vec{u} \right|^2 + \left| \vec{v} \right|^2 - 2 \left| \vec{u} \right| \left| \vec{v} \right| \cos \theta$$

Consequentemente, temos:

$$(x_{1} - x_{2})^{2} + (y_{1} - y_{2})^{2} + (z_{1} - z_{2})^{2} = x_{1}^{2} + y_{1}^{2} + z_{1}^{2} + x_{2}^{2} + y_{2}^{2} + z_{2}^{2} - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$x_{1}^{2} - 2x_{1}x_{2} + x_{2}^{2} + y_{1}^{2} - 2y_{1}y_{2} + y_{2}^{2} + z_{1}^{2} - 2z_{1}z_{2} + z_{2}^{2} =$$

$$x_{1}^{2} + y_{1}^{2} + z_{1}^{2} + x_{2}^{2} + y_{2}^{2} + z_{2}^{2} - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

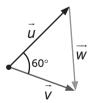
$$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = x_{1}x_{2} + y_{1}y_{2} + z_{1}z_{2}$$

Logo, como $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = u \cdot v$, temos: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$.



Exemplificando

Figura 3.7 | Vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w}



Fonte: elaborada pelo autor.

Sejam os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} tais que $|\vec{u}| = 4$ e $|\vec{v}| = 15$. Determine o produto escalar entre \vec{u} e \vec{w} , sabendo que os três vetores determinam o triângulo da Figura 3.7. Depois, marque a alternativa correta:

a) 11.

c) 13.

e) 15.

b) 12.

d) 14.

Observando a Figura 3.7, temos que $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$ e o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é $\theta = 60^\circ$. Multiplicando escalarmente pelo vetor \vec{u} ambos os lados dessa igualdade, temos: $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$. Aplicando a definição do produto escalar e suas propriedades:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos \theta \implies \vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos \theta - |\vec{u}|^2$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 4 \times 15 \times \cos 60^{\circ} - 4^{2} \implies \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 14$$
 (letra d)



Reflita

Sabemos que $0^{\circ} \le \theta \le 180^{\circ}$ e que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$, então:

Se $\vec{u}\cdot\vec{v}<0\Rightarrow\cos\theta<0$, logo $90^{\circ}<\theta<180^{\circ}$, ou seja, θ é obtuso.

Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Rightarrow \cos \theta > 0$, logo $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$, ou seja, θ é agudo.

Desigualdade de Schwarz

Utilizando a expressão do produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ e lembrando que $-1 < \cos \theta < 1$, temos:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\cos \theta|$$
 (mas $0 \le |\cos \theta| \le 1$)

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \le |\vec{u}| |\vec{v}| \cdot 1$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \le |\vec{u}| |\vec{v}|$$

Assim fica justificada a desigualdade de Schwarz.

Cálculo do ângulo entre dois vetores

Para determinar o ângulo entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} , basta usarmos a definição de produto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta \xrightarrow{\text{Isolando } \cos \theta} \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|u||v|}$$

Logo, o ângulo heta formado entre os vetores \vec{u} e \vec{v} é o arco cujo cosseno é o

número
$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$
, e escrevemos: $\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$

Produto escalar e vetorial

133



Lembre-se

O ângulo θ formado entre os vetores \vec{u} e \vec{v} é medido em radianos (ou graus), e $0 \le \theta \le \pi$ (ou $0 \le \theta \le 180^\circ$).

Lembre-se de que para transformar de graus para radianos basta multiplicar por $\frac{\pi}{180^\circ}$. E para transformar de radianos para graus, basta multiplicar por $\frac{\pi}{180^\circ}$

 $\frac{180^{\circ}}{\pi}$



Exemplificando

Encontre o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (9,-2)$.

Resolução: Primeiro vamos determinar o módulo de cada um dos vetores.

$$\left| \vec{u} \right| = \sqrt{1^2 + 3^2} \Rightarrow \left| \vec{u} \right| = \sqrt{10}$$

$$\left| \vec{v} \right| = \sqrt{9^2 + \left(-2 \right)^2} \Rightarrow \left| \vec{v} \right| = \sqrt{85}$$

Agora calculamos o produto escalar de \vec{u} e \vec{v} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 9 + 3 \times (-2) = 9 - 6 = 3 > 0$$

Já sabemos então que $\, heta\,$ é um ângulo agudo. Por fim, encontramos $\, heta\,$:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10} \times \sqrt{85}}\right) \cong \arccos(0,1029)$$

 $\theta\cong$ 1,4677

Logo, o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} é aproximadamente 1,468 radianos, ou ainda, aproximadamente 84,09°.



Faça você mesmo

Encontre o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = \left(-2,5,11\right)$ e $\vec{v} = \left(13,3\sqrt{3},0\right)$ ·

Vetores ortogonais



Assimile

Se o produto escalar entre dois vetores é nulo, então esses vetores são ortogonais, e vice-versa.

Mas por que isso ocorre? Veja que se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta = 0 \quad \xrightarrow{3 \text{ casos a considerar}} \quad \begin{cases} |\vec{u}| = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}; & \text{ou} \\ |\vec{v}| = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}; & \text{ou} \\ \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^{\circ}. \end{cases}$$

Em qualquer dos casos, \vec{u} e \vec{v} são ortogonais. Temos ainda que, se \vec{u} e \vec{v} são vetores ortogonais, só há três casos possíveis:

$$\vec{u} = \vec{0}$$
 ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\theta = 90^\circ$

Se.

•
$$\vec{u} = \vec{0}$$
 \Rightarrow $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0} \cdot \vec{v} = 0$

•
$$\vec{v} = \vec{0}$$
 \Rightarrow $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$

•
$$\theta = 90^{\circ}$$
 \Rightarrow $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 90^{\circ} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cdot 0 = 0$

Esse passo a passo responde à pergunta anterior. Vale acrescentar que quando os vetores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais, representamos isso por \vec{u} | \vec{v} .



Exemplificando

Mostre que os vetores $\vec{u} = (-3,8,1)$ e $\vec{v} = (6,3,-6)$ são ortogonais.

Resolução:

Para mostrar a ortogonalidade dos vetores, mostramos que o produto escalar entre eles é zero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -3 \times 6 + 8 \times 3 + 1 \times (-6) = -18 + 24 - 6 = 0$$

Logo $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Reflita

Se o ângulo entre dois vetores é zero, eles são paralelos (ou estão sobrepostos).

Figura 3.8 | Vetores paralelos ou sobrepostos ($\theta = 0$)



Fonte: elaborada pelo autor.

Se o ângulo entre dois vetores é 180°, esses vetores têm a mesma direção, mas sentidos opostos.

Figura 3.9 | Ângulo entre vetores $(\theta = 180^{\circ})$



Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Aprofunde mais seus conhecimentos sobre produto escalar de vetores e ângulo entre eles acessando o material, a partir da página 68, disponível em: http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/ga/notasdeaulas/geometriaanaliticaevetorial-SGD.pdf>. Acesso em: 3 jul. 2016.

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto no início desta seção, sabemos que os vetores que representam as hastes são $\vec{u}=(2,1,5)$ e $\vec{v}=(-1,-3,4)$.

Nesse caso, para calcular o ângulo entre eles, utilizamos a fórmula $\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right), \text{ mas primeiro determinamos o módulo de cada um dos vetores:}$

$$\left| \vec{u} \right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} \Rightarrow \left| \vec{u} \right| = \sqrt{30}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 4^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{26}$$

Agora calculamos o produto escalar de \vec{u} e \vec{v} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 1 \times (-3) + 5 \times 4 = -2 - 3 + 20 = 15$$

Por fim, encontramos θ :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{15}{\sqrt{30}\times\sqrt{26}}\right) \cong \arccos(0,537) \cong 1 \text{ radiano}$$

Logo, o ângulo entre as hastes, representadas pelos vetores \vec{u} e \vec{v} , é 1 radiano, o que equivale a aproximadamente 57,3°.

Avançando na prática

Pratique mais

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Produto escalar		
1. Competências	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.	
2. Objetivos de aprendizagem	Compreender o produto escalar e sua aplicação no cálculo de ângulos, além da utilização destes na resolução de problemas.	
3. Conteúdos relacionados	Produto escalar de vetores; ângulo entre vetores; lei dos cossenos; versor; vetores ortogonais.	
4. Descrição da situação-problema	Suponha que dois aviões decolem de um ponto que chamaremos de origem e representaremos pelo ponto (0, 0, 0). Após alguns instantes, o avião A encontra-se no ponto $\left(5,-3,\sqrt{2}\right)$ e o avião B, no ponto $\left(-4,\sqrt{2},\mathbf{z}\right)$, separados por uma distância em quilômetros e cujo ângulo entre eles é de 107°. Determine a coordenada positiva z do avião B.	
5. Resolução da situação-problema	Para calcular a coordenada z do avião B, note que as trajetórias são descritas pelos vetores $\vec{u} = (5, -3, \sqrt{2})$ e $\vec{v} = (-4, \sqrt{2}, z)$. Sabemos que o ângulo entre esses vetores é: $\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ u v }\right).$ Primeiro determinamos o módulo de cada um dos vetores: $ \vec{u} = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + \sqrt{2}^2} \Rightarrow \vec{u} = \sqrt{36} = 6$ $ \vec{v} = \sqrt{(-4)^2 + (\sqrt{2})^2 + z^2} \Rightarrow \vec{v} = \sqrt{18 + z^2}$	

Agora, calculamos o produto escalar de
$$\vec{u}$$
 e \vec{v} : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times (-4) + (-3) \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times z$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times (-4) + (-3) \times \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -20 - 3\sqrt{2} + z\sqrt{2}$

Por fim, encontramos z utilizando o valor de heta :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|u||v|}\right) \Rightarrow 107^{\circ} = \arccos\left(\frac{-20 - 3\sqrt{2} + z\sqrt{2}}{6 \times \sqrt{18 + z^2}}\right)$$

$$\cos 107^{\circ} = \left(\frac{-20 - 3\sqrt{2} + z\sqrt{2}}{6 \times \sqrt{18 + z^2}}\right) \quad \Rightarrow -0,292 \cong \frac{-20 - 3\sqrt{2} + z\sqrt{2}}{6 \times \sqrt{18 + z^2}}$$

$$6 \times \sqrt{18 + z^2} \cong 83,023 - 4,843z \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{18+z^2} \cong 13,837-0,807z$$

Elevando os dois lados ao quadrado:

$$18 + z^2 \cong 191,463 - 22,333z + 0,651z^2$$

$$0,349z^2 + 22,333z - 173,463 \cong 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos que:

$$z\cong 7$$
 ou $z\cong -71$

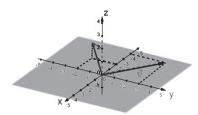
Logo, a coordenada positiva z do avião B é $z \cong 7$.

Faça valer a pena

- **1.** Dados os vetores $\vec{u} = (1,0)$, $\vec{v} = (1,3)$ e $\vec{w} = (0,\sqrt{2})$, podemos afirmar que a soma do ângulo entre \vec{u} e \vec{v} com o ângulo entre \vec{v} e \vec{w} é:
- a) 38°
- b) 87°
- c) 90°
- d) 54,6°
- e) 73.9°

2. Observe os vetores na figura a seguir. Podemos afirmar que o valor do ângulo, em graus, entre \vec{u} e \vec{v} é:

Figura 3.10 | Vetores \vec{u} e \vec{v}



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) 68,5°.
- b) 83,4°.
- c) 87,0°.
- d) 90,0°.
- e) 76,1°.

3. O produto escalar entre os vetores $\vec{u} = (k, 3, -2)$ e $\vec{v} = (k, -10, 5)$ é -36. Logo, os possíveis valores de k são:

- a) $k = \pm 2$.
- b) $k = \pm 5$.
- c) k = 6 ou k = -1.
- d) k = -7 ou k = 4.
- e) k = 0 ou k = 3.

Seção 3.3

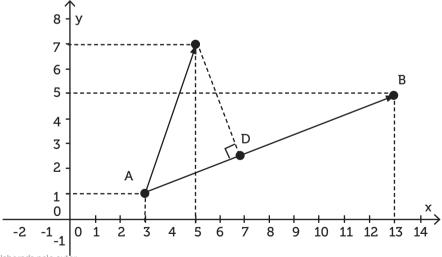
Projeção de um vetor sobre outro vetor

Diálogo aberto

Olá, aluno!

Você se lembra que, na seção anterior, estudou sobre produto escalar e ângulo entre dois vetores? Lembra que precisou encontrar o ângulo entre duas barras metálicas da treliça? Esperamos que você tenha aprendido a calcular o ângulo entre dois vetores e o produto escalar entre eles. Nesta seção aprenderemos a calcular a projeção de um vetor sobre outro vetor. Suponha que sua empresa esteja terminando de montar a estrutura do galpão, como na seção anterior, e você precisa instalar uma haste de apoio \overline{DC} sobre duas barras metálicas \overline{AB} e \overline{AC} da treliça, conforme Figura 3.11, cuja escala está em metros, para tornar a estrutura rígida.

Figura 3.11 | Haste de sustentação (em m)



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa haste será instalada perpendicularmente à barra \overrightarrow{AB} . Que comprimento ela deverá ter? Para responder a esse e outros problemas, você precisará calcular a projeção de um vetor sobre outro vetor. Vamos lá?

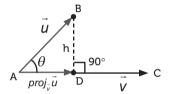
Não pode faltar

Um problema bastante comum na engenharia é a determinação da projeção de vetores sobre outros vetores. É como se precisássemos determinar a sombra de um sobre o outro. O cálculo para isso é bastante simples e envolve o que você estudou até o momento. Veja só:

Projeção de um vetor sobre outro vetor

Considere dois vetores \vec{u} e \vec{v} , tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, representados por segmentos orientados de mesma origem. Seja D o pé da perpendicular que sai de B, sobre a reta que contém os pontos A e C, como na Figura 3.12.

Figura 3.12 | Vetor projeção



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos decompor o vetor \vec{u} em dois vetores $\textit{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ (paralelo a \vec{v}) e $\vec{q} = \overrightarrow{DB}$ (ortogonal a \vec{v}), tal que $\vec{u} = \textit{proj}_{\vec{v}}\vec{u} + \vec{q}$. Temos que $\textit{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \lambda\vec{v}$, para algum $\lambda \in$ (pois $\textit{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{v}$ são paralelos), e $\vec{q} \cdot \vec{v} = 0$ (devido à ortogonalidade). Logo, podemos escrever a equação anterior como $(\vec{u} - \textit{proj}_{\vec{v}}\vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$. Então:

$$\left(\vec{u}-\lambda\,\vec{v}\right)\cdot\vec{v}=0\quad \Rightarrow \ \vec{u}\cdot\vec{v}-\lambda\,\vec{v}\cdot\vec{v}=0\quad \Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v}-\lambda\left|\vec{v}\right|^2=0\quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}.$$

Substituindo $\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}$ na equação $\textit{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \lambda \vec{v}$, temos a projeção de \vec{u}

sobre
$$\vec{v}$$

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

O vetor $\textit{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ é denominado projeção de \vec{u} sobre \vec{v} (ou na direção de \vec{v}). Você pode interpretá-lo como sendo a "sombra" que o vetor \vec{u} faz na direção de \vec{v} . Podemos obter o módulo da projeção utilizando as propriedades do produto escalar. Veja como:

$$\left| proj_{\vec{v}} \vec{u} \right| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left| \vec{v} \right|^2} \vec{v} \right| = \frac{\left| \vec{u} \cdot \vec{v} \right|}{\left| \vec{v} \right|^2} \left| \vec{v} \right| = \frac{\left| \vec{u} \cdot \vec{v} \right|}{\left| \vec{v} \right|}.$$



Assimile

A projeção do vetor \vec{v} na direção do vetor \vec{u} (veja que a ordem foi trocada), com $\vec{u} \neq 0$, é dada por:

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\left|\vec{u}\right|^2}\vec{u}$$
.
O módulo da projeção é dado por: $\left|proj_{\vec{u}}\vec{v}\right| = \frac{\left|\vec{v} \cdot \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.

As projeções de um vetor sobre outro vetor podem ser:

1. Com ângulo $\theta = 0^{\circ}$ entre os vetores (Figura 3.13):

Figura 3.13 | Ângulo $\theta = 0^{\circ}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que, nesse caso, os vetores são paralelos e a projeção de \vec{u} na direção de \vec{v} é o próprio vetor \vec{u} .

2. Com ângulo $\theta = 90^{\circ}$ entre os vetores (Figura 3.14):

Figura 3.14 | Ângulo $\theta = 90^{\circ}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que quando os vetores são ortogonais, a projeção de \vec{u} na direção de \vec{v} é um único ponto que está sobre a origem dos vetores. Logo, a projeção será o vetor nulo.

3. Com ângulo $\theta = 180^{\circ}$ entre os vetores (Figura 3.15):

Veja que esse é semelhante ao que o ângulo é de 0°. A projeção de \vec{u} na direção de \vec{v} é o próprio vetor \vec{u} .

Figura 3.15 | Ângulo $\theta = 180^{\circ}$

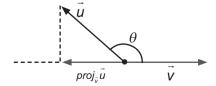


Fonte: elaborada pelo autor.

4. Com ângulo obtuso ($90^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$) entre os vetores (Figura 3.16):

Esse caso se assemelha bastante àquele em que o ângulo é agudo. Há somente uma mudança na interpretação geométrica.

Figura 3.16 | Ângulo $90^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Projeção sobre um vetor unitário

Se o vetor \vec{v} for unitário, ou seja, $|\vec{v}|=1$, então a projeção de \vec{u} na direção de \vec{v} é:

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{1^2}\vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}.$$



Atenção

A fórmula da projeção também pode ser encontrada em alguns livros da seguinte forma: $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\left|\vec{v}\right|^2} \cdot \vec{v}$. Isso ocorre porque $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ é outra notação utilizada para o produto escalar.



Exemplificando

Determine a projeção do vetor $\vec{u} = (3,2)$ na direção de $\vec{v} = (2,2)$.

Solução: Sabemos que $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$, logo, temos que calcular o produto escalar de \vec{u} e \vec{v} : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$.

produto escalar de u e v: $u \cdot v = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$.

O módulo de \vec{v} é dado por: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

Logo, a projeção de $\vec{u}=(3,2)$ na direção de $\vec{v}=(2,2)$ é:

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{10}{\sqrt{8}^2} \cdot (2,2) \quad \Rightarrow \ proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{5}{4} \cdot (2,2) \quad \Rightarrow \ proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$$



Reflita

O que obtemos ao calcular $|\vec{u}\cdot\vec{i}|$?

Essa maneira de calcular a projeção de um vetor sobre outro também é válida para vetores do 3 .



Exemplificando

Determine a projeção do vetor $\vec{u} = (1,0,-4)$ na direção de $\vec{v} = (-1,2,5)$.

Solução: Sabemos que $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}\vec{v}$, logo, precisamos calcular o

produto escalar de \vec{u} e \vec{v} : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-4) \cdot 5 = -21$.

O módulo de
$$\vec{v}$$
 é dado por: $|\vec{v}| = \sqrt{\left(-1\right)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30}$.

Logo, a projeção de $\vec{u} = (1,0,-4)$ na direção de $\vec{v} = (-1,2,5)$ é:

$$proj_{\bar{v}}\vec{u} = \frac{-21}{\sqrt{30}^2} \cdot (-1,2,5) \implies proj_{\bar{v}}\vec{u} = -\frac{21}{30} \cdot (-1,2,5)$$

$$proj_{\tilde{v}}\vec{u} = \left(\frac{7}{10}, -\frac{7}{5}, -\frac{7}{2}\right)$$

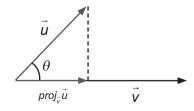
Projeção de um vetor sobre outro dado o ângulo entre eles

Podemos obter o comprimento da projeção de um vetor $\vec{\boldsymbol{u}}$ sobre um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ conhecendo somente o comprimento dos respectivos vetores e o ângulo formado entre eles. Para compreender esse cálculo, considere a Figura 3.17.

Logo:

$$\left| proj_{\vec{v}} \vec{u} \right| = \frac{\left| \vec{u} \cdot \vec{v} \right|}{\left| \vec{v} \right|} = \frac{\left| \vec{u} \right| \cdot \left| \vec{v} \right| \left| \cos \theta \right|}{\left| \vec{v} \right|} = \left| \vec{u} \right| \left| \cos \theta \right|$$

Figura 3.17 | Projeção de \vec{u} sobre um vetor \vec{v}



Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Calcule o comprimento da projeção do vetor $\vec{u} = (1,5,-3)$ sobre o vetor \vec{v} , sabendo que o ângulo entre eles é de 60°.

Solução: Calculando o módulo do vetor $\vec{\pmb{u}}$, temos:

$$\left| \vec{u} \right| = \sqrt{1^2 + 5^2 + \left(-3 \right)^2} \cong 5,92$$

Então:
$$\left| proj_{\vec{v}} \vec{u} \right| = \left| \vec{u} \right| \cdot \left| \cos \theta \right|$$

$$\left| proj_{\bar{v}} \vec{u} \right| \cong 5,92 \cdot \cos 60^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \left| proj_{\bar{v}} \vec{u} \right| \cong 5,92 \cdot 0,5 \quad \Rightarrow \quad \left| proj_{\bar{v}} \vec{u} \right| \cong 2,96 \cdot 0,$$

Logo, o comprimento da projeção de \vec{u} sobre \vec{v} é de aproximadamente 2,96 unidades.



Reflita

Se a projeção de \vec{u} sobre \vec{v} é o vetor nulo ou tem módulo igual a zero, então \vec{u} $\mid \vec{v}$

Área do triângulo utilizando vetores

Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ pontos no plano que são vértices do triângulo ABC (Figura 3.18). Vamos encontrar a área do \triangle ABC.

Temos que $\overrightarrow{BA} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ e $\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$ e afirmamos que o vetor $\overrightarrow{v} = (b_2 - c_2, c_1 - b_1)$ é um vetor ortogonal a \overrightarrow{BC} (e, portanto, paralelo ao vetor \overrightarrow{AD}) e de mesmo módulo. A primeira afirmação pode ser comprovada por meio do produto escalar:

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{BC} = (b_2 - c_2, c_1 - b_1) \cdot (c_1 - b_1, c_2 - b_2) = (b_2 - c_2)(c_1 - b_1) + (c_1 - b_1)(c_2 - b_2)
\vec{v} \cdot \overrightarrow{BC} = b_2 c_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 + c_2 b_1 + c_1 c_2 - c_1 b_2 - b_1 c_2 + b_1 b_2 = 0$$

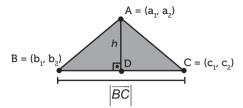
Como $\vec{v} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, segue que $\vec{v} \perp \overrightarrow{BC}$, como afirmamos. Além disso:

$$\left| \vec{v} \right| = \sqrt{\left(b_2 - c_2\right)^2 + \left(c_1 - b_1\right)^2} = \sqrt{\left(c_1 - b_1\right)^2 + \left(b_2 - c_2\right)^2} = \sqrt{\left(c_1 - b_1\right)^2 + \left(c_2 - b_2\right)^2} = \left| \overrightarrow{BC} \right| ,$$

o que comprova a segunda afirmação. Lembre-se disso, pois essa constatação será usada a seguir. Vale destacar ainda que, na Geometria, a área de um triângulo é dada

por
$$A = \frac{base \times altura}{2}$$
. Temos então que $A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}| h$ (veja a Figura 3.18).

Figura 3.18 | Triângulo ABC



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que h é a altura relativa ao lado \overline{BC} , ou seja, é medida da projeção de \overline{BA} sobre o vetor \vec{v} (lembre que \vec{v} é paralelo a \overline{AD}). Como $|\vec{v}| = |\overline{BC}|$, temos que a área do triângulo é:

$$A = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BC} \right| \left| proj_{\vec{v}} \overrightarrow{BA} \right| = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BC} \right| \frac{\left| \overrightarrow{BA} \cdot \vec{v} \right|}{\left| \vec{v} \right|} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BA} \cdot \vec{v} \right| \text{ (Lembre que } \left| \vec{v} \right| = \left| \overrightarrow{BC} \right| \text{)}.$$

Veja que:

$$\overline{BA} \cdot \vec{v} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \cdot (b_2 - c_2, c_1 - b_1) = (a_1 - b_1) \cdot (b_2 - c_2) + (a_2 - b_2)(c_1 - b_1)$$

$$\overline{BA} \cdot \vec{v} = b_1 c_2 - a_1 c_2 - b_2 c_1 + a_2 c_1 + a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Se você se lembra dos determinantes estudados na Unidade 1, constatará que:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{v} = b_1 c_2 - a_1 c_2 - b_2 c_1 + a_2 c_1 + a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a área do triângulo ABC é:

$$A = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{v} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Perceba que, na expressão anterior, nas colunas 1 e 2 dispomos as coordenadas dos vértices do triângulo *ABC*, e na coluna 3 aparecem números 1.



Assimile

Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ são pontos do plano, eles serão colineares (alinhados) se:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Veja que essa é uma consequência do resultado acima, pois, nesse caso, teríamos um triângulo com área igual a zero.



Exemplificando

Sejam os pontos A = (5,3), B = (6,-4) e C = (-2,k) vértices do triângulo ABC de área 25 u.a. Determine os possíveis valores de k.

Sabemos que a área do triângulo é dada por $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$.

Logo, temos que:
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \\ -2 & k & 1 \end{bmatrix} = 25 \implies \det \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \\ -2 & k & 1 \end{bmatrix} = 50.$$

Efetuando os cálculos:
$$\left| -20 - 6 + 6k - 8 - 5k - 18 \right| = 50 \Rightarrow \begin{cases} k - 52 = 50 \\ k - 52 = -50 \end{cases}$$

Portanto k = 102 ou k = 2.



Faça você mesmo

Encontre a área do triângulo formado pelos pontos A = (15, -12),

$$B = (-9, -5)$$
 e $C = (1, \frac{1}{2})$.



Pesquise mais

Aprofunde mais seus conhecimentos sobre projeção de vetores acessando o material disponível em: http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/livros/geometria-analitica/geometriaa5.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2016. (A partir da página 111.)

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto no início desta seção, devemos encontrar o comprimento da haste \overline{DC} . Observe na Figura 3.10 que a haste \overline{AD} é a projeção da barra representada pelo vetor \overline{AC} sobre a barra representada pelo vetor \overline{AB} . A partir da Figura 3.10 obtemos as coordenadas dos vetores \overline{AB} e \overline{AC} :

$$\overrightarrow{AC} = (5-3,7-1) = (2,6)$$
; $\overrightarrow{AB} = (13-3,5-1) = (10,4)$.

Chamando $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, tem-se que:

- O produto escalar de \vec{u} e \vec{v} é: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 10 + 6 \cdot 4 = 44$
- O módulo de \vec{v} é: $|\vec{v}| = \sqrt{(10)^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.

Calculando a projeção de \overrightarrow{AC} sobre \overrightarrow{AB} , segue que:

$$\textit{Proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}\vec{v} \quad = \quad = \frac{44}{\sqrt{116}^2} \cdot \left(10,4\right) \quad = \quad \frac{44}{116} \cdot \left(10,4\right) \quad = \quad \frac{11}{29} \cdot \left(10,4\right) \quad = \quad \left(\frac{110}{29},\frac{44}{29}\right).$$

Calculando o comprimento do vetor projeção, temos:

$$\left| Proj_{\bar{v}} \vec{u} \right| = \sqrt{\left(\frac{110}{29} \right)^2 + \left(\frac{44}{29} \right)^2} = \sqrt{\frac{12100}{841} + \frac{1936}{841}} = \sqrt{\frac{14036}{841}}$$
 4,085

Logo, a haste de sustentação representada por $\overline{\textit{DC}}$ terá aproximadamente 4,085 metros.

Avançando na prática

Pratique mais

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Área de um triângulo				
1. Competências	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.			
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar o conceito de projeção a um problema de cálculo de área.			
3. Conteúdos relacionados Módulo de vetores; Produto escalar; Projeção de um sobre outro vetor.				

4. Descrição da situação-problema

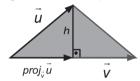
Um dos funcionários do setor de vendas da siderúrgica em que você trabalha ligou pedindo ajuda para calcular a área de uma chapa de aço, em m², que foi solicitada por um cliente. Ele necessita desse dado para fornecer o orçamento.

Segundo ele, o cliente disse que a chapa será soldada em uma estrutura que já está fabricada e, por isso, deve corresponder precisamente a um triângulo determinado pelos vetores $\vec{u} = (1,5,3) \in \vec{v} = (3,7,6)$

E agora, gual a área dessa chapa?

Para calcular a área, primeiro determinamos a altura relativa ao lado determinado por V Esta, por sua vez, exige que primeiro tenhamos calculado a projeção de um vetor sobre o outro. Vamos então calcular a projeção de \vec{u} sobre \vec{v} , como na Figura 3.19.

Figura 3.19 | Triângulo determinado por \vec{u} e \vec{v}



Fonte: elaborada pelo autor.

O produto escalar de \vec{u} e \vec{v} é:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 6 = 56$$

O módulo de \vec{v} é:

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 6^2} = \sqrt{94}$$

5. Resolução da situação-problema

Efetuando o cálculo da projeção, temos:

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{56}{\sqrt{94}^2} \cdot (3,7,6) = \frac{56}{94} \cdot (3,7,6) = \left(\frac{84}{47}, \frac{196}{47}, \frac{168}{47}\right)$$

Calculando o comprimento do vetor projeção, temos:

$$\left| proj_{\vec{v}} \vec{u} \right| = \sqrt{\left(\frac{84}{47} \right)^2 + \left(\frac{196}{47} \right)^2 + \left(\frac{168}{47} \right)^2} = \sqrt{\frac{73696}{2209}}$$
 5,776

Calculando a norma de
$$\vec{u}$$
: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2} \implies |\vec{u}| = \sqrt{35}$ 5,916

Pelo topo do vetor \vec{u} até o topo de sua projeção, traçamos um segmento que é a altura do triângulo determinado por \vec{u} e V, em relação ao lado representado pelo vetor V. Por meio do teorema de Pitágoras calculamos essa altura:

$$h \sqrt{5,916^2-5,776^2} \Rightarrow h 1,280$$

Logo, a altura relativa ao lado representado pelo vetor \vec{v} é aproximadamente 1,280 metros. Para calcular a área da chapa, temos que:

$$A = \frac{1}{2} |\vec{v}| h$$

Logo, $A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{94} \cdot 1,280 \cong 6,205 \text{ m}^2$. Portanto, a área da chapa é aproximadamente 6.205 m^2

Faça valer a pena

- **1.** Considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} 3\vec{j} 6\vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} 4\vec{j} 4\vec{k}$. Determine a norma da projeção de \vec{u} sobre \vec{v} e marque a alternativa que mais se aproxima:
- a) 3,98
- b) 4,21
- c) 5,06
- d) 6,56
- e) 7,14
- **2.** Seja um triângulo de vértices A (1,1,2), B (5,1,3) e C (-3,9,3). Calcule as coordenadas do vetor \overrightarrow{AH} , em que H é o pé da altura relativa ao lado \overrightarrow{BC} . Depois, assinale a alternativa correta:
- a) $\overrightarrow{AH} = (2,2,1)$
- b) $\overrightarrow{AH} = (3,1,1)$
- c) $\overrightarrow{AH} = (2,5,3)$
- d) $\overrightarrow{AH} = (1,2,2)$
- e) $\overrightarrow{AH} = (0,5,1)$

- **3.** Calcule o comprimento da projeção do vetor $\vec{u} = (4,-1,-2)$ sobre o vetor \vec{v} , dada em metros, sabendo que o ângulo entre eles é de 35°. Depois, assinale a alternativa que contém essa medida:
- a) 5,671 metros
- b) 2,892 metros
- c) 7,134 metros
- d) 4,225 metros
- e) 3,754 metros

Produto escalar e vetorial

153

Seção 3.4

Produto vetorial e aplicações

Diálogo aberto

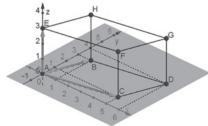
Olá, aluno!

Você se lembra que, na seção anterior, estudou sobre projeção de um vetor sobre outro vetor? Lembra que aprendeu a calcular a projeção de duas maneiras diferentes e que a representamos de formas diferentes? Para isso, utilizamos o produto escalar e a norma de um vetor.

Nesta seção você aprenderá outra operação de produto entre vetores, denominada produto vetorial. Ela possui diferenças em relação ao produto escalar e importantes aplicações, por exemplo, na física, para definir eletromagnetismo. É também utilizada para descrever a Força Lorentz e calcular a normal de um triângulo ou outro polígono, o que é importante no ramo da computação gráfica e no desenvolvimento de jogos eletrônicos. Na Engenharia Civil especificamente, o produto vetorial é aplicado nos cálculos utilizando momentos de força e nas definições de torque e de momento angular.

Suponha que você, ainda trabalhando na metalúrgica, se depare com esta situação: na composição de robôs da linha de produção é necessária a fabricação de 500 peças de aço sólidas. Elas terão formato de paralelepípedo determinado pelos vetores \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AE} , conforme sugere a Figura 3.20, cuja escala está em centímetros.

Figura 3.20 | Representação da peça



Fonte: http://goo.gl/RaeGES. Acesso em: 28 jul. 2016.

Essa imagem foi gerada por um dos projetistas da empresa em um software de computador, e agora cabe a você determinar o volume de aço necessário para construir as peças. Vamos lá?

Não pode faltar

Produto vetorial

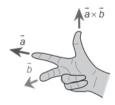
Considere dois vetores \vec{a} e \vec{b} . Dizemos que o produto vetorial entre esses vetores, representado por $\vec{a} \times \vec{b}$, é um vetor com as seguintes características:

- 1. O módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$ é $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sen \theta$, em que θ é o ângulo entre \vec{a} e \vec{b} .
- 2. A direção do vetor resultante do produto $\vec{a} \times \vec{b}$ é ortogonal ao plano que contém \vec{a} e \vec{b} .
 - 3. O sentido desse vetor é dado pela regra da mão direita.

Regra da mão direita

A regra da mão é usada para indicar o sentido do vetor $\vec{a} \times \vec{b}$. O indicador se posiciona na direção de \vec{a} , o dedo médio na direção de \vec{b} e o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$ terá o sentido do polegar, como na Figura 3.21.

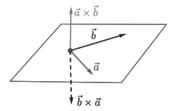
Figura 3.21 | Regra da mão direita



Fonte: http://goo.gl/7pVfN2. Acesso em: 15 ago. 2016.

Note que os produtos vetoriais $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ possuem sentidos opostos, como na Figura 3.22, logo temos que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Figura 3.22 | Sentidos opostos



Fonte: elaborada pelo autor.

Algumas propriedades de produto vetorial são importantes, principalmente para as aplicações desse produto de vetores.

Propriedades do produto vetorial

I. O produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$ é nulo, ou seja, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{b} = \vec{0}$ ou $\vec{a} = k\vec{b}$ para algum $k \in$

II. Temos que $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$. A igualdade ocorre somente se um deles for nulo ou se forem paralelos. Em outras palavras, o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$ não é comutativo (na verdade, ele é anticomutativo $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$).

III. Sejam
$$m, n \in ...$$
 Temos que $(m\vec{a}) \times (n\vec{b}) = (m \cdot n) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

IV. Propriedade distributiva:
$$\begin{cases} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \\ \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} \end{cases}$$



Assimile

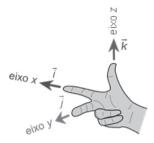
Consequência da propriedade I:

O produto vetorial de um vetor por ele mesmo é nulo: $(\vec{a} \times \vec{a} = 0)$.

Multiplicação externa de vetores

Para deduzir uma expressão para o produto vetorial, iniciamos pelos versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , representados na Figura 3.23.

Figura 3.23 | Multiplicação dos versores



Fonte: http://goo.gl/VK2cgR. Acesso em: 15 ago. 2016.

Para multiplicar \vec{i} por \vec{j} , ou seja, efetuar $\vec{i} \times \vec{j}$, utilizaremos as características apresentadas anteriormente:

- 1. O módulo de $\vec{i} \times \vec{j}$ é $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot sen 90^{\circ} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.
- 2. A direção do vetor resultante do produto $\vec{i} \times \vec{j}$ é ortogonal ao plano que contém \vec{i} e \vec{j} , ou seja, tem a direção do eixo z.
- 3. O sentido desse vetor é dado pela regra da mão direita. Observando a Figura 3.23, o vetor $\vec{i} \times \vec{j}$ terá o mesmo sentido que o vetor \vec{k} .

Observando essas características, o único vetor que atende a todas elas é exatamente o vetor \vec{k} . Logo, $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{k}$.

Se você repetir esse mesmo raciocínio para os demais versores, poderá constatar que:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0} \qquad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \qquad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$

Tendo obtido as igualdades anteriores, considere $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ vetores do \mathbb{R}^3 . Qual seria a expressão de $\vec{a} \times \vec{b}$? Para obtê-la, utilizaremos as propriedades do produto vetorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \right) \times \left(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \right)$$

Aplicando a propriedade distributiva:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}\right) \times x_2 \vec{i} + \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}\right) \times y_2 \vec{j} + \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}\right) \times z_2 \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_1 x_2 \vec{i} \times \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \times \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \times \vec{k} + x_2 y_1 \vec{j} \times \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \times \vec{j} + y_1 z_2 \vec{j} \times \vec{k} + x_2 z_1 \vec{k} \times \vec{i} + y_2 z_1 \vec{k} \times \vec{j} + z_1 z_2 \vec{k} \times \vec{k}$$

Utilizando os produtos entre versores, temos:

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_1 x_2 \vec{0} + x_1 y_2 \vec{k} + x_1 z_2 \left(-\vec{j} \right) + x_2 y_1 \left(-\vec{k} \right) + y_1 y_2 \vec{0} + y_1 z_2 \vec{i} + x_2 z_1 \vec{j} + y_2 z_1 \left(-\vec{i} \right) + z_1 z_2 \vec{0}$$

Pela propriedade comutativa:

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_1 y_2 \vec{k} - x_1 z_2 \vec{j} - x_2 y_1 \vec{k} + y_1 z_2 \vec{i} + x_2 z_1 \vec{j} - y_2 z_1 \vec{i} = y_1 z_2 \vec{i} - y_2 z_1 \vec{i} + x_2 z_1 \vec{j} - x_1 z_2 \vec{j} + x_1 y_2 \vec{k} - x_2 y_1 \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = y_1 z_2 \vec{i} - y_2 z_1 \vec{i} + x_2 z_1 \vec{j} - x_1 z_2 \vec{j} + x_1 y_2 \vec{k} - x_2 y_1 \vec{k} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}$$

Observe que a expressão anterior também é obtida fazendo o "determinante":

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$



Atenção

Utilizar a palavra <u>determinante</u> para a expressão anterior não é formalmente correto, visto que o determinante é para matrizes contendo números ou escalares. Contudo, o abuso na terminologia é cometido por diversos autores e permite organizar os elementos de um modo fácil de memorizar.



Exemplificando

Sejam
$$\vec{a} = (1,5,-2)$$
 e $\vec{b} = (-3,4,0)$, determine $\vec{a} \times \vec{b}$.

Solução: Para determinar o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$, utilizamos a expressão

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$
. Substituindo os valores dados, temos:

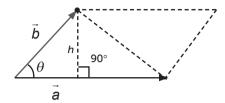
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (\vec{0} + 6\vec{j} + 4\vec{k}) - (-8\vec{i} + \vec{0} - 15\vec{k})$$

Logo,
$$\vec{a} \times \vec{b} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 19\vec{k}$$
.

Área do paralelogramo

Sejam os vetores \vec{a} e \vec{b} formando o paralelogramo da Figura 3.24

Figura 3.24 | Paralelogramo



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com a Figura 3.24, constata-se que o paralelogramo é dividido em dois triângulos, iguais e formados pelos vetores \vec{a} e \vec{b} . Sabemos que a área de um triângulo é $A_t = \frac{base \cdot altura}{2}$.

Na Figura 3.24, a base é $|\vec{a}|$ e a altura é dada por $h = |\vec{b}| \cdot sen \theta$. Logo, a área do paralelogramo é dada por:

$$A_{p} = 2 \cdot \frac{\left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \operatorname{sen} \theta}{2} = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \operatorname{sen} \theta$$

Que é o módulo do produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$.



Assimile

A área A_p de um paralelogramo determinado por dois vetores \vec{a} e \vec{b} é igual ao módulo do produto vetorial, ou seja:

$$A_p = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Além disso, a área \emph{A}_t do triângulo determinado por esses mesmos dois vetores é metade desse valor, ou ainda:

$$A_t = \frac{\left| \vec{a} \times \vec{b} \right|}{2}$$



Exemplificando

Calcule a área do paralelogramo, em m², cujos vetores $\vec{a} = (3,0,7)$ e $\vec{b} = (2,-5,1)$ são dois lados consecutivos desse paralelogramo.

Solução: Sabemos que a área do paralelogramo é igual ao módulo do produto vetorial dos vetores que compõem dois lados consecutivos desse polígono. Calculando primeiramente o produto, temos:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (\vec{0} + 14\vec{j} - 15\vec{k}) - (-35\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{0}) = 35\vec{i} + 11\vec{j} - 15\vec{k}$$

Agora calculamos o módulo:

$$A_p = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{35^2 + 11^2 + (-15)^2}$$
 39,636 m².

Logo, a área do paralelogramo é de aproximadamente 39,636 m².

Produto misto

Considere os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} . O produto misto entre esses vetores é um número real, representado por $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$, tal que $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

Expressão cartesiana do produto misto

Sejam $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ e $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, vetores do \mathbb{R}^3 . Temos então:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = (x_1, y_1, z_1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (y_2 \cdot z_3 - y_3 \cdot z_2, x_3 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_3, x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2)$$

Efetuando o produto escalar, temos:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = x_1 \cdot (y_2 z_3 - y_3 z_2) + y_1 (x_3 z_2 - x_2 z_3) + z_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2).$$

Observe que a expressão acima também é obtida calculando o determinante:

$$\begin{bmatrix} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Produto escalar e vetorial

161



Exemplificando

Considere os vetores $\vec{a} = 7\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$. Calcule o produto misto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

Resolução: Para calcular o produto misto, usamos a expressão:

$$\begin{bmatrix} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$
. Substituindo os valores dados:
$$\begin{bmatrix} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (21 + 20 - 12) - (-6 - 84 - 10) = 129$$

Logo,
$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 129$$
.

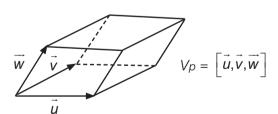


Reflita

O produto misto pode ser utilizado para calcular o volume de sólidos como o paralelepípedo e o tetraedro.

O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} é igual ao módulo do produto vetorial.

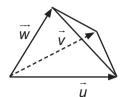
Figura 3.25 | Volume do paralelepípedo



Fonte: elaborada pelo autor.

O volume do tetraedro formado pelos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} é dado por:

Figura 3.26 | Volume do tetraedro



$$Vt = \frac{\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]}{6}$$

Fonte: elaborada pelo autor.



Faça você mesmo

Calcule, em m³, o volume do tetraedro formado pelos vértices A(0,-1,4), B(-2,2,5), C(1,1,3) e D(-1,5,4).



Pesquise mais

Amplie seus conhecimentos sobre produto vetorial acessando o material disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/vetores.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2016. (A partir da p. 13.)

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto no início desta seção, sabemos que sendo \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} não coplanares, o valor absoluto do produto misto $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$ é o volume do paralelepípedo determinado por eles.

Logo, para determinarmos o volume de uma das peças, basta calcularmos o produto misto entre \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AE} . Observando a Figura 3.19, temos que:

$$\overrightarrow{AC} = (5,1,0), \overrightarrow{AB} = (1,3,0) \in \overrightarrow{AE} = (0,0,3).$$

Calculando o produto misto entre \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AE} , temos:

$$\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (45 + 0 + 0) - (0 + 0 + 3) = 42$$

Portanto, o volume de uma peça é 42 cm³. Desse modo, o volume total de aço a ser utilizado na produção das peças é $500 \times 42 \text{ cm}^3 = 21000 \text{ cm}^3$, ou ainda, 0,021 m³.

Avançando na prática

Pratique mais

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Produto vetorial				
1. Competências	Conhecer os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica e da Álgebra Vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à Engenharia.			
2. Objetivos de aprendizagem	Conhecer o produto vetorial, o produto misto e suas aplicações nos cálculos de área, volume e em diversos cálculos voltados para a engenharia.			
3. Conteúdos relacionados	Produto vetorial e aplicações.			
4. Descrição da situação-problema	Suponha que a siderúrgica onde trabalha fabrica uma chapa de metal no formato de um paralelogramo formada a partir dos vetores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, -3, 4)$, com medidas dadas em metros. O material dessa chapa custa R\$ 28,00 por m². Qual o custo na produção de dez chapas iguais a essa?			
5. Resolução da situação-problema	Para calcular a área da chapa devemos, antes, calcular o produto vetorial entre \vec{u} e \vec{v} e o seu módulo. Temos: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $\vec{u} \times \vec{v} = \left(-4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\right) - \left(-3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}\right) = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ $ \vec{u} \times \vec{v} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ 2,45 Logo, uma chapa tem aproximadamente 2,45 m². O preço dessa chapa é cerca de 2,45 x 28 = 68,6 reais, ou seja, R\$ 68,60. Como são dez chapas iguais, o valor total é de R\$ 686,00.			

Faça valer a pena

1. Podemos afirmar que a área do paralelogramo, em m², cujos _{vetores} $\vec{a} = (9,0,-1)$ e $\vec{b} = (0,-3,-4)$ são dois lados consecutivos desse paralelogramo, é, aproximadamente:

- a) 68,71
- b) 45,12
- c) 37,89
- d) 56,43
- e) 26,81

2. Considere os vetores $\vec{a} = (2, -3, 5)$, $\vec{b} = (0, 1, 4)$ e $\vec{c} = (-4, 0, 5)$. Podemos afirmar que o produto misto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ é igual a:

- a) -89
- b) -26
- c) 78
- d) 74
- e) 67

3. Seja o paralelepípedo formado a partir dos vetores $\vec{u} = (2,3,0)$, $\vec{v} = (0,-4,3)$ e $\vec{w} = (1,1,3)$. O volume desse paralelepípedo, em m³, é:

- a) 18 m^3
- b) 19 m³
- c) 20 m³
- d) 21 m³
- e) 22 m³

Referências

ANTON, H. Álgebra linear com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra linear. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

CALLOLI, C. A. et al. Álgebra linear e aplicações. 4. ed. São Paulo: Atual, 1983.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. Um curso de álgebra linear. São Paulo: Edusp, 2001.

POOLE, David. **Álgebra linear:** uma introdução moderna. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

SANDOVAL JUNIOR, Leonidas. **Álgebra linear**: para ciências econômicas, contábeis e da administração. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

STRANG, Gilbert. **Álgebra linear e suas aplicações**. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

VENTURI, Jacir J. Álgebra vetorial e geometria analítica. 10. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2015. 242 p. Disponível em: http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2016.

Equações de retas e planos

Convite ao estudo

Olá, aluno!

Para iniciar mais uma unidade de ensino, primeiramente, vamos entender a importância deste conteúdo. Um renomado filósofo francês chamado René Descartes, em 1637, escreveu em seu livro *Discurso sobre o método* que a Álgebra e a Geometria poderiam ser vistas e estudadas juntas, coisa que, até então, não era usual. Nesse livro, ele trabalha com a Álgebra e a Geometria simultaneamente, mostrando a grande aplicabilidade da Geometria Analítica. Por conta dessa obra, ele é visto por muitos como o precursor, o "pai da Geometria Analítica"

A Geometria Analítica (GA) trabalha num plano coordenado, também chamado de cartesiano, em homenagem à Descartes. Os conhecimentos de Geometria Analítica são muito utilizados na Física e na Engenharia e são base de estudos de muitas áreas modernas da Geometria, como a Geometria Diferencial e a Geometria Computacional.

Existem outros grandes matemáticos que também são considerados fundadores da Geometria Analítica: o grego Menecmo, o persa Omar Khayyám e os franceses François Viète e Pierre de Fermat. Todos têm relevantes trabalhos na área da Geometria que contribuíram para que fosse dado, como muitos chamam, o passo decisivo de Descartes.

Nesta unidade, veremos importantes tópicos da GA, como equações de retas e planos.

Você se lembra de ter trabalhado, na unidade anterior, numa siderúrgica? Pois, então, suponhamos que você tenha ido muito bem nessa atividade e tenha montado, agora, um negócio na área de construção civil.

Na sua empresa, você terá que executar vários trabalhos, como instalação de andaimes, placas de luz solar, estruturas de galpões, entre outros.

Para realizar esses serviços, você deverá conhecer muito de retas, planos, ângulos formados entre eles etc.

É hora de veremos todos esses conteúdos e as suas aplicações.

Seção 4.1

Equação vetorial de uma reta

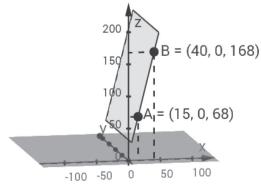
Diálogo aberto

A equação de uma reta é de suma importância nos cálculos matemáticos e na Engenharia. Ela ajuda a definir se os pontos estão alinhados e a encontrar um ponto diferente que esteja na direção desejada. Por meio da equação geral da reta, podemos determinar infinitos pontos que pertencem a ela e calcular seu coeficiente angular, que fornece o grau de inclinação.

Em relação à Engenharia, ela pode ajudar a definir se os pilares estão alinhados, a inclinação de uma viga e muitos outros casos. Por todas essas aplicações, é a equação geral da reta que vai ajudá-lo na situação seguinte: suponha que sua empresa precise fazer uma instalação de placas solares em uma casa. Para tanto, cabe a você determinar o ângulo da inclinação da placa, para fazer a programação correta da captação de energia.

Analisando a placa lateralmente, você pôde determinar que, a 15 cm de sua base, ela tem 68 cm de altura e que, a 40 cm de sua base, ela está a 1,68 m, como mostra a Figura 4.1.

Figura 4.1 | Placa solar



Fonte: https://goo.gl/LyMfRl>. Acesso em: 23 ago. 2016).

Equações de retas e planos 171

Você precisa calcular o ângulo de inclinação da placa. Para isso, deverá conhecer a equação da reta e também saber como determinar o coeficiente angular.

Não pode faltar

Para resolver a situação descrita e outras situações-problema que possam existir, precisamos de alguns conceitos importantes, como equação geral da reta e ângulo formado entre duas retas.

Equação vetorial da reta

Sejam r uma reta que passa pelo ponto $P\left(X_0, Y_0, Z_0\right)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$. Sabemos, devido a um axioma conhecido como *Axioma de incidência*, que só existe uma reta que passa pelo ponto P e tem a mesma direção do vetor \vec{v} . Um ponto $Q\left(x, y, z\right)$ pertencerá à reta r se, e somente se, $\overrightarrow{PQ} = t\vec{v}$, para algum t pertencente aos números reais.

Como $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, temos que: $Q - P = t\vec{v} \Rightarrow Q = P + t\vec{v}$. Substituindo, temos:

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$$
, que é chamada de **equação vetorial da reta**.



Assimile

O vetor \vec{v} é o vetor diretor da reta r, e t é o parâmetro da equação.



Exemplificando

A reta r passa pelo ponto B (2,3,5) e tem a direção do vetor $\vec{v} = (1,-1,3)$. Qual é a equação vetorial da reta r?

Solução: Para encontrar a equação da reta, basta substituirmos os valores dados:

$$(x, y, z) = (2,3,5) + t(1,-1,3)$$

Para encontrar pontos dessa reta, basta atribuir valores para t. Por exemplo:

- Para $t = 1 \Rightarrow P_1 = (2,3,5) + 1(1,-1,3) = (3,2,8)$.
- Para $t = 2 \Rightarrow P_2 = (2,3,5) + 2(1,-1,3) = (4,1,11)$.

Equações paramétricas da reta

Quando conhecemos apenas uma coordenada da reta r e precisamos determinar as outras coordenadas, utilizamos as equações paramétricas. Para compreendê-las, seja a equação vetorial de uma reta:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

Multiplicando o vetor (a, b, c) por t, temos:

$$(x, y, z) = (x_0 + t a, y_0 + t b, z_0 + t c)$$

Pela igualdade entre os pontos, temos que:

$$\begin{cases} x = x_0 + t a \\ y = y_0 + t b \end{cases}$$
$$z = z_0 + t c$$

Essas são as **equações paramétricas da reta** r.



Exemplificando

Escreva as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos

Solução: Primeiro, determinamos o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 3) - (4, 6, -8) = (-2, -7, 11)$$

Escolhendo o ponto A e tendo o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, temos as equações:

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 6 - 7t \\ z = -8 + 11t \end{cases}$$



Faca você mesmo

Escreva as equações paramétricas da reta r que passa pelo pontos A (2, 5, 9) e B (10, -7, 4) , atribua os valores $t_1 = 1$ e $t_2 = 3$ e encontre os pontos $P_1 = A + t_1 \vec{v}$ e $P_2 = A + t_2 \vec{v}$.

Equações de retas e planos

173

Equações simétricas da reta

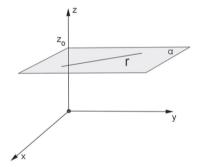
Isolando o parâmetro t nas equações paramétricas, temos:

$$\begin{cases} x = x_0 + t a \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{a} \\ y = y_0 + t b \Rightarrow t = \frac{y - y_0}{b} \\ z = z_0 + t c \Rightarrow t = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

Como o valor de t é o mesmo em ambas as equações anteriores, podemos igualá-las, encontrando as **equações simétricas da reta**:

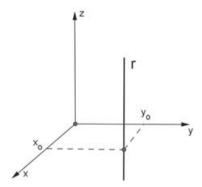
$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

Figura 4.2 | Reta com c = 0



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.3 | Reta paramétrica com a = 0 e b = 0



Fonte: elaborada pelo autor.

Casos particulares:

1. Se um dos denominadores é nulo, a reta é paralela ao plano que contém os outros eixos. Por exemplo, se c = 0, a reta é paralela ao plano xy, e sua equação será:

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, com \ a \neq 0 \ e \ b \neq 0. \end{cases}$$

2. Se dois dos denominadores são nulos, a reta é paralela ao eixo cujo denominador é diferente de zero. Por exemplo, se a = 0 e b = 0, então a reta é paralela ao eixo z, e terá a equação:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 & \text{, com } c \neq 0. \\ \frac{z - z_0}{c} = t \end{cases}$$

Equação simétrica da reta por dois pontos

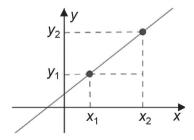
Sejam uma reta r e dois pontos dessa reta $P_1(x_1,y_1,z_1)$ e $P_2(x_2,y_2,z_2)$, além de um ponto genérico, P(x,y,z). A equação simétrica da reta é dada por:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Equação da reta determinada por dois pontos no plano

Sejam dois pontos distintos A (X_1, Y_1) e B (X_2, Y_2) . Podemos determinar a equação da reta que passa por esses pontos. Observe a Figura 4.4.

Figura 4.4 | Equação da reta



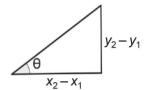
Fonte: elaborada pelo autor.

Equações de retas e planos 175

Isolando o triângulo formado na Figura 4.4 e calculando a tangente do ângulo θ formado (vide Figura 4.5), temos:

$$tg\,\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figura 4.5 | Triângulo retângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Tomando $tg \theta = m$ (em que m é chamado de coeficiente angular da reta) e ajeitando a equação, temos:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$

Se um ponto P (x,y) pertence a essa reta, temos que:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - y_1 = mx - mx_1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{-m}_{a} x + \underbrace{1}_{b} \cdot y + \underbrace{\left(-y_1 + mx_1\right)}_{c} = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

Essa é a denominada **equação geral da reta** no plano.



Exemplificando

Encontre a equação geral da reta que passa pelos pontos A(1,4) e B(-2,5).

Solução: Primeiro, substituímos os pontos dados, para encontrar o coeficiente angular:

$$5-4=m(-2-1)$$
 \Rightarrow $m=-\frac{1}{3}$

Depois, escolhemos qualquer um dos pontos e, junto com o coeficiente angular, encontramos a equação da reta:

$$y-4=-\frac{1}{3}(x-1)$$
 \Rightarrow $x+3y-13=0$.



Reflita

Você pode escolher qualquer um dos pontos A ou B e substituir suas coordenadas no lugar de (x_1, y_1) ou (x_2, y_2) , que a equação da reta obtida será a mesma.

Além disso, se
$$ax + by + c = 0$$
 é a equação da reta r , $k \cdot ax + k \cdot by + k \cdot c = 0$ também o é, para todo $k \neq 0$.

Podemos encontrar a equação da reta por meio de um determinante. Como já vimos nas unidades anteriores, uma das aplicações do determinante é a condição de alinhamento de pontos, ou seja, se o determinante contendo as coordenadas de três pontos for nulo, então, esses pontos estarão alinhados (sobre uma mesma reta). Portanto, se a reta r passa pelos pontos $A = \begin{pmatrix} X_1, Y_1 \\ X_2, Y_2 \end{pmatrix}$, um ponto $A = \begin{pmatrix} X_1, Y_1 \\ X_2, Y_2 \end{pmatrix}$, um ponto $A = \begin{pmatrix} X_1, Y_1 \\ X_3, Y_1 \end{pmatrix}$ pertencerá a ela se:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Exemplificando

Encontre a equação geral da reta que passa pelos pontos A(5,-4) e B(6,2).

Solução: Substituindo as coordenadas dos pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante e igualando a zero, obtemos a equação da reta:

$$-4x + 6y + 10 + 24 - 5y - 2x = 0$$

Equações de retas e planos

177

Logo, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é:

$$6x - y - 34 = 0$$



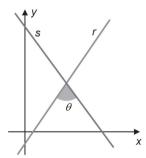
Assimile

Quando temos a equação geral da reta ax + by + c = 0, para encontrar o coeficiente angular m, basta usarmos a expressão:

$$m = -\frac{a}{b}$$
 (coeficiente angular).

Ângulo entre retas

Figura 4.6 | Retas formando o ângulo $\, heta$



Fonte: elaborada pelo autor.

Sejam r e s duas retas distintas que se interceptam, formando o ângulo θ entre elas, como mostra a Figura 4.6.

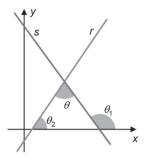
Sendo θ o menor ângulo formado pelas retas r e s, para calcular esse ângulo, usamos a expressão:

$$tg \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$
, em que m_r é o coeficiente angular da reta $r \in m_s$ é o

coeficiente angular da reta s.

Podemos justificar a fórmula anterior por meio da geometria plana e da trigonometria, como na Figura 4.7.

Figura 4.7 | Ângulo θ entre duas retas



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que θ_1 é um ângulo externo do triângulo formado pelas retas r e s e o eixo x. Logo, ele é a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, ou seja, $\theta_1 = \theta + \theta_2 \Rightarrow \theta = \theta_1 - \theta_2$.

Como já visto, temos que $m_r=tg\,\theta_2$ e $m_s=tg\,\theta_1$. Como $\theta=\theta_1-\theta_2$, então $tg\,\theta=tg\,\big(\theta_1-\theta_2\big)$.

Usando a trigonometria:

$$tg \theta = tg (\theta_1 - \theta_2) = \frac{tg \theta_1 - tg \theta_2}{1 + tg \theta_1 \cdot tg \theta_2}$$

Substituindo $m_r = tg \, \theta_2$ e $m_s = tg \, \theta_1$, e colocando o módulo para garantir o menor ângulo formado pelas retas, temos:

$$tg \, \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$
 , como queríamos demonstrar.

Caso as retas tenham equações simétricas no espaço, então, o ângulo formado entre elas é dado pela expressão:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}|}{|\vec{r_1}||\vec{r_2}|}$$
, em que $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$ são os vetores diretores das duas retas,

respectivamente.



Exemplificando

Sejam as retas r: 3x - 5y + 11 = 0 e s: x + 4y - 9 = 0. Encontre o menor ângulo formado por elas.

Solução: Primeiro, vamos encontrar o coeficiente angular das retas:

$$m_r = -\frac{a}{b} = \frac{-3}{-5} = 0.6 \text{ e } m_s = -\frac{a}{b} = \frac{-1}{4} = -0.25.$$

Depois, substituiremos esses valores na expressão:

$$tg \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right| = \left| \frac{0.6 - (-0.25)}{1 + 0.6(-0.25)} \right| = 1.$$

Logo, o ângulo θ é o ângulo entre as retas r e s, cuja tangente vale 1. Portanto, $\theta = 45^{\circ}$.



Faça você mesmo

Sejam uma reta, r, que passa pelos pontos A (2,9) e B (-1,3) e outra reta, s, distinta, que passa pelos pontos C (0,4) e D (5,-2). Encontre o menor ângulo formado por elas.



Pesquise mais

Acesse o seguinte material e aprofunde seus conhecimentos sobre equações da reta:

MIRANDA, Daniel; GRISI, Rafael; LODOVICI, Sinuê. **Geometria analítica e vetorial**. Disponível em: http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/ga/notasdeaulas/geometriaanaliticaevetorial-SGD.pdf. Acesso em: 5 ago. 2016.

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto inicialmente, lembre-se de que você precisa calcular a inclinação da placa instalada pela sua empresa.

Para isso, primeiramente, você precisa encontrar a equação da reta que serve como suporte para a sua placa. A Figura 4.1 mostra que, vista lateralmente, a placa pode ser entendida como uma reta que passa pelos pontos (15,0,68) e (40,0,168).

Para determinarmos a equação da reta que passa por esses pontos, o primeiro

$$\overrightarrow{AB} = (40,0,168) - (15,0,68) = (25,0,100)$$

Escolhendo o ponto A e tendo o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, temos as equações paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 15 + 25t \\ y = 0 \\ z = 68 + 100t \end{cases}$$

Como y=0, a reta está sobre o plano xz, e sua "sombra", ou projeção, sobre o plano horizontal xy, é a reta s: $(0,0,0)+k\cdot\vec{i}$, com $k\in$. Portanto, o ângulo formado entre as retas é o mesmo formado entre os seus vetores diretores, a saber:

$$\cos\theta = \frac{\left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{i} \right|}{\left| \overrightarrow{AB} \right| \left| \overrightarrow{i} \right|} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\left| (25, 0, 100) \cdot (1, 0, 0) \right|}{\sqrt{25^2 + 0^2 + 100^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{\left| 25 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 100 \cdot 0 \right|}{\sqrt{225 + 10000}}$$

$$\cos\theta \simeq \frac{25}{101.119} \Rightarrow \cos\theta \simeq 0.247 \Rightarrow \theta \simeq \arccos 0.247 \simeq 75.7^{\circ}$$

Sendo assim, o ângulo de inclinação da placa é de, aproximadamente, 75,7°.

Avançando na prática

Pratique mais Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

Vigas estruturais				
1. Competências	Conhecer os conceitos e os fundamentos da geometri analítica e da álgebra vetorial que apoiem o desenvolviment de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicad em problemas ligados à engenharia.			
2. Objetivos de aprendizagem	Conhecer as diferentes equações da reta e como determiná- -las. Calcular a inclinação da reta.			
3. Conteúdos relacionados	Sistemas, determinantes, plano cartesiano, proporção.			
4. Descrição da situação-problema	Para montar uma casa no estilo enxaimel, casas típicas de Joinville, Santa Catarina, sua empresa instalou duas vigas de madeira para montar o telhado. A primeira passa pelo ponto A (1,4) e B (-3, -8). Já a segunda, pelos pontos C (2, -4) e B (-1, 11). Você precisa determinar o ângulo exato entre as vigas para poder instalar o telhado e projetar o restante da casa. Qual seria esse ângulo?			

Equações de retas e planos

181

Para determinarmos a equação das retas suportes das vigas que passam por esses pontos, podemos utilizar a expressão:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Para a primeira viga, substituindo os pontos dados e calculando o determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 3y - 8 - y + 12 + 8x = 0.$$

Ou seja, a equação da reta que representa a viga é 3x - y + 1 = 0, e o seu coeficiente é: $m_1 = 3$.

Para a segunda viga, substituindo os pontos dados e calculando o determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x - y + 22 - 2y - 4 - 11x = 0$$

Ou seja, a equação da reta que representa a viga é -5x - y + 6 = 0 e o seu coeficiente é: $m_2 = -5$.

Para determinar o ângulo entre as duas retas, usamos a expressão:

$$tg\,\theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$

Substituindo os coeficientes, temos:

$$tg \ \theta = \left| \frac{3 - \left(-5\right)}{1 + 3 \cdot \left(-5\right)} \right| \cong 0,571 \Rightarrow \theta = arctg \ 0,571 \cong 29,745^{\circ} \ .$$

Portanto, o ângulo entre as retas é de, aproximadamente, 29,745°.

Faça valer a pena

- **1.** A reta de equação y + kx = 2 passa pelo ponto (k,-6). Sabendo que esse ponto está no quarto quadrante, qual é o valor de k?
- a) $-\sqrt{2}$
- b) $\sqrt{7}$
- c) $2\sqrt{2}$
- d) 4
- e) 6

- **2.** Considere, no plano cartesiano, o triângulo retângulo determinado pelos eixos coordenados e pela reta de equação 12x + 5y = 60. Qual é a área desse triângulo, em m²?
- a) 20 m^2
- b) 30 m^2
- c) 40 m²
- d) 50 m²
- e) 60 m²
- **3.** Seja a reta r, de coeficiente angular 10, que intercepta o eixo y em um ponto de ordenada k. Já a reta s, de coeficiente angular 9, intercepta o eixo y em um ponto de ordenada l. Se as retas r e s interceptam-se em um ponto de abscissa 6, então, qual é o valor aproximado de k?
- a) 0,9*l*
- b) 54+l
- c) 6l
- d) 0.59+l
- e) -6+l

Seção 4.2

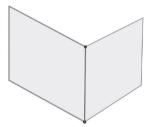
Equação geral do plano

Diálogo aberto

Olá, aluno!

Você se lembra de que, na seção anterior, estudou equações da reta e ângulo entre duas retas? Você precisou calcular o ângulo em que iria instalar uma placa de energia. Esperamos que tenha percebido que, em muitas situações como essa, você utilizará equações da reta e o ângulo entre elas. Suponha, agora, que sua empresa vai construir uma casa e precisa determinar a interseção de duas paredes, como na Figura 4.8.

Figura 4.8 | Planos secantes



Fonte: elaborada pelo autor.

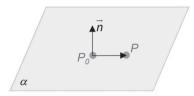
Ao olhar a planta, você percebe que a primeira parede é um plano que passa pelos pontos A(1,0,2), B(4,-1,3) e C(3,5,1). Já em relação à segunda parede, você tem a equação do plano que a contém: 3x-6y+8z+1=0. Para determinar a interseção dessas duas paredes, você precisará de alguns conceitos. Vamos lá?

Não pode faltar

Para resolver a situação descrita e outras situações-problema que possam existir, precisamos de alguns conceitos importantes.

Equação geral do plano

Figura 4.9 | Plano α e vetor $\vec{n} = (a,b,c)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Sejam $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ um ponto pertencente ao plano α , e $\vec{n}=\left(a,b,c\right)$ um vetor normal ao plano. Tome um ponto genérico do plano $P\left(x,y,z\right)$, como na Figura 4.9. Como \vec{n} é normal ao plano, e $P\in\alpha$, temos que $\vec{n}\perp \overline{P_0P}\Rightarrow \vec{n}\cdot \overline{P_0P}=0$. Portanto, temos $\left(a,b,c\right)\cdot\left(x-x_0,y-y_0,z-z_0\right)=0$. Dessa forma, obtemos a equação geral do plano:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

ou

$$ax + by + cz + d = 0$$

em que
$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$
.

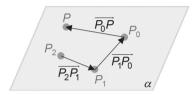
Essa mesma equação também pode ser obtida se tivermos dois pontos, $P_0(x_0,y_0,z_0)$ e $P_1(x_1,y_1,z_1)$, e um vetor, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0 ;$$

ou, até mesmo, com três pontos $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $P_1(x_1,y_1,z_1)$ e $P_2(x_2,y_2,z_2)$, como na Figura 4.10.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

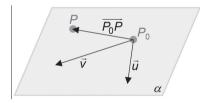
Figura 4.10 | Plano determinado por P_0 , P_1 e P_2



Fonte: elaborada pelo autor.

Equação vetorial do plano

Figura 4.11 | Plano determinado por $\ P_0$, \vec{u} e \vec{v}



Fonte: elaborada pelo autor.

Seja α um plano que contém o ponto $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=\left(u_1,u_2,u_3\right)$ e $\vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right)$, com \vec{u} e \vec{v} não paralelos. O ponto $P\left(x,y,z\right)$ pertencerá ao plano α se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{P_0P}$, \vec{u} e \vec{v} forem coplanares (estiverem no mesmo plano, como na Figura 4.11). Nesse caso, o determinante calculado com as coordenadas desses três vetores é nulo, ou seja:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Como os vetores $\overrightarrow{P_0P}$, \overrightarrow{u} e \overrightarrow{v} devem ser coplanares, o plano α também pode ser representado pela **equação vetorial do plano**:

$$(x,y,z) = P_0 + t \cdot \vec{v} + h \cdot \vec{u}$$
, com $t,h \in$



Exemplificando

Encontre a equação geral do plano que passa pelos pontos A (6,1,5), B (3,0,-4) e C (1,1,-3).

Solução: Para encontrar a equação do plano, basta substituirmos os valores dados:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-5 \\ 6-3 & 1-0 & 5+4 \\ 3-1 & 0-1 & -4+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-5 \\ 3 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-x+6-3z+15+18y-18-2z+10+9x-54+3y-3=0$$
.

Logo, a equação do plano é 8x + 21y - 5z - 44 = 0. Observe que a = 8, b = 21, c = -5 e d = -44.



Reflita

Um ponto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pertencerá ao plano, se satisfizer a equação ax + by + cz + d = 0, quando substituímos os valores de suas coordenadas, ou seja,

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$



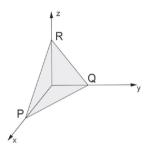
Assimile

Para determinar a interseção do plano com os eixos coordenados, igualamos duas das coordenadas a zero:

- Interseção com o eixo $x \Rightarrow y = z = 0$.
- Interseção com o eixo $y \Rightarrow x = z = 0$.
- Interseção com o eixo $z \Rightarrow x = y = 0$.

Equação segmentária do plano

Figura 4.12 | Equação segmentária do plano



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinar a equação segmentária, suponha um plano α , como na Figura 4.12. O plano α intercepta os eixos nos pontos $P\left(p,0,0\right)$, $Q\left(0,q,0\right)$ e $R\left(0,0,r\right)$. Substituindo as coordenadas dos pontos na equação do plano, temos:

• Para o ponto
$$P(p,0,0) \Rightarrow ap + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow p = -\frac{d}{a}$$
.

• Para o ponto Q
$$(0,q,0) \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot q + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow q = -\frac{d}{b}$$

• Para o ponto
$$R\left(0,0,r\right) \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot r + d = 0 \Rightarrow r = -\frac{d}{c}$$

Agora, na equação geral ax + by + cz + d = 0, dividindo tudo por (-d), temos:

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} + \frac{d}{-d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-d} + \frac{y}{-d} + \frac{z}{-d} = 1$$

Substituindo por p, q e r, temos a **equação segmentária do plano**: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$.



Exemplificando

Obtenha a equação segmentária do plano de equação geral

$$5x + 10y - 8z - 40 = 0$$

Solução: Para encontrar a equação segmentária do plano, primeiro, isolamos d e, depois, dividimos toda a equação por -d.

$$5x + 10y - 8z - 40 = 0 \implies 5x + 10y - 8z = 40$$

Dividindo ambos os lados por
$$-d = 40$$
, temos: $\frac{5x}{40} + \frac{10y}{40} - \frac{8z}{40} = \frac{40}{40}$

Logo, a equação segmentária do plano é $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} + \frac{z}{-5} = 1$.

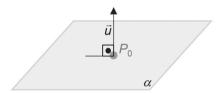


Faca você mesmo

Encontre a equação geral e segmentária do plano que passa pelos pontos A (9,1,3), B (1,-3,4) e C (2,1,5).

Equação do plano que passa por um ponto e é ortogonal a um vetor

Figura 4.13 | Plano que passa por P_0 e é ortogonal a \vec{u}



Fonte: elaborada pelo autor.

Sejam um ponto $P_0(x_0,y_0,z_0)$, pertencente ao plano α , e um vetor $\vec{u}=(a,b,c)$, ortogonal ao plano α como na Figura 4.13. Tomando um ponto P(x,y,z) qualquer de α temos:

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$$

Os vetores $\overline{P_0P}$ e \vec{u} são ortogonais, portanto, seu produto escalar é nulo:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{u} = a \cdot \left(x - x_0\right) + b \cdot \left(y - y_0\right) + c \cdot \left(z - z_0\right) = 0 \Rightarrow ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

Fazendo $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, temos a equação do plano procurada:

$$ax + by + cz + d = 0$$



Reflita

Note que a, b e c são as coordenadas de um vetor ortogonal ao plano, ou ainda, **normal** ao plano α .



Exemplificando

Encontre a equação do plano que passa pelo ponto A(1,4,5) e é ortogonal ao vetor $\vec{u}=(-3,1,4)$.

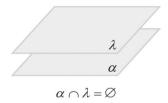
Solução: Primeiro, vamos substituir as coordenadas do vetor na equação do plano: $ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow -3x + 1y + 4z + d = 0$

Agora, como $A \in \alpha$, temos: $-3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + d = 0 \Rightarrow d = -21$.

Logo, a equação do plano procurada é -3x + y + 4z - 21 = 0.

Posições relativas entre planos

Figura 4.14 | Planos paralelos



Fonte: elaborada pelo autor.

Sejam os planos α : ax + by + cz + d = 0 e λ : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$. Esses planos podem ser paralelos, ortogonais, secantes ou coincidentes. Veja como:

• Planos paralelos

Sejam os planos α : ax + by + cz + d = 0 e λ : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, dizemos que α e λ são **paralelos** se, e somente se:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

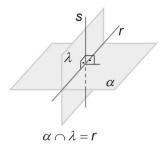
Em particular, os planos lpha e λ serão **coincidentes** se:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1}$$

Equações de retas e planos

191

Figura 4.15 | Planos ortogonais



Fonte: elaborada pelo autor.

Planos ortogonais

Para os planos α : ax + by + cz + d = 0 e λ : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, dizemos que α e λ são ortogonais se, e somente se:

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$



Exemplificando

Determine m e n para que os planos 3x + 8y + 2z + 14 = 0 e (m-2)x+6y+(n-1)z+12=0 sejam paralelos.

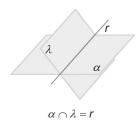
Solução: Para que os planos sejam paralelos, devemos ter $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

Substituindo os valores dados: $\frac{3}{(m-2)} = \frac{8}{6} = \frac{2}{(n-1)}$.

Da primeira igualdade, segue: $8m-16=18 \Rightarrow m=\frac{17}{4}$. Da segunda:

$$8n - 8 = 12 \Rightarrow n = \frac{5}{2}$$
. Portanto, $m = \frac{17}{4}$ e $n = \frac{5}{2}$.

Figura 4.16 | Planos secantes



Fonte: elaborada pelo autor.

Planos secantes

Os planos secantes têm, como interseção, uma reta. Um par de planos será secante quando eles não forem paralelos, e isso inclui o caso em que os planos são ortogonais.

Dados dois planos secantes, tendo posse de suas equações, interessa-nos saber a equação da reta que corresponde à interseção deles.

Para determiná-la, podemos proceder da seguinte forma:

Sejam os planos α : $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ e λ : $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. A interseção dos planos α e λ é uma reta, que é obtida resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

nas variáveis x, y e z.

Planos coincidentes

Dizemos que α e λ são coincidentes se $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$ e $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2$.



Exemplificando

Encontre a equação da interseção dos planos α_1 : 5x - 2y + z + 7 = 0 e α_2 : 3x - 3y + z + 4 = 0

Solução: Para encontrar a equação da reta que é a interseção desses dois planos, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x - 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Temos duas equações e três variáveis, logo, temos um sistema indeterminado. Para resolver esse sistema, vamos atribuir um valor qualquer, genérico, para x. Fazendo $\mathbf{x} = \lambda$, vamos resolver o sistema:

- 1. Multiplicando a primeira equação por (-1) e somando com a segunda equação, temos: $-2\lambda \gamma 3 = 0 \Rightarrow \gamma = -2\lambda 3$.
- 2. Tomando o mesmo sistema e multiplicando, agora, a primeira equação por (-3), a segunda equação por (2) e somando-as, obtemos:

$$-9\lambda - z - 13 = 0 \Rightarrow z = -9\lambda - 13$$

Logo, a equação da reta que é a interseção dos planos, α_1 e α_2 , é:

r:
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda - 3 \\ z = -9\lambda - 13 \end{cases}$$

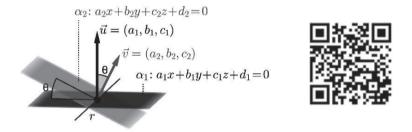
ou seja, os pontos que pertencem a essa reta são do tipo

$$(\lambda, -2\lambda - 3, -9\lambda - 13)$$

Ângulo entre dois planos

Sejam os planos α_1 : $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ e α_2 : $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, e os vetores, $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ e $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$, vetores normais aos planos α_1 e α_2 , respectivamente.

Figura 4.17 | Ângulo entre dois planos



Fonte: adaptado de: https://goo.gl/bQNUPa. Acesso em: 30 ago. 2016.

O ângulo θ formado pelos planos α_1 e α_2 , como na Figura 4.17, é dado por:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Observe que essa fórmula advém do produto escalar, com a especificidade de considerarmos sempre o menor ângulo formado entre os planos, $0^{\circ} \le \theta \le 90^{\circ}$, por isso, usa-se $|\vec{u} \cdot \vec{v}|$ ao invés de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ no numerador da razão que fornece o cosseno do ângulo.



Faca você mesmo

Encontre o ângulo θ formado entre os planos $\alpha_1:7x-3y-z+2=0$ e α_2 sabendo que o plano α_2 passa pelos pontos A(1,0,5), B(-2,1,3) e C(-3,-1,4).



Pesquise mais

Acesse o seguinte artigo e aprofunde seus conhecimentos sobre equações do plano:

CRUZ, Luiz Francisco da. Plano. In: _____. **Cálculo vetorial e geometria analítica**. cap. 6. Disponível em http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/GA_CAP_06.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2016.

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto, inicialmente, lembre-se de que você precisa calcular a equação da reta que representa a interseção de dois planos, mas, para isso, primeiro, você precisa encontrar a equação de um dos planos, visto que a outra é conhecida.

Considere α_1 , o plano que passa por A(1,0,2), B(4,-1,3) e C(3,5,1), e o plano α_2 : 3x-6y+8z+1=0. Para determinarmos a equação de α_1 , podemos utilizar a expressão:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo as coordenadas dos pontos dados e calculando o determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 1-4 & 0+1 & 2-3 \\ 4-3 & -1-5 & 3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-2-y+18z-36-z+2+6y-6x+6=0$$

Logo, a equação do plano α_1 é -4x + 5y + 17z - 30 = 0.

Para encontrar a equação da reta que é a interseção desses dois planos, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x - 6y + 8z + 1 = 0 \\ -4x + 5y + 17z - 30 = 0 \end{cases}$$

Temos duas equações e três variáveis, logo, temos um sistema indeterminado. Para resolver esse sistema, vamos atribuir um valor qualquer para x. Fazendo $x = \lambda$, temos:

1. Multiplicando a primeira equação por 17, a segunda equação por -8 e somando, obtemos:

$$83\lambda - 142y + 257 = 0 \Rightarrow y = \frac{83\lambda + 257}{142}$$

2. Tomando o mesmo sistema e multiplicando, agora, a primeira equação por 5, a segunda equação por 6 e somando-as, obtemos:

$$-9\lambda + 142z - 175 = 0 \Rightarrow z = \frac{9\lambda + 175}{142}$$

Logo, a equação da reta que é a interseção dos planos α_1 e α_2 é:

r:
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{83\lambda + 257}{142} \\ z = \frac{9\lambda + 175}{142} \end{cases}$$

ou seja, os pontos que pertencem a essa reta são do tipo $\left(\lambda, \frac{83\lambda + 257}{142}, \frac{9\lambda + 175}{142}\right)$, com $\lambda \in$

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiámos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

Planos inclinados				
1. Competências	Conhecer os conceitos e fundamentos da geometria analítico e da álgebra vetorial que apoiem o desenvolvimento de um visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada en problemas ligados à engenharia.			
2. Objetivos de aprendizagem	Determinar o ângulo entre dois planos.			
3. Conteúdos relacionados	Equação do plano e ângulos entre planos.			
4. Descrição da situação-problema	Um engenheiro instalou duas pequenas placas planas dentro de uma máquina, de maneira que ambas não sejam paralelas. Ele precisa determinar o ângulo entre essas placas. A primeira tem equação $3x-y+z-1=0$ e a segunda, equação $6x+2y-4z+7=0$, ambas obtidas com base no esboço tridimensional do projeto, feito em computador. Qual é o ângulo encontrado pelo engenheiro?			
5. Resolução da situação-problema	Primeiramente, ele precisa considerar os vetores $\vec{u}=(3,-1,1)$ e $\vec{v}=(6,2,-4)$ normais às placas 1 e 2 , respectivamente. Depois, determinar $ \vec{u}\cdot\vec{v} $, $ \vec{u} $, $ \vec{v} $ e o cosseno do ângulo θ entre eles: $ \vec{u}\cdot\vec{v} = 3\cdot 6+(-1)\cdot 2+1\cdot (-4) = 12 =12$ $ \vec{u} =\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}\cong 3,317: \vec{v} =\sqrt{6^2+2^2+(-4)^2}\cong 7,483$ $\cos\theta=\frac{ \vec{u}\cdot\vec{v} }{ \vec{u} \vec{v} }\Rightarrow\cos\theta\cong\frac{12}{3,317\cdot 7,483}\Rightarrow\cos\theta\cong 0,483$ Logo, θ é o arco cujo cosseno é de, aproximadamente, 0,483, ou seja, $\theta\cong\arccos0,483$ e θ é de, aproximadamente, 61,118°. Dessa forma, as placas formam, entre si, um ângulo aproximado de 61,118°.			

Faça valer a pena

1. Qual é a equação geral do plano que passa pelo ponto A (2,1,-2) e é

perpendicular à reta de equação
$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$
?
$$z = t$$

a)
$$3x + 2y + z - 6 = 0$$

b)
$$2x + 2y + z - 8 = 0$$

c)
$$-7x + y + 6z - 1 = 0$$

d)
$$-x - 4y + z - 8 = 0$$

e)
$$6x - y - z - 3 = 0$$

2. Qual é a equação do plano que passa pelos pontos A (2,1,-1), B (0,-1,1) C (1,2,1)?

a)
$$x + y + z - 6 = 0$$

b)
$$-x + 2y + z - 11 = 0$$

c)
$$-3x + y + 9z - 1 = 0$$

d)
$$x - 3y + z - 8 = 0$$

e)
$$3x - y + 2z - 3 = 0$$

3. Sejam os planos $\alpha_1: x + my + 2z - 7 = 0$ e $\alpha_2: 4x + 5y + 3z + 2 = 0$. Qual são os valores de m, para que o ângulo entre os planos seja de 30°?

a)
$$m = 4 e m = 3$$

b)
$$m = 1 e m = 7$$

c)
$$m = 9 e m = 8$$

d)
$$m = 5 e m = 2$$

e)
$$m = 0 e m = 6$$

Seção 4.3

Distância entre dois pontos

Diálogo aberto

Olá, aluno!

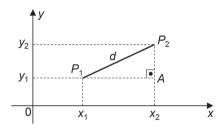
Na seção anterior, você estudou sobre planos. Você encontrou as diferentes equações do plano, o ângulo entre dois planos e a interseção entre eles. Nesta seção, você vai aprender a calcular a distância entre dois pontos e entre ponto e reta. Suponha que sua empresa esteja terminando de montar a casa que você começou a construir na seção anterior. Para fazer uma instalação elétrica, você precisa determinar o tamanho do fio a ser usado e calcular o orçamento para o seu cliente. O fio a ser instalado sairá de um ponto de sua parede até uma viga de madeira. Na ocasião de realizar essa verificação, você estava sem sua trena, mas por meio de cálculos, você conseguiu determinar que a viga passava pelos pontos A(10,12) e B(9,18), e que o ponto de onde partirá o fio é P(8,6). O comprimento do fio é medido em metros e cada metro custa R\$ 38,56. Sabendo que, na instalação a ser feita, você gastará 20% a mais de fio do que o comprimento real, qual será o orçamento a passar ao seu cliente?

Para calcular a distância do fio e fazer o orçamento, você vai precisar saber alguns conceitos. Vamos lá?

Não pode faltar

Distância entre dois pontos

Figura 4.18 | Distância entre dois pontos



Fonte: elaborada pelo autor.

Sejam os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Para calcular a distância entre os pontos P_1 e P_2 , aplicaremos o teorema de Pitágoras no triângulo da Figura 4.18.

Observe que o triângulo P_1AP_2 é retângulo em A e que seus catetos são $\overline{P_1A} = x_2 - x_1$ e $\overline{P_2A} = y_2 - y_1$. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos que:

$$d^{2} = (x_{2} - x_{1})^{2} + (y_{2} - y_{1})^{2};$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Exemplificando

Encontre a distância, em metros, entre os pontos A = (5,-7) e B = (3,8).

Solução: Utilizando a fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ e substituindo os valores dados, temos:

$$d = \sqrt{(3-5)^2 + (8-(-7))^2} \Rightarrow d = \sqrt{4+225}$$

Logo, a distância entre os pontos A e B é $d = \sqrt{229}$ m ou de, aproximadamente, 15,133 m.

Distância entre dois pontos no \mathbb{R}^3

Sejam os pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. A distância entre esses dois pontos no espaço é dada pela fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

A demonstração dessa fórmula consta em Venturi (2015, p. 52).



Exemplificando

Encontre a distância, em centímetros, entre os pontos A = (2,4,7) e

$$B = (4, 6, -1).$$

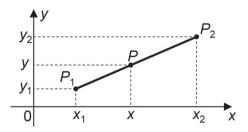
Solução: Utilizando a fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ e substituindo os valores dados, temos:

$$d = \sqrt{(2-4)^2 + (4-6)^2 + (7-(-1))^2} \Rightarrow d = \sqrt{4+4+64} \cong 8,485$$

Logo, a distância entre os pontos A e B é de, aproximadamente, 8,485 cm.

Pontos que dividem o segmento numa razão dada

Figura 4.19 | Razão de segmentos



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe a Figura 4.19. Nela, temos o segmento de comprimento $\overline{P_1P_2}$, com $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$. Seja um ponto P=(x,y), que divide o segmento $\overline{P_1P_2}$ na razão k, ou seja, $k=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}}$, então, temos:

$$k = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}} \Rightarrow k = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \in k = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Isolando x e y nas equações, temos:

$$x = \frac{k \cdot x_2 + x_1}{k+1} \in y = \frac{k \cdot y_2 + y_1}{k+1}$$



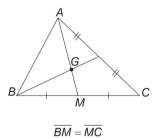
Assimile

Se k = 1, então, o ponto P coincide com o ponto médio do segmento P_1P_2 , e as fórmulas para as coordenadas do ponto médio são:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \in y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
.

Baricentro de um triângulo

Figura 4.20 | Baricentro do triângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Baricentro de um triângulo é o encontro de duas medianas. O baricentro, representado pela letra G, divide cada mediana em duas partes, como na Figura 4.20:

O baricentro divide a mediana na proporção 2 para 1, ou seja, $\frac{AG}{MG} = 2$.

Logo, temos que:

$$\frac{x_G - x_A}{x_M - x_G} = 2$$
 ou $x_G = \frac{x_A + 2x_M}{3}$.

Como $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$, substituindo na expressão anterior, temos: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$. Analogamente, para a coordenada referente ao eixo y, temos:

 $y_G = \frac{y_A + 2y_M}{3}$ e $y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$. Substituindo a segunda fórmula na primeira, temos: $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$. Portanto, as coordenadas do baricentro do triângulo são dadas por:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

O baricentro é o ponto $G(x_G, y_G)$



Exemplificando

Seja um triângulo cujos vértices estão nos pontos A(2,5), B(7,-1). e C(4,-2). Determine as coordenadas do baricentro desse triângulo.

Solução: Para encontrar o baricentro de um triângulo, usamos as

expressões
$$X_G = \frac{X_A + X_B + X_C}{3}$$
 e $Y_G = \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}$. Substituindo os

pontos dados, temos:

$$x_G = \frac{2+7+4}{3} \cong 4{,}33 \in y_G = \frac{5+(-1)+(-2)}{3} \cong 0{,}67$$

Logo, as coordenadas do baricentro são, aproximadamente,



Assimile

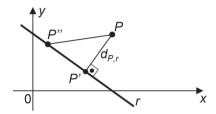
O baricentro também é conhecido como centro de massa. É o lugar onde se aplica uma força para se levantar o sistema em *equilíbrio*.

Equações de retas e planos

203

Distância de ponto à reta

Figura 4.21 | Distância de ponto à reta



Fonte: elaborada pelo autor.

Sejam um ponto qualquer $P(x_0, y_0)$ e a reta r de equação ax + by + c = 0, como na Figura 4.21. Queremos encontrar a distância do ponto P à reta r.

Uma das maneiras de encontrar a expressão que determina essa distância procurada é por meio da área de um triângulo. Observe, na Figura 4.21, o triângulo P'PP'', em que $P'(x_1, y_1)$ e $P''(x_2, y_2)$ são pontos de r. Baseado nele, temos que:

$$Area = \frac{d_{P,r} \cdot d_{P'',P'}}{2} \in Area = \frac{1}{2} det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com base nas igualdades anteriores, temos:

$$\frac{d_{P,r} \cdot d_{P'',P'}}{2} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| \det \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{P,r} \cdot$$

$$d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = |(x_0 - x_1)y_2 + (x_2 - x_0)y_1 + (x_1 - x_2)y_0|$$

Como $P'(x_1, y_1)$ e $P''(x_2, y_2)$ pertencem a $r, ax_1 + by_1 + c = 0$ e $ax_2 + by_2 + c = 0$ e, ainda:

$$by_1 = -ax_1 - c$$
 \Rightarrow $y_1 = \frac{-ax_1 - c}{b} \in by_2 = -ax_2 - c$ \Rightarrow $y_2 = \frac{-ax_2 - c}{b}$

Logo:

$$d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| (x_0 - x_1) \frac{-ax_2 - c}{b} + (x_2 - x_0) \frac{-ax_1 - c}{b} + (x_1 - x_2) y_0 \right|$$

$$d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| -x_2 \cdot y_0 + x_1 \cdot y_0 - \frac{a \cdot x_0 \cdot x_2}{b} - \frac{c \cdot x_2}{b} + \frac{a \cdot x_0 \cdot x_1}{b} + \frac{c \cdot x_1}{b} \right|$$

$$d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \left| -\frac{\left(x_2 - x_1\right) \cdot \left(c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a\right)}{b} \right| = \left| \frac{\left(x_2 - x_1\right) \cdot \left(c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a\right)}{b} \right|$$

$$d_{P,r} \cdot d_{P'',P'} = \frac{\left|x_2 - x_1\right| \cdot \left|c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a\right|}{|b|}.$$

Temos, ainda, que $d_{P'',P'}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$ e $\left|b\right|^2=b^2$. Da equação da reta, segue também que:

$$y_{1} = \frac{-ax_{1} - c}{b} = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{\frac{y_{2} - y_{1}}{x_{2} - x_{1}}} x_{1} + \frac{-c}{b} \quad \Rightarrow \quad -\frac{a}{b} = \frac{y_{2} - y_{1}}{x_{2} - x_{1}} \quad \Rightarrow \quad y_{2} - y_{1} = -\frac{a}{b} (x_{2} - x_{1})$$

Portanto:

$$d_{P,r} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{|x_2 - x_1| \cdot |c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a|}{|b|};$$

$$d_{P,r} = \frac{|x_2 - x_1| \cdot |c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a|}{|b| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{|x_2 - x_1| \cdot |c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a|}{|b| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-\frac{a}{b}(x_2 - x_1))^2}};$$

$$|b| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(-\frac{b}{b}(x_2 - x_1)\right)}$$

$$d_{D_n} = \frac{|x_2 - x_1| \cdot |c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a|}{|a_n|} = \frac{|x_2 - x_1| \cdot |c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a|}{|a_n|}$$

$$d_{P,r} = \frac{|x_2 - x_1| \cdot |c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a|}{|b| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \left(1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^2\right)}} = \frac{|x_2 - x_1| \cdot |c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a|}{|x_2 - x_1| \sqrt{|b|^2 \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}};$$

$$d_{P,r} = \frac{\left| c + y_0 \cdot b + x_0 \cdot a \right|}{\sqrt{b^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)}} = \frac{\left| ax_0 + by_0 + c \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sendo assim, a distância do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta r: ax + by + c = 0 é dada por:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Exemplificando

Encontre a distância, em centímetros, do ponto P(3,9) à retar:4x-3y+6=0

Solução: Para encontrar a distância do ponto P à reta r usamos a expressão:

$$d_{P,r} = \frac{\left| ax_0 + by_0 + c \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Substituindo os valores dados, temos:

$$d_{P,r} = \frac{\left|4 \cdot 3 + (-3) \cdot 9 + 6\right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \Rightarrow d_{P,r} = 1.8$$

Logo, a distância do ponto P à reta r é de 1,8 cm.



Atenção

A distância de um ponto P à reta r também pode ser obtida quando encontramos um vetor unitário \vec{n} com a mesma direção de r e um ponto Q pertencente à reta. A expressão que calcula essa distância é:

$$d_{P,r} = \left| (P - Q) \times \vec{n} \right|$$

A demonstração dessa fórmula consta em Venturi (2015, p. 137).

Note que a fórmula $d_{P,r} = |(P-Q) \times \vec{n}|$ pode ser usada tanto para o plano, quanto para o espaço tridimensional. Além disso, se \vec{d}_r for o vetor diretor da reta r, não necessariamente unitário, a fórmula fica como seque:

$$d_{P,r} = \left| \left(P - Q \right) \times \overrightarrow{n} \right| = \left| \left(P - Q \right) \times \frac{\overrightarrow{d_r}}{\left| \overrightarrow{d_r} \right|} \right| = \frac{\left| \left(P - Q \right) \times \overrightarrow{d_r} \right|}{\left| \overrightarrow{d_r} \right|} = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r} \right|}{\left| \overrightarrow{d_r} \right|}.$$



Faça você mesmo

Encontre a distância do ponto P(5,-8) à reta r que passa pelos pontos A(7,-11) e B(2,-5).



Exemplificando

Determine a distância, em centímetros, do ponto P(1,-2,5) à reta

$$r: \begin{cases} x = -7 + t \\ y = 8 - 3t \\ z = 6t \end{cases}$$

Solução: Para encontrar a distância do ponto P à reta r, usamos a expressão

$$d_{P,r} = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r} \right|}{\left| \overrightarrow{d_r} \right|}$$
, mas, primeiro, observe que um vetor diretor da reta r

é $\overrightarrow{d_r} = (1,-3,6)$. Escolhendo, agora, um ponto qualquer da reta r, por exemplo, para t=0 temos Q=(-7,8,0). Encontrando \overline{QP} :

$$\overrightarrow{QP} = (1, -2, 5) - (-7, 8, 0) = (8, -10, 5)$$

Calculando $\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}$:

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -10 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (-45, -43 - 14)$$
.

Substituindo os valores, temos:

$$d_{Pr} = \frac{\sqrt{\left(-45\right)^2 + \left(-43\right)^2 + \left(-14\right)^2}}{\sqrt{1^2 + \left(-3\right)^2 + 6^2}} \Rightarrow d_{Pr} \cong 9,41.$$

Logo, a distância do ponto P à reta r é de 9,41 cm.



Pesquise mais

Acesse, a partir da página 216, a obra de Venturi (2015) e aprofunde mais seus conhecimentos sobre distância entre dois pontos e distância de ponto à reta.

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto no início desta seção, devemos encontrar, primeiro, a equação da reta que representa a viga. Sabemos que a viga passa pelos pontos A(10,12) e B(9,18). Para encontrar a equação da reta, usamos a expressão

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$
. Substituindo as coordenadas dos pontos dados e calculando o

determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 10 & 12 & 1 \\ 9 & 18 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12x + 180 + 9y - 108 - 18x - 10y = 0.$$

Logo, a equação geral da reta que passa pelos pontos $A \in B \in 6x + y - 72 = 0$. Agora, vamos determinar a distância entre o ponto P e a reta r. Para isso, usamos a

expressão
$$d_{Pr} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
. Substituindo as coordenadas do ponto $P(8,6)$ e

da reta r: 6x + y - 72 = 0, temos:

$$d_{P,r} = \frac{\left|6 \cdot 8 + 1 \cdot 6 - 72\right|}{\sqrt{6^2 + 1^2}} \Rightarrow d_{P,r} \cong \frac{18}{6,08} \cong 2,96$$

A distância do ponto *P*, de onde sairá o fio até a viga, é de, aproximadamente, 2,96 m. Como serão gastos 20% a mais de fio, teremos:

20% de 2,96 é, aproximadamente, 0,59 m.

Logo, será gasto um total de 2,96+0,59=3,55 m de fio. Como cada metro custa R\$ 38,56, o total a ser gasto com fios será de, aproximadamente, $38,56\cdot3,55=136,89$. Assim, o valor total do orçamento é de, aproximadamente, R\$ 136,89.

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

Comprimento da ponte				
1. Competências	Conhecer os conceitos e os fundamentos da geometri analítica e da álgebra vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicad em problemas ligados à engenharia.			
2. Objetivos de aprendizagem	Determinar a distância entre dois pontos.			
3. Conteúdos relacionados	Distância entre dois pontos.			
4. Descrição da situação-problema	Sua empresa tem dado muito certo. Você montou uma filiem uma cidade do interior e já arrumou um trabalho: constru uma ponte. Você esteve presente o tempo todo, analisou fiscalizou. Ao final, você estabeleceu os pontos de fixação o ponte em ambos os lados da estrada e concluiu que ela aino adentraria ao asfalto 4 m de cada lado. Sabendo que os ponto que você determinou foram $A(0,20,27)$ e $B(0,2,21)$, que foi o comprimento total da ponte, em metros?			
5. Resolução da situação-problema	Para calcular o comprimento da ponte, primeiro usamos a expressão para distância entre dois pontos. Depois, somamos em cada lado os 4 m que foram inseridos ao asfalto. Calculando a distância entre os pontos A e B , temos: $d_{A,B} = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$ $d_{A,B} = \sqrt{\left(0 - 0\right)^2 + \left(2 - 20\right)^2 + \left(21 - 27\right)^2}$ $d_{A,B} = \sqrt{324 + 36} \cong 18,97$ Somando os 4 m de cada lado, ou seja, 8 m, temos o comprimento total da ponte: aproximadamente, 26,97 m.			

Faça valer a pena

- **1.** Sendo A(3,1), B(4,-4) e C(-2,2) vértices de um triângulo, qual é o perímetro aproximado desse triângulo, em km?
- a) 23,04 km
- b) 31,54 km
- c) 18,69 km
- d) 9,14 km
- e) 12,12 km
- **2.** O ponto A(-1,-2) é um vértice do um triângulo ABC, cujo lado BC está sobre a reta de equação x + 2y 5 = 0. Qual é a altura aproximada relativa ao lado BC desse triângulo, em metros?
- a) 6,18 m
- b) 7,01 m
- c) 5,21 m
- d) 3.29 m
- e) 4,47 m
- **3.** Sejam P(3m+1,15) e Q(m,3) pontos pertencentes ao segundo quadrante que distam 13 cm. Qual é o valor de m?
- a) -5
- b) -4
- c) 6
- d) -3
- e) 2

Seção 4.4

Distância entre ponto a plano e plano a plano

Diálogo aberto

Olá, aluno!

Você se lembra de que, na seção anterior, estudou sobre distância entre dois pontos? Você aprendeu também a calcular o ponto médio de um segmento e o baricentro de um triângulo. Nesta seção, você aprenderá a calcular a distância entre ponto a plano e entre plano a plano. Esses conteúdos nos auxiliam em diversos cálculos da Engenharia e da Matemática.

Suponha que, para finalizar a obra que sua empresa estava realizando, você precise instalar as placas de vidros das janelas. Serão várias placas que, ao se abrirem, ficarão paralelas umas às outras. Você precisará determinar, exatamente, a distância entre elas e, para isso, terá que usar seus conhecimentos matemáticos.

Você já determinou as equações das placas a serem instaladas. Agora, precisará determinar a distância entre elas, quando abertas, como na Figura 4.22.

Figura 4.22 | Distância entre planos



Fonte: https://goo.gl/2BKS0H>. Acesso em: 20 set. 2016.

Essa imagem foi gerada por programa de computador, sendo que, agora, cabe a você determinar a distância entre as placas de vidro, em metros, sabendo que as equações dos planos que as representam são $\alpha:3x-2y+5z+1=0$ e $\beta:-6x+4y-10z-1=0$

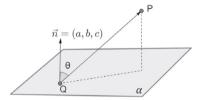
Vamos lá?

Não pode faltar

Distância de um ponto P a um plano α

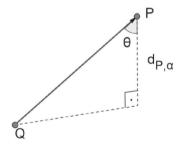
Sejam um ponto $P(x_0,y_0,z_0)$ e um plano $\alpha:ax+by+cz+d=0$, tal que P esteja fora do plano α . Seja Q(x,y,z) um ponto de α , e $\vec{n}=(a,b,c)$ um vetor normal do plano α , como na Figura 4.23:

Figura 4.23 | Distância de um ponto ao plano



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.24 | Cosseno do ângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Calculando o produto interno entre o vetor \overrightarrow{n} e o vetor \overrightarrow{QP} , temos:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{QP}| \cdot \cos \theta$$

Retirando da Figura 4.23 o triângulo retângulo em que \overrightarrow{QP} é a hipotenusa (vide Figura 4.24), temos:

$$\cos\theta = \frac{d_{P,\alpha}}{\left|\overrightarrow{QP}\right|}$$

Substituindo $d_{P,a}/\left| \overline{QP} \right|$ no produto interno, temos:

$$\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} \right| = \left| \vec{n} \right| \cdot \left| \overrightarrow{QP} \right| \cdot \frac{d_{P,\alpha}}{\left| \overrightarrow{QP} \right|} \quad \Rightarrow \quad \left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} \right| = \left| \vec{n} \right| \cdot d_{P,\alpha} \quad \Rightarrow \quad d_{P,\alpha} = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} \right|}{\left| \vec{n} \right|} \cdot d_{P,\alpha}$$

Sabendo que $\left| \overrightarrow{n} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{QP} = (a,b,c) \cdot (x_0 - x,y_0 - y,z_0 - z)$ = $-ax - by - cz + ax_0 + by_0 + cz_0$ e lembrando que -ax - by - cz = d (equação do plano α), temos:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

$$d_{P,\alpha} = \frac{\left| \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{QP} \right|}{\left| \overrightarrow{n} \right|} = \frac{\left| ax_0 + by_0 + cz_0 + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Assimile

Dado um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e um plano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ a distância de P até α é:

$$d_{P,\alpha} = \frac{\left| ax_0 + by_0 + cz_0 + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$



Exemplificando

Sejam um ponto $P=\left(10,5,-4\right)$ e um plano $\alpha:2x+4y-6z+8=0$. Determine a distância do ponto ao plano, medida em centímetros.

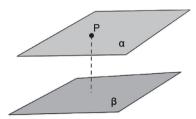
Solução: Para determinar a distância do ponto P ao plano α , usamos a expressão: $d_{P,\alpha} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Substituindo os valores, temos:

$$d_{P,\alpha} = \frac{\left|2 \cdot 10 + 4 \cdot 5 - 6 \cdot \left(-4\right) + 8\right|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + \left(-6\right)^2}} = \frac{36}{\sqrt{14}} \cong 9,621$$

Logo, a distância do ponto P ao plano α é de, aproximadamente, 9,621 cm.

Distância de um plano α a um plano β

Figura 4.25 | Planos paralelos



Fonte: elaborada pelo autor

Sejam dois planos, $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\beta: a_0x + b_0y + c_0z + d_0 = 0$. Para calcularmos a distância entre α e β , primeiramente, isso só tem sentido se α e β forem paralelos. Para calcular essa distância, utilizaremos a mesma fórmula de distância de ponto a plano:

$$d_{P,\alpha} = \frac{\left| ax_0 + by_0 + cz_0 + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Para determinarmos essa distância, tomamos um ponto $P(x_0,y_0,z_0)$, tal que $P \in \alpha$. A distância $d_{P,\beta} = d_{\alpha,\beta}$, ou seja, a distância de um ponto qualquer de α ao plano β é igual à distância entre esses planos, como na Figura 4.25.



Exemplificando

Sejam dois planos, de equações $\alpha: x+2y-2z+1=0$ e $\beta: 2x+4y-4z+4=0$. Determine a distância entre eles.

Solução: Para determinar a distância entre $\, \alpha \,$ e $\, \beta \,$, usamos a expressão:

$$d_{P,\alpha} = \frac{\left| ax_0 + by_0 + cz_0 + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Primeiro, determinamos um ponto qualquer de um dos planos, por exemplo, o plano α . Tomemos P(3,0,2), juntamente com a equação do plano $\beta:2x+4y-4z+4=0$, e substituímos os valores:

$$d_{P,\alpha} = \frac{\left|2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 - 4 \cdot 2 + 4\right|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + \left(-4\right)^2}} = \frac{1}{3}$$

Logo, a distância entre α e β é $\frac{1}{3}$ de uma unidade de comprimento.



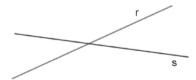
Reflita

Por que não convém calcular a distância entre dois planos, se eles não forem paralelos?

Distância entre duas retas

1. Se duas retas são concorrentes, por definição, a distância entre elas é nula. O mesmo ocorre para os planos: quando se interceptam, a distância é nula.

Figura 4.26 | Retas concorrentes



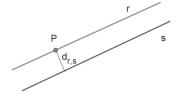
Fonte: elaborada pelo autor.

2. Se duas retas r e s são paralelas, no \mathbb{R}^2 , a distância entre as duas é calculada de maneira similar à distância entre dois planos. Tome um ponto $P \in r$, e a distância entre $P \in r$ será a distância entre

Caso as retas estejam no \mathbb{R}^3 , usamos o mesmo processo, mas com a expressão

referente ao \mathbb{R}^3 , $d_{P,r} = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r} \right|}{\left| \overrightarrow{d_r} \right|}$ (vimos essa fórmula na seção anterior).

Figura 4.27 | Retas paralelas



Fonte: elaborada pelo autor.

3. Se as retas *r* e *s* são reversas:

Sejam a reta r, que contém o ponto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$, e a reta s, que contém o ponto $P_2(x_2,y_2,z_2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$. Considere o plano α paralelo à reta r, contendo a reta s. A distância de r a s é a mesma que a distância de P_1 a α , ou seja, $d_{r,s}=d_{P_1,\alpha}$.

Mas, da trigonometria $\cos\theta = \frac{d_{r,s}}{\left|\overline{N_2P_1}\right|}$, ou ainda, $d_{r,s} = \left|\overline{N_2P_1}\right|\cos\theta$, a igualdade não muda se multiplicarmos o segundo membro por 1, logo:

$$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha} = \left| \overline{N_2 P_1} \right| \cdot 1 \cdot \cos \theta = \left| \overline{N_2 P_1} \right| \cdot \left| \overrightarrow{n} \right| \cdot \cos \theta , \operatorname{com} \overrightarrow{n} = -\frac{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}}{\left| \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \right|}.$$

Note que \vec{n} é o oposto do versor de $\vec{u} \times \vec{v}$ e que distância é sempre um valor não negativo. Portanto:

$$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha} = \left| \overrightarrow{N_2 P_1} \cdot \overrightarrow{n} \right|$$

Como N_2 não foi especificado, tome $N_2 = P_2$. Com isso:

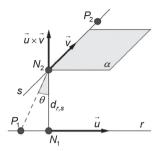
$$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha} = \left| \overrightarrow{P_2 P_1} \cdot \overrightarrow{n} \right|$$

Finalizando:

$$d_{r,s} = \left| \overrightarrow{P_2 P_1} \cdot \overrightarrow{n} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{P_2 P_1} \cdot \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}}{\left| \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \right|} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{P_2 P_1} \cdot \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}}{\left| \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \right|} \right| = \left| \frac{\left| \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{P_1 P_2} \right|}{\left| \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \right|} \right|.$$

em que $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{P_1P_2}\right]$ é o produto misto dos vetores \overrightarrow{u} , \overrightarrow{v} e $\overrightarrow{P_1P_2}$

Figura 4.28 | Retas reversas



Fonte: elaborada pelo autor.



Assimile

Dadas as retas $r: P_1 + t \cdot \vec{u}$ e $s: P_2 + k \cdot \vec{v}$, com $t, k \in$, a distância entre elas é:

$$d_{r,s} = \frac{\left| \left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1 P_2} \right] \right|}{\left| \vec{u} \times \vec{v} \right|}$$



Exemplificando

Determine a distância entre as retas r:(5,2,1)+t(2,-2,3) e

$$s:(1,2,2)+m(1,5,-1).$$

Solução: As retas r e s são reversas. Encontrando um ponto em cada reta:

$$r:(5,2,1)+t(2,-2,3) \Rightarrow \text{Para } t=0 \Rightarrow P=(5,2,1).$$

$$s:(1,2,2)+m(1,5,-1) \Rightarrow \text{Para } m=0 \Rightarrow Q=(1,2,2).$$

Sabemos também que os vetores diretores de r e s são:

$$\vec{d}_r = (2, -2, 3) \in \vec{d}_s = (1, 5, -1).$$

Determinamos, agora, o vetor \overrightarrow{QP} : $\overrightarrow{QP} = (5,2,1) - (1,2,2) = (4,0,-1)$

Calculando $\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s}$:

$$\vec{d_r} \times \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-13, 5, 12).$$

Equações de retas e planos

217

Logo, substituindo os valores encontrados na expressão para calcular a distância entre as retas, temos:

$$d_{r,s} = \frac{\left| \left[\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}, \overrightarrow{QP} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} \right|} = \frac{1}{\sqrt{(-13)^2 + 5^2 + 12^2}} \left| \det \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{338}} \left| -10 + 8 + 0 - 60 - 0 - 2 \right| = \frac{1}{\sqrt{338}} \left| -64 \right| = \frac{64}{\sqrt{338}} = \frac{64}{13\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{13}$$

Portanto, a distância entre as retas r e s é $d_{r,s} = \frac{32\sqrt{2}}{13}$



Faça você mesmo

Encontre a distância entre as retas reversas r:(1,3,5)+t(2,4,1) e s:(1,-1,3)+k(2,2,1).



Pesquise mais

Amplie seus conhecimentos sobre distância de ponto a plano, acessando este material: DISTÂNCIA. Disponível em: http://www.basica2.ufba.br/apostilas/retas-planos/Apost2-6.pdf>. Acesso em: 10 set. 2016.

Sem medo de errar

Retomando o problema proposto no início desta seção, sabemos que as placas de vidro são placas planas e que suas equações são, respectivamente, $\alpha:3x-2y+5z+1=0$ e $\beta:-6x+4y-10z-1=0$. Logo, para determinarmos a distância entre elas, basta determinarmos a distância entre os planos α e β , usando a expressão

$$d_{P,\alpha} = \frac{\left| ax_0 + by_0 + cz_0 + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Primeiro, determinamos um ponto qualquer de um dos planos, por exemplo, o plano α . Tomemos $P(2,1,-1) \in \alpha$. Agora, calculamos a distância do ponto P ao plano β . Substituindo os valores das coordenadas do ponto P e da equação do plano $\beta:-6x+4y-10z-1=0$, temos:

$$d_{P,\alpha} = \frac{\left| -6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 10 \cdot \left(-1 \right) - 1 \right|}{\sqrt{\left(-6 \right)^2 + 4^2 + \left(-10 \right)^2}} = \frac{\left| 1 \right|}{\sqrt{152}} = \frac{1}{\sqrt{152}} \cong 0,081.$$

Logo, a distância entre α e β é de, aproximadamente, 0,081 m ou 8,1 cm.

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, as compare com as de seus colegas.

Distância entre planos				
1. Competências	Conhecer os conceitos e os fundamentos da geometria analítica e da álgebra vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados à engenharia.			
2. Objetivos de aprendizagem	Calcular a distância entre planos.			
3. Conteúdos relacionados	Distância entre planos.			
4. Descrição da situação-problema	Para instalar placas solares sobre um telhado, um engenheiro precisa determinar a equação da placa, sabendo que a equação do telhado é $\alpha: -x-y-2z+4=0$ em metros. A placa deve ficar acima do telhado, sendo paralela a ele, numa distância de, pelo menos, 40 cm. Qual é a equação da placa?			
5. Resolução da situação-problema	Como o telhado e a placa devem ser paralelos, a equação da placa deve ter a seguinte forma: $\beta: -x - y - 2z + k = 0,$ sendo k um valor a determinar. Caso contrário, não seriam paralelos. O objetivo, então, é determinar k de modo que $d_{\alpha,\beta}=0,4$ m. Vamos tomar um ponto de β e calcular sua distância ao plano α . Por simplicidade, considere $P(k,0,0) \in \beta$. Temos: $d_{P,\alpha} = \frac{\left ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ $0,4 = d_{\alpha,\beta} = d_{P,\alpha} = \frac{\left -1 \cdot k - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4\right }{\sqrt{\left(-1\right)^2 + \left(-1\right)^2 + \left(-2\right)^2}}$ $\frac{4}{10} = \frac{\left -k + 4\right }{\sqrt{6}} \implies \frac{4\sqrt{6}}{10} = \left -k + 4\right \begin{pmatrix} -k + 4 = \frac{4\sqrt{6}}{10} & \text{(I)} \\ -k + 4 = -\frac{4\sqrt{6}}{10} & \text{(II)} \end{pmatrix}$			

Equações de retas e planos

219

Para o caso (I), temos:

$$-k + 4 = \frac{4\sqrt{6}}{10}$$
 \Rightarrow $k = 4 - \frac{4\sqrt{6}}{10}$ \Rightarrow $k \cong 4 - 0.98 = 3.02$.

Para o caso (II), temos:

$$-k+4 = -\frac{4\sqrt{6}}{10}$$
 \Rightarrow $k = 4 + \frac{4\sqrt{6}}{10}$ \Rightarrow $k \cong 4+0.98 = 4.98$.

Portanto, a equação da placa será β : -x - y - 2z + 4,98 = 0, em metros

Faça valer a pena

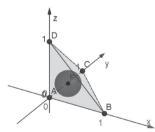
1. Qual é a distância aproximada entre as retas r: x+2y-3=0 e s: -3x-6y+8=0, em centímetros?

- a) 0.12 cm
- b) 0,15 cm
- c) 0,27 cm
- d) 0,02 cm
- e) 0,21 cm

2. Sejam um ponto P = (2,4,2) e um plano $\alpha: x+3y-2z+4=0$. Qual é a distância aproximada do ponto ao plano, medida em centímetros?

- a) 3,742 cm
- b) 2,573 cm
- c) 3,422 cm
- d) 4,574 cm
- e) 2,886 cm

3. Figura 4.29 | Esfera inscrita no tetraedro



Fonte: elaborada pelo autor.

Em metros, qual é o raio aproximado de uma esfera inscrita num tetraedro, conforme a Figura 4.29, cujos vértices são (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1)?

- a) 0,199 m
- b) 0,198 m
- c) 0,342 m
- d) 0,234 m
- e) 0,211 m

Referências

ANTON, H. Álgebra linear com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra linear. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

CALLOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. Álgebra linear e aplicações. 4. ed. São Paulo: Atual, 1983.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de álgebra linear**. São Paulo: Edusp, 2001.

CRUZ, Luiz Francisco da. Plano. In: _____. **Cálculo vetorial e geometria analítica**. cap.6. Disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/GA_CAP_06.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2016.

DISTÂNCIA. Disponível em: http://www.basica2.ufba.br/apostilas/retas-planos/ Apost2-6.pdf>. Acesso em: 10 set. 2016.

MIRANDA, Daniel; GRISI, Rafael; LODOVICI, Sinuê. **Geometria analítica e vetorial**. Disponível em: http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/ga/notasdeaulas/geometriaanaliticaevetorial-SGD.pdf>. Acesso em: 5 ago. 2016.

POOLE, David. **Álgebra linear**: uma introdução moderna. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

SANDOVAL JUNIOR, L. **Álgebra linear**: para ciências econômicas, contábeis e da administração. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

STRANG, G. Álgebra linear e suas aplicações. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

VENTURI, J. J. Álgebra vetorial e geometria analítica. 10. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2015. 242 p. Disponível em: http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2016.

