KLS

Cálculo diferencial e integral III

Cálculo diferencial e integral III

José de França Bueno
Ednaldo Alves Frezza

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Bueno, José de França
B928c Cálculo diferencial e integral III / José de França Bueno, Ednaldo Alves Frezza. – Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016.
248 p.

ISBN 978-85-8482-535-6

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. I. Frezza, Ednaldo Alves. II. Título.

CDD 515.33

2016
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Palavras do autor

Prezado aluno, a aprendizagem é um processo contínuo, uma vez que, voltando ao passado, podemos nos deparar desde a época em que éramos crianças e nos primeiros anos da vida na escola, começamos a aprender os conceitos matemáticos, que começaram do básico e nos proporcionaram conhecer os números e contá-los, até operacionalizá-los algebricamente e geometricamente. O tempo passou, chegamos ao curso superior e conhecemos o cálculo, que foi desenvolvido por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1727), e que nos proporcionou aplicações de movimentos, variações, distâncias etc.

Nesta etapa, vislumbraremos a unidade curricular Cálculo Diferencial e Integral III que proporcionará a compreensão de medidas de comprimento de curvas, cálculos de áreas em regiões irregulares no plano, volume e massa em sólidos arbitrários, entre outros. Para isso, é necessário estudar as integrais triplas, como calcular integrais triplas em coordenadas esféricas e cilíndricas, equações diferencias e o uso da Transformada de Laplace para resolver equações diferenciais lineares.

A fim de sistematizar esse aprendizado, dividimos o livro didático em quatro partes ou unidades:

Na Unidade 1, os estudos tratarão as integrais triplas, que são bem utilizadas em ciências exatas, sendo aplicadas em cálculo de volumes, massa, centro de massa e momentos de inércia.

Continuamos nosso estudo sobre integrais triplas na Unidade 2, introduzindo a questão do cálculo de integrais triplas em coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas. Dependendo da simetria do problema que você estiver estudando, pode ser bem mais simples utilizar outros sistemas de coordenadas que não as coordenadas retangulares.

Na Unidade 3, é a vez das equações diferenciais, que são recursos ótimos a serem utilizados nas ciências exatas, humanas e sociais, e que servem para modelar fenômenos e determinar índices ou taxas de crescimento ou decrescimento.

Por fim, na Unidade 4 vamos estudar as Transformadas de Laplace. Com essa transformada é possível transformar equações diferenciais em equações polinomiais (o que, em geral, facilita bastante os cálculos).

Lembre-se de criar e manter sua rotina diária de estudos. Mantenha seu local de estudos organizado, crie pastas e cadernos separados para cada unidade curricular. Não deixe suas dúvidas se acumularem e esclareça-as o mais rápido possível.

Preparado para mais este desafio em sua vida acadêmica? Vamos lá!

Integrais múltiplas

Convite ao estudo

Olá, aluno! Seja bem-vindo à Unidade 1 deste livro didático. Ela tratará uma parte muito importante das integrais múltiplas e nos contemplará com conhecimentos e aprendizagens sobre os conteúdos de equação do plano e plano tangente, integral tripla, volume e centro de massa e área de superfícies. Esses assuntos são recursos que podem ser utilizados na matemática propriamente dita e também nas demais ciências exatas. Eles podem e devem ser extremamente importantes à sua formação, e no decorrer destas etapas, você perceberá algumas aplicações ao seu entorno, nas mais diversas situações do seu cotidiano.

Você já ouviu falar em Oscar Niemeyer? Pois bem, ele foi um renomado arquiteto brasileiro, conhecido mundialmente e responsável por maravilhosos projetos arquitetônicos. Entre muitos, podemos citar o Congresso Nacional Brasileiro (Figura 1.1), localizado em Brasília, que teve a sua idealização a partir de formas geométricas.

Figura 1.1 | Congresso Nacional, em Brasília

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:National_Congress_of_Brazil.jpg>. Acesso em: 27 dez. 2015.

As mais belas e interessantes construções necessitam em algum momento serem reformadas, com o propósito de estarem sempre atraentes e interessantes. Desta forma, imagine que você trabalha em uma empresa de engenharia e foi designado o responsável por todas as obras e melhorias estruturais deste edifício. Uma grande responsabilidade, não é? Sendo assim, para que tudo aconteça da melhor forma possível, no decorrer desta unidade, você será incumbido a desempenhar alguns cálculos, a fim de aperfeiçoar essas tarefas.

Seção 1.1

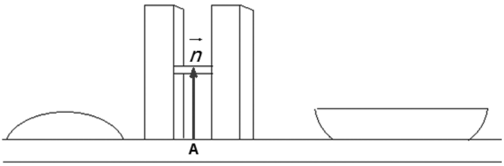
Equações do plano e plano tangente

Diálogo aberto

O Congresso Nacional é um marco arquitetônico de Brasília e ícone do Brasil. Ele é constituído por um edifício horizontal, uma cúpula voltada para baixo (onde fica a Câmara dos Deputados), uma cúpula voltada para cima (onde fica o Senado Federal) e duas torres de 28 andares (o anexo da Câmara e do Senado).

Desta forma, a sua primeira tarefa a ser realizada neste trabalho será encontrar uma forma algébrica para determinar um plano. Para isso, você terá como orientação a passarela de ligação das duas torres verticais e a cúpula maior (voltada para cima na Figura 1.2). Desta forma, vamos imaginar que o centro desta passarela é exatamente o ponto que você poderá designar o vetor normal $\vec{n} = (0,0,7)$, tendo a partir do solo o ponto $A(2,1,1)$. Agora é com você, determine a equação deste plano.

Figura 1.2 | Desenho do Congresso Nacional



Fonte: elaborada pelo autor.

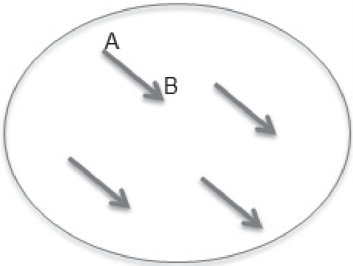
Como o seu trabalho é completo e deverá ser realizado sobre toda a estrutura física do Congresso Nacional, você também deverá determinar uma equação do plano que toque a superfície $z = 8 - x^2 - 4y^2$ em um ponto qualquer[1]. Essa superfície será uma parte integrante da cúpula menor (voltada para baixo). Baseando-se parcialmente na sua primeira resolução, você seria capaz de determinar a equação do plano que toque a superfície $z = 8 - x^2 - 4y^2$ no ponto $P(1,1,3)$?

[1] Observação: a equação apresentada não representa fidedignamente a cúpula menor. Para detalhes sobre o projeto arquitetônico do Congresso, sugerimos que acesse os links: <http://www.docomomo.org.br/seminario 10 pdfs/ST_04.pdf> e <http://au.pini.com.br/arquitetura-urbanismo/241/historia-em-detalhe-camara-dos-deputados-no-congresso-nacional-de-310689-1.aspx>. Acesso em: 16 fev. 2016.

Não pode faltar

Vetores

Figura 1.3 | Representação geométrica do conjunto de vetores equipolentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Para uma aprendizagem mais efetiva sobre os conteúdos desta seção, vamos relembrar alguns conceitos necessários. Desta forma, começamos abordando a ideia de vetores, que é um conceito abordado em Geometria Analítica e Álgebra Vetorial.

Considere o segmento de reta orientado. Definimos por **vetor**, o conjunto formado por todos os segmentos que apresentam a mesma direção, o mesmo comprimento e o mesmo sentido que $\overrightarrow{AB}$ (vide Figura 1.3).

Na representação geométrica do vetor, usamos apenas um elemento do conjunto. Já na sua representação algébrica, usamos uma letra minúscula do nosso alfabeto com uma seta acima dele $\left(\vec{v}\right)$.

Assimile

Grandezas vetoriais:

Comprimento → valor numérico.

Direção → horizontal, vertical ou inclinada.

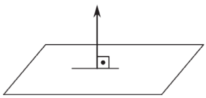
Sentido → esquerda, direita, para cima ou para baixo.

Lembre-se

Vetores equipolentes possuem mesmo comprimento, direção e sentido.

Um vetor de grande importância para nossos estudos é o normal, que é ortogonal a um plano, ou seja, que forma um ângulo de 90º com o mesmo (veja Figura 1.4). Você também deve se lembrar do vetor gradiente de

Figura 1.4 | Representação geométrica do conjunto de vetores equipolentes



Fonte: elaborada pelo autor.

uma função ∇f ,cujas componentes são as derivadas parciais, ou seja, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Produto escalar entre vetores

O produto escalar entre dois vetores pode ser representado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e o seu resultado será sempre um valor numérico. Vejamos:

Assimile

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$ são vetores no plano, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$.

Se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ são vetores no espaço, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$.

Vamos lembrar ainda que:

- Se o ângulo α formado entre dois vetores for agudo ($\alpha < 90°$), o produto escalar entre eles será sempre um valor positivo.
- Se o ângulo α formado entre os dois vetores for obtuso ($\alpha > 90°$), o produto escalar entre eles será sempre um valor negativo.
- Se o ângulo formado entre os dois vetores for reto ($\alpha = 90°$), o produto escalar entre eles será nulo.

Veja um exemplo de produto escalar.

Exemplificando

Dados os vetores $\vec{a} = (1, -2, 3)$ e $\vec{b} = (4, 5, -2)$, determine o produto escalar entre eles.

Resolução:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, -2, 3) \cdot (4, 5, 2) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 2 \Rightarrow$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 - 10 + 6 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -6 + 6 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Faça você mesmo

Dados os vetores $\vec{k} = (-2, 3, -3)$ e $\vec{w} = (3, 4, 2)$, determine o produto escalar entre eles.

Pesquise mais

Os estudos precisam ser complementados com outros materiais relacionais ao assunto, então, melhore seu aprendizado lendo o texto sobre vetores, da Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: <www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/vetores.pdf>. Acesso em: 04 jan. 2016.

Equação Geral do Plano e Plano Tangente – Noção Intuitiva

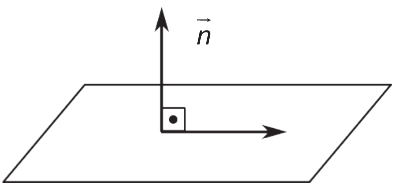
Agora que você relembrou alguns conteúdos importantes, vamos tratar mais alguns conceitos:

Assimile

Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor ortogonal a π. A equação geral do plano que passa pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e tem $\vec{n} = (a, b, c)$ como vetor normal é definida por $ax + by + cz + d = 0$, com $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Para que você entenda bem equação geral do plano, observe a Figura 1.5:

Figura 1.5 | Representação geométrica (plano e vetores)



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Vamos determinar a equação que representa algebricamente o plano, de acordo com a Figura 1.5.

Resolução:

Tomamos $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto conhecido e $P(x, y, z)$ um ponto qualquer, de forma que eles formem o vetor $\overrightarrow{AP}$ pertencente ao plano.

E o vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AP}$.

Desta forma, temos:

$\overrightarrow{AP} = P - A \to \overrightarrow{AP} = (x, y, z) - (x_1, y_1, z_1) \to \overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$

.

Lembrando que o produto escalar entre dois vetores perpendiculares entre si é nulo, então:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \Rightarrow$$
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \Rightarrow$$
$$ax - ax_1 + by - by_1 + cz - cz_1 = 0 \Rightarrow ax + by + cz - ax_1 - by_1$$
$$- cz_1 = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0.$$

Sabendo que, de acordo com a definição $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, chegamos à equação $ax + by + cz + d = 0$, denominada equação geral do plano.

Pesquise mais

Você sabia que também podemos representar a equação do plano na forma paramétrica? Veja esse excelente material. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/gaal/aulas_online/at4_03.html>. Acesso em: 4 jan. 2016.

De forma análoga, vamos entender como determinar a equação genérica de um plano tangente a uma superfície, entretanto, precisamos relembrar alguns conceitos necessários para isso.

Sendo assim, trataremos a diferenciabilidade de uma função em um determinado ponto. Pela definição, uma função $f(x)$ é diferenciável ou derivável em x_0, se existir o limite $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Ou seja, para garantirmos que uma função é

derivável, precisamos saber se ela existe em um ponto determinado, se existem os seus limites laterais e se esses limites são iguais.

Pesquise mais

Consulte o link a seguir e relembre sobre os conceitos de diferenciabilidade. Disponível em: <w3.ufsm.br/carmen/disciplinas/Calculo_II/aulas/F_var_5.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2016.

Além disso, temos as **derivadas direcionais**, que são recursos utilizados para sabermos as taxas de variação quando (x, y) se deslocam em outras direções.

Lembre-se

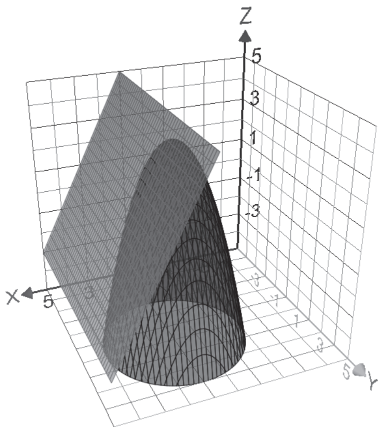
Para sabermos as taxas de variações $f(x, y)$, quando (x, y) se desloca paralelamente aos eixos x ou y, determinamos as derivadas em relação à x e y.

E também, o plano que toca a superfície S em um único ponto, denominado **plano tangente**.

Assimile

Seja f diferenciável no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ de uma superfície S dada por $F(x,y,z)=0$, onde $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. O plano contendo P e perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é chamado **plano tangente** de S em P (veja um exemplo na Figura 1.6).

Figura 1.6 | Representação geométrica de um plano tangente à superfície



Fonte: elaborado pelo autor através do software Graphing Calculator 3D (2016).

Pesquise mais

Veja mais detalhes sobre vetor gradiente e derivadas direcionais no texto da aula 6, do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, da Unicamp. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/~valle/PastCourses/MA211_14/Aula6.pdf>. Acesso em: 4 jan. 2016.

E sobre definição do plano tangente no texto da aula 9 da Universidade Federal de Santa Maria. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/carmen/disciplinas/Calculo_II/aulas/F_var_6.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2016.

Para obtermos genericamente a equação do plano tangente à superfície S de equação $z = f(x,y)$ (ou $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$) em P, com f diferenciável, tomamos os pontos $P(x_0, y_0, z_0)$ e $Q(x,y,z)$, ambos pertencentes à superfície, a fim de formar o vetor $\overrightarrow{PQ}$, e também um vetor gradiente a essa mesma superfície.

Sabemos que $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Fazendo o produto escalar entre eles temos:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Obtendo a equação do plano tangente a uma superfície no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (z - z_0) = 0 \cdot$$

Lembre-se

- O vetor gradiente representa quantitativamente a variação de uma grandeza com o espaço.
- O vetor gradiente é ortogonal à superfície.
- O vetor gradiente de um campo escalar $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ é um vetor no qual cada componente é definida pela derivada parcial de f em relação as variáveis $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Exemplificando

Determine a equação do plano tangente que toca a superfície $z = x^2 - y^2 + 4$ no ponto $P(2,1,7)$.

Resolução:

Organizando a equação temos $x^2 - y^2 - z + 4 = 0$.

Tomamos um ponto qualquer $Q(x, y, z)$ que pertença à superfície e obtemos o vetor $\overrightarrow{PQ}$.

Desta forma: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x-2, y-1, z-7)$.

Em seguida, encontramos o vetor gradiente no ponto em questão: $\nabla f(2,1,7) = (2x, -2y, -1)$.

E, substituindo os valores do ponto P: $\nabla f(2,1,7) = (4, -2, -1)$.

Calculamos o produto escalar entre os vetores,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \nabla f(2,1,7) = 0 \Rightarrow (x-2, y-1, z-7) \cdot (4, -2, -1) = 0 \Rightarrow$$

$$4(x-2) - 2(y-1) - 1(z-7) = 0 \Rightarrow \quad 4x - 8 - 2y + 2 - z + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$4x - 2y - z \; -8 + 2 + 7 = 0 \Rightarrow 4x - 2y - z + 1 = 0$$

E assim, chegamos à equação do plano tangente à superfície dada no ponto P.

Sem medo de errar

De acordo com o problema proposto no início da seção, você teria que determinar uma forma algébrica referente a um plano, localizado sobre o prédio horizontal do Congresso Nacional, ou seja, você deveria determinar a equação do plano propriamente dito. De acordo com as orientações dadas, você utilizaria como dados o vetor normal $\vec{n} = (0,0,7)$ e o ponto $A(2,1,1)$.

A equação geral do plano é ax + by + cz + d = 0 e ainda, que em $\vec{n}$, a = 0, b = 0 e c = 7. E também em A, x = 2, y = 1 e z = 1.

Substituindo na equação geral, temos:

$0.2+0.1+7.1+d=0 \Rightarrow 7+d = 0 \Rightarrow d = -7$

Logo: 7z – 7 = 0.

A sua outra tarefa nesta situação de aprendizagem seria determinar uma equação do plano que tocasse a superfície z = $8-x^2-4y^2$, no ponto P(1,1,3).

Desta forma, organizando a equação temos: $-x^2-4y^2-z+8=0$.

Em seguida, encontramos o vetor gradiente no ponto em questão $\nabla f(1,1,3)=(-2x,-8y,-1)$.

E, substituindo os valores do ponto P temos $\nabla f(1,1,3)=(-2,-8,-1)$.

Tomamos um ponto $Q(x,y,z)$ pertencente ao plano e obtemos o vetor $\overrightarrow{PQ}=(x-1,y-1,z-3)$. Desta forma calculamos o produto escalar entre os vetores:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\nabla f(1,1,3)=0\Rightarrow(x-1,y-1,z-3)\cdot(-2,-8,-1)=0\Rightarrow-2(x-1)-8(y-1)-1(z-3)=0$$

$$-2x+2-8y+8-z+3=0\Rightarrow-2x-8y-z+13=0$$

Assim, chegamos à equação do plano tangente à superfície dada no ponto em questão.

Pesquise mais

Conheça alguns casos particulares de equação geral do plano acessando o link a seguir e faça alguns exercícios para efetivar a sua aprendizagem sobre os conteúdos. Disponível em <people.ufpr.br/~roman/files/GA6.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2016.

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a solução de seus colegas.

Trabalhando com planos paralelos	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar o conceito de equação do plano em situações do cotidiano.
3. Conteúdos relacionados	Vetores e noção intuitiva de equação geral do plano.

4. Descrição da situação-problema	Com certeza você desempenhou de forma satisfatória as suas atividades anteriores. Sendo assim, foi designado mais uma vez a trabalhar com esses conteúdos a fim de solucionar outros problemas. Pois bem, você precisará perfurar um local que chamaremos de ponto $P(3,2,1)$ em um determinado plano que é paralelo ao plano $2x-3y-4z+3=0$. Para isso, será necessário conhecer a equação que determina geometricamente esse plano. Diante dessas informações, encontre esta expressão algébrica.
5. Resolução da situação-problema	A partir da equação do plano dada $2x-3y-4z+3=0$, sabemos que o vetor normal ao plano é $\vec{n}=(2,-3,-4)$. Como o plano que queremos determinar a equação é paralelo ao plano dado, podemos utilizar o mesmo vetor normal, uma vez que este também é ortogonal ao segundo plano. Sabemos também que o ponto $P(3,2,1)$ pertence ao plano que queremos determinar a equação, e desta forma fica fácil. Substituindo os valores do ponto na forma geral da equação do plano, temos: $2\cdot 3-3\cdot 2-4\cdot 1+d=0 \Rightarrow 6-6-4+d=0 \Rightarrow$ $6-10+d=0 \Rightarrow -4+d=0 \Rightarrow d=4$ Substituindo novamente os valores na equação genérica, podemos escrever a equação que procuramos. Logo: $2x-3y-4z+4=0$.

Lembre-se

Equação geral do plano $\rightarrow$ $ax+by+cz+d=0$

Vetor normal $\rightarrow$ $\vec{n}=(a,b,c)$

Ponto $\rightarrow P(x,y,z)$

Faça você mesmo

Sabendo que $P(3,1,-5)$ pertence a um plano paralelo a $4x-y-5z+d=0$. Determine a equação geral desse plano.

Faça valer a pena

1. Segmentos, para serem considerados vetores, precisam ter algumas características. Sendo assim, das alternativas a seguir é correto afirmar que:

a) Podem ser equipolentes dois a dois.

b) Podem ser diferentes em comprimento, direção e sentido.

c) Apresentam sempre a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

d) Uma de suas notações é feita por uma reta sobreposta a uma letra minúscula do alfabeto.

e) Não podem se anular.

2. Entre os vetores a seguir, qual possui as suas componentes definidas a partir de derivadas parciais?

a) Vetor normal.

b) Vetor equipolente.

c) Vetor gradiente.

d) Vetor nulo.

e) Vetor soma.

3. O sistema cartesiano é formado por três eixos (*x,y,z*), que correspondem a profundidade, largura e altura. Esses eixos podem possuir vetores unitários, que formam uma base do tipo $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Essa base é nomeada por:

a) Base perpendicular.

b) Base vetorial.

c) Base ortogonal.

d) Base ortonormal.

e) Base cartesiana.

Seção 1.2

Integral tripla

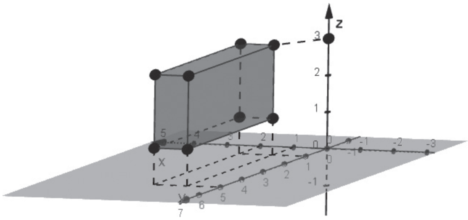
Diálogo aberto

Nesta seção de autoestudo, é importante que você se lembre do que viu e aprendeu em integrais duplas, pois será conveniente a utilização de cálculo de integral iterada.

Se você já viu o Congresso Nacional de perto, sabe que as cúpulas são grandes. Se ainda não teve oportunidade de conhecer, deve imaginar que são, pois assim parecem nas reportagens e fotos. Nesta situação, imagine que você e sua equipe terão que substituir alguns pedaços feitos de concreto de algumas regiões das paredes da cúpula maior. Entretanto, é sabido que, apesar dela ter um formato geométrico, esse não é regular, e é aí que mais uma vez você poderá aplicar os seus conhecimentos sobre integrais. Comparando-se com o tamanho total do edifício, esses pedaços contemplarão pequenas regiões. Para não desperdiçar material, tempo e demanda de mão de obra, você deverá fazer um teste em apenas um espaço tridimensional desta região, que se aproxima muito de um paralelepípedo, e sendo assim poderá ter uma função escrita em coordenadas cartesianas.

Após terminar os seus esboços a respeito desta tarefa, você concluiu que a região contemplará uma integral tripla e será indicada por $\iiint_R dV$, sendo que R pode ser considerado um paralelepípedo retângulo $[1,2]\times[1,5]\times[1,3]$.

Figura 1.7 | Esboço do paralelepípedo retângulo (Visualização dinâmica em: <www.geogebra.org/m/2594319>. Acesso em: 4 fev. 2016)



Fonte: elaborada pelo autor através do site de GeoGebra 5.0.200.0-3D.

Desta forma, como você desenvolveria este cálculo, a fim de calcular o volume dessa região?

Não pode faltar

Integral definida

Para resolver as situações dessa seção, é preciso relembrar alguns conceitos fundamentais aprendidos anteriormente, a fim de proporcionar um melhor entendimento. Entre eles, chegamos à definição de integral definida que nos ajudou a resolver problemas para determinar áreas.

Figura 1.8 | Notação simplificada da integral definida (L) da função f de a até b

$$L = \boxed{\underbrace{\lim}_{\text{máx } \Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1}} \boxed{f\left(\overline{x}_i\right)} \boxed{\Delta x_i}$$

$$L = \boxed{\int_a^b} \boxed{f(x)} \boxed{dx}$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Sendo assim, precisamos rever também a Soma de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo, conceitos importantíssimos para dar continuidade aos estudos dessa seção e também da unidade.

Pesquise mais

Veja mais detalhes sobre a soma de Riemann com aplicações no GeoGebra. Disponível em: <http://www.geogebra.org/m/32106> e <https://www.geogebra.org/material/simple/id/66012>. E sobre o Teorema Fundamental do Cálculo. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/~valle/PastCourses/MA111_14/Aula21.pdf>. Acessos em: 11 jan. 2016.

Integrais Duplas

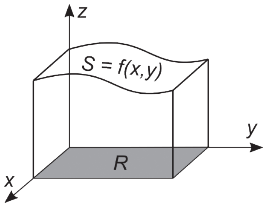
As integrais duplas são apresentadas analogamente às integrais definidas por uma variável e são excelentes recursos no cálculo de áreas de figuras planas e superfícies, além de ser eficientemente útil na obtenção de massa e volumes de regiões.

Uma superfície no espaço pode ser definida por uma função contínua de duas variáveis ($z=f(x,y)$), em uma região R, fechada e limitada ao plano xy. Desta forma, temos:

$$\iint_R f(x,y)dA \text{ ou } \iint_R f(x,y)dxdy.$$

A interpretação geométrica da integral dupla está associada ao cálculo de volume.

Figura 1.9 | Interpretação geométrica da integral dupla



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

Nem sempre teremos uma região retangular, entretanto, podemos encontrar a área e o volume de qualquer região, se o limite das somas de Riemann em x e em y existirem.

Segundo Stewart (2013, p. 876), "a integral dupla de f sobre o retângulo R é $\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,\, n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A$ se esse limite existir". E ainda, esse limite

sempre existe se a função f for contínua.

Integral iterada

É uma forma de expressar a integral dupla, a fim de obter o seu resultado calculando duas integrais de funções de uma variável real. Em outras palavras, é fazer a integração parcial em relação à y e x ou x e y, respectivamente. É expressa da seguinte forma:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Onde A(x) é definida por $A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$.

Assimile

"Teorema de Fubini: se f for contínua no retângulo:

$R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, então $\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$.

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R, f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e que a integral iterada exista" (STEWART, 2013, p. 883).

Pesquise mais

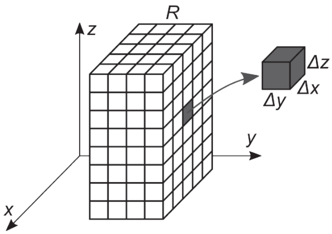
Veja mais detalhes sobre resolução de exercícios com integrais duplas no material da professora Salete Souza de Oliveira Buffoni, da Escola de Engenharia Metalúrgica de Volta Redonda da Universidade Federal Fluminense – UFF. Disponível em: <www.professores.uff.br/salete/cdiii/Calculo21.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2016.

Integral tripla

A aprendizagem das integrais triplas ocorre de forma análoga, pois já as definimos para funções de uma variável (integral definida) e de duas variáveis (integrais duplas). Sendo assim, podemos também defini-la para três variáveis.

Temos o caso mais simples, quando a função é definida sobre uma caixa em formato retangular, ou seja, $R = \left\{ (x, y, z) \in \;^{3} \mid a \le x \le b,\ \mathrm{c} \le \mathrm{y} \le \mathrm{d},\ \mathrm{m} \le \mathrm{z} \le \mathrm{n} \right\}$.

Figura 1.10 | Caixa retangular (Visualização dinâmica em: <https://www.geogebra.org/m/2745717>. Acesso em: 26 fev. 2016)



Fonte: elaborada pelo autor.

Observando a figura, vemos uma caixa retangular subdividida em caixas menores e divididas em subintervalos Δx, Δy e Δz. Logo, concluímos que o seu volume é dado por $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$. E assim como ocorre com a integral dupla, que é definida com o limite das somas de Riemann, temos o mesmo acontecendo com a tripla, entretanto, com três somas.

Desta forma, assim como a integral dupla, podemos expressar a integral tripla de forma iterada.

Assimile

Se f é contínua em uma caixa retangular $D = [a,b] \times [b,c] \times [m,n]$ então:

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

Exemplificando

Determine o valor da Integral $\int_1^2 \int_0^2 \int_0^1 (2xyz)dxdydz$.

Resolução:

$$\int_1^2 \int_0^2 \int_0^1 (2xyz)dxdydz = \int_1^2 2xdx \int_0^2 ydy \int_0^1 zdz = \int_1^2 2xdx \int_0^2 ydy \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \int_1^2 2xdx \int_0^2 ydy \left[\frac{1^2}{2}\right] =$$

$$\int_1^2 2xdx \frac{1}{2} \int_0^2 ydy = \int_1^2 2xdx \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \int_1^2 2xdx \frac{1}{2}\left[\frac{2^2}{2}\right] = \int_1^2 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

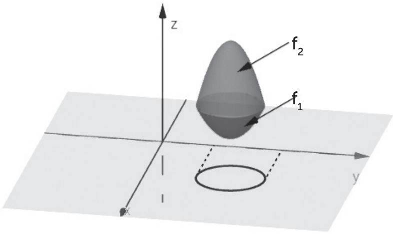
Também conseguimos representar a integral tripla em uma região limitada genérica de um sólido qualquer, ou seja, tridimensionalmente. Entretanto, precisamos restringir f a funções contínuas e três tipos de regiões.

- **Região do tipo I**

Define-se região do tipo I uma região do espaço contida entre os gráficos de duas funções contínuas nas variáveis x e y.

A região está contida entre os gráficos de duas funções contínuas, ou seja, $R = \{(x,y,z) \in I^3 \mid (x,y) \in D, f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$. Desta forma, podemos escrever a integral e os seus limites de integração de acordo com os seus eixos.

Figura 1.11 | Região do tipo I



Fonte: <www.geogebra.org/m/2596397>. Acesso em: 4 jan. 2016

Assimile

No caso de regiões do tipo I podemos escrever a integral tripla como

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$$

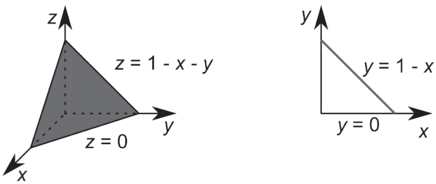
Exemplificando

Calcule $\iiint\limits_R y\, dV$, em que o tetraedro sólido R é delimitado pelos planos $x =$

0, y = 0 e z = 0 e $2x + 2y + 2z = 2$.

Resolução: primeiramente, é interessante representar o sólido (tridimensionalmente) e a projeção no plano em duas dimensões, a fim de se obter os limites de integração.

Figura 1.12 | Limites de integração



Fonte: elaborada pelo autor.

Temos os planos $z = 1 - x - y$ (ou $f_2(x,y) = 1 - x - y$) e $z = 0$

(ou $f_1(x,y) = 0$) se interceptam na reta
$R = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le 1 - x - y\}$ no plano xy.

Caracterizando uma projeção triangular, onde y = 1 - x. O domínio

$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$ estando no plano xy contempla uma região do tipo I, conforme a Figura: 1.12, nos permitindo calcular a integral $\iiint\limits_R y\, dV$:

$$\iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} y\, dz \right] dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} ydzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} [yz]_0^{1-x-y} dydx =$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \left(y - yx - y^2\right) dydx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^2 x}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 \left(1 - 3x + 3x^2 - x^3\right) dx =$$

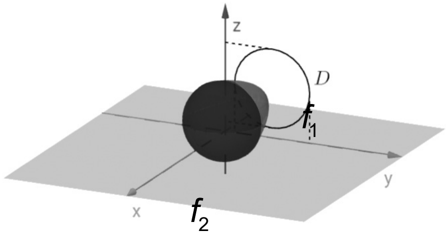
$$\frac{1}{6} \cdot \left[x - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

Logo, o valor da integral $\iiint\limits_R y\, dV$ é $\frac{1}{24}$.

- **Região do tipo II**

Define-se região do Tipo II uma região do espaço contida entre os gráficos de duas funções contínuas nas variáveis *y* e *z*.

Figura 1.13 | Região do tipo II



Fonte: <https://www.geogebra.org/material/simple/id/2746335>. Acesso em: 26 fev. 2016.

A região está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de y e z, ou seja, $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in D,\ f_1(y,z) \le x \le f_2(y,z)\}$. Desta forma, podemos escrever a integral e os seus limites de integração de acordo com os seus eixos.

Assimile

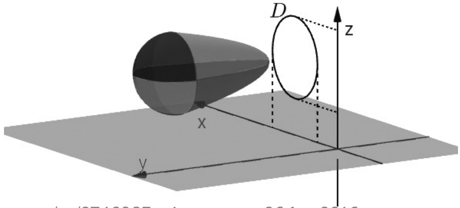
No caso de regiões do tipo II podemos escrever a integral tripla como

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{f_1(y,z)}^{f_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right] dydz$$

- **Região do tipo III**

Define-se região do Tipo III uma região do espaço contida entre os gráficos de duas funções contínuas nas variáveis x e z.

Figura 1.14 | Região do tipo III



Fonte: <www.geogebra.org/m/2746083>. Acesso em: 26 fev. 2016.

A região está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e z, ou seja, $R=\{(x,y,z)\in {}^{3} \mid (x,z)\in D,\ f_1(x,z)\le y\le f_2(x,z)\}$. Desta forma, podemos escrever a integral e os seus limites de integração de acordo com os seus eixos.

Assimile

No caso de regiões do tipo III podemos escrever a integral tripla como

$$\iiint_R f(x,y,z)dV=\iint_D\left[\int_{f_1(x,z)}^{f_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right]dxdz$$

Atenção

A integral iterada também contempla outras ordens de cálculos para as integrais triplas. E o teorema de Fubini fornece essa garantia. Vejamos:

Se f for contínua em uma caixa retangular $R=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$, então

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dV=\iiint\limits_R dxdydz=\int_a^b\left[\int_c^d\left(\int_r^s f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx=$$

$$\int_c^d\left[\int_a^b\left(\int_r^s f(x,y,z)dz\right)dx\right]dy=\int_r^s\left[\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right)dx\right]dz$$

Faça você mesmo

Calcule o valor da Integral $\int_1^2\int_0^3\int_1^2 (x^2z)dxdydz$.

Propriedades das Integrais triplas

Estas propriedades são as mesmas que você viu para integrais simples e duplas. Entretanto, foram adaptadas para as integrais triplas. Desta forma, também são operadores lineares.

I. $\iiint\limits_R k\,f\,dV = k\iiint\limits_R f\,dV$

Da propriedade I, temos que a integral de multiplicação de uma função por uma constante é a multiplicação da constante pela integral da função.

II. $\iiint\limits_R (f_1 + f_2)\,dV = \iiint\limits_R f_1\,dV + \iiint\limits_R f_2\,dV$

Da propriedade II, temos que a integral da soma de duas funções é a soma das integrais de cada uma delas.

III. $\iiint\limits_R f\,dV = \iiint\limits_{R_1} f\,dV + \iiint\limits_{R_2} f\,dV$, onde $R = R_1 \cup R_2$.

Da propriedade III, temos que a integral de uma função na união $R_1 \cup R_2$ é a soma das integrais em cada uma das regiões.

Sem medo de errar

No início desta seção, foi sugerido a você a resolução de uma situação, a fim de obter melhorias na estrutura do prédio da cúpula maior, no edifício do Congresso Nacional. E, apesar dessa estrutura não ter um formato regular, as regiões a serem trocadas, além de serem pequenas, aproximam-se a um paralelepípedo retângulo com dimensões $[1,2]\times[1,5]\times[1,3]$. Diante disso, para realizar os seus cálculos, você poderá expressar $\iiint\limits_R dV$ em coordenadas cartesianas.

Atenção

- Utilize a integral iterada para facilitar os cálculos.
- $dV = dx\,dy\,dz$.

Vejamos:

$$\int_1^2 dx \int_1^5 dy \int_1^3 dz = \int_1^2 dx \int_1^5 dy\,[z]_1^3 = \int_1^2 dx \int_1^5 dy\,[3-1] = 2\int_1^2 dx \int_1^5 dy = 2\int_1^2 dx\,[y]_1^5 =$$

$$2\int_1^2 dx\,[5-1] = 8\int_1^2 dx = 8[x]_1^2 = 8[2-1] = 8$$

Desta forma, a solução da integral, que representa o volume da região em formato de paralelepípedo retangular do prédio da cúpula maior do edifício do Congresso Nacional, é 8.

Lembre-se

Para cálculos de volumes em superfícies regulares, utilizamos as fórmulas que aprendemos em Geometria Espacial. Entretanto, vale lembrar que na aprendizagem das integrais triplas é aconselhável que você utilize seus conceitos, pois assim, você estará treinando e melhorando a sua aprendizagem para determinar volumes em qualquer superfície.

Pesquise mais

Aprenda mais sobre as integrais triplas, consultando o link do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense-UFF. Disponível em: <www.professores.uff.br/paulab/M04_aluno.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2016.

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Trabalhando com planos paralelos	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferencial ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar os conceitos de Integrais triplas em cálculos de volumes, em situações do cotidiano.
3. Conteúdos relacionados	Integrais triplas, integral iterada.

<table>
<tr>
<td>4. Descrição da situação-problema</td>
<td>
Imagine que você precisa calcular uma pequena região a ser restaurada do hemisférico, na Cidade das Artes e das Ciências, em Valência-Espanha.

Figura 1.15 | Hemisférico

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:El_Hemisf%C3%A9rico,_Ciudad_de_las_Artes_y_las_Ciencias,_Valencia,_Espa%C3%B1a,_2014-06-29,_DD_37.JPG>. Acesso em: 25 fev. 2016.

Nesse caso, a superfície a ser trabalhada está relacionada a integral $\iiint_R 2xdV$ onde

$$R=\{(x,y,z)\,|\,0\leq x\leq y+z,\ 0\leq y\leq z,\ 1\leq z\leq 2\}$$

A partir destas informações, determine o valor desta integral.
</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Resolução da situação-problema</td>
<td>
Resolvendo de dentro para fora, temos:

$$\int_1^2\int_0^z\left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{y+z} dydz = \int_1^2\int_0^z\left[x^2\right]_0^{y+z} dydz = \int_1^2\int_0^z\left[(y+z)^2\right]dydz =$$

$$\int_1^2\int_0^z\left(y^2+2yz+z^2\right)dydz = \int_1^2\left[\frac{y^3}{3}+\frac{2y^2z}{2}+yz^2\right]_0^z dz =$$

$$\int_1^2\left[\frac{y^3}{3}+y^2z+yz^2\right]_0^z dz = \int_1^2\left(\frac{z^3}{3}+z^2\cdot z+z\cdot z^2\right)dz =$$

$$\int_1^2\left(\frac{z^3}{3}+2z^3\right)dz = \frac{7}{3}\int_1^2 z^3dz = \frac{7}{3}\left(\frac{z^4}{4}\right)_1^2 = \frac{7}{3}\left(\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}\right) =$$

$$\frac{7}{3}\left(4-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{3}\cdot\frac{15}{4}=\frac{105}{12}=\frac{35}{4}$$

E desta forma, concluímos que o valor da integral relacionada a região de interesse a ser restaurada no hemisférico é $\frac{35}{4}$.
</td>
</tr>
</table>

Lembre-se

Para resolvermos a integral onde a superfície aproxima-se de uma caixa retangular, podemos utilizar o Teorema de Fubini para integrais duplas, assim como você já viu neste livro didático.

Faça você mesmo

Calcule o valor da Integral $\int_0^1 \int_0^y \int_0^{x+y} yzdzdxdy$.

Faça valer a pena

1. Sobre as integrais duplas, é correto afirmar que:

a) A integral será a massa obtida pela soma de uma região finita de densidades.

b) A integral será o volume obtido pela soma de uma infinidade de volumes infinitesimais inscritas em forma de paralelepípedos.

c) A integral será a área obtida em uma região finita de uma superfície retangular.

d) A integral será o volume do sólido formado pela sua integral iterada de volumes infinitesimais em forma de paralelepípedos.

e) A integral será o volume obtido pela soma de uma infinidade de volumes finitos inscritos em forma de vários paralelepípedos.

2. O processo de integral iterada é uma forma prática de resolver integrais. Desta forma, a integral $\int_0^1 \int_0^3 dydx$ é igual a:

a) 3

b) 1

c) 0

d) –1

e) –3

3. De acordo a região $R = \{(x,y) | y = x^2, y = x\}$, temos os intervalos $0 \leq x \leq 1$; $x^2 \leq y \leq x$; $y \leq x \leq \sqrt{y}$; $0 \leq y \leq 1$. Desta forma, qual integral expressa à região do tipo II?

a) $\int_0^1 \left[\int_x^{x^2} dy \right] dx$

b) $\int_{1}^{0}\left[\int_{x}^{x^2} dy\right]dx$

c) $\int_{0}^{1}\left[\int_{x^2}^{x} dy\right]dx$

d) $\int_{1}^{0}\left[\int_{x^2}^{x} dx\right]dy$

e) $\int_{0}^{1}\left[\int_{x}^{x^2} dx\right]dy$

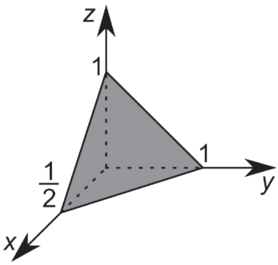
Seção 1.3

Volume e centro de massa

Diálogo aberto

Em continuidade nas práticas das obras de revitalização do Congresso Nacional, sua equipe deparou-se com um entrave ao ter que solucionar alguns problemas de dutos e encanamentos localizados dentro das paredes externas da cúpula menor do edifício. Um estagiário detectou que esses dutos se encontram atrás de uma placa com formato triangular e fez vários esboços da região, retratada na Figura 1.16.

Figura 1.16 | Esboço da superfície em formato triangular



Fonte: elaborada pelo autor.

Debatendo com os demais membros da equipe, chegou-se à conclusão que para mexer na estrutura dessa parede, seria necessário que isso ocorresse única e exclusivamente nessa superfície. Desta forma, através de cálculos obtidos no escritório, a fim de determinar tal região, obtiveram a equação $2x + y + z = 1$ como modelo. Entretanto, antes de pôr o trabalho em prática, eles se deparam com uma situação a ser resolvida: seria preciso determinar o centro de massa e o volume da região obtida. Com essas informações você seria capaz de resolver esse problema matemático, contribuindo com a sua equipe? Aqui vão algumas dicas para a resolução desse problema: as integrais triplas são uma extensão das integrais duplas; considere a densidade da placa descrita pela função $\rho(x, y, z) = kz$, em que k > 0 é uma constante.

Não pode faltar

Para resolver as situações dessa seção, precisaremos relembrar as integrais duplas. Elas foram recursos importantes que nos ajudaram a calcular áreas de regiões planas e volumes. Além disso, podemos aplica-las em outras situações, como na determinação da massa, dos momentos e centro de massa, utilizando uma função densidade considerada. Sendo assim, vamos relembrar esses conceitos?

Assimile

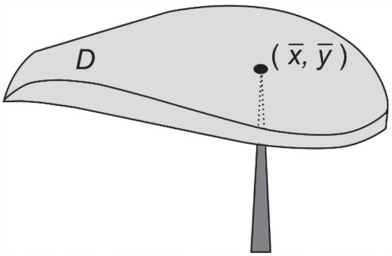
A massa total *m* de uma lâmina pode ser deduzida após um cálculo de limite, de modo semelhante ao usado na dedução das integrais duplas.

Desta forma, tendo no plano *xy* uma determinada região *D*, e a sua densidade em unidades de massa por unidade de área, dada por $\rho(x,y)$, em que ρ é uma função contínua sobre D em um ponto com coordenadas *x* e *y* pertencente à região *D*, essa massa é determinada pela integral dupla $m = \iint_D \rho(x,y)\,dA$.

Momentos e centro de massa

Se considerarmos uma lâmina, que tenha a sua densidade variável, ocupando determinada região D, e $\rho(x,y)$ sendo a sua função densidade (Figura 1.17). O centro de massa é o ponto que representa o comportamento da lâmina como se toda a massa dela estivesse concentrada neste ponto.

Figura 1.17 | Lâmina na posição horizontal equilibrada no centro de massa



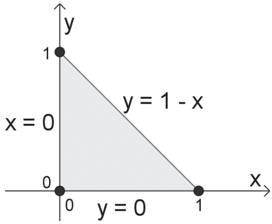
Fonte: elaborada pelo autor.

Desta forma, o **centro de massa** dessa lâmina, é exatamente o ponto nas coordenadas $(\bar{x},\bar{y})$. Ou seja, é o ponto de massa única, que uma partícula teria simultaneamente os mesmos momentos. Sendo assim, temos que essas coordenadas são dadas em $\bar{x} = \frac{M_y}{m}$ e $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$, em que $M_x = \iint_D y\rho(x,y)\,dA$ e $M_y = \iint_D x\rho(x,y)\,dA$ são os momentos em relação aos eixos *x* e y, respectivamente.

Exemplificando

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular que passe pelos vértices $(0,0)$ $(1,0)$ e $(0,1)$ cuja densidade é dada por $\rho(x,y) = x + 2y$.

Figura 1.18 | Lâmina



Fonte: O autor (2016).

Resolução:

A lâmina triangular (região D) é limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1 - x$.

Desta forma temos que $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$. Ou seja, os limites de integração em relação a x está entre 0 (inferior) e 1 (superior) e em relação a y está entre 0 (inferior) e 1–x (superior).

Para determinar a massa, resolvemos a integral $m = \iint_D \rho(x,y)\,dA$.

$$\int_0^1\int_0^{1-x} (x+2y)\,dydx = \int_0^1 \left[yx + \frac{2y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[(1-x)x + (1-x)^2\right] dx =$$

$$\int_0^1 \left[x - x^2 + (x^2 - 2x + 1)\right] dx = \int_0^1 (-x+1)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 =$$

$$-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Concluímos que $m = \dfrac{1}{2}$.

Resolvemos as integrais $M_x = \iint_D y\rho(x,y)\,dA$ e $M_y = \iint_D x\rho(x,y)\,dA$ para determinarmos os momentos em relação a x e y.

$$\int_0^1\int_0^{1-x} y(x+2y)\,dydx = \int_0^1\int_0^{1-x} (yx + 2y^2)\,dydx = \int_0^1 \left[\frac{y^2x}{2} + \frac{2y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2 x}{2} + \frac{2(1-x)^3}{3}\right] dx = \int_0^1 \left(\frac{-x^3}{6} + x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{2}{3}\right) dx =$$

$$\left[\frac{-x^4}{24} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{2x}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{24} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{5}{24}$$

Concluímos que $M_x = \dfrac{5}{24}$.

$$\int_0^1\int_0^{1-x} x(x+2y)\,dydx = \int_0^1\int_0^{1-x} (x^2 + 2yx)\,dydx = \int_0^1 \left[yx^2 + \frac{2y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$\int_0^1 \left[(1-x)x^2 + (1-x)^2 x\right]dx = \int_0^1 \left(-x^2 + x\right)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Concluímos que $M_y = \frac{1}{6}$.

Substituindo os valores de $m = \frac{1}{2}$, $M_x = \frac{5}{24}$ e $M_y = \frac{1}{6}$ em $\bar{x} = \frac{M_y}{m}$ e $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$ temos:

$$\bar{x} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{12} \text{ e } \bar{y} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Portanto, o centro de massa da figura está localizado no ponto $\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{3}\right)$.

Lembre-se

$dA = dxdy$ ou $dA = dydx$

Equação segmentária da reta: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

Pesquise mais

Aprenda mais sobre aplicações de integrais duplas, consultando o link do Departamento de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/~valle/PastCourses/MA211_14/Aula12.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2016.

Aplicações da Integral Tripla

Vamos tratar agora algumas aplicações das integrais triplas, que podem ser interpretadas em diversas situações.

Volume

Para as integrais triplas, podemos destacar um caso especial, onde

$f(x,y,z)=1$ para todos os pontos da região de integração E, sendo representada por $V=\iiint_E dV$.

Uma forma fácil de resolvê-la é por integral iterada, assim como já vimos na aula da seção anterior. Vale lembrar que neste caso, não é necessário utilizar a integral tripla para calcular o volume, entretanto ela é um recurso alternativo para estabelecer os cálculos.

Massa e centro de massa

Assim como nas integrais duplas, podemos determinar a massa e o centro de massa nas integrais triplas. Desta forma, se a densidade de uma região E é $\rho(x,y,z)$ em unidades de massa por unidade de volume, em qualquer ponto (*x, y, z*) temos:

Assimile

Massa: $m=\iiint_E \rho(x,y,z)dV$

Primeiros momentos em relação aos três planos coordenados:

$M_{yz}=\iiint_E x\rho(x,y,z)dV$ $\rightarrow$ Representa o primeiro momento em relação ao plano yz.

$M_{xz}=\iiint_E y\rho(x,y,z)dV$ $\rightarrow$ Representa o primeiro momento em relação ao plano xz.

$M_{xy}=\iiint_E z\rho(x,y,z)dV$ $\rightarrow$ Representa o primeiro momento em relação ao plano xy.

As coordenadas do centro de massa $CM=(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ são dadas por: $\bar{x}=\dfrac{M_{yz}}{m}$; $\bar{y}=\dfrac{M_{xz}}{m}$; $\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{m}$.

Exemplificando

Determine o centro de massa da região representada pela integral $\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{y+x} dV$, cuja densidade é dada por $\rho(x,y,z)=y$.

Resolução:

Para calcular a massa, substituímos os valores em $m=\iiint_E \rho(x,y,z)dV$.

$$\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{y+x} ydzdxdy = \int_0^1\int_0^{1-y}\left[yz\right]_0^{y+x}dxdy = \int_0^1\int_0^{1-y}\left[y\left(y+x\right)\right]dxdy =$$

$$\int_0^1\int_0^{1-y}\left[y^2+yx\right]dxdy = \int_0^1\left[y^2x+y\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y}dy = \int_0^1\left[y^2\left(1-y\right)+\frac{y\left(1-y\right)^2}{2}\right]dy =$$

$$\int_0^1\left[-y^3+\frac{y^3}{2}+\frac{y}{2}\right]dy = \left[-\frac{y^4}{4}+\frac{y^4}{8}+\frac{y^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Concluímos que a massa é $m=\frac{1}{8}$.

Em seguida, calculamos os momentos em relação aos três planos coordenados,

$$M_{yz}=\iiint_E x\rho\left(x,y,z\right)dV = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{y+x} xydzdxdy = \int_0^1\int_0^{1-y}\left[xyz\right]_0^{y+x}dxdy =$$

$$\int_0^1\int_0^{1-y}\left[xy\left(y+x\right)\right]dxdy = \int_0^1\int_0^{1-y}\left[y^2x+x^2y\right]dxdy = \int_0^1\left[\frac{y^2x^2}{2}+\frac{x^3y}{3}\right]_0^{1-y}dy =$$

$$\int_0^1\left[\frac{y^4}{6}-\frac{y^2}{2}+\frac{y}{3}\right] = \left[\frac{y^5}{30}-\frac{y^3}{6}+\frac{y^2}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{30}$$

Concluímos que $M_{yx}=\frac{1}{30}$.

Neste ponto, iniciamos o cálculo de M_{xz}:

$$M_{xz}=\iiint_E y\rho\left(x,y,z\right)dV = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{y+x} y^2dzdxdy = \int_0^1\int_0^{1-y}\left[y^2z\right]_0^{y+x}dxdy =$$

$$\int_0^1\int_0^{1-y}\left[y^2\left(y+x\right)\right]dxdy = \int_0^1\int_0^{1-y}\left[y^3+y^2x\right]dxdy = \int_0^1\left[y^3x+\frac{y^2x^2}{2}\right]_0^{1-y}dy =$$

$$\int_0^1\left[-\frac{y^4}{2}+\frac{y^2}{2}\right]dy = \left[-\frac{y^5}{5}+\frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

Concluímos que $M_{xz}=\frac{1}{15}$.

Neste ponto, iniciamos o cálculo de M_{xy}:

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho(x,y,z)dV = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{y+x} zydzdxdy = \int_0^1\int_0^{1-y}\left[\frac{yz^2}{2}\right]_0^{y+x} dxdy =$$

$$\int_0^1\int_0^{1-y}\left[y\frac{(y+x)^2}{2}\right]dxdy = \int_0^1\int_0^{1-y}\left[\frac{y^3}{3}+y^2x+\frac{yx^2}{2}\right]dxdy =$$

$$\int_0^1\left[\frac{y^3x}{2}+\frac{y^2x^2}{2}+\frac{yx^3}{6}\right]_0^{1-y} dy = \int_0^1\left[-\frac{y^4}{6}+\frac{y}{6}\right]dy = \left[-\frac{y^5}{30}-\frac{y^2}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{20}$$

Concluímos que $M_{xy} = \dfrac{1}{20}$.

E chegamos a $M_{yz} = \dfrac{1}{30}$, $M_{xz} = \dfrac{1}{15}$ e $M_{xy} = \dfrac{1}{20}$.

Substituindo os valores de $m = \dfrac{1}{8}$, $M_{yz} = \dfrac{1}{30}$; $M_{xz} = \dfrac{1}{15}$ e $M_{xy} = \dfrac{2}{5}$ em

$\bar{x} = \dfrac{M_{yz}}{m}$; $\bar{y} = \dfrac{M_{xz}}{m}$ e $\bar{z} = \dfrac{M_{yz}}{m}$ temos:

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{8}} = \frac{4}{15} \quad \rightarrow \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{15} \quad \rightarrow \quad \bar{z} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{8}} = \frac{2}{5}$$

Portanto, o centro de massa da figura está localizado no ponto $\left(\dfrac{4}{15},\dfrac{8}{15},\dfrac{2}{5}\right)$.

Os **segundos momentos**, denominados **momentos de inércia** em relação aos eixos coordenados, são aplicados quando a densidade é constante, e desta forma, chamamos o centro de massa do sólido de centroide. E assim, temos:

I_x: momento de inércia em relação ao eixo x.

Calculado pela integral tripla $I_x = \iiint_E (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$.

I_y: momento de inércia em relação ao eixo y.

Calculado pela integral tripla $I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,dV$.

I_z: momento de inércia em relação ao eixo z.

Calculado pela integral tripla $I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\,dV$.

Pesquise mais

Aprenda mais sobre aplicações de integrais triplas, consultando o link do Departamento de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/~valle/PastCourses/MA211_14/Aula13.pdf>. Acesso em: 1 fev. 2016.

Outra sugestão é consultar o tópico 16.3 do livro disponível no endereço a seguir:

ROGAWSKI, Jon. **Cálculo**, volume 2: recurso eletrônico. Porto Alegre: Bookman, 2009. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577804115/cfi/395>. Acesso em: 2 mar. 2016.

Sem medo de errar

Para resolver os entraves encontrados nesta situação-problema, você terá que trabalhar sobre uma determinada região triangular, tendo a necessidade de encontrar o volume e o centro de massa que contemplam a equação $2x + y + z = 1$. Onde a densidade é composta por $\rho(x,y,z) = kz$ (k> 0 uma constante). Nesta fase, vale lembrar os conhecimentos em integrais duplas e aplica-los nas integrais triplas. Vejamos:

A Figura 1.18 é o esboço da região triangular dada pela equação que representa a região.

Desta forma, é preciso determinar as variações de *x, y* e *z*. Ou seja, para resolver a integral é necessário determinar os limites de integração.

Pegando de início o eixo *y*, percebemos que ele varia de 0 a 1. Ou seja, $0 \leq y \leq 1$.

No plano *xy*, podemos observar que, partindo da origem, o *x* está variando de 0 a $\frac{1}{2}$. Entretanto, se nos deslocarmos pelo eixo *y*, podemos perceber que o valor varia, e assim, é preciso determinar a equação da reta que delimita esta superfície. Igualando *z* a 0

$(z=0)$, temos,

$2x+y=1$, e isolando x, chegamos a equação $x=\frac{1}{2}-\frac{y}{2}$. E assim, $0\le x\le\frac{1}{2}-\frac{y}{2}$.

Em relação ao eixo z, percebe-se que ele vai depender dos valores atribuídos a x e y. Ou seja, os valores variam de zero até a superfície. Então, isolando temos $z=1-2x-y$. Observando a Figura 1.19 é possível assimilar melhor. Portanto, temos que os limites de integração são:

$0\le y\le 1$; $0\le x\le\frac{1}{2}-\frac{y}{2}$; $0\le z\le 1-2x-y$

Começamos calculando a massa $m=\iiint_E \rho(x,y,z)dV$.

$$m=k\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}}\int_0^{1-2x-y} zdzdxdy = k\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-2x-y} dxdy$$

$$m=\frac{k}{2}\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}}\left[(1-2x-y)^2\right]dxdy = \frac{k}{12}\int_0^1\left[-(1-2x-y)^3\right]_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}}dy=$$

$$m=\frac{k}{12}\int_0^1-(1-y)^3dy = \frac{k}{48}$$

Concluímos que a massa é $m=\frac{k}{48}$.

Após a determinação da massa, calculamos os momentos nos eixos coordenados. $M_{xy}=\iiint_E zkzdV = k\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}}\int_0^{1-2x-y} z^2dzdxdy = \frac{k}{120}$;

$$M_{xz}=\iiint_E ykzdV = k\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}}\int_0^{1-2x-y} yzdzdxdy = \frac{k}{240};$$

$$M_{yz}=\iiint_E xkzdV = k\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}}\int_0^{1-2x-y} xzdzdxdy = \frac{k}{480}.$$

Portanto, os momentos em relação aos eixos coordenados são:

$M_{xy}=\frac{k}{120}$; $M_{xz}=\frac{k}{240}$; $M_{yz}=\frac{k}{480}$.

Substituímos os valores para encontrarmos a localização dos pontos.

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1}{10} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1}{5} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2}{5}.$$

E concluímos que o centro de massa está localizado em: $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

.

Por fim, para calcularmos o volume, substituímos os valores na integral $V(E) = \iiint_E dV$.

$$V(E) = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}} \int_0^{1-2x-y} dzdxdy \quad = \quad \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}} [z]_0^1 \, dxdy =$$

$$V(E) = \int_0^1 \left[x - x^2 - yx\right]_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}} dy \quad = \quad \int_0^1 \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\right] dy = \frac{1}{12}$$

Logo, o centro de massa da placa retangular está localizado em $\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\right) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ e o seu volume é igual a $\frac{1}{12}$.

Atenção

Na resolução dos exercícios, é interessante que você faça todas as passagens matemáticas. Desta forma, a probabilidade de erros será mínima.

Lembre-se

Temos seis maneiras diferentes de calcular o *dV*, por exemplo, *dzdxdy*. Entretanto, em todas elas, o resultado alcançado deverá ser sempre o mesmo.

Pesquise mais

Aprofunde os seus conhecimentos consultando o tópico 5.4 do livro disponível no endereço a seguir: GUIDORIZZI, Luiz Hamilton. **Um curso de Cálculo**, volume 3: recurso eletrônico. Rio de Janeiro: LTC, 2013. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2541-4/pageid/126>. Acesso em: 4 mar. 2016.

Para ter acesso ao material, é necessário que antes você efetue o login na biblioteca digital por meio do site da faculdade.

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Calculando a massa de superfícies metálicas	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar cálculo de volumes, massa e centro de massa em diversas regiões que nos cercam em situações do cotidiano.
3. Conteúdos relacionados	Integral tripla, massa e centro de massa.
4. Descrição da situação-problema	A fim de completar a sua aprendizagem, imagine que você terá que trabalhar no subsolo das torres verticais no prédio do Congresso Nacional, onde fica localizada a casa de máquinas, e terá que substituir as bases de apoio das bombas d'água. Entretanto, ao fazer uma verificação do local, você percebeu que para realizar essa tarefa, terá que deslocar e substituir algumas placas metálicas, que servem de suporte para eletrodutos e foram instaladas indevidamente por outra empresa que fez os reparos anteriores. Desta forma, para realizar a sua tarefa, antes você terá que construir uma estrutura de metal, cujas dimensões não estão padronizadas e não contemplam uma superfície em formato geométrico de fácil construção. Sendo assim, será necessário determinar a massa de uma região, que é representada pela integral $\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} dzdxdy$, tendo como densidade $\rho(x,y,z)=2$. Vamos lá?
5. Resolução da situação-problema	$m=\iiint_E \rho(x,y,z)dV = 2\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} dzdxdy = 2\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} [z]_0^x\, dxdy =$ $m=2\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} xdxdy = 2\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{1} dy = 2\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}-\frac{y^4}{2}\right)dy = 2\left[\frac{y}{2}-\frac{y^5}{10}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{5}$ Desta forma, conclui-se que a massa da região representada pela integral $\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x}(2)dzdxdy$ é $\frac{8}{5}$.

Lembre-se

As integrais triplas podem ser interpretadas de distintas formas, dependendo sempre das interpretações de *x, y, z* e f (*x, y, z*).

Faça você mesmo

Agora é com você, utilize os dados da situação-problema anterior, $\left(\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} dzdxdy \text{ e } \rho(x,y,z)=2\right)$, além do valor da massa que você encontrou, e determine o centro de massa dessa região.

Faça valer a pena

1. Seja uma lâmina triangular com densidade $\rho(2x-y)$. A massa da lâmina corresponde à integral $\int_0^1\int_0^{2-x}\rho dA$, cujo valor é:

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{6}{5}$

c) $\frac{6}{7}$

d) $\frac{7}{6}$

e) $\frac{1}{3}$

2. Uma lâmina triangular tem densidade $\rho(2x-y)$. Sua massa, igual a $\frac{7}{6}$, é calculada por meio da integral $\int_0^1\int_0^{2-x}\rho dA$. Desta forma, o momento My é igual a:
a) 13/12
b) 7/6
c) 8/1
d) 2/9
e) 0

3. O volume da placa triangular localizada no primeiro octante, limitada pela equação matemática $2x+y+2z=4$ é:
a) 10/3
b) 12/7
c) 7/5
d) 9/4
e) 8/3

Seção 1.4

Área de superfícies

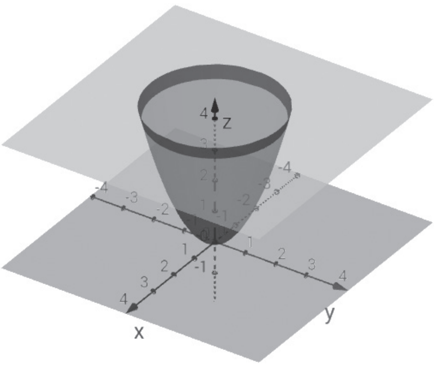
Diálogo aberto

Para finalizar esta unidade, ainda colocando em prática os conhecimentos e aprendizagens sobre integrais, trabalharemos as áreas de superfícies, e para isso, enfatizaremos a parametrização das equações.

Continuando com a reforma do Congresso Nacional, a última tarefa será fazer uma pintura nova em algumas regiões das cúpulas, o que requer conhecer a área para determinar o gasto com tinta. Vale lembrar que ambas as cúpulas se assemelham a um paraboloide.

Imagine que o trabalho de pintura terá início em uma superfície cuja representação algébrica é $z = x^2 + y^2$, com $0 \leq z \leq 4$, pertencente ao paraboloide e previamente determinada pela sua equipe, conforme Figura 1.20, sendo todas as medidas em metros.

Figura 1.20 | Esboço do paraboloide $z = x^2 + y^2$, com $0 \leq z \leq 4$



Fonte: <http://www.geogebra.org/m/2798229>. Acesso em 12 de fev. 2016.

Agora é com você! Determine a área dessa superfície e calcule o volume de tinta que será utilizado, considerando que o rendimento seja de 0,09 L por metro quadrado.

Não pode faltar

Produto Vetorial

Sejam $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ dois vetores quaisquer sobre um mesmo espaço cartesiano, podemos representar o **produto vetorial** entre esses vetores através da notação $(\vec{u}\times\vec{v})$. Um método prático para calculá-lo é a regra de Sarrus (aquela aprendida no ensino médio). Desta forma, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{array}\right| .$$

Usando o desenvolvimento de Laplace na primeira linha desse determinante, podemos também escrevê-lo da seguinte maneira:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Podemos ainda determinar o módulo (norma) do produto vetorial por meio da raiz quadrada da soma do quadrado dos componentes, do novo vetor, oriundo desse produto vetorial.

Reflita

- No produto escalar entre dois vetores, o resultado será sempre um valor numérico e no produto vetorial entre dois vetores, será gerado um novo vetor (ortogonal) a eles.
- Módulo do produto vetorial entre dois vetores é igual à área do paralelogramo que eles determinam.

Exemplificando

Dados os vetores $\vec{u}=(3,1,2)$ e $\vec{v}=(2,-2,5)$ determine o produto vetorial entre eles. Calcule também o seu módulo.

Resolução: O cálculo do produto vetorial entre dois vetores e efetuado da mesma forma que o determinante de uma matriz (Regra de Sarrus).

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 3 & 1\\ 2 & -2\end{matrix} = 5\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}-2\vec{k}+4\vec{i}-15\vec{j} = 9\vec{i}-11\vec{j}-8\vec{k}$$

Desta forma, podemos concluir o produto vetorial entre os vetores $\vec{u}=(3,1,2)$ e $\vec{v}=(2,-2,5)$ é $\vec{u}\times\vec{v}=9\vec{i}-11\vec{j}-8\vec{k}$.

Para calcular o módulo, extraímos a raiz quadrada da soma do quadrado dos seus componentes, ou seja:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\sqrt{9^2+(-11)^2+(-8)^2}=\sqrt{81+121+64}=\sqrt{266}.$$

Logo, o módulo do produto vetorial entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\sqrt{266}$.

Derivadas parciais

Pelo conceito de derivada parcial, ela é obtida considerando-se apenas uma variável variando e a outra fixa. Ou seja, a derivada parcial de uma função $z=f(x,y)$ em relação à x considera apenas x como variável, mantendo y constante. Analogamente a derivada parcial em relação à y considera apenas y como variável, mantendo x constante.

Assimile

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são as funções f_x e f_y definidas por:

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad \text{e} \quad f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Se $z=f(x,y)$ podemos escrever $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}$ e $f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$. Existem outras notações para as derivadas parciais. Vale lembrar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ não pode ser interpretada como a razão dos dois diferenciais.

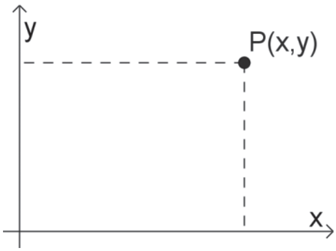
Coordenadas polares

Utilizamos as coordenadas polares a fim de facilitar os trabalhos quando tratamos regiões circulares ou quando o domínio for um círculo ou for parte dele. Elas poderão ser muito bem utilizadas no decorrer da aprendizagem desta seção. Desta forma, podemos converter coordenadas cartesianas ou retangulares para coordenadas polares.

Na Figura 1.21, temos um ponto $P(x,y)$ expresso em coordenadas cartesianas. O valor de x representa a distância do ponto P até o eixo y. O valor de y representa a distância de P até o eixo x.

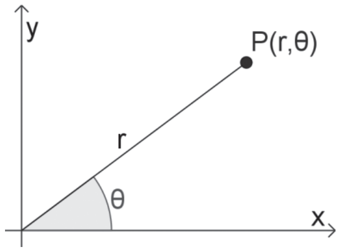
Na Figura 1.22 temos um ângulo θ definido pelo eixo x e pela semirreta $\overrightarrow{OP}$. O ângulo é orientado positivamente a partir do eixo x e r é a distância entre o ponto P e a origem.

Figura 1.21 | Representação do ponto em coordenadas cartesianas ou retângulares



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.22 | Representação do ponto em coordenadas polares



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se

- $dA = dx\,dy$ ou $dA = dy\,dx$;
- $dA = r\,dr\,d\theta$;
- $x^2 + y^2 = r^2$.

Assimile

Você lembra-se das relações trigonométricas no triângulo retângulo?

Pois bem, aqui recordaremos duas. O $\text{seno} = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ e o $\text{cosseno} = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$.

E a partir delas, ficará mais fácil entender e trabalhar em coordenadas polares. Pois na Figura 1.22, temos: $\text{sen}\theta = \dfrac{co}{h} \rightarrow \text{sen}\theta = \dfrac{y}{r} \Rightarrow y = r\ \text{sen}\theta$ e $\cos\theta = \dfrac{ca}{h} \rightarrow \text{sen}\theta = \dfrac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$.

Então, quando for conveniente, a fim de facilitar os cálculos, podemos transformar uma integral escrita em coordenadas cartesianas (x,y) em uma integral em coordenadas polares (r,θ). Desta forma, se f for contínua em uma região escrita em coordenadas polares, na integral dupla temos: $\iint\limits_{R(x,y)} f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta$.

Pesquise mais

Relembre e aprenda mais sobre integrais duplas e coordenadas polares, lendo um texto do departamento de Matemática Aplicada da Unicamp. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/~valle/PastCourses/MA211_14/Aula11.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2016.

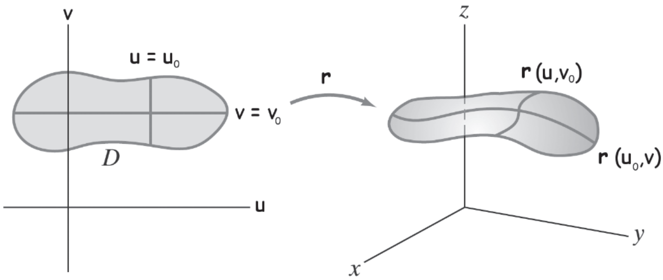
Superfícies Parametrizadas

Definição: Uma superfície parametrizada em ($\mathbb{R}^3$), é uma aplicação $x : D \subset {}^2 \rightarrow {}^3$.

Em outras palavras, parametrizar uma superfície é trabalhar uma função de duas variáveis para uma superfície em três dimensões. Podemos dizer que se trata de uma aplicação que "pega" um objeto no plano bidimensional ($\mathbb{R}^2$) e "joga" para o espaço tridimensional ($\mathbb{R}^3$) fazendo com que esse objeto caracterize-se por uma superfície.

Desta forma, temos uma função que depende de duas variáveis (*u* e *v*) e tem como imagem três variáveis (*x*, *y*, e *z*) dependentes de *u* e *v*. Parametrizando chegamos à: $x = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Assim, também podemos escrever o vetor posição da superfície por: $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$.

Figura 1.23 | Superfície parametrizada



Fonte: <http://www.pbx-brasil.com/calculo03/Notas/Area02/dia02/curcor.html>. Acesso em: 3 mar. 2016.

Exemplificando

Determine a representação paramétrica da superfície $2z + 3x + 4y = 5$.

Resolução: $z = \frac{5}{2} - \frac{3x}{2} - 2y$. Como $u = x$ e $v = y \rightarrow z = \frac{5}{2} - \frac{3u}{2} - 2v$.

Faça você mesmo

Determine a representação paramétrica do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$. E escreva o vetor posição parametrizado dessa superfície.

Área de Superfície

Superfície no $\mathbb{R}^3$ é dada por uma parametrização no $\mathbb{R}^3$, em que a função a ser trabalhada é suficientemente diferenciável. Como vimos anteriormente, parametrização é uma aplicação que possui duas variáveis no domínio e associa três variáveis na imagem. Ou seja, é uma aplicação do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^3$. Como o domínio é bidimensional, então, podemos imaginar um objeto bidimensional no espaço (em três dimensões), em que as coordenadas estão descritas em termos das duas coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

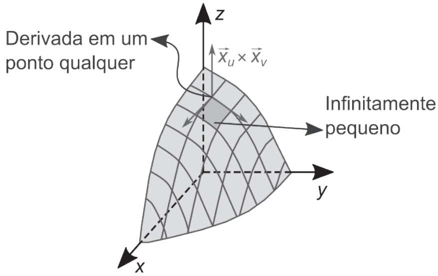
Desta forma, dada uma superfície (S), podemos pensar em dois vetores tangentes a ela:

$\overrightarrow{x_u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ e $\overrightarrow{x_v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$.

E, de acordo com a Figura 1.24, temos infinitos paralelogramos e somando a suas áreas, teremos a área de toda a superfície.

Quando S é regular, ou seja, o produto vetorial entre os dois vetores for diferente de zero, temos a área da superfície dada por: $\iint_D \left|\overrightarrow{x_u} \times \overrightarrow{x_v}\right| du\,dv$.

Figura 1.24 | Derivada em um ponto qualquer da superfície



Fonte: elaborada pelo autor.

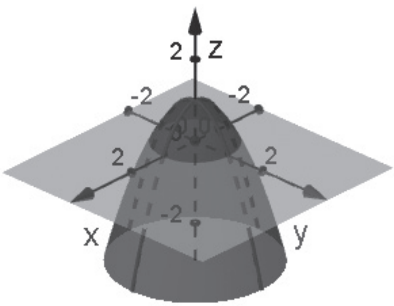
Exemplificando

Calcule a área da superfície cuja equação é dada por $z = 1 - x^2 - y^2$ com $x^2 + y^2 \leq 1$.

Resolução:

A Figura 1.25 representa a equação $z = 1 - x^2 - y^2$.

Figura 1.25 | Superfície $z = 1 - x^2 - y^2$



Fonte: <http://www.geogebra.org/m/3093887>. Acesso em: 5 abr. 2016.

Para parametrizar esta equação, chamamos: $x = u$ e $y = v$. E consequentemente, temos $z = 1 - u^2 - v^2$. Derivando a função, chegamos a: $\vec{x} = (1,0,-2u)$ e $\vec{v} = (0,1,-2v)$. Em seguida, calculamos o produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{x_u} \times \overrightarrow{x_v} = (2u, 2v, 1) \quad .$$

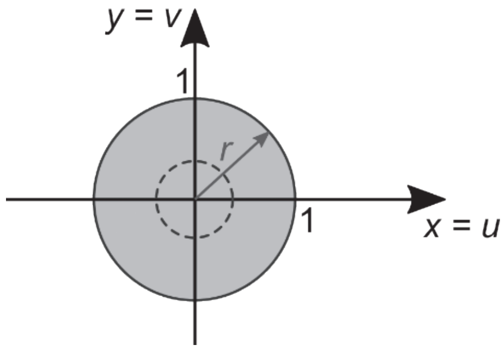
Cujo módulo é dado por: $\left|\overrightarrow{x_u} \times \overrightarrow{x_v}\right| = \sqrt{(2u)^2 + (2v)^2 + 1} = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$.

Substituímos na integral: $\iint_D \left|\overrightarrow{x_u} \times \overrightarrow{x_v}\right| du\, dv$.

$$\iint_D \left(\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\right) dudv = \iint_D \left(\sqrt{4\left(u^2 + v^2\right) + 1}\right) dudv =$$

Como na Figura 1.25 da superfície temos um raio variando conforme z aumenta e um ângulo θ, podemos escrever as coordenadas cartesianas em coordenadas polares a fim de facilitar os cálculos. Desta forma, fazemos a representação da Figura 1.26 no eixo xy (região do chão).

Figura 1.26 | Região do chão



Fonte: elaborada pelo autor.

E assim temos: $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $0 \leq r \leq 1$; $du\, dv = r\, dr\, d\theta$; $u^2 + v^2 = r^2$.

Substituindo na integral para calcular a área:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(4r^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} r\, dr =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{8} = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int u^P du = \dfrac{u^{P+1}}{P+1} \\ u = 4r^2+1 \\ du = 8r\,dr \\ \dfrac{du}{8} = r\,dr \end{array}}$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \left[\sqrt{u^3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} d\theta \left[\sqrt{\left(4r^2+1\right)^3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)\int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)\left[2\pi\right] = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

Portanto, a área da superfície é igual a $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

Se S for uma superfície que possa ser representada pela função $z = f(x,y)$, f com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região D do plano (x,y), então temos: $A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dx\, dy \cdot$

Faça você mesmo

Como na equação do "exemplificando" z está isolado, resolva-o novamente utilizando a expressão dada acima.

Pesquise mais

Melhore a sua aprendizagem fazendo a leitura sobre Superfícies a partir de um texto do Departamento de Matemática da UEM. Disponível em: <www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/superficies.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2016.

Sem medo de errar

De acordo com o problema proposto no início da seção, você teria que fazer novas pinturas em algumas regiões das cúpulas do Congresso Nacional. E para isso, seria necessário calcular a área de uma superfície específica representada algebricamente pela expressão $z = x^2 + y^2$, com $0 \leq z \leq 4$.

Desta forma, podemos iniciar a resolução utilizando a parametrização da equação $z = x^2 + y^2$:

x = u, y = v e **z=u²+v²**.

E através das derivadas parciais, determinamos os vetores: $\overrightarrow{x_u} = (1,0,2u)$ e $\overrightarrow{x_v} = (0,1,2v)$.

Fazemos o cálculo do produto vetorial: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = (-2u,-2v,1)$.

Com isso, determinamos o seu módulo:
$\left|\vec{x} \times \vec{v}\right| = \sqrt{(-2u)^2 + (-2v)^2 + 1^2} = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$.

Substituímos na integral a fim de obter a área:

$$A = \iint_D \left|\vec{x} \times \vec{y}\right| du\, dv = \iint_D \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\, du\, dv = \iint_D \sqrt{4\left(u^2 + v^2\right) + 1}\, du\, dv$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=2} u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{8}$$

Rascunho:
$\int u^p\, du = \frac{u^{p+1}}{p+1}$
$u = 4r^2 + 1$
$du = 8r\, dr$
$\frac{du}{8} = r\, dr$

$$A = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{r=0}^{r=2} = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{\sqrt{\left(4r^2+1\right)^3}}{3/2}\right]_{r=0}^{r=2}$$

$$A = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{2\cdot\left(\sqrt{17^3}-1\right)}{3} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{17^3}-1\right)}{24}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\cdot\left(\sqrt{17^3}-1\right)}{24}\cdot 2\pi = \frac{\left(\sqrt{17^3}-1\right)\pi}{6}$$

Desta forma, a área da superfície a ser trabalhada para as novas pinturas das cúpulas menores do Congresso Nacional é .

$$\frac{\left(17\sqrt{17}-1\right)\pi}{6}\ \text{m}^2$$

Por fim, o volume de tinta será $\frac{\left(17\sqrt{17}-1\right)\pi}{6} \cdot 0{,}09 \approx 3{,}256\ \text{L}$.

Lembre-se

Quando efetuamos a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, temos : $du\, dv = r\, dr\, d\theta$

A equação da circunferência, quando o seu centro está na origem $(0,0)$, é $x^2 + y^2 = r^2$. Como estamos trabalhando com superfícies parametrizadas escrevemos $u^2 + v^2 = r^2$.

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Área do paraboloide	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar a parametrização de superfícies no cálculo de áreas nas diversas situações do cotidiano.
3. Conteúdos relacionados	Produto vetorial, derivadas parciais, integrais duplas, coordenadas polares.
4. Descrição da situação-problema	Bem, com a praticidade em resolver problemas, outros trabalhos vão surgindo. E o próximo que será designado a você é calcular a área de uma superfície em formato de paraboloide que será construído em um terreno particular. O projeto repassado a você já traz uma representação matemática para ajudar-lhe e está escrita da seguinte forma: $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\,\text{sen}\,v, u^2)$, com $1 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 2\pi$. Desta forma, utilize os conhecimentos aprendidos nesta aula e calcule essa área.

5. Resolução da situação-problema

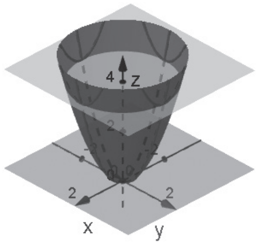
Como o paraboloide já está na forma parametrizada, é necessário escrevê-la de uma forma que facilite encontrar a área procurada. Sendo assim: $x = u\cos v \rightarrow \frac{x}{u} = \cos v$; $y = u\,\text{sen}\,v \rightarrow \frac{y}{u} = \text{sen}\,v$; $z = u^2$.

$$\left(\frac{y}{u}\right)^2 + \left(\frac{x}{u}\right)^2 = 1$$

Passa-se a equação anterior a fim de obter a equação do paraboloide:

$\frac{y^2}{u^2} + \frac{x^2}{u^2} = 1 \rightarrow y^2 + x^2 = u^2$. Como $z = u^2$, temos: $z = x^2 + y^2$.

Figura 1.27 | Paraboloide $z = x^2 + y^2$



Fonte: <http://www.geogebra.org/m/3094257>. Acesso em: 5 abr. 2016.

Ainda da informação que $z = u^2$, podemos, a partir da informação $1 \le u \le 2$, determinar que $1 \le z \le 4$. Desta forma, podemos visualizar a região da área que queremos calcular.

Continuando, encontram-se as derivadas parciais em relação à u e v.

$$\overrightarrow{x_u} = (\cos v, \text{sen}\,v, 2u)$$

$$\overrightarrow{x_v} = (-u\,\text{sen}\,v, u\cos v, 0)$$

Calculamos o produto vetorial:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \text{sen}\,v & 2u \\ -u\,\text{sen}\,v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \left(-2u^2\cos v, -2u^2\,\text{sen}\,v, u\right)$$

Em seguida, determinamos o módulo:

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \sqrt{4u^4\left(\cos^2 v + sen^2 v\right) + u^2} = \sqrt{4u^4 + u^2} = u\sqrt{4u^2+1}$$

Substituímos na fórmula $A = \iint\limits_D \left|\vec{x}\times\vec{v}\right| du\,dv$ para obtermos a área.

$$A = \int_0^{2\pi} dV \int_1^2 \left(4u^2+1\right)^{\frac{1}{2}} u\,du = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} dV \left[\sqrt{\left(4u^2+1\right)^3}\,\right]_1^2 =$$

$$A = \frac{1}{12}\left[17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right]\int_0^{2\pi} dV = \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)[v]_0^{2\pi} =$$

$$A = \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)2\pi = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$$

	Portanto, a área da superfície em formato de paraboloide a ser construída no terreno particular é $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$.

Lembre-se

$\text{sen}^2 v + \cos^2 v = 1$

Faça você mesmo

Determine a área da superfície definida por $x^2 + y^2 - z = 0$ e limitada pelos planos z = 2 e z = 6.

Faça valer a pena

1. O produto vetorial entre dois vetores linearmente independentes gerará:

a) Um número positivo.

b) Um número negativo.

c) Outro vetor.

d) Um número irracional.

e) O número zero.

2. O módulo do produto vetorial entre dois vetores é igual à área do seguinte polígono:

a) Triângulo.

b) Paralelogramo.

c) Quadrado.

d) Losango.

e) Hexágono.

3. Dados os vetores $\vec{u} = (-2,1,4)$ e $\vec{v} = (2,1,-1)$, o produto vetorial entre eles e o módulo são respectivamente:

a) $\vec{x} \times \vec{v} = -5\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$; $\left|\vec{x} \times \vec{v}\right| = \sqrt{77}$

b) $\vec{x} \times \vec{v} = -4\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$; $\left|\vec{x} \times \vec{v}\right| = \sqrt{100}$

c) $\vec{x} \times \vec{v} = -3\vec{i} + 10\vec{j} + 18\vec{k}$; $\left|\vec{x} \times \vec{v}\right| = \sqrt{97}$

d) $\vec{x} \times \vec{v} = 5\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k}$; $\left|\vec{x} \times \vec{v}\right| = \sqrt{141}$

e) $\vec{x} \times \vec{v} = -5\vec{i} + 4\vec{j} - 10\vec{k}$; $\left|\vec{x} \times \vec{v}\right| = \sqrt{230}$

Referências

BOULOS, Paulo; ABUD, Zara Issa. **Cálculo diferencial e integral**. São Paulo: Makron Books, 2000. v. 2.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, David E. **Cálculo com geometria analítica**. Rio de Janeiro: LTC, 1999. v. 3.

GUIDORIZZI, Luiz Hamilton. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. v. 3.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.

STEWART, James. **Cálculo**: 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

WEIR, Maurice D.; HASS, Joel; GIORDANO, Frank R. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. v. 2.

Integrais múltiplas em outras coordenadas

Convite ao estudo

Olá! Na Unidade 1 deste livro didático tratamos de integrais triplas. Você efetuou cálculos de volumes e massas em coordenadas retangulares. Nesta unidade, você expandirá as suas capacidades de cálculos com integrais triplas para situações que apresentem determinadas simetrias. Para isso, vamos supor que você faz parte de um escritório de engenharia de projetos civis. Seu superior solicitou a você que calculasse o volume interno de algumas edificações. É possível que ele também venha a solicitar a massa e o centro de massa de outras estruturas de destaque na construção brasileira e mundial.

Para que possa efetuar estes cálculos, você deverá observar a particular geometria de cada edificação, para poder "tirar vantagem" desta geometria e facilitar seus cálculos. Talvez você esteja se perguntando: mas será que eu já fiz algo parecido anteriormente?

Figura 2.1 | Nova Biblioteca de Alexandria

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Bibliotheca_Alexandrina>. Acesso em: 6 abr. 2016.

Sim, com certeza!

Você já efetuou mudanças de variáveis tanto nas integrais simples quanto nas integrais duplas. Então, é importante para sua aprendizagem que você estabeleça as conexões entre este tópico com integrais triplas e o que já foi visto em Cálculo I e Cálculo II, ok? Os pesquisadores de aprendizagem asseguram que, ao estabelecermos conexões entre um novo objeto de aprendizagem e assuntos que já estudamos anteriormente, aprendemos de forma mais significativa.

Uma dessas estruturas é a nova Biblioteca de Alexandria (Figura 2.1), na cidade de Alexandria, no Egito. Você consegue notar que há um "recorte" no prédio (na parte de trás, no fundo da foto)? E agora? Como resolver este problema?

Foi nessa mesma cidade, entre o século III a.C. e o século V d.C., que existiu a famosa Biblioteca de Alexandria. Nesta biblioteca trabalharam matemáticos e outros cientistas da Antiguidade.

Seção 2.1

Mudança de variáveis

Diálogo aberto

Na Unidade 1 desta unidade curricular, você aprendeu a calcular volumes com integrais triplas em coordenadas retangulares. No entanto, no escritório de engenharia em que você trabalha, podem aparecer estruturas nas quais o cálculo de integrais triplas em coordenadas retangulares não seja imediato.

Por exemplo, além da já mencionada estrutura da nova Biblioteca de Alexandria, você também poderá ser chamado para efetuar o cálculo do volume interno da edificação conhecida como Elipsoide Metálico de Istambul (Figura 2.2) ou da Faculdade de Medicina de Cornell (Figura 2.3), em Doha, Qatar.

Figura 2.2 | Elipsoide Metálico de Istambul

Fonte: <http://www.engenhariacivil.com/elipsoide-metalica-istambul>. Acesso em: 6 abr. 2016.

Figura 2.3 | Faculdade de Medicina de Cornell

Fonte: <https://curvasearquitetura.wordpress.com/faculdade-de-medicina-de-cornell-qatar/>. Acesso em: 6 abr. 2016.

Será que é possível estabelecermos procedimentos gerais de cálculos para integrais triplas em situações com determinadas simetrias? Mais especificamente: como calcular o volume de estruturas elipsoidais como as da Figura 2.2 e Figura 2.3? Suponha que no escritório de engenharia em que você trabalha um cliente tenha encomendado um monumento elipsoidal de concreto. Seu colega de trabalho elaborou o desenho da estrutura maciça cuja superfície terá a equação $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{25}=1$. A tarefa de estimar o volume de concreto que será utilizado na construção desse monumento ficou para você. E agora, quanto de concreto será necessário?

Poderemos generalizar os resultados já conhecidos para integrais simples e para integrais duplas? É o que veremos nesta e nas três próximas seções desta Unidade 2.

Não pode faltar

Você se lembra de como resolver integrais simples por substituição? Nós utilizamos a seguinte relação:

$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(s))g'(s)ds$, com $c = g(a)$, $d = g(b)$ e $x = g(s)$.

Você também já deve ter efetuado mudanças de coordenadas em integrais duplas. Neste caso, utilizamos as coordenadas polares: $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,sen(\theta)$. A fórmula de mudança de variáveis no caso de integrais duplas passa a ser:

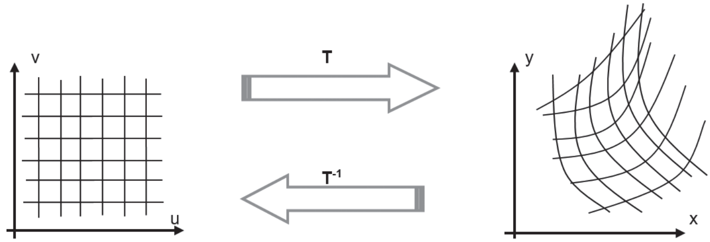
$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(r\cos(\theta), r\,sen(\theta))r\,dr\,d\theta .$$

Com a região S sendo a região do plano $r\theta$ correspondente à região *R* do plano em coordenadas retangulares *xy*.

Uma mudança de variáveis em integrais duplas é definida por uma **transformação T** que leva uma região *A* do plano *uv* em uma região *B* do plano *xy*:

$$(x,y) = T(u,v), \text{ com } x = f(u,v) \text{ e } y = g(u,v).$$

Figura 2.4 | Mudanças de coordenadas do plano *uv* no plano *xy*



Fonte: elaborada pelo autor.

Você deve se lembrar que as funções *f* e *g* deveriam apresentar derivadas parciais de primeira ordem contínuas e a transformação *T* deveria ser biunívoca (*T* podendo não ser biunívoca apenas em pontos da fronteira da região A). Assim, é possível definir a transformação inversa T^{-1} que leva uma região do plano *xy* no plano *uv*.

A mudança de coordenadas em integrais triplas é análoga àquela vista para integrais duplas. A diferença é que agora teremos uma transformação *T* biunívoca que leva uma região *A* do espaço *uvw* em uma região *B* do espaço *xyz* da seguinte forma:

$$x = f(u,v,w) \qquad y = g(u,v,w) \qquad z = h(u,v,w)$$

Assimile

O jacobiano de *T* é o determinante:

$$J(x,y,z) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

As hipóteses que devem ser feitas sobre a transformação *T* para integrais triplas são análogas àquelas realizadas para integrais duplas.

Assimile

Considere *A* uma região no espaço *uvw* e *B* uma região no espaço *xyz*. Suponha *T* a transformação biunívoca (com a possível exceção apenas nos pontos da fronteira da região *A*) que transforma a região *A* na região *B* por meio das equações $x = f(u,v,w)$, $y = g(u,v,w)$ e $z = h(u,v,w)$ onde *f*, *g* e *h* são funções de classe C^1 (ou seja, *f*, *g* e *h* são funções deriváveis com primeiras derivadas contínuas). Então é válida a fórmula seguinte para mudanças de coordenadas em integrais triplas:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_A f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

Veja no exemplo que a seguir como calcular o determinante jacobiano de uma transformação.

Exemplificando

Considere a mudança de coordenadas

$x = u - 3v + w$, $y = -\frac{v}{3} - w$ e $z = \frac{v}{2}$, definida sobre o paralelepípedo retorretângulo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le w \le 1$. Apresente o determinante jacobiano desta mudança de coordenadas.

Resolução:

As funções $x(u,v,w) = u - 3v + w$, $y(u,v,w) = -v/3 - w$ e $z(u,v,w) = v/2$ são todas deriváveis com primeira derivada contínua. Da definição do jacobiano, temos:

$$J(x,y,z) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Ao efetuar os cálculos necessários, você poderá constatar que o valor do determinante será $-\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$, $\forall$ (u, v, w) $\in \mathbb{R}^3$, atendendo à hipótese de que o jacobiano não pode se anular (com exceção, talvez, dos pontos de fronteira da região de integração).

Reflita

Considerando a mudança de coordenadas: $x = 2u + 3v - 5w$; $y = u - 2v + w$ $z = -2w$, qual a matriz jacobiana e o determinante jacobiano para este caso?

Exemplificando

Calcule $\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=3z}^{x=3z+3} \left(\frac{3x - z}{2} + \frac{y}{2}\right) dx\,dy\,dz$.

Resolução:

Faremos a seguinte mudança de coordenadas:

$u = \frac{3x - z}{2}$, $v = \frac{y}{2}$ e $w = 3z$. Escrevemos a mudança de coordenadas em

termos de (u, v, w):

$x = \frac{2}{3}u + \frac{1}{9}w$, $y = 2v$ e $z = \frac{w}{3}$. O jacobiano fica:

$$J(x,y,z) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

Efetuando os cálculos necessários, você poderá constatar que o determinante do jacobiano é $\frac{4}{9} \neq 0$, $\forall$ (u, v, w) $\in \mathbb{R}^3$.

A partir dos limites de integração nas variáveis (x,y,z), vamos determinar os limites de integração nas variáveis (u,v,w). A variável *x* tem como limite inferior 3z e como limite superior de integração 3*z*+3.

Efetuamos a substituição $x = \frac{2}{3}u + \frac{1}{9}w$ em $x = 3z$, obtendo: $\frac{2}{3}u + \frac{1}{9}w = w$. Então $u = \frac{4}{3}w$. Este é o limite inferior de integração para u.

A variável *x* tem como limite superior de integração $3z+3$. Efetuamos a substituição $x = \frac{2}{3}u + \frac{1}{9}w$ em $x = 3z+3$, obtendo: $\frac{2}{3}u + \frac{1}{9}w = w+3$. Então $u = \frac{4}{3}w + \frac{9}{2}$. Este é o limite superior de integração para a variável de integração *u*.

Repetimos o mesmo procedimento para as variáveis de integração *v* e *w*.

O limite inferior de integração para *y* é 0 e o limite superior é 4. Então, o limite inferior para a variável $v = y/2 = 0/2 = 0$. O limite superior de integração para a variável $v = y/2 = 4/2 = 2$.

O limite inferior de integração para z é 0 e o limite superior é 3. Então, o limite inferior para a variável $w = 3z = 3 \cdot 0 = 0$. O limite superior de integração para a variável $w = 3z = 3 \cdot 3 = 9$.

Portanto, após a mudança de coordenadas, a integral tripla fica:

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=3z}^{x=3z+3} \left(\frac{3x-z}{2} + \frac{y}{2}\right) dx\,dy\,dz = \int_0^9 \int_0^2 \int_{\frac{4}{3}w}^{\frac{4}{3}w+\frac{9}{2}} (u+v) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw =$$

$$\int_0^9\int_0^2\int_{\frac{4}{3}w}^{\frac{4}{3}w+\frac{9}{2}}(u+v)\left|\frac{4}{9}\right|du\,dv\,dw=\frac{4}{9}\int_0^9\int_0^2\left[\frac{u^2}{2}+uv\right]_{\frac{4}{3}w}^{\frac{4}{3}w+\frac{9}{2}}du\,dv\,dw=$$

$$\frac{4}{9}\int_0^9\int_0^2\left(\frac{\left(\frac{4}{3}w+\frac{9}{2}\right)^2}{2}+\left(\frac{4}{3}w+\frac{9}{2}\right)v-\frac{\left(\frac{4}{3}w\right)^2}{2}-\left(\frac{4}{3}w\right)v\right)dv\,dw=$$

$$\frac{4}{9}\int_0^9\int_0^2\left(6w+\frac{81}{8}+\frac{9}{2}v\right)dv\,dw=\frac{4}{9}\int_0^9\left[6wv+\frac{81}{8}v+\frac{9}{4}v^2\right]_0^2 dw=$$

$$\frac{4}{9}\int_0^9\left(12w+\frac{117}{4}\right)dw=\frac{4}{9}\left[\frac{12}{2}w^2+\frac{117}{4}w\right]_0^9=333$$

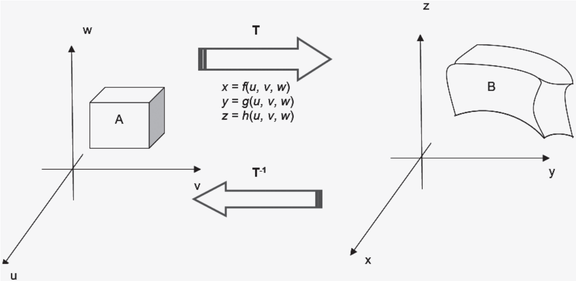
É claro que se você efetuar a integração tripla sem a substituição, obterá o mesmo resultado.

Interpretação geométrica da mudança de coordenadas para integrais triplas

A interpretação geométrica da mudança de coordenadas para integrais triplas também é análoga àquela realizada para a mudança de coordenadas para integrais duplas. No caso de duas variáveis, estamos levando uma região *A* do plano *uv* em uma região *B* do plano *xy*. No caso de três variáveis, estamos levando uma região *A* do espaço uvw em uma região *B* do espaço *xyz*.

Na Figura 2.5 foi ilustrada a mudança de coordenadas efetuada pelas equações $x=f(u,v,w)$, $y=g(u,v,w)$ e $z=h(u,v,w)$.

Figura 2.5 | Mudança de coordenadas da região *A* (*uvw*) para a região *B* (*xyz*)



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

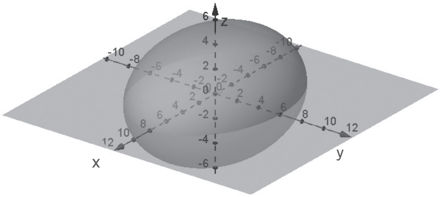
Para conhecer mais sobre mudança de coordenadas em integrais triplas, sugerimos que você consulte o texto da Profa. Cristina Caldeira. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~caldeira/AnaliseIV-03-04-4.pdf>. Acesso em: 7 abr. 2016. Neste texto você encontrará mais figuras e exemplos sobre mudanças de coordenadas em integrais triplas.

Sem medo de errar

Agora que já aprendemos um pouco sobre mudanças de coordenadas em integrais triplas, vamos retomar o problema de cálculo do volume de uma edificação elipsoidal, como aquelas da Faculdade de Medicina de Cornell, em Doha, no Qatar, ou a estrutura do Elipsoide Metálico, em Istambul?

Como calcular o volume de uma estrutura elipsoidal? Será que uma mudança de coordenadas pode ser útil neste caso?

Figura 2.6 | Elipsoide cuja superfície é dada pela equação $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{25}=1$



Fonte: <http://www.geogebra.org/m/3117041>. Acesso em: 7 abr. 2016.

A equação geral da superfície de um elipsoide é $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

O volume delimitado pela superfície $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ é dado pela integral tripla:

$\iiint\limits_A dxdydz$. Neste caso, sugere-se uma mudança de coordenadas para as denominadas coordenadas elípticas. Efetuamos a transformação:

$$x = ra \cdot sen(\phi)\cos(\theta),\ y = rb \cdot sen(\phi)sen(\theta),\ z = rc \cdot \cos(\phi)$$

O jacobiano desta mudança de coordenadas é

$$J(x,y,z) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot sen(\phi)\cos(\theta) & ra \cdot \cos(\phi)\cos(\theta) & -ra \cdot sen(\phi)sen(\theta) \\ b \cdot sen(\phi)sen(\theta) & rb \cdot \cos(\phi)sen(\theta) & rb \cdot sen(\phi)\cos(\theta) \\ c \cdot \cos(\phi) & -rcsen(\phi) & 0 \end{vmatrix}$$

O determinante do jacobiano é $\det(J(x,y,z)) = r^2abc \cdot sen(\varphi)$.

Atenção

Os limites de integração são:

$0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$

A integral fica $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2abc \cdot sen(\varphi)drd\varphi d\theta$. Então:

$$abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 sen(\varphi)d\varphi d\theta = abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{3}sen(\varphi)d\varphi d\theta = \frac{abc}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}sen(\varphi)d\varphi d\theta =$$

$$\frac{abc}{3}\int_0^{2\pi}\left[-cos(\varphi)\right]_0^{\pi} d\theta = \frac{2abc}{3}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{2abc}{3}\cdot 2\pi = \frac{4\pi abc}{3}$$

Observe que, se o cálculo fosse sobre uma esfera (quando $R = a = b = c$), teríamos a fórmula do volume de uma esfera: $\frac{4\pi R^3}{3}$.

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Mudanças de coordenadas em integrais triplas	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar os conhecimentos de mudanças de coordenadas no cálculo de integrais triplas.
3. Conteúdos relacionados	Integrais triplas, Jacobiano, mudança de coordenadas.
4. Descrição da situação-problema	O seu superior do escritório de engenharia, após observar seus cálculos para o volume do elipsoide, deseja que você determine a sua massa supondo que a densidade em cada ponto (x,y,z) pertencente a ele seja igual à sua distância até a origem.
5. Resolução da situação-problema	A massa do elipsoide é dada por: $M = \iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, onde E é o conjunto de pontos $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$. Como no problema já resolvido para o volume do elipsoide, efetuamos a mudança para coordenadas esféricas, obtendo: $M = \iiint_{E,\,coord\ esf} rr^2 sen(\varphi)\,d\theta dr d\varphi$ Observe que utilizamos $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$. Novamente os limites de integração são: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A integral fica $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^3 abc \cdot sen(\varphi)\,d\theta dr d\varphi$. Então: $abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 sen(\varphi)\,d\varphi d\theta = abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4} sen(\varphi)\,d\varphi d\theta =$ $\frac{abc}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen(\varphi)\,d\varphi d\theta = \frac{abc}{4}\int_0^{2\pi}\left[-cos(\varphi)\right]_0^{\pi} d\theta = \frac{2abc}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2abc}{4}\cdot 2\pi = \pi abc$ É interessante você observar que a massa do elipsoide é π multiplicado por cada um dos semieixos do elipsoide. Assim, ao duplicarmos um dos semieixos, a massa duplica. Se duplicarmos cada um dos semieixos, a massa será multiplicada por 8. Aqui vai uma dica: sempre que encontrar uma fórmula, avalie o que acontece com a grandeza representada pela fórmula ao duplicarmos, triplicarmos ou dividirmos pela metade cada uma das variáveis.

Lembre-se

Se f(*x*,*y*,*z*) representa a função densidade associada ao volume *V*, a massa de *V* será dada pela integral:

$$M_V = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

Faça você mesmo

Suponha que um sólido possua densidade constante em uma região *V*, sob uma determinada simetria específica.

Como é feito o cálculo para determinar a massa deste sólido na região *V*?

Faça valer a pena

1. Considere a integral $\iiint_V \sqrt[3]{2z-x+3y}\,\sqrt[5]{z-x}\,dxdydz$, onde *V* é dada por

$2 \leq 2z - x + 3y \leq 8$, $1 \leq z - x \leq 5$, $3 \leq z \leq 4$. Efetuando a mudança de coordenadas $u = 2z - x + 3y$, $v = z - x$, $w = z$, a escrita da integral nas novas variáveis (*u, v, w*) e com os limites de integração fica:

a) $\frac{1}{5}\int_0^1\int_3^4\int_2^8 \sqrt[3]{u}\,\sqrt[5]{v}\,dudvdw$

b) $\frac{1}{2}\int_1^5\int_2^8\int_4^6 2\sqrt[3]{u}\,\sqrt[5]{v}\,dudvdw$

c) $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 3\sqrt[3]{u}\,\sqrt[5]{v}\,dudvdw$

d) $\frac{1}{8}\int_2^3\int_1^5\int_2^8 7\sqrt[3]{u}\,\sqrt[5]{v}\,dudvdw$

e) $\frac{1}{3}\int_3^4\int_1^5\int_2^8 \sqrt[3]{u}\,\sqrt[5]{v}\,dudvdw$

2. Considere a mudança de variáveis: $u = x + 2y + z$, $v = 3x - z$, $w = y + 2z$. Vamos denotar por *T* a mudança de coordenadas (*x, y, z*) nas coordenadas (*u, v, w*). Então, o determinante de *T* e o determinante da transformação inversa T^{-1} são, respectivamente:

a) 1 e 2 b) –1/8 e –8 c) –1 e 1 d) 8 e 1/8 e) 5 e 1/5

3. Considere a mudança de coordenadas $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,sen(\theta)$, $z = z$. O jacobiano desta mudança de coordenadas é dado por:

a) 1 b) r c) $\cos(\theta)$ d) $sen(\theta)$ e) $tg(\theta)$

Seção 2.2

Integrais triplas: as coordenadas cilíndricas

Diálogo aberto

Na seção anterior, vimos como efetuar mudanças de coordenadas para simplificar o cálculo de integrais triplas em algumas situações que exibam simetria conveniente. Em particular vimos o exemplo de cálculo de volume de elipsoides, tomando como situações-exemplo as estruturas da Faculdade de Medicina de Cornell, em Doha, e o Elipsoide Metálico de Istambul.

Contudo, existem edificações e máquinas que apresentam simetrias que permitem o uso de outras mudanças de coordenadas. Em inúmeras situações reais a simetria "pede" uma mudança de coordenadas para as denominadas coordenadas cilíndricas.

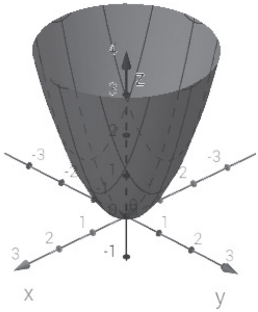
Suponha que você continue como engenheiro responsável pelos cálculos de estruturas com simetrias não usuais. Assim, é continuamente levado a buscar novas estratégias de cálculos de integrais triplas.

Vamos retomar o exemplo da Nova Biblioteca de Alexandria (consulte a Figura 2.1 da seção anterior). Nesta unidade o escritório de engenharia no qual você trabalha recebeu a solicitação de calcular o volume interno da Nova Biblioteca de Alexandria, no Egito. O "teto" desta edificação possui uma inclinação de cerca de 16º, o que, aliado à estrutura cilíndrica do prédio, dificulta uma aplicação imediata de coordenadas retangulares. O que fazer? Veremos que, neste caso, é adequado utilizar coordenadas cilíndricas. Além disso, você deverá fazer buscas na internet para estimar as medidas do prédio. Vamos lá?

Não pode faltar

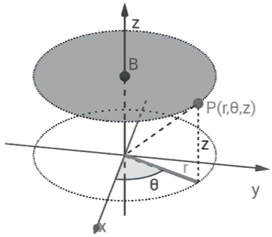
Será que existe alguma "dica" de quando usar coordenadas cilíndricas? Sim, a sugestão é que a mudança para coordenadas cilíndricas pode ser útil quando as equações que descrevem a região de integração apresentam simetria com respeito a um dos eixos (tipicamente nos exemplos consideramos o eixo Oz). Os exemplos.

Figura 2.7 | Paraboloide, exemplo de simetria adequada para coordenadas esféricas



Fonte: <http://www.geogebra.org/m/3187121>.Acesso em: 14 abr. 2016.

Figura 2.8 | Coordenadas cilíndricas



Fonte: <http://www.geogebra.org/m/3187725. Acesso em: 14 abr. 2016.

mais simples desta simetria são os paraboloides e cilindros. Algumas integrais triplas podem ter seus cálculos bastante simplificados se nos aproveitarmos da simetria cilíndrica do problema. A mudança de coordenadas cilíndricas (disponível em: <http://www.geogebra.org/m/3187725> (acesso em: 14 abr. 2016) e Figura 2.8) é dada pelas equações:

$$x = r\,cos(\theta)$$

$$y = r\,sen(\theta)$$

$$z = z$$

Temos que $x^2 + y^2 = r$. Como já vimos na Seção 2.1, no caso geral de mudança de coordenadas para integrais triplas, vale a fórmula para mudanças de coordenadas em integrais triplas:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_A f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

O determinante do jacobiano no caso de coordenadas cilíndricas é:

$$J(x,y,z) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -rsen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \, .$$

Assim, no caso de mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas, a integral tripla fica:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_A f\big(x(r,\theta,z),y(r,\theta,z),z(r,\theta,z)\big)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

Observe que o elemento de volume obedece à relação $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.

Assimile

Sabendo que $r = x^2 + y^2$:

- A equação do cilindro de raio *R*, $x^2 + y^2 = R^2$ em coordenadas cilíndricas fica simplesmente $r = R$ uma vez que $r = x^2 + y^2$.
- A equação do paraboloide $z = bx^2 + by^2$, ao colocarmos b em evidência, temos, $z = bx^2 + by^2$, em coordenadas cilíndricas fica simplesmente $z = br^2$.

Na sequência, apresentaremos exemplos envolvendo integrais triplas e coordenadas cilíndricas.

Exemplificando

Calcule a integral $\int_0^6\int_0^\pi\int_{\frac{r}{2}}^5 3r\,dz\,d\theta\,dr$.

Resolução:

$$\int_0^6\int_0^\pi\int_{\frac{r}{2}}^5 3r\,dz\,d\theta\,dr = \int_0^6\int_0^\pi 3r\,[z]_{\frac{r}{2}}^5\,d\theta\,dr = \int_0^6\int_0^\pi 3r\left(5-\frac{r}{2}\right)d\theta\,dr = \int_0^6 3r\left(5-\frac{r}{2}\right)\pi\,dr = \left[\frac{15r^2}{2}-\frac{3r^3}{6}\right]_0^6\pi = 162\pi$$

Portanto, o resultado da integral $\int_0^6\int_0^\pi\int_{\frac{r}{2}}^5 3r\,dz\,d\theta\,dr$ é 162π.

Faça você mesmo

Calcule a integral: $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^4\int_0^{16-r^2} 5\left(r-\frac{2}{3}\right)dz\,dr\,d\theta$.

Exemplificando

Sem calcular a integral, efetue a sua mudança para coordenadas cilíndricas:

$\iiint_B 3xy\,dx\,dy\,dz$, na região $5x^2+5y^2 \le 3$, $-2 \le z \le 2$.

Resolução:

Em coordenadas cilíndricas, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,sen(\theta)$, $z = z$.

De $5x^2+5y^2 \le 3$ obtemos $r \le \sqrt{3/5}$.

Então, $\iiint_B 3xy\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3/5}}\int_{-2}^{2} 3r^3 sen(\theta)\cos(\theta)\,dz\,dr\,d\theta$.

Exemplificando

Utilizando coordenadas cilíndricas, calcule a integral $\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-y^2}}\int_0^{\sqrt{9-(x^2+y^2)}} z\,dz\,dx\,dy$.

Resolução:

Pelos limites de integração sobre z $\left(0 \le z \le \sqrt{9-(x^2+y^2)}\right)$ temos que o volume de integração é limitado por uma esfera de raio 3 e centro na origem $x^2+y^2+z^2=9$; pelos limites de integração sobre x, temos que o volume de integração também é limitado pelo cilindro $x^2+y^2=16$.

Finalmente, temos que $0 \le y \le 2$. O volume de integração pertence ao 1º octante.

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-y^2}}\int_0^{\sqrt{9-(x^2+y^2)}} z\,dz\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\int_0^{\sqrt{9-r^2}} zr\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{9-r^2}} dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 r\left(\frac{9-r^2}{2}\right)dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 r\left(9-r^2\right)dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^4 d\theta = 2\pi$$

Pesquise mais

Nesse link, você encontrará aulas do curso regular de Cálculo III, do Instituto de Matemática e Estatística da USP (Prof. Cláudio Possani). O Programam 21 é dedicado às coordenadas cilíndricas nas integrais triplas. Disponível em: <https://goo.gl/Dxko9k>. Acesso em: 14 abr. 2016.

Exemplificando

Reescreva a integral $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\int_{r/2}^{\sqrt{16-r^2}} 5z^2 dz\, dr\, d\theta$ em coordenadas cartesianas (não é necessário efetuar o cálculo).

Resolução:

Usamos $z = 16 - r^2 = 16 - x^2 - y^2$ para a integral em z. Como a variável r tem como limites de integração: $r_{inferior} = 0$ e $r_{superior} = \sqrt{5}$, $x^2 + y^2 = 5$, então $x_{inferior} = -\sqrt{5 - y^2}$ e $x_{superior} = \sqrt{5 - y^2}$. Finalmente, $-\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5}$.

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\int_{-\sqrt{5-y^2}}^{\sqrt{5-y^2}}\int_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} 5z^2\, dz\, dx\, dy$$

Pesquise mais

Você poderá encontrar mais exercícios como o anterior nos livros-textos: GUIDORIZZI, Luiz H. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 3. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2541-4/>. Acesso em: 2 maio 2016.

ROGAWSKI, Jon. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2009. v. 2. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577804115/>. Acesso em: 2 maio 2016.

Exemplificando

Determine o volume do sólido limitado externamente pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ e internamente pelo cilindro de equação $x^2 + y^2 = a^2$. Suponha a < b.

Resolução:

O raio do cilindro é a e o raio da esfera é b. Em coordenadas cilíndricas, temos que $a \leq r \leq b$. A variável z tem como limites: $z_{inferior} = -\sqrt{b^2 - r^2}$, $z_{superior} = \sqrt{b^2 - r^2}$.

A variável θ tem como limites: $\theta_{inferior} = 0$, $\theta_{superior} = 2\pi$.

A integral fica:

$$\int_0^{2\pi}\int_a^b\int_{-\sqrt{b^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_a^b [z]_{-\sqrt{b^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}}\, r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_a^b 2\sqrt{b^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_a^b \sqrt{b^2-r^2}\,(-2)\,r\,dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}\left(b^2-r^2\right)^{3/2}\right]_a^b d\theta =$$

$$-\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\left(b^2-b^2\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(b^2-a^2\right)^{3/2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\left(b^2-a^2\right)^{3/2} d\theta = \frac{4\pi}{3}\left(b^2-a^2\right)^{3/2}$$

Exemplificando

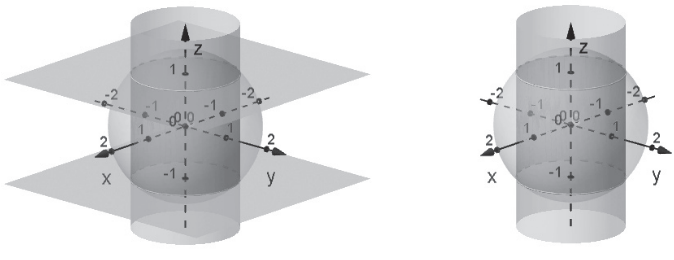
Considere a esfera de equação $x^2+y^2+z^2=b^2$ e o cilindro de equação $x^2+y^2=a^2$, com $a<b$. Determine o volume da região interna à esfera e externa ao cilindro.

Resolução: utilizando coordenadas cilíndricas escrevemos $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,sen(\theta)$.

Então, a equação do cilindro fica $r^2=a^2$ e a equação da esfera se escreve $r^2+z^2=b^2$.

Os limites de integração ficam: $0 \le \theta \le 2\pi$, e, a partir da equação da circunferência, temos $-\sqrt{b^2-r^2} \le z \le \sqrt{b^2-r^2}$. Na figura a seguir vemos o caso particular com a esfera de raio igual a $\sqrt{2}$ os planos z = 1 e z = –1. O cilindro possui equação $x^2+y^2=1$.

Figura 2.9 | Cilindro contido em esfera: (a) com planos z=+1 e z=–1; (b) com planos ocultos.



Fonte: <http://www.geogebra.org/m/3189625>. Acesso em: 2 maio 2016.

A integral fica: $\int_0^{2\pi}\int_a^b\int_{-\sqrt{b^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

Efetuando a integração na variável z:

$$\int_0^{2\pi}\int_a^b [z]_{-\sqrt{b^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_a^b \left(\sqrt{b^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2}\right) r\,dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\int_a^b \sqrt{b^2-r^2}\,(-2)\,r\,dr\,d\theta =$$

Efetuamos a mudança de variáveis $u = b^2 - r^2$. Então $du = -2rdr$. A integral fica:

$$-\int_0^{2\pi}\int_a^b \sqrt{b^2-r^2}\,(-2)\,r\,dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\int_a^b \sqrt{u}\,du\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_a^b d\theta = -\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_a^b d\theta =$$

$$-\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\left(\left(b^2-b^2\right)^{3/2}-\left(b^2-a^2\right)^{3/2}\right)d\theta = \frac{2\left(b^2-a^2\right)^{3/2}}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi\left(b^2-a^2\right)^{3/2}}{3}$$

Exemplificando

Calcule, utilizando coordenadas cilíndricas, o volume de uma casca cilíndrica com raio interno igual a r_1 e raio externo igual a r_2 e altura H.

Resolução:

Temos que os limites de integração são $0 \le \theta \le 2\pi$, $r_1 \le r \le r_2$, $0 \le z \le H$.

$$Vol(casca) = \iiint_{casca} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{H} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} Hr\,dr\,d\theta = H\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r_1}^{r_2} d\theta = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)H$$

É fácil ver que, se o cilindro interno possuir raio nulo, a fórmula anterior coincide com a fórmula para o volume de um cilindro de raio r e altura H.

Exemplificando

Calcule a integral $\iiint_V \sqrt{5x^2+5y^2}\,dx\,dy\,dz$, em que o volume de integração é limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 49$ e pelos planos $z = a$ e $z = b$.

Resolução:

Os limites de integração são: $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 7, a \le z \le b$.

Efetuamos a mudança para coordenadas

cilíndricas: $\iiint_V \sqrt{5x^2+5y^2}\,dx\,dy\,dz =$

$$\iiint_V \sqrt{5x^2+5y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^7\int_a^b r\sqrt{5r^2}\,dz\,dr\,d\theta = \sqrt{5}\int_0^{2\pi}\int_0^7\int_a^b r^2\,dz\,dr\,d\theta =$$

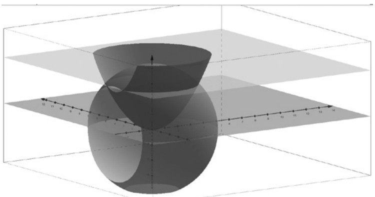
$$\sqrt{5}\int_0^{2\pi}\int_0^7 r^2\left[z\right]_a^b dr\,d\theta = \sqrt{5}\int_0^{2\pi}\int_0^7 r^2(b-a)\,dr\,d\theta = \sqrt{5}(b-a)\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^7 d\theta = \sqrt{5}(b-a)\frac{343\cdot 2\pi}{3} =$$

$\sqrt{5}(b-a)\dfrac{686\pi}{3}$. Portanto, $\sqrt{5}(b-a)\dfrac{686\pi}{3}$ é o resultado procurado.

Exemplificando

Determine o volume do sólido limitado inferiormente pelo paraboloide $x^2+y^2=3z$ e superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=18$.

Figura 2.10 | Paraboloide e esfera



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

A equação da esfera em coordenadas cilíndricas é $r^2+z^2=18$. A equação do paraboloide em coordenadas cilíndricas é $r^2=3z$. Substituímos a equação $x^2+y^2=3z$ na equação da esfera: $3z+z^2=18$. Resolvendo para *z* obtemos **z**=3 e **z**=-6. A raiz negativa é descartada.

Projetamos a intersecção da esfera com o paraboloide no plano xy, obtendo o círculo de equação $x^2+y^2=3$. Portanto, os limites de integração para a variável *r* são $0 \le r \le \sqrt{3}$.

Como a integração tem o paraboloide como limite inferior, a variável z tem como limite inferior $z_{inferior}=\frac{r^2}{3}$. Como a integração tem a esfera como limite superior, a variável z tem como limite superior a esfera, portanto $z_{superior}=\sqrt{18-r^2}$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}[z]_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{18-r^2}-\frac{r^2}{3}\right)r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{18-r^2}\,r-\frac{r^3}{3}\right)dr\,d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(18-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{12}\right]_0^{\sqrt{3}}d\theta=\int_0^{2\pi}-\frac{20\sqrt{15}-72\sqrt{2}+3}{4}d\theta=\frac{72\sqrt{2}-20\sqrt{15}-3}{2}\pi$$

Atenção

Nesta integral usamos que $u=18-r^2$. Então:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{18-r^2}\,r\right)dr=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{u}\,du=-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[\underbrace{\left(18-r^2\right)}_{u}{}^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}}=$$

$$-\frac{1}{3}\left[\left(18-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^{3/2}-\left(18-0^2\right)^{3/2}\right]=-\frac{1}{3}\left[15^{3/2}-18^{3/2}\right]=18\sqrt{2}-5\sqrt{15}$$

Reflita

A determinação dos extremos de integração para cada uma das variáveis é realizada identificando-se o conjunto intersecção das superfícies que delimitam o sólido a ser integrado. Considerando o exemplo anterior, em notação de conjuntos, qual seria o conjunto intersecção entre a esfera e o paraboloide?

Sem medo de errar

O teto da Nova Biblioteca de Alexandria tem uma inclinação de 16º com relação ao plano horizontal. O teto da Biblioteca é um círculo com 160 metros de diâmetro. A altura do edifício é de 33 metros. Disponível em:<http://www.memoriasocial.pro.br/documentos/Disserta%C3%A7%C3%B5es/Diss264.pdf>, Disponível em:<http://arktetonix.com.br/2011/04/ark-inspiration-115-%E2%80%93-nova-biblioteca-de-alexandria/>. Disponível em:<http://www.egypttourism.org/New%20Site/places/bibliotheca_alexandrina.htm> Acesso em: 18 abr. 2016.

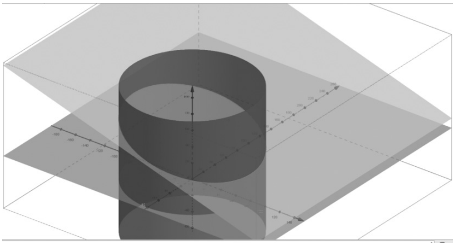
Atenção

A partir dos dados de inclinação do teto da Biblioteca, construímos a equação do plano para o teto.

Vamos representar o teto da Biblioteca pelo plano de equação $80z + 22{,}93963x = 4475{,}17$.

Caro aluno, em caso de dúvida na construção da equação do plano, recomendamos consultar a Seção 1.1 da Unidade 1 ou os livros disponíveis na Biblioteca Digital.

Figura 2.11 | Cilindro e plano representando a Biblioteca



Fonte: elaborada pelo autor.

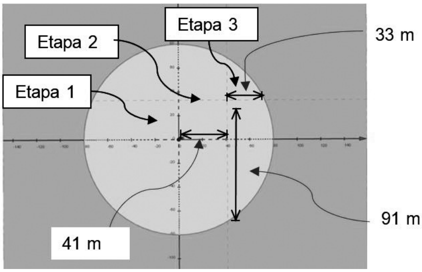
Os limites de integração na variável z são $z_{inferior} = 0$ e $z_{superior} = \dfrac{4475{,}17 - 22{,}93963x}{80}$. O limite superior para a variável z, em coordenadas cilíndricas fica $z_{superior} = \dfrac{4475{,}17 - 22{,}93963\, r\cos(\theta)}{80}$.

Os limites de integração para a variável r são $0 \le r \le 80$.

Vamos dividir a integração em três etapas. Na Figura 2.12 temos a ilustração (vista a partir de cima) dessas três etapas indicadas. As medidas foram estimadas a partir do programa Google Earth.

Etapa 1: Metade esquerda da Nova Biblioteca de Alexandria

Figura 2.12 | Dimensões da Nova Biblioteca de Alexandria, vista superior



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\int_0^{\pi}\int_0^{80}\int_r^{\frac{4475,17-22,93963\, r\cos(\theta)}{80}} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{80} r\left[z\right]_r^{\frac{4475,17-22,93963\, r\cos(\theta)}{80}} dr\, d\theta =$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{80} r\left(\frac{4475,17-22,93963 r\cos(\theta)}{80}-r\right)dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{4475,17r^2}{2\cdot 80}-\frac{22,93963\cos(\theta)r^3}{3\cdot 80}-\frac{r^3}{3}\right]_0^{80} d\theta =$$

$$\int_0^{\pi}\frac{4475,17(80)^2}{2\cdot 80}-\frac{22,93963\cos(\theta)(80)^3}{3\cdot 80}-\frac{(80)^3}{3}d\theta =$$

$$\int_0^{\pi}\left(179006,8-48937,88\cos(\theta)-170666,7\right)d\theta = 8340,133\cdot\pi$$

Etapa 2: Neste caso, é mais conveniente efetuarmos a integração em coordenadas retangulares. Efetuamos a integração para

$$0\le x\le 41,\ -\sqrt{80^2-x^2}\le y\le\sqrt{80^2-x^2},\ 0\le z\le\frac{4475,17-22,93963x}{80}$$

$$\int_0^{41}\int_{-\sqrt{80^2-x^2}}^{\sqrt{80^2-x^2}}\int_0^{\frac{4475,17-22,93963x}{80}} dz\, dy\, dx = \int_0^{41}\int_{-\sqrt{80^2-x^2}}^{\sqrt{80^2-x^2}}\left[z\right]_0^{\frac{4475,17-22,93963x}{80}} dy\, dx =$$

$$\int_0^{41}\int_{-\sqrt{80^2-x^2}}^{\sqrt{80^2-x^2}}\frac{4475,17-22,93963x}{80}dy\, dx = \int_0^{41}\left[\frac{4475,17y-22,93963xy}{80}\right]_{-\sqrt{80^2-x^2}}^{\sqrt{80^2-x^2}} dy\, dx =$$

$$\int_0^{41}\frac{4475,17\sqrt{80^2-x^2}}{40}dx = \frac{4475,17}{40}\int_0^{41}\sqrt{80^2-x^2}\, dx$$

Fazemos a substituição: $\frac{x}{80}=sen(u)\Rightarrow x=80sen(u)\Rightarrow dx=80\cos(u)du$.

Tomando $-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}$, temos que $\sqrt{\cos^2(u)}=+\cos(u)$.

Assim, $\int\sqrt{80^2-x^2}dx = 80\int\sqrt{1-sen^2(u)}80\cos(u)du =$

$$80^2\int cos^2(u)du = 80^2\int\frac{1}{2}(1+\cos(2u))u = 80^2\int\frac{1}{2}(1+\cos(2u))u =$$

$$\frac{80^2}{2}u+\frac{80^2}{2}sen(u)\cos(u)$$

Como $u = arcsen\left(\frac{x}{80}\right)$, $\cos(u)=\sqrt{1-\frac{x^2}{80^2}}$:

$$\int\sqrt{80^2-x^2}dx = \frac{80^2}{2}arcsen\left(\frac{x}{80}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{80^2-x^2}$$

Portanto: $\int_0^{41} \sqrt{80^2 - x^2}\,dx = \frac{80^2}{2} arcsen\left(\frac{41}{80}\right) + \frac{41}{2}\sqrt{80^2 - 41^2} = 28,623 + 1408,247 = 1436,871$

Multiplicando por $\frac{4475,17}{40}$,

teremos como resultado da Etapa 2: $= 1436,871 \cdot \frac{4475,17}{40} = 160756$.

Etapa 3: Também aqui utilizamos coordenadas retangulares. Os limites de integração são:

$41 \le x \le 41 + 33 = 74$, $24,81 \le y \le \sqrt{80^2 - x^2}$, $0 \le z \le \frac{4475,17 - 22,93963x}{80}$

$$\int_{41}^{74} \int_{24,81}^{\sqrt{80^2-x^2}} \int_0^{\frac{4475,17-22,93963x}{80}} dz\,dy\,dx = \int_{41}^{74} \int_{24,81}^{\sqrt{80^2-x^2}} [z]_0^{\frac{4475,17-22,93963x}{80}} dy\,dx =$$

$$\int_{41}^{74} \int_{24,81}^{\sqrt{80^2-x^2}} \frac{4475,17 - 22,93963x}{80} dy\,dx = \int_{41}^{74} \left[\frac{4475,17y - 22,93963xy}{80}\right]_{24,81}^{\sqrt{80^2-x^2}} dx =$$

$$\int_{41}^{74} \frac{4475,17.\sqrt{80^2 - x^2} - 22,93963x\sqrt{80^2 - x^2}}{80} - \frac{4475,17.24,81 - 22,93963x24,81}{80} dx =$$

$$\int_{41}^{74} \left(55,9396\sqrt{80^2 - x^2} - 0,286745x\sqrt{80^2 - x^2} - 1387,862 + 7,1141x\right) dx$$

Dividimos a integral anterior em quatro integrais:

1) $55,9396\int_{41}^{74} \sqrt{80^2 - x^2}\,dx = -13809,1$

2) $-0,286745\int_{41}^{74} x\sqrt{80^2 - x^2}\,dx = \frac{-0,286745}{(-2)}\int_{41}^{74} (-2x)\sqrt{80^2 - x^2}\,dx = -56600,5$

3) $\int_{41}^{74} -1387,862dx = 45799,45$

4) $$7{,}1141\int_{41}^{74} x\,dx = 7{,}1141\left[\frac{x^2}{2}\right]_{41}^{74} = 13499$$

Somando os quatro resultados parciais: –13809,1 + –56600,5 + 45799,45 + 13499 = –11111,2. Finalmente, somando os resultados das três etapas, o volume será: 175.846,1 m^3.

Um aprendizado importante desta situação-problema: não somos obrigados a efetuar a integração de um objeto apenas em coordenadas cilíndricas ou apenas em coordenadas cartesianas. Pode-se dividir o objeto e aproveitar sua simetria para utilizar o sistema de coordenadas mais apropriado para aquele trecho.

Avançando na prática

<table>
<tr><th>Pratique mais</th></tr>
<tr><td>Instrução
Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.</td></tr>
</table>

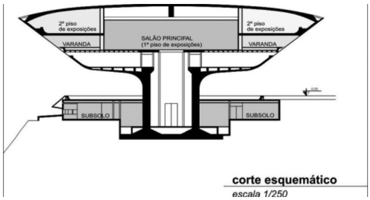
<table>
<tr><th colspan="2">Integrais triplas: as coordenadas cilíndricas</th></tr>
<tr><td>1. Competências</td><td>Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.</td></tr>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Utilizar os conhecimentos adquiridos dos conteúdos de mudança de coordenadas nas integrais triplas, aplicando os conceitos de coordenadas cilíndricas em situações do cotidiano.</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Mudança de coordenadas em integrais triplas (coordenadas cilíndricas).</td></tr>
<tr><td>4. Descrição da situação-problema</td><td>O Museu de Arte Contemporânea de Niterói é um marco arquitetônico e ícone da cidade. É outra obra de destaque do arquiteto Oscar Niemayer.

Figura 2.13 | Museu de Arte Contemporânea de Niterói

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Niteroi_Museu_de_Arte_Contemporanea_2005-03-15.jpg>. Acesso em: 15 abr. 2016.</td></tr>
</table>

Na Figura 2.14 temos uma planta esquemática da construção.

Figura 2.14 | Planta esquemática da construção



Fonte: <https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/236x/d7/b9/b4/d7b9b401e6d998ce1f75182c2e761ada.jpg>. Acesso em: 15 abr. 2016.

Você reparou que a cobertura do MAC-Niterói não é plana? É uma calota esférica. Sendo assim, qual seria o procedimento para se estimar o volume delimitado superiormente pela calota esférica de equação $ax^2 + by^2 + cz^2 = R^2$ e inferiormente pelo cone de equação $z^2 = dx^2 + ey^2$ e pelo plano $z = f$?

Para facilitar nossos cálculos, vamos supor que a equação da calota esférica seja $x^2 + y^2 + z^2 = 324$, que a equação do cone seja $z^2 = x^2 + y^2$. Além disso, vamos supor que $z = 7$.

5. Resolução da situação-problema

Faça você mesmo

Ao substituir $z^2 = x^2 + y^2$ na equação da circunferência obteremos o raio da curva de intersecção. Faça para obter: $R \cong 12,72$.

Lembre-se

Como o teto não é constante, o extremo superior da integral em z varia de acordo com o raio.

Queremos calcular a integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{12,72}\int_7^{\sqrt{18^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{12,72} [z]_7^{\sqrt{18^2-r^2}}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{12,72}\left(\sqrt{18^2-r^2}-7\right)dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{12,72}\sqrt{18^2-r^2}\,dr\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{12,72} 7\,dr\,d\theta =$$

$$\left(\frac{18^2}{2}\,arcsen\left(\frac{12,72}{18}\right) + \frac{12,72}{2}\sqrt{18^2-12,72^2} - 7\cdot 12,72\right)\cdot 2\pi =$$

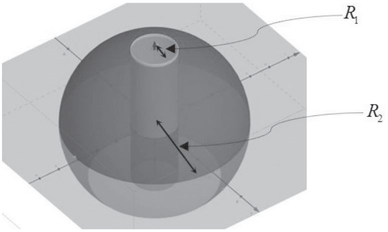
$$(162\cdot 0,7847 + 80,99 - 89,04)\cdot 2\pi = 238,1\pi$$

Portanto, o volume procurado é igual a $238,1\pi$.

Faça valer a pena

1. Considere um cilindro de raio R_1 contido em uma esfera de raio R_2 ($R_1 < R_2$). O eixo do cilindro coincide com o centro da esfera. Veja a figura a seguir. Determine o volume da esfera subtraindo-se o volume do cilindro.

Cilindro contido em esfera



Fonte: elaborada pelo autor.

a) $\frac{4\pi}{3}\left(R_2^2-\left(R_2^3-R_1^3\right)^{\frac{3}{2}}\right)$

b) $\frac{8}{5}\left(\left(R_2^2-R_1^2\right)^{\frac{3}{2}}-R_1^2\right)$

c) $\frac{\pi}{3}\left(R_2^2-\left(R_2-R_1\right)^2\right)$

d) $\frac{5\pi}{3}\left(R_1^3-\left(R_2-R_1\right)^{\frac{3}{2}}\right)$

e) $\frac{4\pi}{3}\left(R_2^3-\left(R_2^2-R_1^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)$

2. Considere a integral $\int_0^{\pi}\int_0^{6sen(\theta)}\int_0^{25-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$. Apresente esta integral em coordenadas cartesianas.

a) $\int_0^3\int_{-3-\sqrt{9-x^2}}^{3+\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{5}-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$

b) $\int_0^3\int_0^{3-\sqrt{9-x^2}}\int_0^{5-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$

c) $\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{25-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$

d) $\int_{-3}^3\int_0^{9+\sqrt{3-x^2}}\int_0^{\sqrt{5}-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$

e) $\int_{-3}^3\int_0^{9+\sqrt{3-x^2}}\int_0^{\sqrt{5}-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$

3. A integral $\int\int_A\int xy^2\, dx\, dy\, dz$, onde A é a região definida por $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le z \le 5$, pode ser reescrita, em coordenadas cilíndricas como:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{5}{2}} r^3 sen^3(\theta)\cos^3(\theta)\, dz\, dr\, d\theta$

b) $\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{5}{2}} r^2 \cos^2(\theta) sen^2(\theta)\, dz\, dr\, d\theta$

c) $\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{5} r^4 cos(\theta) sen^2(\theta)\, dz\, dr\, d\theta$

d) $\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{5} \frac{r^4}{4} tg(\theta) cotg(\theta)\, dz\, dr\, d\theta$

e) $\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\int_0^{5/2} r\, sen(\theta) cos(\theta)\, dz\, dr\, d\theta$

Seção 2.3

Coordenadas esféricas

Diálogo aberto

Nesta seção, continuamos a discutir a estratégia de mudança de coordenadas em integrais triplas, com a finalidade de facilitar o cálculo. Na última seção, estudamos as coordenadas cilíndricas e vimos que a simetria sendo em torno de um eixo, podemos usá-la, obtendo cálculos mais fáceis. Nesta seção, estudaremos as coordenadas esféricas. Desta forma, qual "dica" poderíamos seguir para saber se devemos ou não mudar as coordenadas para esféricas? Bem, quando a região de integração apresentar simetria com respeito a um ponto, sugere-se a mudança para coordenadas esféricas.

Você, como engenheiro de um escritório de cálculos para estruturas incomuns, vem tendo seus conhecimentos postos à prova! Em diversas situações práticas podemos nos aproveitar da simetria para facilitar os cálculos de integrais triplas. Você já trabalhou com mudanças de coordenadas em geral (na Seção 2.1) e coordenadas cilíndricas (na Seção 2.2). Mas será que existiriam outras simetrias relevantes que merecem ser estudadas por um profissional como você atuando em um escritório de alto nível? Sim.

Você já ouviu falar na Biosfera de Montreal? Veja a Figura 2.15. Ela foi construída para a Feira Mundial de 1967 (Expo 67). A Biosfera de Montreal possui 76 metros de diâmetro e 62 metros de altura. Ela é usada como um museu interativo sobre o meio ambiente dos Grandes Lagos. Como

Figura 2.15 | Biosfera de Montreal

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Biosph%C3%A8re_Montr%C3%A9al_CA.jpg>. Acesso em: 18 abr. 2016.

faríamos para determinar o volume de uma estrutura como essa? Seria conveniente utilizar coordenadas cilíndricas?

Certamente cascas esféricas e esferas estão dentre as estruturas indicadas para utilizar coordenadas esféricas. Além de estruturas arquitetônicas, também máquinas e equipamentos necessitam do cálculo de integrais triplas em coordenadas esféricas para a determinação de volume, massa e momentos de inércia.

Suponha que uma ONG deseja construir uma réplica da esfera da Biosfera de Montreal para servir como viveiro para pássaros, tornando-se também um observatório para turistas. Para iniciar o projeto, a ONG precisa saber o volume do espaço interno da estrutura para estimar a quantidade de pássaros que podem conviver ali. Se o espaço for insuficiente, eles pretendem realizar adequações no projeto. Suponha que essa ONG tenha entrado em contato com o escritório de engenharia em que você trabalha e designaram a tarefa de calcular esse volume a você. E agora? Como proceder?

Não pode faltar

A mudança de coordenadas esféricas é dada pelas equações:

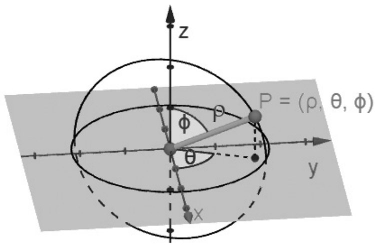
$$x = \rho\, sen\phi \cos\theta$$

$$y = \rho\, sen\phi\, sen\theta$$

$$z = \rho\, cos\phi$$

Veja na Figura 2.16 um ponto *P* representado com coordenadas esféricas. O ângulo θ é o mesmo utilizado em coordenadas cilíndricas e corresponde àquele formado entre dois semiplanos: o semiplano localizado no plano *xz* para $x \geq 0$; e o semiplano determinado pelo eixo z e pelo ponto *P*. Esse ângulo é

Figura 2.16 – Ponto P em coordenadas esféricas



Fonte: <http://www.geogebra.org/m/gKJGp4Nq>. Acesso em: 2 maio 2016.

medido em sentido anti-horário a partir do sentido positivo do eixo dos *x*. A medida ρ é a distância de *P* à origem e o ângulo ϕ é determinado por duas semirretas: uma que parte da origem e passa por *P*; outra que parte da origem, está sobre o eixo *Oz*, e segue o sentido positivo de *z*. Acrescentamos que $\rho \in [0,\infty)$, $0 \le \theta < 2\pi$ e $0 \le \phi \le \pi$ Acesse <http://www.geogebra.org/m/gKJGp4Nq>. Acesso em: 18 abr. 2016. Veja a representação de um ponto P em coordenadas esféricas.

Como já vimos na Seção 2.1, no caso geral de mudança de coordenadas para integrais triplas, vale a fórmula:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_A f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

E o que muda no caso de coordenadas esféricas? Veja, no caso de coordenadas esféricas o determinante jacobiano é:

$$J(x,y,z) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\phi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\phi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sen\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\, sen\phi\, sen\theta \\ sen\phi\, sen\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho sen\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\, sen\phi & 0 \end{vmatrix} = -\rho^2 sen\phi$$

Portanto, no caso de mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas, a integral tripla fica:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_A f\big(x(\rho,\theta,\phi), y(\rho,\theta,\phi), z(\rho,\theta,\phi)\big)\rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

Observe que o elemento de volume obedece à relação $dV = \rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$.

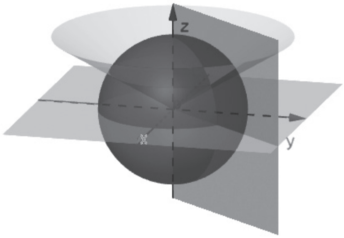
Assimile

No caso de coordenadas cilíndricas, o elemento de volume é $dV = r\,d\rho\,dz\,d\theta$. No caso de coordenadas esféricas, o elemento de volume é $dV = \rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$.

Como serão as equações, em coordenadas esféricas, para uma esfera, para um cone e para um plano passando pelo eixo *Oz*?

O conjunto de pontos *A* = {(x,y,z) tal que ρ = constante} é uma superfície esférica.

Figura 2.17 | ρ = constante: esfera em coordenadas esféricas; θ = constante: semiplano em coordenadas esféricas; ϕ = constante: cone de uma folha em coordenadas esféricas.



Fonte: <http://www.geogebra.org/m/vKrQdtec>. Acesso em: 20 abr. 2016.

O conjunto de pontos A = {(x,y,z) tal que θ = constante} é um semiplano vertical passando pelo eixo Oz. O conjunto de pontos A = {(x,y,z) tal que ϕ = constante} é um cone.

Exemplificando

Considerando o ponto $P = \left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ em coordenadas esféricas, qual sua representação em coordenadas cartesianas?

Resolução:

Das equações para coordenadas esféricas temos:

$$x = \rho sen\phi \cos\theta = 4sen\frac{\pi}{4}cos\frac{\pi}{6} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}\ ;$$

$$y = \rho\, sen\phi\, sen\theta = 4sen\frac{\pi}{4}sen\frac{\pi}{6} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

$$z = \rho\cos\phi = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,.$$

Assim, em coordenadas retangulares, P se escreve $P = \left(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

Faça você mesmo

Considere o ponto $Q = (1,1,0)$ em coordenadas retangulares. Como se escreve esse ponto em coordenadas esféricas?

Destacamos ainda que o cilindro de equação $x^2 + y^2 = a^2$ em coordenadas retangulares tem equação em coordenadas esféricas

$$\rho^2 sen^2\phi\cos^2\theta + \rho^2 sen^2\phi\, sen^2\theta = a^2 \Rightarrow \rho^2 sen^2\phi = a^2 \Rightarrow \rho\, sen\phi = a\,.$$

Na sequência, veremos exemplos sobre coordenadas esféricas e integrais triplas.

Exemplificando

Considere o cone de equação (em coordenadas retangulares): $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ Apresente a equação em coordenadas esféricas para esse cone.

Resolução: vamos substituir dos dois lados da equação as expressões para mudança de coordenadas esféricas para retangulares:

$$(\rho \cos\phi)^2 = 3(\rho\, sen\phi \cos\theta)^2 + 3(\rho\, sen\phi\, sen\theta)^2$$

$$\rho^2 \cos^2\phi = 3\rho^2 sen^2\phi \cos^2\theta + 3\rho^2 sen^2\phi\, sen^2\theta$$

$$\cos^2\phi = 3sen^2\phi\left(\cos^2\theta + sen^2\theta\right) \Rightarrow \frac{sen^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{1}{3} \Rightarrow tg\phi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, a equação, em coordenadas esféricas para este cone é $\phi = \frac{\pi}{6}$.

Reflita

Por que é conveniente utilizar coordenadas esféricas para descrever um cone e coordenadas cilíndricas para descrever um paraboloide?

Pesquise mais

Nesse link, você encontrara aulas do curso regular de Calculo III do Instituto de Matematica e Estatistica da USP (Prof. Claudio Possani). Os Programas 23, 24 e 25 são dedicados as coordenadas esféricas nas integrais triplas. Disponível em <https://goo.gl/1j4V7C>. Acesso em: 24 jun. 2016.

Exemplificando

Escreva a integral em coordenadas esféricas: $\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{16-(x^2+y^2)}} \left(x^2+y^2+z^2\right) dz\, dy\, dx$.

Resolução:

Mudamos para coordenadas esféricas: $x = \rho\, sen\phi \cos\theta$, $y = \rho\, sen\phi\, sen\theta$, $z = \rho \cos\phi$

O limite de integração $\sqrt{16-(x^2+y^2)}$ na variável z corresponde à equação da esfera $x^2+y^2+z^2=16$, ou seja, a uma esfera de raio 4. O limite de integração $\sqrt{x^2+y^2}$ corresponde ao cone de equação $\phi=\frac{\pi}{4}$. Em coordenadas esféricas, a integral fica:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^4 \rho^2\rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^4 \rho^4 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi\,.$$

Exemplificando

Calcule a integral $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^6 2\rho^3\cos\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$.

Resolução:

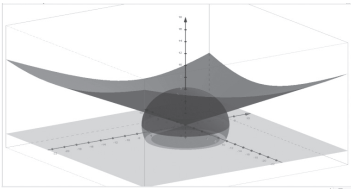
$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^6 2\rho^3\cos\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = 2\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/6}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^6\cos\phi\, d\theta\, d\phi = 648\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/6}\cos\phi\, d\theta\, d\phi =$$

$$648\int_0^{\pi}\left[sen\phi\right]_0^{\pi/6} d\phi = \frac{648}{2}\int_0^{\pi} d\phi = 324\pi$$

Exemplificando

Determine o volume do sólido delimitado inferiormente pelo cone de equação $z^2=\frac{144}{575}(x^2+y^2)$ e superiormente pela esfera de equação $x^2+y^2+z^2=36$.

Figura 2.18 | Cone e esfera



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Da equação da esfera, seu raio é 6. Substituindo $z^2=\frac{144}{575}(x^2+y^2)$ na equação da esfera $x^2+y^2+z^2=36$, temos $\frac{575}{144}z^2+z^2=36 \Rightarrow z^2=\left(\frac{144}{576}\right)36 \Rightarrow z=\frac{6\sqrt{144}}{\sqrt{576}}$.

Como, em coordenadas esféricas, a equação da esfera é $z=\rho\cos\phi$, então $\frac{6\sqrt{144}}{\sqrt{576}}=6\cos\phi \Rightarrow \frac{12}{24}=\cos\phi \Rightarrow \phi=\frac{\pi}{6}$.

Os limites de integração são: $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\phi\le\frac{\pi}{6}, 0\le\rho\le 6$.

A integral fica $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{6}\rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 72\, sen\phi\, d\phi\, d\theta =$

$$72\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = 72\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = 144\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi$$

Portanto, temos que o resultado da integral é $144\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi$.

Exemplificando

Determine o valor da integral $\iiint_V dx\,dy\,dz$, onde V é a região delimitada pelas esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $x^2+y^2+z^2=b^2$, com $a<b$.

Resolução:

Os limites de integração são: $a \le \rho \le b$; $0 \le \theta \le 2\pi$; $0 \le \phi \le \pi$.

A integral fica:

$$\iiint_V dxdydz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{b}\rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi} sen\phi\, d\phi \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_a^b d\theta = \int_0^{\pi} sen\phi\, d\phi\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)\int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$2\pi\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)\int_0^{\pi} sen\phi\, d\phi = 2\pi\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}\left(b^3-a^3\right)$$

Exemplificando

Calcule a integral $\iiint_A 3y^2 dV$, onde a região A é limitada pelas esferas de raio a e b (com $a < b$) e pelo plano xz.

Resolução:

Como a região A é limitada pelo plano xz, tomamos a variável $0 \le \theta \le \pi$.

Já a variável ϕ tem como limites de integração $0 \le \phi \le \pi$ (pois estamos considerando metade das esferas para o cálculo do volume).

A integral fica $\iiint_A 3y^2 dV = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{b} 3\rho^2 sen^2\phi \cos^2\theta\, \rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi =$

$$3\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{b}\rho^4 sen^3\phi\cos^2\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi = 3\int_0^{\pi} sen^3\phi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_a^b d\theta\, d\phi =$$

$$3\left(\frac{b^5-a^5}{5}\right)\int_0^{\pi} sen^3\phi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta\, d\phi = 3\left(\frac{b^5-a^5}{5}\right)\int_0^{\pi} sen^3\phi\int_0^{\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta\, d\phi =$$

$$\frac{3}{10}\left(b^5-a^5\right)\int_0^{\pi} sen^3\phi\int_0^{\pi}1+\cos(2\theta)\,d\theta\, d\phi =$$

$$\frac{3}{10}\left(b^5-a^5\right)\int_0^{\pi} sen^3\phi\left[\theta+\frac{1}{2}sen(2\theta)\right]_0^{\pi}d\phi =$$

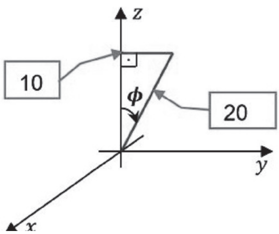
$$\frac{3\pi}{10}\left(b^5-a^5\right)\int_0^{\pi} sen^3\phi\, d\phi = \frac{3\pi}{10}\left(b^5-a^5\right)\left[-\cos\phi+\frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{5}\left(b^5-a^5\right)$$

Assim, a integral será igual a $\frac{2\pi}{5}\left(b^5-a^5\right)$.

Exemplificando

Determine o volume do sólido delimitado pela esfera de raio 20 e pelo plano z = 10.

Figura 2.19 | $\rho = z cos\phi$



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Da Figura 2.19, observamos que $cos\phi = \frac{\rho}{z}$, então $z = \rho sec\phi$. Como o volume é limitado pelo plano z = 10 e a esfera possui raio = 20, o ângulo máximo para ϕ é $\frac{\pi}{3}$.

A integral fica:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{10\,sec\phi}^{20}\rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{10 sec\phi}^{20}\rho^2 d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{10\,sec\phi}^{20} sen\phi\, d\phi\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{20^3}{3}-\frac{1000\,sec\phi^3}{3}\right)sen\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{20^3}{3}cos\phi-\frac{1000}{6}tg^2\phi\right]_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta =$$

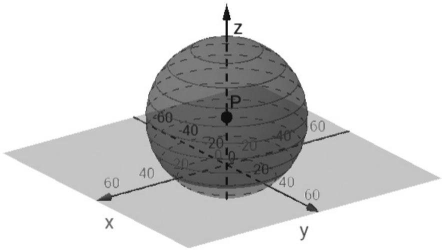
$$\int_0^{2\pi}\frac{5000}{6}d\theta = \frac{5000}{3}\pi$$

Faça você mesmo

Modifique o enunciado do exercício anterior para que o Ângulo máximo ϕ seja $\frac{\pi}{4}$. Será que existe mais de um valor para raio da esfera e para a cota do plano z que atenda a esse requisito?

Vamos voltar à questão inicial desta seção: calcular o volume da Biosfera de Montreal.

Figura 2.20 | Esfera representando a Biosfera de Montreal



Fontes: elaborada pelo autor.

A esfera tem 76 metros de diâmetro e 62 metros de altura. Como a diferença entre o diâmetro e a altura da Biosfera é de 14 metros, a equação da esfera que representa a Biosfera de Montreal é $x^2+y^2+(z-24)^2=38^2$. O centro da esfera, ponto P, na figura 2.20, apresenta coordenadas P= (0,0,24). Tenha uma visualização dinâmica. Disponível em: link. Acesso em 3 mai. 2016.

Atenção

Devemos determinar os limites de integração para a variável ϕ. Fazemos isso identificando que a Biosfera está "enterrada" 14 metros no solo.

Na Figura 2.20 a esfera atravessa o plano *xy* e está apoiada sobre o plano de equação *z* = –14. A Figura 2.21 apresenta um "corte" da esfera paralelo ao eixo *Oz*.

Da Figura 2.21 obtemos que $\phi_{superior} = 0,5\pi + 0,2175\pi = 0,7175\pi$ (aproximadamente 39,1º).

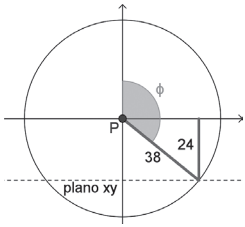
A integral fica: $\int_0^{0,7175\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{38} \rho^2 sen\phi d\rho d\theta d\phi$. Efetuando o cálculo:

$$\int_0^{0,7175\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{38} \rho^2 sen\phi d\rho d\theta d\phi = \int_0^{0,7175\pi} sen\phi d\phi \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{38} d\theta = \frac{38^3 2\pi}{3} \int_0^{0,7175\pi} sen\phi d\phi =$$

$$\frac{38^3 2\pi}{3} \left[-\cos\phi\right]_0^{0,7175\pi} = \frac{38^3 2\pi}{3} 1,6313$$

. Portanto, o volume da Biosfera é $\frac{38^3 2\pi}{3} 1,6313 \text{ m}^3$ ou aproximadamente 187.474,94 metros cúbicos.

Figura 2.21 | Determinação do limite superior da variável ϕ



Fontes: elaborada pelo autor.

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Integrais triplas: as coordenadas cilíndricas	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Utilizar coordenadas esféricas como meio de facilitar o cálculo das integrais triplas em situações aplicadas no cotidiano.
3. Conteúdos relacionados	Cálculo de volume com coordenadas esféricas em integrais triplas.

<table>
<tr>
<td>4.
Descrição da situação-problema</td>
<td>

Além da Biosfera de Montreal (Figura 2.20), outro exemplo de construção com simetria esférica é a Oca do Ibirapuera. Projeto do arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer, é um espaço expositivo localizado no Parque do Ibirapuera, em São Paulo (Figura 2.22).

Figura 2.22 | Oca do Ibirapuera

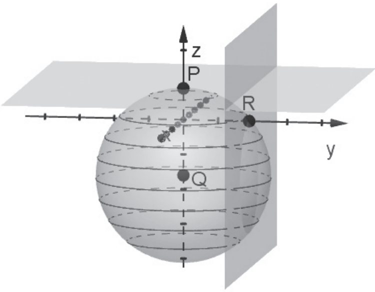
Fonte: <https://www.flickr.com/photos/soldon/6134411245>. Acesso em: 18 abr. 2016.

A Oca é uma calota esférica. No nível do solo, o edifício possui diâmetro de cerca de 76 metros. Além disso, sua altura é de aproximadamente 18 metros (Fontes: <http://www.prefeitura.sp.gov.br/cidade/upload/ARQ-05_1288222497.pdf> e <http://www.sampa.art.br/index.php?option=com_content&view=article&id=715&Itemid=697>. Acessos em: 19 abr. 2016). É possível identificar que essa calota corresponde à esfera de equação $x^2 + y^2 + (z+32)^2 = 50^2$.
Se a esfera do edifício da Oca fosse realmente construída, qual seria o volume que estaria abaixo do nível do solo?

</td>
</tr>
<tr>
<td>5.
Resolução da situação-problema</td>
<td>

Na Figura 2.23 vemos a esfera, o plano de equação z = 18 e o plano de equação y = 18.

Figura 2.23 | Esfera representando a Oca do Ibirapuera



Fonte: <http://www.geogebra.org/m/H2sauDWD>. Acesso em: 3 maio 2016.

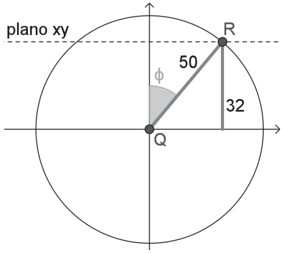
</td>
</tr>
</table>

E os pontos P = (0, 0, 18),
Q = (0, 0, −32) e R = (0, 38, 0).
Vamos calcular o volume acima do nível do solo e subtrair do volume da esfera toda.

Faça você mesmo

Repita o procedimento adotado com a Biosfera de Montreal para determinar o limite superior $\phi_{superior} = 0{,}2788\pi$.

Figura 2.24 | Determinação do limite superior da variável ϕ



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 2.24 vemos os valores utilizados para determinação do extremo superior da variável de integração ϕ : $\phi_{superior} = 0{,}2788\pi$

(aproximadamente 50,2º).

A integral fica:

$$V_{acima} = \int_0^{0,2788\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{50} \rho^2 sen\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Efetuando os cálculos, obtemos:

$$V_{acima} = \int_0^{0,2788\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{50} \rho^2 sen\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi =$$

$$\frac{50^3 2\pi}{3}\left(\frac{0{,}2788\pi}{2} - \frac{(0{,}5576\pi)}{4}\right) \cong \frac{50^3 2\pi}{3}(0{,}1920)$$

O volume de toda a esfera é $V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi 50^3}{3}$.

O volume abaixo do nível do solo é dado por:

$$V_{abaixo} = \frac{4\pi 50^3}{3} - \frac{50^3 2\pi}{3}(0{,}1920) = \frac{50^3 2\pi}{3}(1{,}8071).$$

Lembre-se

Nos dois casos (da Biosfera de Montreal e da Oca do Ibirapuera), tivemos que determinar o valor máximo para o ângulo ϕ.

Faça valer a pena

1. Calcule a integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2 5\rho^4 sen\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$.

a) $16\sqrt{2}\pi$

b) $31\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2}$

c) $15\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\pi}{4}$

d) $63\sqrt{3}\,\frac{\pi}{2}$

e) $31\sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}$

2. A equação do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ em coordenadas esféricas é:

a) $\rho \, sen\phi = 4$

b) $\rho \cos\phi = 4$

c) $\rho = 4sen\phi$

d) $\rho = 4\cos\phi$

e) $\rho \, tg\phi = 4$

3. A integral $\iiint_A xy^2 dx\,dy\,dz$, em que A é a região definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ pode ser reescrita em coordenadas esféricas como:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{5} \rho^5 sen^5\phi sen^3\theta \cos^2\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{5} \rho^5 sen^4\phi sen^2\theta \cos\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

c) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{25} \rho^4 sen^3\phi \, sen\theta \cos\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

d) $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{5} \rho^4 sen^2\phi \, sen^2\theta \cos\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

e) $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{25} \rho^2 sen^2\phi \, sen^4\theta \cos^2\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

Seção 2.4

Aplicações de integrais triplas em outras coordenadas

Diálogo aberto

Nas três primeiras seções desta unidade, estudamos mudança de coordenadas em integrais triplas e o uso de coordenadas cilíndricas e esféricas em integrais triplas. Utilizamos estas mudanças de coordenadas para cálculos de volume. O cálculo de volumes é comumente a primeira aplicação de integrais triplas que se estuda nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, mas existem outras aplicações. Nesta seção, veremos aplicações das mudanças de coordenadas em integrais triplas: determinação de massa, centro de massa, momentos em relação aos planos coordenados e momentos de inércia.

Você já viu a esfera da Times Square, em Nova Iorque, na comemoração do ano-novo? Mesmo que já tenha visto, leia mais. Disponível em: <http://g1.globo.com/mundo/noticia/2016/01/nova-york-entra-em-2016-com-festa-e-forte-esquema-de-seguranca.html> Acesso em: 9 mai. 2016. Conhecer um pouco sobre a esfera da Times Square será importante para sua próxima tarefa.

Suponha que um empresário brasileiro tenha encomendado ao escritório de engenharia em que você trabalha um enfeite semelhante ao da Times Square. Ele quer que a esfera seja construída no pátio da sua empresa e que suba um mastro girando em torno de seu eixo. Para prosseguir com o projeto, você e seus colegas do escritório

Figura 2.25 | Esfera da Times Square

Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Times_Square_Ball#/media/File:TSB2010_cropped.jpg>. Acesso em: 9 maio 2016.

dividiram as tarefas, sendo que coube a você calcular o momento de inércia da esfera em relação ao mastro, posicionado sobre o eixo *z*.

A esfera terá 2 metros de raio e o mastro é fino o suficiente para ser desconsiderado nesse cálculo. O material que será utilizado na construção da esfera ainda não foi definido e irá depender do momento de inércia que você irá calcular. A informação que se tem é que a densidade do material será constante e igual a C e a esfera será maciça. E agora, qual é o momento de inércia dessa esfera?

Não pode faltar

A generalização das aplicações de integrais duplas para integrais triplas é imediata. Nas seções anteriores vimos que o volume de um sólido é representado pela integral $V = \iiint_A dx\, dy\, dz$.

Assimile

Considere um sólido A com função densidade $f(x,y,z)$. A **massa** deste sólido será dada por $\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$.

Em alguns problemas é mais simples estudarmos o movimento do corpo em termos das coordenadas de seu centro de massa, que são dadas por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_A xf(x,y,z)dxdydz\ ;\ \ \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_A yf(x,y,z)dxdydz\ ;\ \ \bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_A zf(x,y,z)dxdydz$$

M é a massa do sólido.

Vocabulário

Centro de massa: o centro de massa corresponde ao ponto onde consideramos concentrada toda a massa do corpo.

As coordenadas do centro de massa no espaço são, então, $C = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. As integrais acima são os momentos de *A* em relação aos planos coordenados *yz*, *xz* e *xy*. Tais integrais são dadas por:

$$M_{yz} = \iiint_A xf(x,y,z)dxdydz\ ;\quad M_{xz} = \iiint_A yf(x,y,z)dxdydz\ ;\quad M_{xy} = \iiint_A zf(x,y,z)dxdydz$$

Pesquise mais

Centro de massa e centro de gravidade são conceitos distintos. Para saber mais sobre as diferenças entre centro de massa e centro de gravidade. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/cref/?area=questions&id=712> Acesso em: 25 abr. 2016.

Outra aplicação importante de coordenadas esféricas e cilíndricas, e integrais triplas é no cálculo dos momentos de inércia.

Assimile

O **momento de inércia** de um sólido A em relação a um eixo E é dado por: $I_E = \iiint_A d_E^2(x,y,z) f(x,y,z)\,dxdydz$,

onde $d_E^2(x,y,z)$ é a distância de um ponto de coordenadas (x, y, z) ao eixo E.

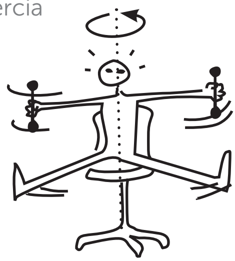
Da integral anterior, os momentos de inércia de um sólido A com relação aos três eixos coordenados são:

$$I_x = \iiint_A (y^2+z^2) f(x,y,z)\,dxdydz \,;\quad I_y = \iiint_A (x^2+z^2) f(x,y,z)\,dxdydz \,;\quad I_z = \iiint_A (x^2+y^2) f(x,y,z)\,dxdydz$$

Reflita

Qual a interpretação física para o momento de inércia? O momento de inércia mede a resistência ao movimento de rotação: para sólidos com maiores momentos de inércia, mais energia deve ser necessária para que o sólido seja posto em movimento (ou para parar o movimento).

Figura 2.26 | Interpretação física para o momento de inércia



Fonte: Adaptado de: < http://goo.gl/RD2X7I >. Acesso em: 25 abr. 2016.

Pesquise mais

Acesse o link a seguir para entender a relação entre momento de inércia e o salto duplo *twist carpado,* executado em campeonato oficial pela primeira vez pela ginasta brasileira Daiane dos Santos. Disponível em: <http://demotu.org/x/daiane/> . Acesso em: 20 jan. 2016.

Exemplificando

Determine a massa do sólido delimitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e pelo plano $z=\sqrt{3}$. Suponha que a função densidade seja $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$.

Resolução:

A massa é dada pela integral:

$$M=\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{\sqrt{3}\sec\phi}^{2}\rho\,\rho^2 sen\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi=$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}sen\phi\,d\phi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{3}\sec\phi}^{2}=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(4-\frac{9\sec^4\phi}{4}\right)sen\phi\,d\phi=$$

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(4sen\phi-\frac{9\,tg\phi\sec^3\phi}{4}\right)d\phi=$$

$$2\pi\left[-4\cos\phi-\frac{9\sec^3\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\pi\left(\frac{400-91\sqrt{3}}{16}\right)$$

Assim, a massa é de $\pi\left(\frac{400-91\sqrt{3}}{16}\right)$ unidades de massa.

Exemplificando

Determine o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido delimitado pela esfera $x^2+y^2+z^2\le R^2$ e pelos ângulos $\phi=\frac{\pi}{4}$ e $\phi=\frac{\pi}{2}$. Suponha que a função densidade seja constante e igual a 1.

Observe que neste caso estamos efetuando a integração entre dois valores fixos para a variável ϕ. Em outras palavras: a região de integração está contida pelos dois cones definidos por esses ângulos.

Resolução:

O momento de inércia é dado pela integral: $I_z=\iiint_A\left(x^2+y^2\right)f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$I_z=\iiint_A\left(x^2+y^2\right)f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R}\left(\rho^2sen^2\theta+\rho^2sen^2\theta\right)\rho^2sen\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi=$$

$$2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \rho^4 sen^2\theta\, sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = 2\frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi} sen^2\theta\, d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sen\phi\, d\phi =$$

$$2\frac{R^5}{5}\left[\frac{1}{2}(\theta - sen\theta\cos\theta)\right]_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{R^5}{5}\frac{2\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi R^5\sqrt{2}}{5}.$$

Portanto, o momento de inércia em relação ao eixo *z* é $\dfrac{\pi R^5\sqrt{2}}{5}$.

Exemplificando

Considere o sólido definido pelas superfícies: $2 \le x^2 + y^2 \le 3$ e $0 \le z \le 5$. Determine o momento de inércia do sólido em relação ao eixo *z*. Considere densidade constante.

Resolução:

Utilizaremos coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\theta$ e *z* = *z*. O momento de inércia em relação ao eixo *z* é dado pela integral:

$$I_z = \iiint_A \left(x^2+y^2\right) f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi}\int_2^3\int_0^5 \left(r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta\right) r\, C\, dz\, dr\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_2^3\int_0^5 r^3 C\, dz\, dr\, d\theta = C\int_0^{2\pi}\int_2^3 r^3\left[z\right]_0^5 dr\, d\theta = C\int_0^{2\pi}\int_2^3 5r^3 dr\, d\theta = 5C\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_2^3 d\theta =$$

$$\frac{10C\left(3^4-2^4\right)}{4}\pi$$

O momento de inércia é $\dfrac{10C\left(3^4-2^4\right)}{4}\pi$.

Exemplificando

Determine o centro de massa do sólido delimitado pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2=a^2$ e pelo cone $z^2 = 3(x^2+y^2)$. Considere a densidade igual a 1.

Resolução:

Da simetria do sólido, sabemos que as coordenadas *x* e *y* do centro de massa são nulas: $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = 0$. Resta determinar a coordenada z do centro de massa.

A equação da circunferência em coordenadas esféricas é $\rho = a$. Assim, os limites de integração são $\phi_{inferior} = 0$ e $\phi_{superior} = a$.

O cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ é caracterizado pelo ângulo $\phi = \frac{\pi}{6}$. Assim,

$\phi_{inferior} = 0$ e $\phi_{superior} = \frac{\pi}{6}$.

Os limites para o ângulo θ são: $\theta_{inferior} = 0$ e $\theta_{superior} = 2\pi$.

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_A zf(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

$$\iiint_A zf(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^a \rho^3 \cos\phi\, sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = ?$$

Faça você mesmo

Conclua o cálculo da integral $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^a \rho^3 \cos\phi\, sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$. O resultado é $\pi\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{6}$.

Então, a coordenada z do centro de massa é obtida pela divisão:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi\frac{a^3}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\pi\frac{a^3}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, as coordenadas do centro de massa são $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$.

Exemplificando

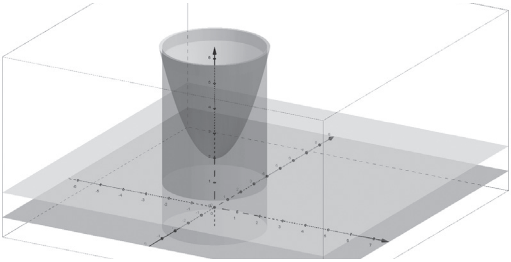
Determine o centro de massa do sólido delimitado superiormente pelo paraboloide

$z = 2 + x^2 + y^2$, inferiormente pelo plano $z = 1$ e pelo cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4$. Suponha que a densidade varie de forma diretamente proporcional com a distância à origem.

Resolução:

Utilizamos coordenadas cilíndricas.

Figura 2.27 | Centro de massa de paraboloide, cilindro e plano



Fonte: elaborada pelo autor.

A equação do paraboloide em coordenadas cilíndricas é $z = 2 + r^2$. Como o sólido é limitado inferiormente pelo plano $z = 1$, então os limites de integração para a variável z são $z_{inferior} = 1$ e $z_{superior} = 2 + r^2$. Como o sólido é simétrico em torno do eixo z, as coordenadas x e y do centro de massa são iguais a zero: $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Os limites para r são $r_{inferior} = 0$ e $r_{superior} = 2$. Conforme o ângulo θ percorre a figura, varia entre seus limites inferior e superior:

$\theta_{inferior} = 0$ e $\theta_{superior} = 2\pi$.

Determinamos o centro de massa utilizando a expressão a seguir:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_A zf(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz}$$

Então:

$$M_{xy} = \iiint_A zf(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_1^{r^2} z\,r^2 dz\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr \int_1^{r^2} z\,dz = 2\pi\int_0^2 r^2 dr\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^{r^2} =$$

$$= \pi\int_0^2 r^2\left(r^4 - 1\right)dr = \pi\left[\frac{r^7}{7} - \frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \pi\,\frac{8 \cdot 41}{21} = \pi\,\frac{328}{21}$$

$$M = \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\int_1^{r^2} dz\,dr\,d\theta = ?$$

Faça você mesmo

Conclua o cálculo da integral $\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2 \int_1^{r^2} dz\,dr\,d\theta$. O resultado é $\frac{112\pi}{15}$

Finalmente: $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi\frac{8\cdot 41}{21}}{2\pi\frac{56}{15}} = \frac{205}{98} \cong 2{,}091$.

Portanto, as coordenadas do centro de massa são $\left(0,0,\frac{205}{98}\right)$

Exemplificando

Determine o centro de massa do sólido delimitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ inferiormente pelo plano *xy* e superiormente pelo cone $\phi=\frac{\pi}{6}$. Suponha que a função densidade seja $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$

Resolução: Para determinar o centro de massa, devemos determinar a massa *M* e o momento com respeito ao plano *xy*, M_{xy} (pois o sólido possui o eixo *z* como eixo de simetria).

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_A z f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

Cálculo da massa:

$$M = \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^3 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \frac{2\pi R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen\phi\, d\phi =$$

$$\frac{2\pi R^4}{4}\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi\left(2-\sqrt{3}\right)R^4}{4}$$

Cálculo do momento com respeito ao plano *xy*:

$$M_{xy} = \iiint_A z f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho\cos\phi\,\rho^3 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

Faça você mesmo

Conclua o cálculo da integral $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho\cos\phi\,\rho^3 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$. O resultado será $\frac{2\pi R^5}{8}$

Exemplificando

Determinamos a coordenada $\bar{z}$ do centro de massa dividindo M_{xy} por M:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{2\pi R^5}{8}}{\frac{\pi\left(2-\sqrt{3}\right)R^4}{4}} = \frac{2\pi R^5}{8}\frac{4}{\pi\left(2-\sqrt{3}\right)R^4} = \frac{R}{2-\sqrt{3}}$$

Logo, o centro de massa é o ponto de coordenadas $\left(0,\ 0,\ \frac{R}{2-\sqrt{3}}\right)$

Pesquise mais

Leia o artigo *Ciência e Futebol* publicado na revista Ciência Hoje, n. 313, em 15 abr. 2014.. Neste artigo, é discutida a conservação do momento angular quando o jogador de futebol dá uma “bicicleta”. Disponível em: <http://www.cienciahoje.org.br/revista/materia/id/824/n/a_fisica_da_bicicleta_no_futebol>. Acesso em: 25 abr. 2016.

Sem medo de errar

Vamos resolver o problema de determinação do momento de inércia da esfera que o empresário deseja instalar no pátio da empresa dele. O empresário solicitou uma esfera de raio igual a 2 metros. Assumimos que a densidade é constante e igual a *C*.

Lembre-se

O momento de inércia em torno do eixo z é dado pela integral $I_z = \iiint_A \left(x^2+y^2\right) f\left(x,y,z\right) dx\, dy\, dz$. Para este problema, $f(x,y,z) = C$

Dada a simetria do problema, utilizamos coordenadas esféricas:

$$I_z = \iiint \left(x^2 + y^2\right) f\left(x, y, z\right) dx\, dy\, dz =$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} C\left(\rho^2 sen^2\phi sen^2\theta + \rho^2 sen^2\phi \cos^2\theta\right)\rho^2\, sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$C\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(\rho^2 sen^2\phi\right)\rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = C\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\rho^4 sen^3\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$C\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 sen^3\phi\, d\phi = C\frac{32}{5}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, sen^3\phi\, d\phi =$$

$$C\frac{64\pi}{5}\int_0^{\pi} sen^3\phi\, d\phi = C\frac{64\pi}{5}\left[\frac{1}{12}\left(\cos\left(3x\right) - 9\cos x\right)\right]_0^{\pi} = \frac{128C\pi}{15}$$

Portanto, o momento de inércia da esfera em relação ao mastro será $\frac{128C\pi}{15}$

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Aplicações de integrais triplas em outras coordenadas	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Utilizar aplicações em coordenadas esféricas e cilíndricas como recurso facilitador nos cálculos de massa, centro de massa, volume e momentos de inércia nas integrais triplas.
3. Conteúdos relacionados	Cálculo de momento de inércia com integrais triplas em coordenadas cilíndricas.
4. Descrição da situação-problema	Uma empreiteira consultou o escritório de cálculos de engenharia em que você trabalha e solicitou o projeto da estrutura para geradores de energia eólica (energia à base de vento). Contudo, para que exista um ganho de eficiência energética, é necessário determinar vários momentos de inércia na estrutura do gerador eólico. Uma destas estruturas é uma esfera de raio R e densidade constante igual a 1. Você precisa calcular o momento de inércia com respeito ao eixo z em função da massa M e do raio R da esfera. Vamos lá?

5. Resolução da situação-problema	Dada a simetria da esfera, podemos considerar qualquer eixo como eixo de simetria. Vamos considerar que a esfera esteja girando em torno do eixo *z*. O momento de inércia é dado pela integral $I_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ Substituindo os valores, a integral fica: $I_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz =$ $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \left(\rho^2 sen^2(\phi)cos^2(\theta) + \rho^2 sen^2(\phi) sen^2(\theta)\right)\rho^2\, sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$ **Faça você mesmo** Conclua o cálculo da integral $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \left(\rho^2 sen^2(\phi)cos^2(\theta) + \rho^2 sen^2(\phi) sen^2(\theta)\right)\rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$ O resultado desta integral é $8\pi\,\frac{R^5}{15}$ Determinação da massa da esfera: $M = \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \frac{2\pi R^3}{3}\int_0^{\pi} sen(\phi)\,d\phi = \frac{4\pi R^3}{3}$ Agora escrevemos o momento de inércia em termos da massa *M*: $I_z = 4\cdot 2\pi\,\frac{R^3 R^2}{3\cdot 5} = 4\cdot\pi\,\frac{R^3}{3}\cdot 2\,\frac{R^2}{5} = \frac{2MR^2}{5}$ Concluímos, então, que o momento de inércia, em função de *M* e *R* é dado por $I_z = \frac{2MR^2}{5}$

Faça valer a pena

1. Considere a semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (considere $z \geq 0$) com função densidade que depende da distância até o plano *xy*, $f(x,y,z) = 7z$. Determine a massa desta semiesfera.

a) $\frac{567\pi^2}{8}$

b) $\frac{525\pi^2}{27}$

c) $\frac{441\pi^2}{64}$

d) $\frac{196\pi^2}{243}$

e) $\frac{396\pi^2}{49}$

2. Determine a coordenada z do centro de massa do sólido delimitado pela superfície $z = 4\left(x^2 + y^2\right)$ e pelo plano $z = 7$. Considere a densidade constante e igual a C.

a) $\frac{21}{2}$

b) $\frac{14}{3}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{12}{7}$

e) $\frac{21}{4}$

3. Determine o centro de massa do sólido delimitado pela esfera de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0$. Suponha que a função densidade seja dada por $f\left(x, y, z\right) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$.

a) $CM = \left(0, 0, \frac{32a}{5}\pi\right)$

b) $CM = \left(0, 0, \frac{2a}{31}\pi\right)$

c) $CM = \left(0, 0, \frac{7a}{16}\right)$

d) $CM = \left(0, 0, \frac{4a}{5}\right)$

e) $CM = \left(0, 0, \frac{7a}{8}\right)$

Referências

BOULOS, Paulo; ABUD, ZaraIssa. **Cálculo diferencial e integral**. São Paulo: Makron Books, 2000. v. 2.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, David E. Cálculo com **geometria analítica.** Rio de Janeiro: LTC, 1999. v. 3.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo B**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

GUIDORIZZI, Luiz H. **Um Curso de Cálculo.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 3. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2541-4/>. Acesso em: 2 maio 2016.

ROGAWSKI, Jon. **Cálculo**: recurso eletrônico. Porto Alegre: Bookman, 2009. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577804115/cfi/0>. Acesso em: 2 mar. 2015. v. 2.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

THOMAS, George B. et al. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison-Wesley, 2003. v. 2.

Equações diferenciais ordinárias

Convite ao estudo

Olá, aluno! Seja bem-vindo à Unidade 3 deste livro didático. Ela tratará de um campo extremamente rico e útil, pertencente à matemática e aplicado a diversas ciências e também na engenharia: as equações diferenciais ordinárias (EDOs). Com essa aprendizagem, será possível ver distintas aplicações desse conteúdo, a partir do qual, mediante modelos matemáticos, você poderá lidar com diversas situações muito próximas das vivenciadas em seu cotidiano.

Você aprenderá ainda, no decorrer desta unidade, a definição de EDOs e a maneira como elas se classificam. Além disso, por meio de algumas situações, você também agregará aos seus conhecimentos a facilidade em trabalhar a matemática do mundo real por meios de modelos matemáticos, você encontrará soluções extremamente próximas a problemas reais, que ocorrem verdadeiramente no seu dia a dia. E isso você observará ao lidar com as equações diferenciais de 1ª ordem e com as equações diferenciais lineares de ordem superior.

Você deve estar se perguntando: para que servem as EDOs, não é mesmo? Pois bem, com as EDOs podemos tratar diversos fatores sociais e também econômicos, como os estudos populacionais, por meio do crescimento e decrescimento populacional, a propagação de doenças e a variação do número de pessoas infectadas, queda livre, aquecimento e resfriamento, além de poder também aprender a lidar com assuntos relacionados a finanças, variação de preços de mercado, moedas etc.

Figura 3.1 | Tóquio: Em 2014 foi o 19º ano consecutivo de crescimento populacional.

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/T%C3%B3quio#/media/File:Tokyo_from_the_top_of_the_SkyTree.JPG>. Acesso em: 16 abr. 2016.

Dessa forma, suponha que você possui uma empresa de consultoria em soluções matemáticas. A fim de sempre estar conquistando novos clientes, você, então, fará um treinamento com toda a sua equipe para tratar as demandas solicitadas com melhor qualidade. Você também vai trabalhar com modelos matemáticos representados pelas EDOs para cálculos de aplicações em conta poupança, resfriamento de caldeira na fundição de peças e na determinação de uma solução específica na fabricação de molas. Vamos lá?

Seção 3.1

Definição de EDOs

Diálogo aberto

Çengel e Palm III (2014) enfatizam a importância de conhecer problemas que são encontrados em vários campos das ciências e da engenharia, cujas formulações originam equações diferenciais e cujas soluções dependem da solução dessas equações. Dessa forma, podemos completar, ainda, que uma solução de uma equação diferencial é uma função que, juntamente com as suas derivadas, contempla uma igualdade.

Nesta situação-problema, você terá como tarefa desenvolver um treinamento dentro da sua própria empresa, a fim de deixar todos os funcionários familiarizados com os conteúdos sobre equações diferenciais ordinárias, com o propósito de atender a todas as demandas de tarefas eficientemente. O plano inicial é levantar dúvidas e criar um material que tenha uma sequência de conteúdos para que todos possam ter uma aprendizagem ativa e uma atualização significativa. Dessa forma, a primeira situação a ser resolvida pela sua equipe nesse treinamento é verificar se a função $y = e^{3x}$ pode ser considerada solução da EDO $y' - y = 2e^{3x}$.

Após resolver esse problema, solicite a voluntariedade de algum integrante em expor a resolução para toda a equipe, aproveitando a oportunidade para solicitar também que ele ou algum outro membro verifique se a função $y = x^4$ também pode ser considerada uma solução para a equação diferencial ordinária dada.

Para finalizar, como você resolveria esses problemas para que a sua equipe pudesse verificar se os conhecimentos de todos sobre o conteúdo estão corretos ou se o que aprenderem está correto, podendo ser utilizados em situações a serem tratadas com os seus clientes?

Não pode faltar

Conceitos Básicos

Assim como diversos conteúdos pertencentes ao universo da matemática, para que você possa desenvolver a sua aprendizagem sobre as equações diferenciais ordinárias, faz-se necessária a utilização de alguns conceitos que já foram aprendidos anteriormente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Entre eles, citamos as integrais e as derivadas. Sobre as integrais, você teve a oportunidade de rever e aprender conceitos fundamentais nas unidades anteriores. Caso algum detalhe não tenha ficado claro, recomendamos uma leitura desses materiais. Sobre as derivadas, destacamos uma propriedade muito importante que com certeza será muito utilizada por você nesta unidade: a **regra da cadeia**, que trata o cálculo de derivadas sobre funções compostas.

Assimile

Regra da Cadeia. Segundo Stewart (2013, p. 180), se f e g forem diferenciáveis e $F = f \circ g$ for a função composta definida por $F(x) = f(g(x))$, então F é diferenciável e F' é dada pelo produto:

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Para que você relembre esses e todos os conteúdos da unidade curricular e tenha uma aprendizagem efetiva sobre eles, sugerimos sempre a consulta nos diferentes livros que temos disponíveis em nossa Biblioteca Digital.

Exemplificando

Encontre $F'(x)$ se $F(x) = (5x^2 - 2)^{150}$

Resolução:

Como estamos trabalhando com uma função composta, escrevemos $g(x) = 5x^2 - 2$ e $f(g) = g^{150}$

Derivando essas funções separadamente, temos:

$$f = g^{150} \quad \Rightarrow \quad f' = 150 \cdot g^{149}$$

Substituindo g para $5x^2-2$, concluímos que $f'=150\left(5x^2-2\right)^{149}$

$$g=5x^2-2 \quad \Rightarrow \quad g'=10x$$

Fazemos, então, a substituição da fórmula da regra da cadeia:

$$F'(x)=f'\left(g(x)\right)g'(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x)=150\cdot\left(5x^2-2\right)^{149}\cdot 10x$$

E concluímos que $F'(x)=1500x\left(5x^2-2\right)^{149}$

Faça você mesmo

Encontre $y'(x)$ se $y(x)=sen\left(x^2\right)$

Equações diferenciais ordinárias

Uma equação diferencial ordinária é aquela em que estão envolvidas a função e suas derivadas; além disso, a incógnita a ser obtida é a própria função.

Observe a Tabela 3.1 e veja os tipos de equações e o tratamento dado a cada uma delas.

Tabela 3.1 | Tipos de equações

Tipo de equação	Exemplo	O que é a incógnita	O que é resolver este tipo de equação
Algébrica	$3x+5=7$ $3x^2-5x+2=0$	É um número	Determinar o número "x" que satisfaz a equação algébrica.
Matricial	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	É uma matriz	Determinar a matriz que satisfaz a equação matricial.
Diferencial	$\dfrac{4df}{dx}=5$	É uma função	Determinar a função que satisfaz a equação diferencial.

Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

Uma equação diferencial ordinária pode ser descrita por $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ que envolve uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas ($y^{(n)}$ representa a derivada de ordem *n* da função *y*), sendo *x* a variável independente e *y* a variável dependente.

Exemplos de equações diferenciais ordinárias (em todos eles a função *y*(*x*) é a incógnita):

a) $y' - 5y = 1$

b) $y'' + 4(x-3)y' - 3(x^5 - 2x)y = 8sen(x)$

c) $xy''' + 11\cos(x)y' + 2\ln(x)y = x^3 + \sqrt{x-3}$

Observe que, nos exemplos anteriores, o que caracteriza a equação diferencial ordinária é haver uma equação na qual comparecem as derivadas de uma função desconhecida (denotada por *y* nos três exemplos).

Reflita

Observe alguns exemplos de equações diferenciais ordinárias e perceba que eles apresentam apenas uma variável independente.

a) $h'(x) = 5sen(x) + 3x$

b) $f'(x) = 7f(x)$

E se as equações tivessem duas variáveis independentes, como seriam chamadas? Pesquise sobre isso.

Algumas equações diferenciais como modelos matemáticos:

Tabela 3.2 | Modelos matemáticos

$A = A_0 e^{rt}$	Taxas de capitalização
$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$	Decaimento radioativo
$N = \dfrac{\gamma}{\beta}$	Epidemiologia

$\rho A \frac{dh}{dt} = pq_{vi} - k\sqrt{pgh}$	**Fluxo através de um orifício**

Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Verifique se a função $y = x^2$ é uma solução da equação diferencial

ordinária $\frac{dy}{dx} - 2x = 0$

Resolução:

1º – Derivamos a função $y = x^2$ em relação a *x*.

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

2º – Substituímos a derivada da função na equação diferencial ordinária dada no exemplo.

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 2x = 0$$

Portanto, verificamos que a função $y = x^2$ é uma solução para a equação diferencial ordinária dada.

Faça você mesmo

Dada a equação diferencial ordinária $y' - 3y = 0$, verifique se as funções $y = Ce^{3x}$ e $y = C\cos x$, em que *C* é uma constante real, são soluções gerais dessa equação.

Exemplificando

Um reator nuclear converte Urânio – 238 no isótopo instável Plutônio – 239. Após 15 anos, é determinado que 0,043% da massa inicial do Plutônio desintegrou-se. Determine a meia-vida desse isótopo, sabendo que a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente.

Resolução:

Da equação diferencial, para calcularmos o decaimento radioativo $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$, temos:

- $Q(t)$ é a massa total.
- Q_0 é a massa inicial.
- k é a constante de proporcionalidade.
- t é o tempo.

Em 15 anos, é determinada uma perda de 0,043% da massa inicial. Então:

$$Q(t) = Q_0 - \left(\frac{0,043}{100}\right) \cdot Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(t) = 0,99957 Q_0$$

Substituindo $Q(t) = 0,99957 Q_0$ e t = 15, encontramos o valor de k:

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad 0,99957 Q_0 = Q_0 e^{-k \cdot 15} \quad \Rightarrow \quad \ln 0,99957 = -15k$$

$$k = 0,000028667$$

Portanto $Q(t) = Q_0 e^{-0,000028667 \cdot t}$

Determinamos, então, a meia-vida: $Q\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{Q_0}{2}$. Utilizando essa igualdade

em $Q(t) = Q_0 e^{-0,000028667 \cdot t_{\left(\frac{1}{2}\right)}}$, temos:

$$Q_0 e^{-0,000028667 \cdot t_{\left(\frac{1}{2}\right)}} = \frac{Q_0}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{-0,000028667 \cdot t_{\left(\frac{1}{2}\right)}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -0,000028667 t_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \ln \frac{1}{2}$$

$$t_{\left(\frac{1}{2}\right)} \cong 24,18 \text{ mil anos.}$$

Vocabulário

Meia-vida ou período de semidesintegração: é a grandeza que mede a diminuição que as amostras radioativas de diferentes elementos sofrem com o passar do tempo. Pode ser representada por P ou $t_{\left(\frac{1}{2}\right)}$

Faça você mesmo

O decaimento do isótopo radioativo plutônio 241 satisfaz a equação diferencial $Q(t) = -0{,}0525Q_0$. Determine a meia-vida dessa substância.

Até aqui apenas verificamos se uma dada função é solução de uma EDO, utilizando como recurso a derivada. No entanto, se não tivermos essa função, será que existe um procedimento matemático para resolver uma equação diferencial ordinária? Em casos particulares, sim. Para eles podemos encontrar uma função $y = f(x)$ que satisfaça a igualdade $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$.

Existem casos em que a solução da EDO pode ser obtida por integração direta, a exemplo da equação $y' = 3x + 2$. Veja:

$$y = \int y'dx \quad \Rightarrow \quad y = \int (3x+2)dx = \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

Exemplificando

Obtenha a solução da equação diferencial $2y' = e^{2x}$

Resolução:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

$$y = \frac{1}{2}\int e^u \cdot \left(\frac{1}{2}\right)du \quad \Rightarrow \quad y = \frac{e^u}{4} + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Rascunho:

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$u = 2x$$

$$du = 2dx$$

$$dx = \frac{1}{2}du$$

Logo, $y = \dfrac{e^{2x}}{4} + C$ é solução de $2y' = e^{2x}$

Faça você mesmo

Obtenha a solução para as seguintes equações diferenciais.

a) $y' = \cos x$

b) $y' = \dfrac{1}{x}$

Atenção

A expressão $y = \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$ representa uma **família infinita de soluções** para a equação $y' = 3x + 2$, pois para cada $C \in$ temos uma **solução particular.**

Segundo Çengel e Palm III (2014, p. 18, grifos no original):

> Qualquer função que satisfaça uma equação diferencial em um intervalo é chamada de solução da equação diferencial. Uma solução que possui uma ou mais constantes arbitrárias representa uma família de funções que satisfazem a equação diferencial e é chamada de solução geral da equação. Uma solução geral poderá ainda ser classificada como solução completa, se todas as soluções da equação diferencial forem obtidas desta. Uma solução obtida a partir da solução geral, por meio da atribuição de valores particulares para as constantes arbitrárias, é denominada solução particular ou solução especifica.

Podemos agora falar sobre problemas de valores iniciais (PVIs) e problemas de valores de contorno (PVCs).

Problemas de valores iniciais e de valores de contorno

Bronson e Costa (2008, p. 16, grifos nossos), trazem em sua obra que:

Uma equação diferencial juntamente com condições auxiliares sobre a função incógnita e suas derivadas (todas especificadas para o mesmo valor inicial da variável independente), constituem um <u>problema de valor inicial</u>, onde as condições auxiliares são condições iniciais.

Por exemplo, dada a equação diferencial ordinária $y' + y = e^x$, com um valor determinado para $y(\pi) = 3$, temos uma condição auxiliar especificada para $x = \pi$. A essa condição nomeamos **condição inicial**. Os autores contemplam ainda que "se as condições auxiliares são especificadas para mais de um valor da variável independente, temos um **problema de valores de contorno** e as condições são condições de contorno" (BRONSON; COSTA, 2008, p. 16, grifos nossos). E, nesse caso, podemos ter como exemplo a EDO $y' + 5y = Ce^x$, com valores determinados para $y(0) = 2$ e $y(1) = 3$, em que as condições auxiliares são especificadas para valores diferentes $x = 0$ e $x = 1$. A essas condições nomeamos **condições de contorno**.

Assimile

Uma função $y = f(x)$ será uma solução de um problema de valor inicial ou de contorno se simultaneamente satisfazer todas as condições auxiliares especificadas e resolver a EDO.

Exemplificando

Verifique se $y(x) = Ce^{-x}$ satisfaz a equação diferencial ordinária $\frac{dy}{dx} + y = 0$ e determine o valor da constante C de modo que a função

dada satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

Resolução:

Observe que, sem a informação da condição inicial, não poderíamos determinar a solução particular. Teríamos uma família infinita de soluções.

É justamente a condição inicial que permite a identificação para encontrarmos "aquela" solução específica para a EDO.

Dessa forma, derivamos a função dada, lembrando que, em funções compostas, utilizamos a regra da cadeia.

$$\frac{dy}{dx} = Ce^{-x}(-1) = -Ce^{-x}$$

Fazemos em seguida a substituição na EDO dada:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad -Ce^{-x} + Ce^{-x} = 0$$

E concluímos que a função $y(x) = Ce^{-x}$ é solução geral da equação

diferencial ordinária $\frac{dy}{dx} + y = 0$

Encontramos o valor da constante substituindo a condição inicial para $x = 0$ e $y = 2$ na função dada.

$$y(x) = Ce^{-x} \quad \Rightarrow \quad 2 = Ce^{-0} \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

Portanto, a função $y = 2e^{-x}$ é solução particular da EDO $\frac{dy}{dx} + y = 0$ para a condição inicial $y(0) = 2$.

Exemplificando

Obtenha a solução da equação diferencial $y' = \frac{x+1}{x^5}$ e encontre uma

solução particular para a condição inicial $y(1) = 0$.

Resolução:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x^5} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{x+1}{x^5} \right) dx \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-4} + C$$

Fazendo a substituição para $x = 1$ e $y = 0$, temos:

$$0 = -\frac{1}{3}(1)^{-3} - \frac{1}{4}(1)^{-4} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{7}{12}$$

Portanto a solução particular é $y = -\frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-4} + \frac{7}{12}$.

Faça você mesmo

Obtenha a solução da equação diferencial $y' = sen\left(\frac{3x}{2}\right)$ e encontre uma solução particular para a condição inicial $y(0) = 1$

Exemplificando

A velocidade de certo móvel é dada pela função $v(t) = 3t^2 - 20t + 36$, em que t é dado em segundos. Determine a função posição $S(t)$ desse movimento sabendo que, no tempo *2 segundos*, o móvel se encontra na posição *47 metros*.

Resolução:

Temos que:

$$\begin{cases} t = 2s \\ S = 47m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S(2) = 47$$

A velocidade é a taxa de variação da posição em relação ao tempo e, assim, pode ser expressa pela EDO $\frac{dS}{dt} = v(t)$

Da função $v(t) = 3t^2 - 20t + 36$, temos:

$$\frac{dS}{dt} = 3t^2 - 20t + 36 \qquad S = \int (3t^2 - 20t + 36)dt$$

$$S = \frac{3t^3}{3} - \frac{20t^2}{2} + 36t + C \qquad S = t^3 - 10t^2 + 36t + C$$

Em $t = 2$ e $S = 47$, temos:

$$S = t^3 - 10t^2 + 36t + C \quad \Rightarrow \quad 47 = (2)^3 - 10(2)^2 + 36(2) + C \quad \Rightarrow \quad C = 7$$

Concluímos que a função procurada é $S = t^3 - 10t^2 + 36t + 7$

Faça você mesmo

A função $v(t) = 4t - 4$, em que t é dado em segundos, representa a velocidade de certo móvel. Determine a função posição $S(t)$ desse movimento sabendo que no tempo *3 segundos* o móvel se encontra na posição *15 metros*.

Pesquise mais

BRONSON, Richard; COSTA Gabriel. **Equações diferenciais**. Tradução Fernando Henrique Silveira. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788577802982/pageid/14>. Acesso em: 19 abr. 2016.

Sem medo de errar

De acordo com o problema apontado no início da seção, foi apresentada a proposta de se desenvolver um treinamento para a equipe que trabalha com você na sua empresa de consultoria em soluções matemáticas, cujo objetivo é aperfeiçoar as capacidades dos integrantes, a fim de melhorar as atividades a serem realizadas diretamente com os clientes. Diante disso, foram dadas duas funções $y = e^{3x}$ e $y = x^4$, com base nas quais a tarefa era verificar se ambas eram soluções da equação diferencial ordinária $y' - y = 2e^{3x}$. A partir disso, e com os conhecimentos aprendidos sobre os conceitos, é preciso proceder da seguinte forma:

Deriva-se a função $y = e^{3x}$ em relação à x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{3x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot (3x)' \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$$

Substitui-se na EDO dada:

$$y' - y = 2e^{3x} \quad \Rightarrow \quad 3e^{3x} - e^{3x} = 2e^{3x} \quad \Rightarrow \quad 2e^{3x} = 2e^{3x}$$

E conclui-se aqui que a função $y = e^{3x}$ é solução da equação diferencial ordinária $y' - y = 2e^{3x}$

Deriva-se a função $y = x^4$ em relação a x

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$

Fazemos a substituição na equação diferencial ordinária dada:

$$4x^3 - x^4 \neq 2e^{3x}$$

E, neste caso, concluímos que a função $y = x^4$ não é solução da EDO $y' - y = 2e^{3x}$

Lembre-se

Ao lidarmos com derivadas de funções compostas, aplicamos a regra da cadeia.

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Solucionando um problema de valor inicial	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar a definição de equações diferenciais ordinárias em situações do cotidiano, verificando as funções do tipo $y = f(x)$ como solução geral de uma EDO, a partir de um valor inicial dado.
3. Conteúdos relacionados	Derivadas, regra da cadeia, equações diferenciais ordinárias, problemas de valores iniciais.
4. Descrição da situação-problema	A sua empresa de consultoria em soluções matemáticas está ganhando mercado, e, com isso, novos trabalhos estão aparecendo. Uma instituição financeira está interessada em contratá-la para uma capacitação dos seus novos funcionários. Para isso, ela precisa saber as aptidões da contratada, a fim de firmar esse contrato sem arrependimentos. Dessa forma, mandaram para o seu e-mail alguns requisitos necessários para que vocês pudessem de forma positiva acertar esse acordo. E, uma vez que uma das fases do treinamento é melhorar as capacidades dos seus novos funcionários em otimizar tarefas pelas equações diferenciais ordinárias, como forma de testar o seu conhecimento, mandaram anexo um problema com o seguinte enunciado: "Verifique se a função $y = Ce^{0,5x} - 2$ é solução da EDO $y' - 0,5y = 1$ e determine o valor da constante C de modo que a função dada satisfaça a condição inicial $y(0) = 2,5$". Você seria capaz de devolvê-lo resolvido?

5. Resolução da situação-problema	A função dada é composta. Como precisaremos derivá-la utilizando a regra da cadeia, dessa forma, fazemos: $$y = Ce^{0,5x} - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0,5Ce^{0,5x}$$ Em seguida, fazemos a substituição na EDO: $$y' - 0,5y = 0,5Ce^{0,5x} - 0,5\left(Ce^{0,5x} - 2\right) = 0,5Ce^{0,5x} - 0,5Ce^{0,5x} + 1 = 1$$ Concluímos então que a função dada satisfaz a equação diferencial ordinária. Para determinar o valor da constante, substituem-se nela os valores da condição inicial, $x = 0$ e $y = 2,5$. $$y = Ce^{0,5x} - 2 \quad \Rightarrow \quad 2,5 = Ce^{0,5 \cdot 0} - 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2,5 + 2 \quad \Rightarrow \quad C = 4,5$$ Portanto, a função $y = 4,5e^{0,5x} - 2$ é solução da EDO $y' - 0,5y = 1$ para a condição inicial $y(0) = 2,5$.

Faça você mesmo

Verifique se a função dada é uma solução da equação diferencial ordinária e determine o valor da constante C de forma a satisfazer a condição inicial.

$$xy' = 2y \quad ; \quad y = Cx^2 \quad ; \quad y(2) = 12$$

Faça valer a pena

1. Dada a equação diferencial ordinária $y' = y$, assinale a alternativa que contém CORRETAMENTE uma de suas soluções.

a) $y = e^x$

b) $y = -e^x - 3$

c) $y = e^{-x}$

d) $y = -e^{-x}$

e) $y = e^{2x}$

2. Qual das alternativas a seguir contém a função que é dada como a solução para a equação diferencial ordinária $\dfrac{dy}{dx} = y + 5$?

a) $y = Ce^x + 5$

b) $y = -Ce^{-x} - 5$

c) $y = -Ce^x + 5$

d) $y = \frac{1}{5}e^x - 5$

e) $y = Ce^x$

3. Obtenha a solução da equação diferencial $y' = (2x-1)^5$ e, então, assinale a alternativa que apresenta CORRETAMENTE a solução particular para a condição inicial $y(1) = 2$.

a) $y = \frac{(2x+1)^6}{12} - \frac{23}{12}$

b) $y = \frac{(2x-1)^6}{12} + \frac{23}{12}$

c) $y = (2x-1)^6 - \frac{12}{23}$

d) $y = (2x-1)^6 + \frac{23}{12}$

e) $y = (2x-1)^6 + \frac{12}{23}$

Seção 3.2

Classificação de EDOs

Diálogo aberto

Prezado aluno, nesta seção você tratará mais algumas tarefas utilizando as equações diferenciais ordinárias, dando, assim, continuidade ao aperfeiçoamento dos funcionários que compõem a sua equipe, tal como suposto na seção anterior. Além disso, você será incumbido, no contexto da consultoria em soluções matemáticas, de trabalhar com modelos matemáticos, a fim de a empresa ter instrumentos para efetuar previsões de recursos necessários para atender as demandas de todos os seus clientes.

Dessa forma, para esta seção, a tarefa foi dividida em duas etapas:

Etapa 1: trabalhar com a sua equipe o conceito de classificação das equações diferenciais ordinárias. Para isso, em determinado momento do treinamento, os funcionários que trabalham com você terão que se dividir em dois grupos e, colocando em prática os seus conhecimentos sobre o conteúdo abordado, deverão classificar as seguintes equações: $a\dfrac{d^2x}{dt^2}+y\dfrac{dx}{dt}+kx=F\cos(bt)$; $\dfrac{d^4y}{dw^4}+\dfrac{d^3y}{dw^3}+\dfrac{d^2y}{dw^2}+\dfrac{dy}{dw}+y=3$; que em seguida terão a correção feita por você.

Etapa 2: além disso, a empresa de produção de artefatos para festas propôs a você e à sua empresa determinar a função do custo total em suas operações. Sabe-se que o custo marginal é dado pela função $C'(x)=0{,}08x^3+0{,}09x^2+0{,}1x+3$ e que o seu custo fixo é de R$ 4.000,00.

Quando se fala de economia, a aprendizagem fica interessante, não é mesmo? Agora é com você.

Reflita

Como você resolveria essas duas situações, com o objetivo de agregar a seus conhecimentos saberes que poderão ser usados em toda sua trajetória profissional?

Não pode faltar

Ao tratarmos as equações diferenciais, procuramos encontrar soluções efetivas ou próximas para uma problematização. Por isso mencionamos na seção anterior que as EDOs nos fornecem modelos matemáticos muitos próximos de situações aplicadas à realidade. Elas podem ser classificadas quanto ao tipo, à ordem e à linearidade.

Tipo

Nas **equações diferenciais ordinárias** (**EDOs**), as derivadas presentes são ordinárias, ou seja, as suas funções incógnitas são de apenas uma variável independente. Se as derivadas que aparecem nas equações são parciais ou ainda com mais de uma variável independente, classificamos essas equações como **equações diferenciais parciais** (**EDPs**).

Assimile

Na equação $F\left(x, y, y', y'', \ldots\right) = 0$, y é função apenas de x, ou seja, há apenas uma variável independente. Dessa forma, vê-se uma EDO. Na equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, há mais de uma variável independente, caracterizando uma EDP.

No decorrer desta unidade curricular nos limitaremos aos estudos das EDOs.

Ordem de uma EDO

A ordem de uma equação diferencial ordinária é determinada pela maior derivada que aparece nela. Ou seja, para derivada primeira, há uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem; para derivada segunda, há uma EDO de 2ª ordem, e assim por diante.

Assimile

Uma equação diferencial ordinária, que pode ser escrita por $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$, é denominada equação diferencial de ordem n.

Exemplificando

$\frac{dy}{dx} = 3x + 1$, em que $y = y(x)$, é uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem.

$m\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(wt)$, em que $x = x(t)$, $y = y(t)$ e m, w e F_0 são constantes, é uma EDO de 2ª ordem.

$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4$, em que $y = y(t)$, é uma equação diferencial ordinária de 3ª ordem.

$\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$, em que $y = y(t)$, é uma EDO de 4ª ordem.

Exemplificando

Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 2$, classifique-a de acordo

com a sua ordem e determine a sua solução $f(x)$ conforme condição auxiliar $f(1) = 5$

Solução:

Na equação dada, a derivada é primeira, caracterizando-se como uma equação de 1ª ordem. Fazendo a resolução sobre a condição dada, temos:

$f(x) = \int f'(x)dx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 9x^2 - 4x + 2 \quad \Rightarrow$

$f(x) = \int \left(9x^2 - 4x + 2\right)dx$

$\Rightarrow f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 2x + C$

Para $x = 1$ e $f(x) = 5$ temos:

$$5 = 3 \cdot (1)^3 - 2 \cdot (1)^2 + 2 \cdot (1) + C \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

E, assim, temos $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2$

Faça você mesmo

1. Classifique as equações a seguir de acordo com a suas respectivas ordens.

a) $(y'')^4 + 2y' + 5y = sen(x)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = x + 1$

c) $y''''' + 2e^t y'''' + yy''' + \dfrac{y''}{2} + 3y' + y = t^6$

2. Dadas às equações diferenciais, determine a sua solução $f(x)$ conforme condições auxiliares propostas.

a) $f''(x) = 3x^2 - 2x + 1$; $f'(1) = 3$ e $f(0) = 2$

b) $f''(x) = 6x - 4$; $f'(2) = 5$ e $f(2) = 4$

Equações lineares e não lineares

Segundo Çengel e Palm III (2014, p. 16, grifos no original): "Uma equação diferencial será chamada de **linear** se (1) a variável dependente e suas derivadas possuírem grau um e (2) seus coeficientes dependerem apenas da variável independente". Os autores completam ainda que "uma equação diferencial linear de ordem n pode ser expressa, de forma geral, como $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + ... + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = R(x)$".

Chamamos as equações diferenciais ordinárias, que não podem ser estabelecidas dessa forma, de não lineares.

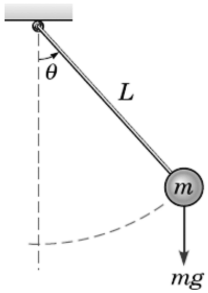
Exemplificando

As equações que tratam situações de queda livre, $m\frac{dv}{dt} = mg - yu$ e

crescimento populacional $\frac{dp}{dt} = rp$ são exemplos de equações lineares.

A equação que representa a oscilação de um pêndulo $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}sen\theta = 0$ é não linear.

Figura 3.2 | Pêndulo oscilando



Fonte: Brannan e Boyce (2013, p. 31).

Faça você mesmo

Identifique se as equações diferenciais a seguir são lineares ou não lineares, determinando também a sua ordem.

a) $w^2 + \frac{d^2y}{dw^2} + w\frac{dy}{dw} + 2y = sen(w)$

b) $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$

c) $(1 + a^3)\frac{d^3y}{dt^3} + a^2\frac{d^2y}{dt^2} + x\frac{dy}{dt} + y = 1$

d) $t^5y' - y = 0$

Faça você mesmo

Dadas as equações diferenciais ordinárias, verifique se a função em questão é solução da EDO.

a) $xy' - y = x^2 \;;\; y = 3x + x^2$

b) $\dfrac{dy}{dy} - 5y = 0 \;;\; y = Ce^{5x}$

c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 0 \;;\; y = \dfrac{c}{x}$

Pesquise mais

Para uma aprendizagem mais efetiva, pesquise no material indicado a seguir o item 1.4 do Capítulo 1, que retrata a classificação das equações diferencias.

BRANNAN, James R.; BOYCE, William E. **Equações diferenciais**: uma introdução a métodos modernos e suas aplicações. Rio de Janeiro:LTC, 2013. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2337-3/pageid/50>. Acesso em: 14 jun. 2016.

Sem medo de errar

Você foi encarregado de resolver duas situações que envolvem a aprendizagem sobre as equações diferenciais ordinárias, destinadas à continuidade do treinamento para melhorar a aptidão da sua equipe no tratamento com as tarefas demandadas pelos seus clientes e também para tratar um modelo matemático, tendo em vista os conceitos de equações diferenciais em problematizações de custos totais.

Na primeira tarefa a ser realizada, depois de seus funcionários terem classificado algumas equações, você deveria fazer a correção delas. Sendo assim:

- Na equação $a\dfrac{d^2x}{dt^2} + y\dfrac{dx}{dt} + kx = F\cos(bt)$, as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma, em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas. E a sua maior derivada é uma derivada de segunda ordem. Dessa forma, trata-se de uma equação diferencial ordinária, linear de 2ª ordem.

- A equação $\frac{d^4y}{dw^4}+\frac{d^3y}{dw^3}+\frac{d^2y}{dw^2}+\frac{dy}{dw}+y=3$ tem como derivada maior a quarta derivada; além disso, assim como a equação anterior, as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação. Sendo assim, a equação diferencial dada é ordinária, linear de 4ª ordem.

Lembre-se

A ordem de uma equação diferencial é determinada pela maior derivada que nela aparece.

Na segunda tarefa, será preciso determinar o custo total $C(x)$, cuja derivada é o custo marginal $C'(x)$. Nesse sentido, para encontrarmos o custo total, fazemos a integral indefinida da função dada, visto que o custo marginal é $C'(x)=0,08x^3+0,09x^2+0,1x+3$. E, assim, temos:

$$C(x)=\int\left(0,08x^3+0,09x^2+0,1x+3\right)dx \quad \Rightarrow \quad C(x)=\frac{0,08}{4}x^4+\frac{0,09}{3}x^3+\frac{0,1}{2}x^2+3x+k$$

$$C(x)=0,02x^4+0,03x^3+0,05x^2+3x+k$$

Quando não houver produção, ou seja, quando $x = 0$, o custo fixo será de R$ 4.000,00. Sendo assim, fazendo a substituição em $C(x)=0,02x^4+0,03x^3+0,05x^2+3x+k$, temos:

$$4000=0,02(0)^4+0,03(0)^3+0,05(0)^2+3(0)+k \quad \Rightarrow \quad k=4000$$

Portanto, a função do custo total é $C(x)=0,02x^4+0,03x^3+0,05x^2+3x+4000$.

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Função Posição	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Utilizar as EDOs como modelos matemáticos em aplicações nas diversas situações do cotidiano, nas ciências e engenharias, a fim de se obter uma resolução bem aproximada das problematizações contextualizadas na realidade.
3. Conteúdos relacionados	Ordem, tipo e linearidade das equações diferenciais.
4. Descrição da situação-problema	A sua consultoria em soluções matemáticas está trabalhando em parceria com uma empresa especializada em tratar o desempenho de velocidade em diversos objetos. Coube a você inicialmente verificar se a função posição $S(t)=t^4-2t^3+5t^2+2t+C$ é solução da equação diferencial da função velocidade dada por $v(t)=4t^3-6t^2+10t+2$. Em caso afirmativo, determine uma solução única para posição de acordo com a condição $S(1)=65$.
5. Resolução da situação-problema	Pela derivada da função posição, temos: $$v(t)=\frac{dS}{dt}=4t^3-6t^2+10t+2$$ Com base nisso, podemos concluir que essa é a solução para a EDO que representa a velocidade. Para determinar a solução única de acordo com a condição $S(1)=65$, fazemos a substituição em $S(t)=t^4-2t^3+5t^2+2t+C$. $$65=1^4-2(1)^3+5(1)^2+2(1)+C$$ $$C=59.$$ E, assim, conclui-se que, para a condição dada, a solução única procurada é $S(t)=t^4-2t^3+5t^2+2t+59$.

Faça valer a pena

1. Indique V para cada uma das afirmações que julgar verdadeiras e F para a(s) que julgar falsa(s).

Podemos definir equação diferencial como uma equação que apresenta derivadas ou diferenciais de uma função desconhecida (a incógnita da equação). Sobre essas equações, é possível dizer:

I. (   ) Uma equação diferencial ordinária envolve derivadas de uma função de uma só variável independente.

II. (   ) Uma equação diferencial parcial envolve derivadas parciais de uma função de uma só variável independente.

III. (   ) A ordem de uma equação diferencial ordinária é determinada pela maior derivada que nela aparece.

IV. ( ) A equação diferencial ordinária $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}sen\theta=0$, que representa a oscilação de um pêndulo, é uma EDO linear.

Agora assinale a alternativa que contêm a sequência correta de valores lógicos V e F, de cima para baixo:
a) V, V, V, V.
b) F, V, F, V.
c) V, F, V, F.
d) V, V, F, F.
e) F, F, V, F.

2. Analise as equações diferenciais e as afirmativas na sequência.

Equação 1	$(3y'''')^5+y'''+5y''+\frac{y'}{2}+y=0$
Equação 2	$\frac{dy}{dx}=x^2+1$
Equação 3	$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y^2=0$
Equação 4	$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=sen(x)$

I. A Equação 1 é uma equação diferencial ordinária linear de ordem 5.
II. A Equação 2 é uma EDO de 2ª ordem.
III. A Equação diferencial 3 é não linear em razão do termo y^2.
IV. A Equação 4 é uma equação diferencial parcial de 3ª ordem.

Com base nas afirmações dadas, é CORRETO afirmar que:
a) Apenas II está correta.
b) Apenas III está correta.
c) Apenas II e III estão corretas.
d) Apenas II, III e IV estão corretas.
e) Todas elas estão corretas.

3. Dada à equação diferencial ordinária $(x+3y)-xy'=0$, verifique se a função $y=Cx^3-\frac{x}{2}$ é uma solução geral e assinale a alternativa que contém a resposta CORRETA.

a) A função não é uma solução geral da EDO dada, que possui ordem 1.

b) A função é uma solução geral da EDO dada, que possui ordem 1.

c) A função é uma solução geral da EDO dada, que é uma equação não linear.

d) A função é uma solução geral da EDO dada, que possui ordem 2.

e) A função não é uma solução geral da EDO dada, que é uma equação linear.

Seção 3.3

EDOs de 1ª ordem

Diálogo aberto

Em continuidade ao trabalho de aperfeiçoamento dos membros da equipe de sua consultoria em soluções matemáticas, eles terão, como tarefa, que resolver alguns exercícios sobre equações diferenciais ordinárias, que, após serem feitos, deverão ser corrigidos por você. A solução, então, deverá ser apresentada a todos, para esclarecer as dúvidas, de forma que os integrantes da equipe se tornem aptos a tratar as variadas situações que aparecerão como trabalho a ser realizado pela empresa. Dessa forma, entre as tarefas direcionadas ao treinamento, eles terão de determinar a solução das seguintes EDOs:

a) $$\frac{dy}{dx} - 3x^2 y = x^2$$

b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

c) $$\left(2xy\right) + \left(1 + x^2\right) y' = 0$$

Outra questão a ser resolvida por você é tratar um modelo que foi encomendado por uma siderúrgica que trabalha com diversos componentes em variadas temperaturas.

A situação é a seguinte: sendo a temperatura do ar 30 °C, ao resfriarmos uma caldeira de 120 °C para 80 °C em 20 minutos, em que momento ela

Figura 3.3 | Caldeira com aço derretido

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Siderurgia#/media/File:Fotothek_df_n-08_0000320.jpg>. Acesso em: 1 jun. 2016.

atingirá uma temperatura de 50 °C?

Como você resolveria essas situações a fim de explaná-las de forma satisfatória aos integrantes da sua empresa?

Não pode faltar

Equações Diferenciais de 1ª Ordem

São equações do tipo $f(x,y,y')=0$, em que o y é a função incógnita. Nessa representação estamos supondo que y seja função de x: $y=y(x)$ e que tais equações diferenciais envolvam apenas derivadas primeiras da função incógnita.

Assimile

- A equação $3y'-5xy^2+1=0$ é uma EDO de 1ª ordem, pois envolve apenas termos em *x, y* e *y'*.
- Na equação $y'=f(x,y)$ temos *y'* escrito na forma explícita em termos de *x* e *y*. Nesse sentido, equações desse tipo podem ser resolvidas por integração.

Exemplificando

Como resolver a EDO $y'=2x^3-3$ de 1ª ordem por integração direta?

Solução:

Temos:

$$y=\int(2x^3-3)dx$$

$$y=\frac{x^4}{2}-3x+C$$, em que C é uma constante.

Qualquer solução geral de uma EDO de 1ª ordem envolverá uma constante (a constante de integração), caso em que, ao determinarmos o seu valor, estaremos tratando um problema de valor inicial, encontrando assim uma solução específica ou particular.

Reflita

Recorde o que você aprendeu na Seção 3.1 e perceba que uma equação diferencial de 1ª ordem associada a condições iniciais forma um problema de valor inicial.

Equações lineares de 1ª ordem

São equações do tipo $y'+P(x)y=Q(x)$, em que *P* e *Q* são funções de *x* contínuas no intervalo de interesse. Temos ainda que, para *P*(*x*) = *0*, a equação anterior se torna apenas $y'=Q(x)$, com solução geral $y=\int Q(x)dx+C$.

Para que consigamos resolver uma EDO linear de 1ª ordem, de maneira que ela seja facilmente integrável, utilizamos uma função auxiliar chamada fator integrante, expresso por $I=e^{\int P(x)dx}$.

Exemplificando

Determine a solução geral da equação diferencial ordinária linear de 1ª ordem $y'-6y=12$.

Solução:

Para encontrarmos o fator integrante, precisamos determinar *P*(*x*). Dessa forma, é preciso comparar a equação dada com a genérica $y'+P(x)y=Q(x)$. Vemos, então, que se trata do termo que está multiplicando *y*. Assim, temos $P(x)=-6$.

Fazemos a substituição em $I=e^{\int P(x)dx}$:

$$I=e^{-6\int dx} \quad \Rightarrow \quad I=e^{-6x}$$

Multiplicamos a EDO dada pelo fator integrante:

$$y'\cdot e^{-6x}+y\cdot e^{-6x}(-6)=12\cdot e^{-6x}$$

Perceba que, ao "montarmos" a multiplicação, podemos observar a derivada de um produto $(f'\cdot g+f\cdot g')=(f\cdot g)'$

Podemos escrever, então, da seguinte forma:

$$\frac{d\left(y\cdot e^{-6x}\right)}{dx}=12\cdot e^{-6x} \quad \Rightarrow \quad d\left(y\cdot e^{-6x}\right)=12\cdot e^{-6x}dx$$

Integramos de ambos os lados:

$$\int d\left(y \cdot e^{-6x}\right) = 12\int e^{-6x} dx$$

$$y \cdot e^{-6x} = -\frac{12}{6}\int e^{-6x}(-6)\,dx$$

$$y \cdot e^{-6x} = -2e^{-6x} + C$$

Rascunho:

$$\int e^{u} du = e^{u} + C$$

$$u = -6x$$
$$du = -6dx$$

$$y = \frac{-2e^{-6x}}{e^{-6x}} + \frac{C}{e^{-6x}} \Rightarrow y = \frac{-2e^{-6x}}{e^{-6x}} + \frac{C}{e^{-6x}} \Rightarrow$$

$$y = -2 + Ce^{6x}$$

Portanto, a solução geral da EDO linear de 1ª ordem é $y = -2 + Ce^{6x}$

Faça você mesmo

Determine a solução geral da equação diferencial ordinária linear de 1ª ordem $x^2 y' - y = 0$.

Pesquise mais

Para uma melhor aprendizagem sobre o fator integrante, consulte o material *Métodos matemáticos 2012*. Disponível em: <www.if.ufrj.br/~pef/aulas_seminarios/notas_de_aula/tort_2012_2/EqsDifparte2.pdf>. Acesso em: 11 maio 2016.

Equações separáveis de 1ª ordem

Dizemos que uma equação ordinária é separável de 1ª ordem quando podemos separar as suas variáveis, obtendo a solução ao integrar os membros de ambos os lados. Observando a equação $h(y)dy = g(x)dx$, de um lado do sinal de igual, o "*x* fica com os seus *dx* e, do outro, o *y* fica com os seus *dy*". Além disso, ao avaliarmos uma integral $y = \int f(x)dx$, resolveremos uma equação diferencial

$$y' = f(x) \text{ ou } \frac{dy}{dx} = f(x)$$

Exemplificando

Resolva a EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ determinando $y(x)$ pelo método separação de variáveis.

Resolução:

Multiplicamos os extremos e os meios a fim de obtermos "*x* e os seus *dx* e *y* com os seus *dy*"

$$xdy = ydx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Integrando de ambos os lados:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$\log_e|y| = \log_e|x| + C$$

$$|y| = e^{\log_e|x|+C} \quad |y| = e^{\log_e|x|} \cdot e^C \quad \Rightarrow \quad |y| = |x| \cdot k \quad \Rightarrow \quad y = k \cdot x$$

Lembre-se

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow x = a^x$$

$$a^{n+m} = a^{n \cdot m}$$

$$e^c = k$$

Faça você mesmo

Resolva a EDO $\frac{dy}{dx} = x^2 y$ determinando $y(x)$ pelo método separação de variáveis.

Equações diferenciais homogêneas de 1ª ordem

EDOs homogêneas são equações diferenciais, tais que $y' = f(x,y)$ com $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$. Ou seja, multiplicando-se cada variável por uma constante, temos de forma equivalente a função multiplicada por uma potência da constante.

Lembramos ainda que a utilização do termo homogêneo aqui é diferente da utilização anterior, quando dissemos que uma EDO linear de primeira ordem $y' + P(x)y = Q(x)$ será homogênea quando $Q(x) = 0$. Dessa forma, a verificação de cada contexto deixará claramente qual dos significados será apropriado.

Assimile

As equações diferenciais homogêneas podem ser expressas por $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, em que a função f também poderá ser escrita com $f(v)$, em que $v = \frac{y}{x} \iff y = vx$.

Exemplificando

Para resolvermos a EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ pelo método das equações

homogêneas, precisamos seguir alguns passos:

1º Verificamos a homogeneidade da equação.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{\lambda x \lambda y} = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 xy} = \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{\lambda^2 xy} = \frac{(x^2 + y^2)}{xy}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$$

É, portanto, homogênea.

2º Dividimos o numerador e o denominador por x de maior grau, nesse caso por x^2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

3º Fazemos $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$

4º Derivamos $y = ux$ e encontramos $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

5º Substituímos $\frac{y}{x}$ por u e $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ na equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

6º Efetuamos a separação das variáveis u e x e integramos de ambos os lados.

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{u} \quad \Rightarrow \quad udu = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int udu = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$$

7º Substituímos u por $\frac{y}{x}$

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2} = \ln|x| + C$$

E concluímos que: $y = x\sqrt{2\ln|x| + C}$

Faça você mesmo

Utilizando o método de equações diferenciais ordinárias homogêneas,

resolva a seguinte equação $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{3x+y}$

Equações diferenciais exatas de 1ª ordem

São EDOs, $y' = f(x,y)$, que podem ser expressas por $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$

Assimile

Uma equação diferencial de 1ª ordem que pode ser expressa da forma $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ será chamada de equação diferencial exata na região *D* se existir função $S(x,y)$, tal que $\frac{\partial S(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ e $\frac{\partial S(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ para todo (x,y) na região (ÇENGEL, PALM III, 2014, p. 76).

De acordo com a definição, temos uma solução geral implícita:

$$F(x,y) = C, \qquad \text{(I)}$$

que envolve as variáveis *x*, *y* e uma constante *C*. Nesse caso, fazendo a diferenciação em relação a *x*, temos:

$$\frac{dF(x,y)}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0 \qquad \text{(II)}$$

Como as derivadas são operações inversas das integrais, se integrarmos a equação (II), chegaremos a equação (I), a qual chamamos de equação diferencial exata.

Assimile

Teorema – Equações diferenciais exatas

Caso as derivadas parciais $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ e $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ sejam contínuas em uma região retangular *D*, então a equação diferencial $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ é exata nessa região se, e somente se, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ em todos os pontos de *D* (ÇENGEL, PALM III, 2014, p. 77).

Exemplificando

Resolva a equação diferencial ordinária de 1ª ordem $(x+sen(y))+(x\cos(y)-2y)y'=0$

Solução:

Rescrevemos a EDO e multiplicamos *dx*:

$$\left(x+sen\left(y\right)\right)+\left(x\cos\left(y\right)-2y\right)\frac{dy}{dx}=0 \qquad \cdot\left(dx\right)$$

$$\left(x+sen\left(y\right)\right)dx+\left(x\cos\left(y\right)-2y\right)dy=0$$

Comparando com a equação genérica da equação diferencial exata de 1ª ordem, temos:

$$M=x+sen\left(y\right) \text{ e } N=x\cos\left(y\right)-2y.$$

Derivando, temos:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos\left(y\right) \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x}=\cos\left(y\right)$$

Dessa forma, verifica-se que a equação diferencial é exata.

Da equação diferencial dada, temos:

$$\frac{\partial F\left(x,y\right)}{\partial x}=x+sen\left(y\right) \text{ e } \frac{\partial F\left(x,y\right)}{\partial y}=x\cos\left(y\right)-2y$$

Fazendo a integração em relação a *x*:

$$F\left(x,y\right)=\int\left(x+sen\left(y\right)\right)dx \qquad \Rightarrow \qquad F\left(x,y\right)=\frac{x^2}{2}+xsen\left(y\right)+h\left(y\right)$$

Derivando a função encontrada em relação a *y*, obtemos:

$$\frac{\partial F\left(x,y\right)}{\partial y}=x\cos\left(y\right)+h'\left(y\right)$$

Vimos anteriormente que $\frac{\partial F\left(x,y\right)}{\partial y}=x\cos\left(y\right)-2y$. Igualando, temos:

$$x\cos\left(y\right)+h'\left(y\right)=x\cos\left(y\right)-2y \qquad \Rightarrow \qquad h'\left(y\right)=-2y$$

Efetuamos essas operações para poder determinar a função $h\left(y\right)$.

Integrando, temos:

$$h\left(y\right)=\int h'\left(y\right)dy \quad \Rightarrow \quad h\left(y\right)=-2\int ydy \quad \Rightarrow$$

$$h(y) = -y^2 + C_1$$

Substituindo em $F(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xsen(y) + h(y)$:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + xsen(y) - y^2 + C_1$$

Mas $F(x,y) = C$. Então:

$$\frac{x^2}{2} + xsen(y) - y^2 + C_1 = C \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} + xsen(y) - y^2 = C - C_1$$

Como constante menos constante é igual a constante, escrevemos $C - C_1 = k$.

Conclui-se, portanto, que a solução geral da equação diferencial ordinária

exata de 1ª ordem é $\dfrac{x^2}{2} + xsen(y) - y^2 = k$

Faça você mesmo

Resolva a equação diferencial ordinária de 1ª ordem $y' = \dfrac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$

Lei de resfriamento de Newton

A lei de temperatura de Newton diz que a taxa de variação da temperatura de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do

corpo e a temperatura ambiente. É expressa por $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - Tm)$, em que:

- T é a temperatura.
- Tm é a temperatura ambiente.
- t é o tempo.

• k é uma constante de proporcionalidade.

Pesquise mais

Para uma aprendizagem mais efetiva, leia o Capítulo 2 do livro:

ÇENGEL, Yunus A.; PALM III, William J. **Equações diferenciais**. Tradução Marco Elisio Marques. Porto Alegre: Bookman, 2014. Também assista aos vídeos:

• "Fatores integrantes". Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=M1D9vKU64d4>. Acesso em: 14 maio 2016.

• "Equações diferenciais ordinárias lineares de ordem 1". Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9eRsQjACM4k>. Acesso em: 14 maio 2016.

Sem medo de errar

Nesta seção, você foi incumbido de dar continuidade ao treinamento de formação da equipe da sua empresa e também tratar um modelo matemático para uma siderúrgica. Nesse contexto, inicialmente você teria de fazer a correção das resoluções feitas por seus funcionários no treinamento das seguintes equações:

a) Equação linear de 1ª ordem: $\dfrac{dy}{dx} - 3x^2y = x^2$.

Resolução:

Determina-se o fator integrante $I = e^{\int P(x)dx}$ a partir de $P(x) = -3x^2$.

$$I = e^{-3\int x^2dx} \quad \Rightarrow \quad I = e^{-x^3}$$

Multiplicamos o fator integrante encontrado com a EDO dada:

$$y' \cdot e^{-x^3} + y \cdot \left(-3x^2\right) \cdot e^{-x^3} = x^2 \cdot e^{-x^3}$$

Escrevemos: $\dfrac{d\left(y \cdot e^{-x^3}\right)}{dx} = x^2 \cdot e^{-x^3} \quad \Rightarrow \quad d\left(y \cdot e^{-x^3}\right) = x^2 \cdot e^{-x^3}dx.$

Integramos de ambos os lados:

$$\int d\left(y \cdot e^{-x^3}\right) = \int x^2 \cdot e^{-x^3} dx \Rightarrow y \cdot e^{-x^3} = \int x^2 \cdot e^{-x^3} dx \Rightarrow y = -\frac{1}{3} + Ce^{x^3}$$

Portanto, a solução geral da EDO linear de 1ª ordem é $y = -\frac{1}{3} + Ce^{x^3}$.

b) Equação homogênea de 1ª ordem: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$.

Resolução:

1. Verificamos a homogeneidade da equação.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x} = \frac{\lambda^2 (x+y)}{\lambda x} = \frac{\lambda (x+y)}{\lambda x} = \lambda f(x,y)$$

É, portanto, homogênea.

2. Dividimos numerador e denominador por *x* de maior grau, neste caso por *x*.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{y}{x}}{\frac{x}{x}} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1} = 1 + \frac{y}{x}$$

3. Fazemos $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$.

4. Derivamos $y = ux$ e encontramos $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$.

5. Substituímos $\frac{y}{x}$ por u e $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ na equação $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$ e chegamos a $u + x\frac{du}{dx} = 1 + u$.

6. Efetuamos a separação das variáveis *u* e *x* e integramos de ambos os lados.

$$\int du = \int \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad u = \ln|x| + C$$

7. Substituímos u por $\frac{y}{x}$.

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C$$

E concluímos que: $y = x\ln|x| + Cx$.

c) Equação diferencial exata de 1ª ordem: $(2xy) + (1 + x^2)y' = 0$.

Reescrevemos a equação $(2xy) + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0$.

Multiplicando a equação anterior por dx fica: $(2xy)dx + (1 + x^2)dy = 0$.

Fazendo a comparação com a equação genérica da equação diferencial exata de 1ª ordem, temos: $M = 2xy$ e $N = 1 + x^2$.

Derivando, temos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Dessa forma, verifica-se que a equação diferencial é exata.

Da equação diferencial dada, temos:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2xy \text{ e } \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 1 + x^2$$

Fazendo a integração em relação a x:

$$F(x,y) = \int (2xy)dx \qquad \Rightarrow \qquad F(x,y) = yx^2 + h(y)$$

Derivando a função encontrada, obtemos:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2 + h'(y)$$

Vimos anteriormente que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 1 + x^2$.

Nesse caso, igualando, temos: $x^2 + h'(y) = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad h'(y) = 1$.

Integrando, temos: $h(y) = \int dy \qquad \Rightarrow \qquad h(y) = y + C_1$.

Substituindo em $F(x,y) = yx^2 + h(y)$:

$$F(x,y) = yx^2 + y + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C = yx^2 + y + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{k}{x^2+1}$$

A outra tarefa era resolver um problema de temperatura através da equação diferencial ordinária $\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm)$, conhecida como lei de resfriamento de Newton.

Do enunciado, vimos que a temperatura ambiente é 30 °C (Tm = 30). Substituímos em:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dT}{dt} = -k(T - 30) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dT}{T-30} = -kdt$$

Fazemos a integração para *t* variando entre 0 e 20 minutos, e *T* de 120 °C para 80 °C $(0 < t < 20 \text{ e } 120 < T < 80)$.

$$\int_{120}^{80} \frac{dT}{T-30} = -k\int_{0}^{20} dt \Rightarrow \ln[T-30]_{120}^{80} = [-kt]_0^{20} \Rightarrow \ln 50 - \ln 90 = -20k$$

$$20k = 0{,}5878 \qquad \Rightarrow \qquad k = 0{,}02939$$

Para determinar o instante em que a temperatura for 50 °C, integramos com *T* variando de 120 °C a 50 °C e *t* variando entre 0 e $t_{máx}$ $(0 < t < t_{máx} \text{ e } 120 < T < 50)$.

$$\int_{120}^{50} \frac{dT}{T-30} = -k\int_{0}^{t_{máx}} dt \Rightarrow \ln[T-30]_{120}^{50} = [-kt]_0^{t_{máx}} \Rightarrow \ln 20 - \ln 90 = -20t_{máx}$$

$$\ln\left(\frac{90}{20}\right) = 0{,}02939t_{máx} \qquad \Rightarrow \qquad t_{máx} \approx 51$$

Portanto, a caldeira atingirá a temperatura de 50 °C em aproximadamente 51 minutos.

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Otimizando a panificação	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar as equações diferenciais de 1ª ordem (lineares, separáveis, homogêneas e exatas) em diversas situações do cotidiano, nas ciências e engenharias, a fim de se obter soluções para problemas próximos a realidade.
3. Conteúdos relacionados	Equações diferenciais lineares e separáveis de 1ª ordem.
4. Descrição da situação-problema	Suponha que a sua empresa foi contratada para dar consultoria em um colégio especializado em cursos profissionalizantes. A tarefa solicitada é trabalhar com um modelo matemático ,para se obter uma melhor qualidade na fabricação de pães e bolos. O objetivo do seu trabalho é fornecer o tempo aproximado em que a temperatura de alguns alimentos feitos em forno torna-se mais baixa. Nesse sentido, qual será o tempo necessário para que a temperatura de um bolo chegue a 40 °C, sabendo que ele foi retirado do forno a 180 °C. Vale lembrar que em dez minutos ele chegou a 110 °C e que a temperatura ambiente é de 25 °C.
5. Resolução da situação-problema	Para resolvermos o problema proposto, temos $t=0$, $T=180$ e $Tm=25$. Substituindo esses valores na equação da variação de temperatura e integrando-a, temos: $\frac{dT}{T-25}=-kdt \Rightarrow \int_{180}^{110}\frac{dT}{T-25}=-k\int_{0}^{10}dt \Rightarrow$ $\ln\left[T-25\right]_{180}^{110}=-\left[kt\right]_{0}^{10} \Rightarrow \ln 85-\ln 155=-10k \Rightarrow k=0{,}060$ Para saber o tempo a partir do qual a temperatura do bolo terá 40 °C, integramos com os seguintes limites $180<T<40$ e $0<t<t_{máx}$. $\int_{180}^{40}\frac{dT}{T-25}=-0{,}060\int_{0}^{t_{máx}}dt \Rightarrow \ln 15-\ln 155=-0{,}060\,t_{máx} \Rightarrow t_{máx}\approx 39$. Concluímos, então, que o bolo atingirá a temperatura de 40 °C em aproximadamente 39 minutos.

Lembre-se

A lei de variação de temperatura de Newton é descrita por:

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - Tm\right)$$

Faça você mesmo

Utilize o mesmo modelo matemático e determine quanto tempo um pão atingirá a temperatura ambiente de 22 °C, sabendo que foi retirado do forno a uma temperatura de 80 °C, e que se passando seis minutos chegou a 47 °C.

Faça valer a pena

1. Verifique se as seguintes equações são homogêneas e depois assinale a alternativa CORRETA.

I) $\frac{dy}{dx} = xy - y^2$

II) $\frac{dy}{dx} = y^2 + x$

III) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy + y^2}$

a) Apenas I é homogênea.
b) Apenas III é homogênea.
c) Apenas I e III são homogêneas.
d) Apenas II e III são homogêneas.
e) Todas são homogêneas.

2. A fórmula $y' + P(x)y = Q(x)$ é utilizada quando efetuamos cálculos de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Dessa forma, podemos dizer que o fator integrante na EDO $\frac{dy}{dt} = 3 - 2y$ é:

a) $I = e^{2x}$

b) $I = -e^{2x}$

c) $I = e^{-2x}$

d) $I = -e^{-2x}$

e) $I = 2e^{2x}$

3. Na equação diferencial de 1ª ordem $(2xy+1)+\left(x^2+4y\right)y'=0$, temos que $M=2xy+1$ e $N=x^2+4y$. Sendo assim, é correto afirmar que:

a) A equação é homogênea, pois $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x$

b) A equação é exata, pois $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x$

c) A equação não é exata, pois $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x}=4$

d) A equação é homogênea, pois $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2\lambda x$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x}=2\lambda x$

e) A equação é separável, pois é possível resolvê-la separando A equação é homogênea, uma vez que $M(x)$ e $N(x)$.

Seção 3.4

Equações diferenciais lineares de ordem superior

Diálogo aberto

A última parte que você terá que desenvolver, no treinamento voltado à equipe que trabalha na sua consultoria em soluções matemáticas, é gravar uma videoaula em que se expõe a resolução das seguintes equações diferenciais homogêneas:

a) $y'' - y' - 2y = 0$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

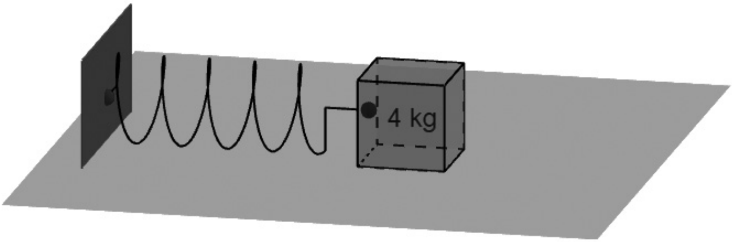
c) $y'' - 3y' + 4y = 0$

Consequentemente, as tarefas com os clientes não podem parar. Nesse contexto, um deles decide lhe propor uma parceria. Ele trabalha com fabricação de molas e deseja tratar um modelo matemático que atenda à fabricação de uma mola específica com base no movimento harmônico simples (sistema massa-mola). A ideia é alimentar um software de determinada máquina para que, com os dados fornecidos, a produção seja mais efetiva em relação a custo e benefício. Nesse sentido, a problematização a ser tratada é a seguinte:

Um bloco de aço com 4 kg está preso a uma mola, cuja constante de proporcionalidade de Hooke é k = 9 N/cm, sobre uma mesa horizontal sem atrito. No instante t=0, o bloco é solto de uma posição inicial afastada a 6 cm da posição de equilíbrio da mola com uma velocidade inicial de 3 m/s. Veja a Figura 3.4 e sua visualização dinâmica. Disponível em: <www.geogebra.org/m/U8ZAq2vA> Acesso em: 17 jun. 2016. A posição do bloco é descrita pela EDO $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$, cuja solução geral é

$x(t) = C_1 sen(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$, em que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência natural do sistema, k é a constante de proporcionalidade de Hooke e m é a massa do bloco.

Figura 3.4 | Sistema massa-mola



Fonte: <www.geogebra.org/m/U8ZAq2vA>. Acesso em: 17 jun. 2016.

Sendo assim, como você resolveria as equações da primeira parte, usando o método adequado, a fim de gravar a videoaula? E, ainda, como chegaria à solução particular da equação solicitada na segunda parte?

Não pode faltar

Equações diferenciais lineares de 2ª ordem

Diferentemente das EDOs de 1ª ordem, que são facilmente resolvidas com a utilização de um fator integrante, não havendo a necessidade de coeficientes constantes, desde que as integrações possam ser realizadas, as equações diferenciais de 2ª ordem não têm um procedimento geral para resolução, a não ser que os seus coeficientes sejam constantes e que elas atendam certas condições.

A sua forma geral é descrita por $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$, em que $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são funções dadas. Quando a função $R(x)$ é igual a zero, por exemplo em $y'' - 7y' + 12y = 0$, chamamos a equação diferencial linear de 2ª ordem de **homogênea**, caso contrário, por exemplo em $x^2y'' + sen(x)y' + e^x y = u(x)$, a chamamos de **não homogênea**.

Uma equação diferencial linear de 1ª ordem, com uma condição auxiliar (problema de valor inicial), tem uma única solução, conforme vimos anteriormente. Analogamente, as EDOs lineares de segunda ordem têm solução única, desde que especificada uma condição inicial para cada ordem adicional, como afirma o Teorema de Existência e Unicidade.

Assimile

Teorema de existência e unicidade

Segundo Çengel e Palm III (2014, p. 101), caso as funções $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ sejam contínuas em um intervalo $x_1 < x < x_2$ e caso x_0 seja um ponto desse intervalo, então a equação diferencial $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ terá solução única (uma e somente uma) nesse intervalo que satisfaz duas condições iniciais:

$$y(x_0) = y_0 \text{ e } y'(x_0) = y'_0$$

Reflita

Nas equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem, temos uma condição inicial para resolvermos um problema de valor inicial. Nas EDOs lineares de 2ª ordem temos duas condições iniciais para resolvermos um problema de valor inicial.

Nas de 3ª ordem teríamos quantas condições iniciais? E nas equações diferenciais de ordem *n*?

Dada uma equação diferencial, cuja solução geral, por exemplo, é $y = C_1y_1 + C_2y_2$, e sendo as condições iniciais especificadas em pontos diferentes, teremos um problema de valor de contorno, cuja solução única se dará com a aplicação das duas condições auxiliares resultando em valores únicos para as constantes C_1 e C_2.

Como as EDOs de 2ª ordem envolvem uma derivada segunda (y''), é fácil perceber que a sua solução y deve envolver duas integrações e duas constantes arbitrárias C_1 e C_2.

Exemplificando

Dada a equação diferencial ordinária de 2ª ordem $2y''-4y'+3y=0$, cuja solução geral é $y=e^x\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2 sen\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$, determine:

a) A solução da equação para a condição inicial $y(0)=2$ e $y'(0)=4+2\sqrt{2}$

b) A solução da equação para a condição inicial $y(0)=2$ e $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=e^{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}}$

Resolução:

No item "a", como temos a condição para o mesmo *x*, há um problema de valor inicial. Assim, resolvemos primeiramente para $x=0$ e $y=2$, em que, substituindo na solução geral, temos $2=e^0\left(C_1\cos(0)+C_2 sen(0)\right)$, encontrando $C_1=2$.

Para encontrarmos C_2, temos $x = 0$ e $y'=4+2\sqrt{2}$. Nesse caso, derivamos a solução geral e obtemos:

$$y'=e^x\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2 sen\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+e^x\left(-C_1\frac{\sqrt{2}}{2}sen\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$
.

Fazendo as substituições dos valores atribuídos a *x* e *y′* na derivada da função, encontramos $C_2=4+2\sqrt{2}$. E assim, obtemos a equação

$y=e^x\left(2\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+\left(4+2\sqrt{2}\right)sen\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$ como solução particular de acordo com as condições auxiliares dadas.

No item "b", temos a condição para diferentes valores de *x*, caracterizando um problema de valor de contorno. Nesse sentido, resolvemos primeiramente para $x=0$ e $y=2$, e, assim como no item "a", encontramos o valor de $C_1=2$. Procedemos da mesma forma para

encontrarmos o valor de C_2. Ou seja, substituímos $x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ e

$y = e^{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}}$,

de acordo com as condições auxiliares dadas, na solução geral da EDO. Fazendo as substituições dos valores atribuídos a *x* e *y*, encontramos $C_2 = e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$.

E, assim, obtemos a equação $y = e^x\left(2\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}sen\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$ como solução particular de acordo com as condições auxiliares dadas.

Equações homogêneas

Ao fixarmos valores para as constantes C_1 e C_2, na combinação linear $C_1y_1 + C_2y_2$, obtemos a solução geral $y = C_1y_1 + C_2y_2$ da equação diferencial linear de 2ª ordem $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

Assimile

Teorema – Princípio da superposição

Segundo Çengel e Palm III (2014, p. 110): se y_1 e y_2 são duas soluções da equação linear homogênea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, então a combinação linear $y = C_1y_1 + C_2y_2$, em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, é, também, solução dessa equação.

Assimile

Teorema – Solução geral de equações homogêneas

A equação diferencial linear homogênea de segunda ordem $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, cujos coeficientes $P(x)$ e $Q(x)$ são contínuos em um intervalo $x_1 < x < x_2$, sempre tem duas soluções y_1 e y_2 que são linearmente independentes nesse intervalo. Além disso, qualquer solução da equação diferencial nesse intervalo pode ser expressa unicamente como uma combinação linear dessas soluções, como em $y = C_1y_1 + C_2y_2$, que é a solução geral (ÇENGEL; PALM III, 2014, p. 115).

Lembre-se

Dependência e independência linear

Duas funções y_1 e y_2 são **linearmente independentes** se a única solução para $C_1y_1 + C_2y_2 = 0$ for $C_1 = C_2 = 0$. Caso contrário, y_1 e y_2 são **linearmente dependentes**.

Equações homogêneas com coeficientes constantes

A equação diferencial linear homogênea de segunda ordem $ay'' + by' + cy = 0$, com os coeficientes a, b e c constantes e ***a* ≠ *0***, terá duas soluções linearmente independentes. A combinação linear entre ambas dará a solução geral. Para encontrarmos a solução, devemos utilizar uma única função elementar, cujas derivadas são múltiplos constantes dela mesma. Neste caso, a solução é a função exponencial e^{mx}, em que m é uma constante. Dessa forma, podemos verificar que, derivando sucessivamente a função $y = e^{mx}$, teremos $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2e^{mx}$.

Observamos então que a função e suas derivadas diferem-se pelas constantes m e m^2. Substituindo os valores anteriores na equação $ay'' + by' + cy = 0$, teremos:

$$a\left(m^2e^{mx}\right)'' + b\left(me^{mx}\right)' + c\left(e^{mx}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) = 0$$

Como $e^{mx} \neq 0$ sempre, temos uma equação do segundo grau, denominada **equação característica**, que proporciona valores aceitáveis para m que caracterizam a solução de determinada equação diferencial.

Essa equação vai gerar duas raízes. Destas duas raízes dependerá a solução homogênea da equação. E, a depender dos valores, teremos os seguintes casos:

Assimile

Soluções homogêneas

1º caso – m_1 e m_2 raízes reais e distintas $(m_1 \neq m_2)$: $y_h(x) = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$

2ºcaso–m_1e$m_2$raízesreaiseiguais $(m_1 = m_2)$: $y_h(x) = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_2x}$

3º caso – raízes complexas $m_1 = \alpha + \beta i$ e $m_2 = \alpha - \beta i$: $y_h(x) = e^{ax}\left[C_1 \cos(bx) + C_2 sen(bx)\right]$

Exemplificando

Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais homogêneas:

a) $y'' - y' - 20y = 0$

b) $9y'' - 12y' + y = 0$

c) $5y'' + 3y' + 5y = 0$

Resolução:

a) Escrevemos a equação característica associada à equação diferencial dada. Vale lembrar que essa equação tem o padrão da equação quadrática $am^2 + bm + c = 0$. Dessa forma, obtemos: $m^2 - m - 20 = 0$.

Como trata-se de uma equação do segundo grau, encontramos o valor das raízes com uso da fórmula de Bhaskara.

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} m_1 = 5 \\ m_2 = -4 \end{cases}$$

Como temos duas raízes reais e distintas, estamos tratando o 1º caso. Fazemos a substituição na fórmula $y_h(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ e concluímos que a solução é $y_h(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-4x}$ (verifique!).

b) Fazendo o mesmo procedimento do item anterior, temos: $9m^2 - 12m + 4 = 0$

$$m = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{2 \cdot 9} = \left\{ m_1 = m_2 = \frac{2}{3} \right.$$

Neste caso, temos duas raízes reais e iguais. Estamos tratando o 2º caso. Fazemos a substituição na fórmula $y_h(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_2 x}$ e concluímos que a solução é $y_h(x) = C_1 e^{\frac{2}{3}x} + C_2 e x^{\frac{2}{3}x}$ (verifique!).

c)Assim como nos itens anteriores, temos: $5m^2 + 3m + 5 = 0$.

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \begin{cases} m = -\frac{3}{10} \pm \frac{\sqrt{91}}{10} i \end{cases}$$

Como são raízes complexas, estamos tratando o 3º caso. Fazemos a substituição na fórmula $y_h(x) = e^{ax}\left[C_1 \cos(bx) + C_2 sen(bx)\right]$ e concluímos que a solução é

$$y_h(x) = e^{-\frac{3}{10}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{91}}{10}x\right) + C_2 sen\left(\frac{\sqrt{91}}{10}x\right)\right]$$ (verifique!).

Faça você mesmo

Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

$y'' - 8y' + 7y = 0$; $4y'' - 28y' + 49y = 0$; $y'' - 4y' + 5y = 0$

Lembre-se

Nas equações do 2º grau:

- $b^2 - 4ac > 0$ raízes reais diferentes.
- $b^2 - 4ac = 0$ raízes reais iguais.
- $b^2 - 4ac < 0$ raízes complexas.

Equações lineares não homogêneas

São equações do tipo $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$, com $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, funções contínuas no intervalo de interesse. A sua solução geral é dada por $y = y_h + y_p$, em que y_h é a solução da equação homogênea associada e y_p é uma solução particular.

Para resolvermos uma equação linear não homogênea, igualamos $R(x) = 0$ para obtermos a equação associada

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$, que é expressa por $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$, em que y_1 e y_2 fazem parte do conjunto de soluções da equação homogênea.

Uma solução y_p que não envolve nenhuma constante arbitrária que satisfaz a equação não homogênea é a solução particular, cuja definição será apresentada a seguir.

Assimile

Teorema – solução geral de equações lineares não homogêneas

Se y_p é a solução particular de uma equação linear não homogênea $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$, em que as funções $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são contínuas no intervalo $x_1 < x < x_2$, e se y_h é a solução geral da equação homogênea associada, então a solução geral para essa equação não homogênea nesse intervalo é $y = y_h + y_p = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p$, em que y_1 e y_2 são as soluções que constituem o conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada, e C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Para encontrarmos a solução particular de uma equação linear não homogênea, podemos utilizar dois métodos distintos. O método dos coeficientes a determinar, que é aplicado em equações diferenciais lineares não homogêneas com coeficientes constantes, e o método da variação de parâmetros, que é aplicado em equações com coeficientes variáveis ou constantes e em termos não homogêneos de qualquer forma.

Método dos coeficientes a determinar

Neste método, trabalhamos com tentativas para encontrarmos a solução particular, usando como ponto de partida a sugestão de funções do tipo polinomial $P_n(x)$, exponencial e^{kx} e trigonométrica $C \cdot sen(kx)$ e $C \cdot \cos(kx)$, no termo não homogêneo $R(x)$, a fim de encontrarmos uma solução particular que satisfaça a equação diferencial não homogênea. Dessa forma, se $R(x)$ for uma função trigonométrica, trabalhamos com tentativas usando funções trigonométricas. Se $R(x)$ for uma função polinomial, as tentativas serão com funções polinomiais, e, por fim, se $R(x)$ for uma função exponencial, a tentativa será com funções exponenciais. Caso essa tentativa não seja viável, fazemos numa segunda tentativa a multiplicação da função sugerida por x. Sendo esta ainda insuficiente, para encontrarmos a solução, multiplicamos a segunda tentativa novamente por x.

Exemplificando

Determine a solução geral das seguintes EDOs:

a) $y'' - y' - 2y = 3x + 4$

b) $y'' - 2y' + y = 3e^{2x}$

c) $y'' - 2y' + y = 4\cos x$

Resolução:

a) Da equação dada, temos que o termo de $R(x)$ é um polinômio de grau 1, sugerindo então a solução particular $y_p = ax + b$. Igualamos a EDO a zero a fim de obtermos primeiramente a solução homogênea: $y'' - y' - 2y = 0$.

Escrevemos a sua equação característica $m^2 - m - 2 = 0$ para determinar suas raízes $m_1 = 2$ e $m_2 = -1$. Como são reais e distintas, as substituímos em $y_h(x) = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$ e temos que a solução homogênea é:

$$y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$$

Para obtermos a solução particular, derivamos a solução sugerida $y_p = ax + b$ e fazemos as devidas substituições na EDO. Temos, então:

$$\begin{cases} y'_p = a \\ y''_p = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y'' - y' - 2y = 3x + 4 \quad \Rightarrow \quad 0 - a - 2(ax + b) = 3x + 4$$

$$\Rightarrow \; 0 - a - 2ax - 2b = 3x + 4 \; \Rightarrow \; -2ax - a - 2b = 3x + 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = 3 \\ -a - 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \; a = -\frac{3}{2} \;\; ; \;\; b = -\frac{5}{4}$$

Portanto, a solução particular é $y_p = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}$

Fazemos a substituição em $y = y_h + y_p$ para encontrarmos a solução

geral e obtemos $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$.

b) Da equação dada, o termo de $R(x)$ é uma função exponencial do tipo Ae^{2x}, sugerindo então a solução particular $y_p = Ae^{2x}$. Igualamos a EDO a zero, a fim de obtermos primeiramente a solução homogênea: $y'' - 2y' + y = 0$

Escrevemos a sua equação característica $m^2 - 2m + 1 = 0$ e obtemos suas raízes, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Como são reais e iguais, as substituímos em $y_h(x) = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_2x}$ e, sendo assim, a solução homogênea é $y_h(x) = C_1e^{x} + C_2xe^{x}$

Para obtermos a solução particular, derivamos a solução sugerida $y_p = Ae^{2x}$ para substituirmos na EDO. Temos, então:

$$\begin{cases} y'_p = 2Ae^{2x} \\ y''_p = 4Ae^{2x} \end{cases} \Rightarrow \quad y'' - 2y' + y = 3e^{2x} \quad \Rightarrow \quad 4Ae^{2x} - 2\left(2Ae^{2x}\right) + Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = 3e^{2x} \quad \Rightarrow \quad Ae^{2x} = 3e^{2x} \quad \Rightarrow \quad A = 3$$

Portanto, a solução particular é $y_p = 3e^{2x}$. Fazemos a substituição em $y = y_h + y_p$ para encontrarmos a solução geral e obtemos $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + 3e^{2x}$

c) Da equação dada, temos que o termo de $R(x)$ é uma função do tipo $A\cos(x)$, sugerindo então a solução particular $y_p = A\cos(x) + Bsen(x)$ Igualamos a EDO a zero a fim de obtermos primeiramente a solução homogênea: $y'' - 2y' + y = 0$

Escrevemos a sua equação característica $m^2 - 2m + 1 = 0$ para determinar suas raízes $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Como são reais e iguais, as substituímos em $y_h(x) = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_2x}$, a solução homogênea é $y_h(x) = C_1e^x + C_2xe^x$. Para obtermos a solução particular, derivamos a solução sugerida $y_p = A\cos(x) + Bsen(x)$ para substituirmos na EDO. Temos, então:

$$y'_p = -Asen(x) + B\cos(x) \text{ e } y''_p = -A\cos(x) - Bsen(x)$$

$$-A\cos(x) - Bsen(x) - 2(-Asen(x) + B\cos(x)) + A\cos(x) + Bsen(x) = 4\cos x$$

$$2Asen(x) - 2B\cos(x) = 0sen(x) + 4\cos(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2A = 0 \\ -2B = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\text{A} = 0 \ ; \ \text{B} = -2$$

Portanto, a solução particular é $y_p = -2sen(x)$. Fazemos a substituição em $y = y_h + y_p$ para encontrarmos a solução geral e obtemos $y = C_1e^x + C_2xe^x - 2sen(x)$

Faça você mesmo

Determine a solução geral das seguintes EDOs:

a) $y'' - y' - 2y = 3x^2 + 4x + C$

b) $y'' - y' - 2y = 3e^{5x}$

c) $3y'' - y' - 2y = 2\cos x$

Método da variação de parâmetros

Trata-se de um método utilizado para resolver equações diferenciais com coeficientes constantes, sendo os termos não homogêneos de qualquer forma. Para isso, a solução da equação homogênea associada deverá estar disponível.

Dada a equação $y'' + P(x)y' + Q(x) = R(x)$, com $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ contínuas no intervalo de interesse, a sua equação homogênea associada é dada por $y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$, com duas soluções y_1 e y_2 no intervalo. A solução geral da equação homogênea associada pode ser expressa por $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$, caso em que a ideia básica é encontrar uma solução particular do tipo $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$, sendo as constantes C_1 e C_2 substituídas pelas funções v_1 e v_2. Para determinarmos a solução, podemos trabalhar com um sistema de equações.

Assimile

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 \qquad\qquad y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$$

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 + v_3' y_3 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_3' y_3' = 0 \\ v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + v_3' y_3'' = R(x) \end{cases}$$

E assim sucessivamente.

Exemplificando

Determine a solução geral da EDO $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

Resolução:

Escrevemos a equação homogênea $y'' - 2y' + y = 0$. As raízes da equação característica são $m_1 = m_2 = 1$. Logo, a solução homogênea é $y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$

Substituindo as constantes C_1 e C_2 pelas funções v_1 e v_2, temos que $y_p = v_1 e^x + v_2 x e^x$

$$\begin{cases} v_1' e^x + v_2'\left(x e^x\right) = 0 \\ v_1' e^x + v_2'\left(e^x (1 + x)\right) = \dfrac{e^x}{x} \end{cases}$$

Dividindo as duas equações do sistema por e^x, temos:

$$\begin{cases} v_1' + v_2' x = 0 \\ v_1' + v_2'(1 + x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Chegamos a $v_1' = -1$ e $v_2' = \dfrac{1}{x}$

Para determinar v_1 e v_2, fazemos a integração: $v_1 = -x$ e $v_2 = \ln|x|$

Substituindo esses valores em $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$, encontramos a solução particular $y_p = -xe^x + \ln|x|\, xe^x$

Como a solução geral é dada por $y = y_h + y_p$, concluímos que:

$$y = C_1 e^x + C_2 xe^x - xe^x + \ln|x|\, xe^x$$

Faça você mesmo

Determine a solução geral da EDO $y''' + y = \dfrac{e^x}{5x}$

Pesquise mais

Amplie a sua aprendizagem consultando o Capítulo 3 do livro. ÇENGEL, Yunus A.; PALM III, William J. Equações diferenciais. Tradução Marco Elisio Marques. Porto Alegre: Bookman, 2014. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788580553499/pageid/52>. Acesso em: 31 maio 2016.

Sem medo de errar

Em continuidade ao treinamento de aperfeiçoamento destinado à sua equipe, você teria que resolver algumas equações diferenciais para gravar uma videoaula explanando tais resoluções. As três equações dadas são homogêneas com coeficientes constantes. Nesse sentido, os procedimentos seriam:

a) $y'' - y' - 2y = 0$

Escrever a equação característica e determinar as raízes usando a fórmula de Bhaskara por se tratar de uma equação do 2º grau.

$$m^2 - m - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad = \quad \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \quad =$$

$$\begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = -1 \end{cases}$$

Como temos duas raízes reais e distintas, utilizamos a fórmula $y_h(x) = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$, chegando à solução $y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

Equação característica: $m^2 + 4m + 4 = 0$; raízes: $m_1 = -2$ e $m_2 = -2$ reais e iguais.

$$y_h(x) = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_2x}$$

Portanto, a solução para a EDO dada é $y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

c) $y'' - 3y' + 4y = 0$

Equação característica: $m^2 - 3m + 4 = 0$; raízes: $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$ complexas.

$$y_h(x) = e^{ax}\left[C_1\cos(bx) + C_2sen(bx)\right]$$

Portanto, a solução para a EDO dada é: $y_h(x) = e^{\frac{3}{2}x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_2sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right]$

A outra tarefa era tratar um modelo matemático a fim de encontrar uma solução particular, dado que:

$$m = 4\,;\ k = 9 \text{ N/m}\,;\ t = 0 \quad \rightarrow \quad d = 6\,;\ v = 3$$

Sendo *d* a distância do bloco à posição de equilíbrio.

Para determinarmos a frequência natural do sistema, a fim de substituí-la na solução geral $x(t) = C_1 sen(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$, de acordo com os dados

fornecidos no enunciado, fazemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9}{4}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3}{2}$$

Derivando a solução geral $x(t) = C_1 sen(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$, temos: $x'(t) = C_1 \varpi sen(\omega t) - C_2 \omega sen(\omega t)$

Para $x(0) = 6$, segue que: $C_1 sen(\omega \cdot 0) + C_2 \cos(\omega \cdot 0) = 6 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 6$.

Substituindo C_2 na derivada da solução, encontra-se C_1. Sendo $v = 3$ cm/s = 3 $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$, temos $x'(0) = 3$ e, além disso: $C_1 \varpi \cos(\omega \cdot 0) - C_2 \omega sen(\omega \cdot 0) = 3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$.

Portanto, a solução particular é dada por $x(t) = 2 sen\left(\frac{3}{2} t\right) + 6 \cos\left(\frac{3}{2} t\right)$

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Circuitos elétricos	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar as equações diferenciais lineares de 2ª ordem homogêneas em diversas situações do cotidiano, nas ciências e engenharias, a fim de se obter uma resolução bem aproximada das problematizações contextualizadas da realidade.
3. Conteúdos relacionados	Equações diferenciais lineares homogêneas de 2ª ordem, circuitos elétricos.

4. Descrição da situação-problema	A sua empresa de consultoria em soluções matemáticas foi solicitada a dar suporte aos engenheiros contratados recentemente por uma empresa de engenharia elétrica. Você terá que trabalhar com eles um modelo matemático aplicado a circuitos elétricos. O modelo foi descrito da seguinte forma: Um circuito possui um capacitor de $0,5 \cdot 10^{-1}$ F, um resistor de 25 Ω e um indutor de 5 H em série. O capacitor se encontra descarregado. No instante $t = 0$, esse circuito conecta-se a uma bateria cuja tensão é de $10e^{-\frac{t}{4}}$ V e o circuito é fechado. Determine a carga no capacitor em qualquer instante t > 0.
5. Resolução da situação-problema	Temos os seguintes dados no problema: $$C = 0,5 \cdot 10^{-1};\ R = 25;\ L = 5;\ v(t) = 10e^{-\frac{t}{4}}$$ Verifica-se ainda que a EDO que descreve o circuito elétrico é: $$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = v(t).$$ Substituindo os dados do problema, temos: $$5Q'' + 25Q' + \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-1}}Q = 10e^{-\frac{t}{4}}.$$ Simplificamos toda a equação, dividindo por 5: $$Q'' + 5Q' + 4Q = 2e^{-\frac{t}{4}}.$$ Igualamos a EDO a zero e obtemos a equação característica: $m^2 + 5m + 4 = 0$, cujas raízes são: $m_1 = -1$ e $m_2 = -4$. E, então, chegamos à equação homogênea $Q(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-4t}$. A solução particular sugerida é $y_p = Ae^{-\frac{t}{4}}$. Fazendo as suas derivadas, temos: $$y'_p = -\frac{1}{4}Ae^{-\frac{t}{4}} \text{ e } y''_p = \frac{1}{16}Ae^{-\frac{t}{4}}$$ Fazendo a substituição na EDO $Q'' + 5Q' + 4Q = 2e^{-\frac{t}{4}}$: $$\frac{1}{16}Ae^{-\frac{t}{4}} + 5\left(-\frac{1}{4}Ae^{-\frac{t}{4}}\right) + 4\left(Ae^{-\frac{t}{4}}\right) = 2e^{-\frac{t}{4}}$$ Logo, $A = \frac{32}{45}$; portanto, a solução particular é $y_p = \frac{32}{45}e^{-\frac{t}{4}}$. Fazendo as substituições na equação geral $y = y_h + y_p$, conclui-se que $y = C_1e^{-t} + C_2e^{-4t} + \frac{32}{45}e^{-\frac{t}{4}}$ é a função que descreve a carga em um circuito elétrico.

Faça valer a pena

1. Dada a solução geral $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$, determine a solução particular com a condição inicial $y(0) = 2$ e $y'(0) = 2$.

a) $y(x) = 8e^{-x} + 6e^{-x}$

b) $y(x) = 4e^{-2x} + 3e^{-3x}$

c) $y(x) = 8e^{-2x} - 6e^{-3x}$

d) $y(x) = \dfrac{1}{8}e^{-2x} + \dfrac{1}{6}e^{-3x}$

e) $y(x) = \dfrac{1}{4}e^{-2x} + \dfrac{1}{3}e^{-3x}$

2. Assinale a alternativa que contém a solução geral homogênea CORRETA da EDO $4y'' + 8y' + 6y = 0$.

a) $y_h(x) = e^{-x}\left[C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_2 sen\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right]$

b) $y_h(x) = e^{x}\left[C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{32}}{8}x\right) - C_2 sen\left(\dfrac{\sqrt{8}}{32}x\right)\right]$

c) $y_h(x) = e^{-2x}\left[C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{-2}}{2}x\right) + C_2 sen\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right]$

d) $y_h(x) = e^{-x}\left[C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{8}}{32}x\right) + C_2 sen\left(\dfrac{\sqrt{8}}{32}x\right)\right]$

e) $y_h(x) = e^{-2x}\left[C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_2 sen\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right]$

3. A solução geral da EDO $4y'' + 2y' - 6y = 5x - 8$ é:

a) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{19}{18}x + \frac{5}{6}$

b) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{5}{6}x + \frac{19}{18}$

c) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} - \frac{5}{6}x + 1$

d) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x} + 2x + \frac{19}{18}$

e) $y = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{6}{5}x + \frac{19}{18}$

Referências

BOYCE, William; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BRANNAN, James R.; BOYCE, William E. **Equações diferenciais uma introdução a métodos modernos e suas aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2013. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2337-3/cfi/0!/4/2@100:0.00>. Acesso em: 14 jun. 2016.

BRONSON, Richard; COSTA Gabriel. **Equações diferenciais**. Tradução Fernando Henrique Silveira. 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788577802982/pageid/0>. Acesso em: 14 jun. 2016.

ÇENGEL, Yunus A.; PALM III, William J. **Equações diferenciais**. Tradução Marco Elisio Marques. Porto Alegre: Bookman, 2014. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788580553499/pageid/0>. Acesso em: 14 jun. 2016.

STEWART, James. **Cálculo, volume 2.** 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

ZILL, Dennis. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

Transformada de Laplace

Convite ao estudo

Olá, aluno! Vamos começar a Unidade 4 de Cálculo Diferencial e Integral III. Nesta unidade, você continuará a aprofundar seus conhecimentos na área de equações diferenciais, com a técnica conhecida como Transformada de Laplace. Esta técnica é utilizada para resolver equações diferenciais lineares. O aspecto distintivo da Transformada de Laplace é que ela transforma integrações em multiplicações e derivações em divisões, simplificando assim a resolução de equações diferenciais lineares. Em outras palavras, a transformada de Laplace transforma equações diferenciais (que envolvem derivadas de uma função desconhecida) em equações algébricas (resolver equações algébricas usualmente é mais simples que equações diferenciais).

São competências específicas necessárias para o entendimento desta unidade: resolver integrais em que um dos extremos é o infinito, calcular limites no infinito, identificar funções contínuas por partes, efetuar a Transformada de Laplace e sua inversa e, finalmente, aplicar a Transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes.

São objetivos específicos desta unidade: apresentar a definição da Transformada de Laplace, da Transformada Inversa de Laplace, as propriedades da Transformada de Laplace e a aplicação na resolução de equações diferenciais.

Para que você consiga relacionar os conteúdos dessa unidade com a prática profissional, imagine que você foi contratado por uma empresa do ramo de soluções industriais em que são desenvolvidos novos produtos. Para que os produtos tenham boa aceitação dos clientes, eles devem ser seguros, eficientes e de baixo custo, e isso envolve a realização de diversos testes, incluindo simulações de computador por meio de equações diferenciais. Algumas das primeiras problemáticas que surgiram no seu novo emprego estão relacionadas a sistemas massa-mola, resfriamento de materiais e sistemas elétricos.

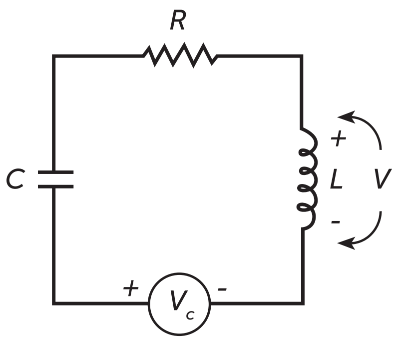
Vamos encarar esse desafio profissional? Então dê sequência à sua leitura e veja o primeiro problema que lhe foi apresentado.

Seção 4.1

Definição de transformada de Laplace

Diálogo aberto

Figura 4.1 | Circuito RLC (Resistor, Indutor, Capacitor)



Fonte: Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circuito_RLC_com_sa%C3%ADda_no_indutor..png>. Acesso em: 30 jun. 2016.

Na Unidade 3 desta disciplina, você estudou equações diferenciais lineares e como resolver algumas "famílias" de equações diferenciais, contudo, você deve ter percebido que resolver equações diferenciais não é um procedimento simples, certo? Pois bem, isto levou matemáticos, físicos e engenheiros a desenvolverem diversos procedimentos para estudar os fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos, dentre outros modelados por equações diferenciais. Desta forma, a partir desta seção, estudaremos um destes procedimentos: a Transformada de Laplace.

Na empresa de soluções industriais para a qual você foi contratado, departamentos vêm utilizando a Transformada de Laplace para resolver equações diferenciais. Você deverá resolver equações da forma $ax''(t)+bx'(t)+cx(t)=F(t)$, em que *a*, *b* e *c* são constantes e *F*(*t*) representa uma "forçante" (ou seja, uma força externa atuando no sistema). Esta força externa pode ser descontínua por partes. Mais tarde veremos o significado desta última frase. Esta equação diferencial pode representar tanto um sistema massa-mola amortecedor, quanto um circuito elétrico (figura anterior), dentre outras possibilidades de situações reais.

A sua tarefa nesta primeira seção é montar um pequeno quadro com transformadas de Laplace das funções mais utilizadas no dia a dia do escritório, explicando para os novos funcionários o passo a passo da transformação de $f(t)$ para $F(s)$. Nas próximas seções, utilizaremos este quadro na resolução de problemas. Para resolver esta situação problema, apresentaremos a definição da Transformada de Laplace, condições suficientes para sua existência, como efetuar a Transformada de Laplace de uma função definida por partes. Na resolução desta situação-problema, é necessário que você efetue integrais impróprias sobre um intervalo infinito, calcule limites no infinito, identifique quais as condições necessárias para existência da Transformada de Laplace e caracterize funções por partes.

Não pode faltar

Inicialmente vamos lembrar o que é uma integral imprópria sobre um intervalo infinito.

Definimos integral imprópria sobre um intervalo infinito como o limite de integrais sobre intervalos limitados:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)dt$$

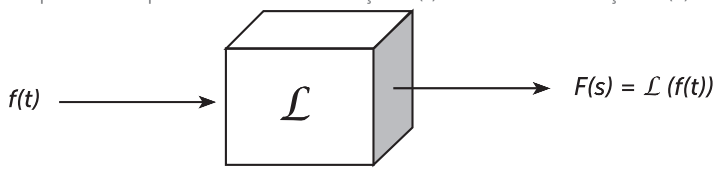
Diz-se que a integral à direita converge quando o limite existe. Se o limite não existe, dizemos que a integral é divergente (ou que a integral não existe).

Assimile

Definição: considere f uma função definida para $t \geq 0$. Denomina-se transformada de Laplace a integral $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$, desde que a integral seja convergente.

A Transformada de Laplace é uma operação que associa uma função $f(t)$ a uma nova função $F(s)$, por meio de uma integral, como representado na figura a seguir.

Figura 4.2 | Você pode entender a transformada de Laplace como uma "máquina" na qual "entra" uma função $f(t)$ e "sai" uma função $F(s)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Se considerarmos $f(t) = 3$ para todo $t \geq 0$, por exemplo, qual seria a transformada de f? Para obtermos a transformada dessa função, a substituímos na integral

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$, obtendo:

$$\mathcal{L}\{3\} = \int_0^{\infty} e^{-st} 3dt = 3\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = 3\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-bs} + \frac{1}{s}\right) = \frac{3}{s}$$

Note que a integral anterior só existe para $s > 0$. Se s fosse negativo, o limite

$\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-bs}\right)$ não existiria. O resultado anterior pode ser generalizado para qualquer constante c:

$$\mathcal{L}\{c\} = \int_0^{\infty} e^{-st} cdt = c\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = c\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-bs} + \frac{1}{s}\right) = \frac{c}{s}$$

Observe ainda que, sempre que a integral convergir, temos como resultado uma função de s.

Linearidade da Transformada de Laplace

A integração e a derivação de uma função f são operações lineares que associam funções a funções. Veja:

$$\left(af(x) + bg(x)\right)' = af'(x) + bg'(x) \quad \Rightarrow$$

$$\int_c^d af(t) + bg(t)dt = a\int_c^d f(t)dt + b\int_c^d g(t)dt$$

Logo a seguir vemos que a Transformada de Laplace é outro exemplo de operador linear que leva um espaço de funções em outro espaço de funções, pois dadas constantes a e b, vale que:

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]dt=\lim_{d\to\infty}\int_0^{d}e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]dt=$$

$$a\lim_{d\to\infty}\int_0^{d}e^{-st}f(t)\,dt+b\lim_{d\to\infty}\int_0^{d}e^{-st}g(t)\,dt=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\,\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Exemplificando

Calcule: a) $\mathcal{L}\{t\}$ b) $\mathcal{L}\left\{e^{-5t}\right\}$

Resolução:

a) Para determinar essa transformada, usamos integração por partes,

como segue: $\mathcal{L}\{t\}=\int_0^{\infty}e^{-st}t\,dt=\underbrace{\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty}}_{0}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}e^{-st}=\frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s^2}$

Observe que usamos $\lim_{t\to\infty}te^{-st}=0$

b) $\mathcal{L}\left\{e^{-5t}\right\}=\int_0^{\infty}e^{-st}e^{-5t}dt=\int_0^{\infty}e^{-(s+5)t}dt=\left[-\frac{e^{-(s+5)t}}{s+5}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{s+5}$, com $s>-5$

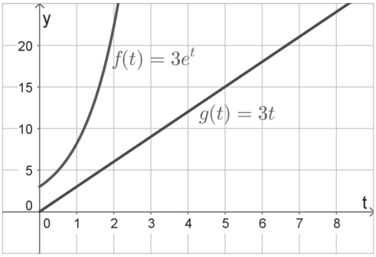
Observe que usamos que $\lim_{t\to\infty}e^{-(s+5)t}=0$, para $s + 5 > 0$ (ou $s > -5$).

Definição (funções de ordem exponencial): diz-se que uma função é de ordem exponencial quando existem números c, $M > 0$ e $t_0 > 0$ tais que: $|f(t)|\le Me^{ct},\forall t>t_0$

Em outras palavras, dizer que a função $f(t)$ é de ordem exponencial significa que ela "cresce" mais devagar que qualquer função exponencial que pudermos encontrar. Outra forma de se definir uma função de ordem exponencial é dizer que existem constantes reais $M > 0$ e c tais que, qualquer que seja $t > t_0$, $\left|e^{-ct}f(t)\right|\le M$

Considere a função $g(t) = 3t$. Essa função é de ordem exponencial, pois $|3t| \leq 3e^t, \forall t > 0$

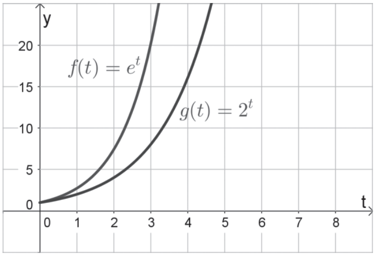
Figura 4.3 | Funções $f(t) = 3e^t$ e $g(t) = 3t$



Fonte: elaborada pelo autor.

Consideremos agora a função $g(t) = 2^t$. Essa função é de ordem exponencial, pois $|2^t| \leq e^t, \forall t > 0$

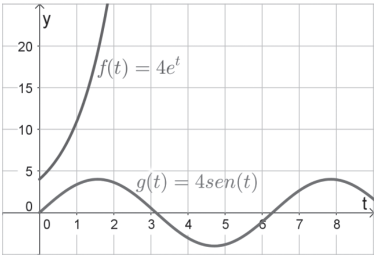
Figura 4.4 | Funções $f(t) = e^t$ e $g(t) = 2^t$



Fonte: elaborada pelo autor.

A função $g(t) = 4sen(t)$ é de ordem exponencial, pois $|4sen(t)| \leq 4e^t, \forall t > 0$.

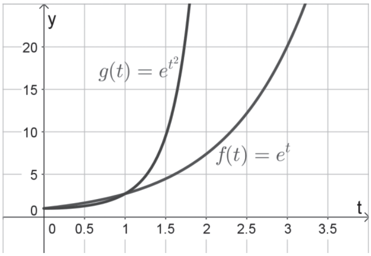
Figura 4.5 | Funções $f(t) = 4e^t$ e $g(t) = 4sen(t)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Já a função $g(t) = e^{t^2}$ não é de ordem exponencial, pois cresce mais rapidamente que qualquer função da forma Me^{ct} com $M > 0$. Confira na figura a seguir.

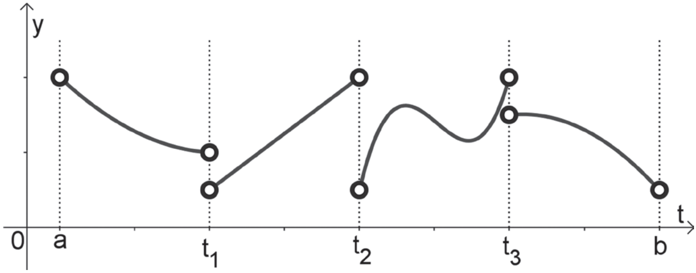
Figura 4.6 | Funções $f(t) = e^t$ e $g(t) = e^{t^2}$ (g não é de ordem exponencial)



Fonte: elaborada pelo autor.

Definição (função contínua por partes): diz-se que uma função é contínua por partes (ou também, seccionalmente contínua) em um intervalo $[a, b]$ se pudermos dividir o intervalo em um número finito de intervalos, tais que a função é contínua em cada um destes intervalos e com limites finitos (tanto à direita quanto à esquerda). Na próxima figura temos um exemplo de uma função contínua por partes.

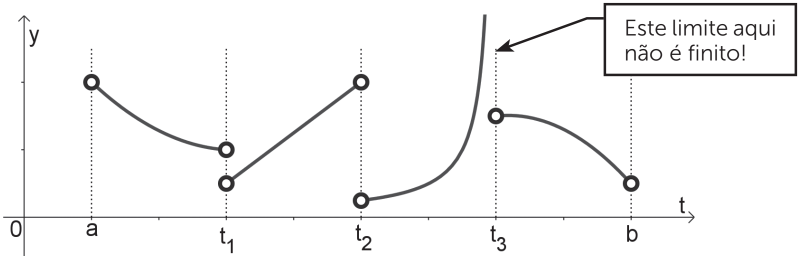
Figura 4.7 | Função contínua por partes



Fonte: elaborada pelo autor.

No gráfico da figura a seguir temos um exemplo de uma função que não é contínua por partes (um dos limites laterais não é finito). No ponto t_3 o limite não é finito. Assim, neste gráfico a função não é contínua por partes.

Figura 4.8 | Exemplo de função que não é contínua por partes



Fonte: elaborada pelo autor.

O teorema a seguir explicita as condições suficientes, segundo as quais a Transformada de Laplace existe.

Assimile

Teorema: considere *f*(*t*) uma função contínua por partes no intervalo [0,∞) de ordem exponencial para $t > t_0$. Então, a Transformada de Laplace de *f*, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para todo *s* > *c*.

Observe que o teorema não apresenta condições necessárias para a existência da Transformada de Laplace. Existe um **corolário** importante deste teorema:

Corolário: se a função *f*(*t*) é uma função contínua por partes no intervalo [0,∞) de ordem exponencial para $t > t_0$, então $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

Vocabulário

Corolário: um corolário é uma dedução ou consequência de um teorema que já tenha sido demonstrado.

Qual a importância deste corolário? Não é qualquer função que pode ser uma Transformada de Laplace. Por exemplo, funções racionais do tipo

$Q(s) = \dfrac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_n s^n}$, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ não podem ser transformadas de Laplace, pois $\lim_{t\to\infty} Q(s) = \dfrac{a_n}{b_n} \neq 0$

Reflita

A importância do resultado acima está no fato de deixar claro que não é qualquer função que pode ser Transformada de Laplace de uma *f*(*t*). Em outras palavras, a restrição $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ é bastante forte.

Faça você mesmo

Deixamos para você calcular a transformada de Laplace da função cosseno hiperbólico $\cosh(kt) = \dfrac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$. Esperamos que você chegue ao seguinte resultado: $\mathcal{L}\left\{\cosh\left(kt\right)\right\} = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$

Transformada de Laplace de uma função definida por várias sentenças

No exemplo a seguir, veremos como calcular a Transformada de Laplace de uma função definida por várias sentenças, também chamadas de funções definidas por partes. Basta dividir a integração nos respectivos subintervalos.

Considere o cálculo de $\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\}$, em que $f\left(t\right) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 5 \\ 5, & t \geq 5 \end{cases}$. Temos uma função contínua por partes, logo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \underbrace{\int_0^5 e^{-st} f(t)\,dt + \int_5^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{\text{Dividimos a integração nos dois subintervalos}} = \int_0^5 e^{-st} t\,dt + \int_5^\infty e^{-st} 5\,dt =$$

$$\int_0^5 e^{-st} t\,dt + 5\int_5^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s} - \frac{6e^{-5s}}{s} + 5\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_5^\infty = \frac{1}{s} - \frac{6e^{-5s}}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{5e^{-5s}}{s}$$

Usamos a integração por partes para determinar que:

$$\int_0^5 e^{-st} t\,dt = \left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^5 - \int_0^5 e^{-st}\,dt = -\frac{5e^{-5s}}{s} + \frac{1}{s} - \frac{e^{-5s}}{s} = \frac{1}{s} - \frac{6e^{-5s}}{s}$$

Reflita

É bastante usual que o domínio de definição da Transformada de Laplace seja da forma: $s > C$, C uma constante.

Pesquise mais

Como sugestão de leitura complementar, leia o artigo indicado. Disponível em: link . Acesso em: 30 jun. 2016. Além disso, assista ao vídeo que mostra que com a Transformada de Laplace não é necessário calcular a solução particular da equação diferencial, nem as constantes arbitrárias do problema de valor inicial. Disponível em: link do vídeo. Acesso em 30. jun. 2016.

Sem medo de errar

Nesta seção, você iniciou seus estudos sobre Transformada de Laplace. Para facilitar o trabalho na empresa de soluções industriais para a qual você foi contratado, foi solicitado que você construísse um pequeno quadro com Transformadas de Laplace das funções que o escritório mais utiliza, inclusive com as restrições para os devidos valores de s. Este quadro será utilizado posteriormente na resolução de equações diferenciais.

Seu trabalho é completar o quadro a seguir.

Quadro 4.1 | Transformadas de algumas funções

$f(t)$	$F(s)$
1	?
t	?
t^k, $k \geq 0$	?
e^{ct}	?
$\cos(at)$	?
$\text{sen}(at)$	?
$\text{senh}(at)$	?
$a\,f(t) + b\,g(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$	?

Fonte: elaborada pelo autor.

Atenção

Antes de começar os cálculos para determinar as Transformadas de Laplace, verifique se todas as funções do lado esquerdo são de ordem exponencial e contínuas por partes.

Lembre-se

Não deixe de incluir a restrição sobre s no lado direito do quadro.

Sugerimos que você tente realizar os cálculos para determinar cada Transformada e, depois, confira seus resultados acessando os links. Disponível em:<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580553499/cfi/454!/4/4@0.00:34.6>. Acesso em: 30 jun. 2016. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~msantos/tab-laplace>. Acesso em: 30 jun. 2016.

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Transformada de Laplace	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Explorar Transformadas de Laplace de funções definidas por várias sentenças.
3. Conteúdos relacionados	Integrais impróprias, funções contínuas por partes, funções de ordem exponencial, limite de funções no infinito.
4. Descrição da situação-problema	Em um dos experimentos no laboratório de controle de qualidade da empresa de soluções industriais para a qual você foi contratado, vocês tiveram que trabalhar com uma função definida por mais de uma sentença. Estas funções não costumam estar tabeladas. Assim, você deverá determinar a Transformada de Laplace para esta função. A função em questão era $f(t)=\begin{cases} 0, & t<5 \\ at, & t \geq 5 \end{cases}$. Determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$
5. Resolução da situação-problema	$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_c^\infty e^{-st}atdt=-\frac{1}{s}\left[ate^{-st}\Big\|_c^\infty - a\int_c^\infty e^{-st}dt\right]=$ $-\frac{1}{s}\left[\frac{ace^{-sc}}{s}+\frac{a}{s}\frac{e^{-sc}}{s}\right]=ae^{-sc}\frac{(1+cs)}{s^2}$ Assim, temos que a transformada de Laplace da função definida por várias sentenças acima é igual a $ae^{-sc}\frac{(1+cs)}{s^2}$

Faça valer a pena

1. Considere as funções $f_1(t)=t^2,\ f_2(t)=e^{2^t}$ e $f_3(t)=3\cos(t)$. Assinale a alternativa correta:

a) $f_1(t)$ é de ordem exponencial, $f_2(t)$ não é de ordem exponencial, $f_3(t)$ não é de ordem exponencial.

b) $f_1(t)$ não é de ordem exponencial, $f_2(t)$ não é de ordem exponencial, $f_3(t)$ é de ordem exponencial.

c) $f_1(t)$ é de ordem exponencial, $f_2(t)$ não é de ordem exponencial, $f_3(t)$ é de ordem exponencial.

d) $f_1(t)$ é de ordem exponencial, $f_2(t)$ é de ordem exponencial, $f_3(t)$ é de ordem exponencial.

e) $f_1(t)$ não é de ordem exponencial, $f_2(t)$ não é de ordem exponencial, $f_3(t)$ não é de ordem exponencial.

2. Assinale a alternativa correta para o valor de $\mathcal{L}\left\{3e^{2t} - 3t^4 + 3sen(2t) - 5\cos(3t)\right\}$

a) $\dfrac{2}{s-4} + \dfrac{36}{s^5} + \dfrac{8}{s^2+9} + \dfrac{18}{s^2+9}$

b) $\dfrac{4}{s-6} - \dfrac{64}{s^5} - \dfrac{6}{s^2+4} - \dfrac{21}{s^2+16}$

c) $\dfrac{3}{s-2} - \dfrac{72}{s^5} + \dfrac{3}{s^2-4} - \dfrac{35}{s^2+8}$

d) $\dfrac{3}{s-2} - \dfrac{96}{s^5} + \dfrac{6}{s^2+4} - \dfrac{15}{s^2+9}$

e) $\dfrac{3}{s+2} - \dfrac{48}{s^4} - \dfrac{4}{s^2+2} + \dfrac{15}{s^2+9}$

3. Calcule a Transformada de Laplace da função definida por várias sentenças: $f(t) = \begin{cases} 2t, 0 \le t < 1 \\ 2, t \ge 1 \end{cases}$. Depois assinale a alternativa que contém essa transformada.

a) $\dfrac{4\left(se^{-s} - 1\right) - 2se^{-s}}{s^2}$

b) $\dfrac{2\left(e^{-s} - 1\right) - 4se^{-s}}{s^2}$

c) $\dfrac{2\left(e^{-2s} - 2\right) - 4se^{-3s}}{s^3}$

d) $\dfrac{-\left(e^{-s} - 1\right) - 6se^{-s}}{s^2}$

e) $\dfrac{2\left(2e^{-s} - 3\right) - 5se^{-s}}{s}$

Seção 4.2

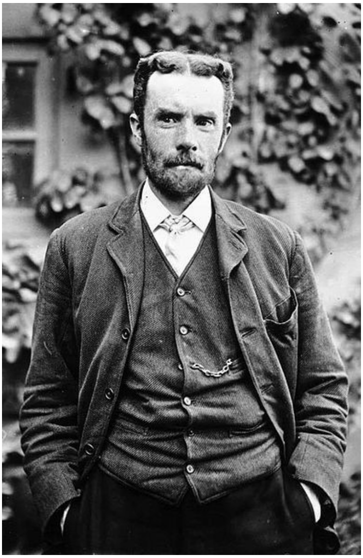
Inversa da Transformada de Laplace

Diálogo aberto

Na seção anterior, você começou seus estudos sobre Transformada de Laplace, que é uma ferramenta utilizada para resolver equações diferenciais. Contudo, para que possa ser utilizada na resolução de equações diferenciais, precisamos também introduzir a Transformada de Laplace Inversa.

Como já dissemos na Seção 4.1, a importância da Transformada de Laplace está justamente na sua utilização para resolver equações diferenciais ordinárias lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes não homogêneas, especialmente com forças externas periódicas, descontínuas ou forças tipo impulso. Tais situações são recorrentes em variadas aplicações da engenharia.

Figura 4.9 | Oliver Heaviside (1850-1925)



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oheaviside.jpg>. Acesso em: 11 jul. 2016.

A empresa de soluções industriais em que você trabalha está expandindo sua atuação para novas áreas. E agora, vocês terão que desenvolver as equipes internas na resolução de equações diferenciais do tipo $ax''+bx'+cx=F_{ext}(t)$, em que $F_{ext}(t)$ é uma força externa que pode ser uma função periódica, do tipo impulso, degrau ou seccionalmente contínua. Estas equações são originárias dos sistemas mecânicos, elétricos ou de vigas que a empresa vem sendo chamada a resolver. No caso dos sistemas massa-mola-amortecedor, o coeficiente *c* está associado com o coeficiente de restauração da mola, e o coeficiente b está associado com o amortecimento.

A Transformada de Laplace é utilizada na resolução de problemas massa-mola, corda vibrante e condução de calor (nas Engenharias Mecânica, Naval e Aeronáutica, por exemplo), circuitos elétricos e linhas de transmissão (na Engenharia Elétrica), controle (na Engenharia Mecatrônica), transmissão de sinais (telecomunicações/engenharia elétrica) e de flexão de vigas (na Engenharia Civil), ou seja, é uma ferramenta muito importante!

Boa parte do que estudamos nestas seções da Unidade 4 sobre Transformada de Laplace, deve-se ao trabalho e investigações do engenheiro elétrico inglês Oliver Heaviside. Seu trabalho envolvia linhas de transmissão.

Para agilizar o trabalho de todos no escritório, sua tarefa nesta seção é aplicar a técnica de frações parciais para determinar Transformadas Inversas de Laplace daquelas funções mais utilizadas por vocês. Por exemplo, como determinar a

Transformada Inversa de Laplace de uma função do tipo $F_1(s)=\dfrac{s^2-4s+5}{s(s+1)(s+2)}$?

Para isto, apresentaremos algumas técnicas para determinar a Transformada de Laplace Inversa, bem como o comportamento da Transformada de Laplace Inversa quando $s \to \infty$.

Não pode faltar

Para que possamos resolver as equações diferenciais com coeficientes constantes, precisamos "devolver" as funções transformadas *F*(*s*) para as funções originais *f*(*t*). Isto é realizado com a Transformada Inversa de Laplace.

Assimile

Definição da Transformada Inversa de Laplace

Seja *F*(*s*) uma função que é uma Transformada de Laplace de alguma função *f*(*t*): $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$. Diz-se que *f*(*t*) é a Transformada Inversa de Laplace de *F*(*s*) e denota-se $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Você já viu na seção anterior que $\mathcal{L}\{3\} = \dfrac{3}{s}$. Então vale que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s}\right\} = 3$.

De forma análoga, consultando a tabela de Transformadas de Laplace da Seção 4.1, temos:

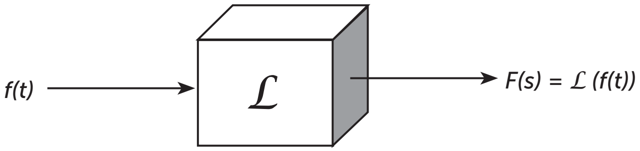
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1;\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k!}{s^{k+1}}\right\} = t^k, k \geq 0;\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-c}\right\} = e^{ct}, s > c;$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at);\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = sen(at);\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh(at);$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\} = senh(at).$$

Lembra da figura da Seção 4.1? Na "máquina" que produz Transformadas de Laplace "entra" uma função *f*(*t*) e "sai" uma função $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

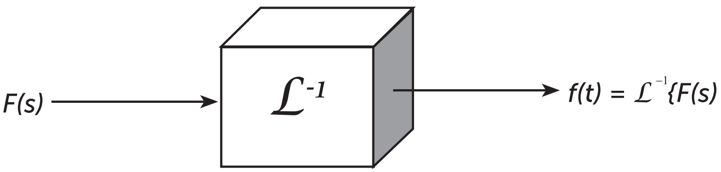
Figura 4.10 | Transformada de Laplace



Fonte: elaborada pelo autor.

A transformada inversa de Laplace faz o movimento "ao contrário": "entra" na "máquina" de Transformadas Inversas de Laplace uma função *F*(*s*) e "sai" da "máquina" uma função $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Figura 4.11 | Transformada Inversa de Laplace



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^7}\right\}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-11}\right\}$.

Resolução: em $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^7}\right\}$ o expoente no denominador é 7, então

$k+1=7$, $k=6$. Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k!}{s^{k+1}}\right\}=t^k$, multiplicamos e dividimos a

expressão anterior por 6!: $\frac{1}{6!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6!}{s^7}\right\}=\frac{1}{6!}t^6$. Para o cálculo de $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-11}\right\}$, da lista de transformadas inversa apresentada, destacamos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}=\cosh(at)$.

Assim, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-11}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-\left(\sqrt{11}\right)^2}\right\}=cosh\left(\sqrt{11}t\right)$.

Faça você mesmo

Calcule:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-3}\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+4}\right\}$

Linearidade da Transformada Inversa de Laplace

A transformada Inversa de Laplace também é linear. Se $\alpha,\beta\in$ são constantes e $F(s)$ e $G(s)$ são as Transformadas de Laplace das funções *f*(*t*) e g(t) (respectivamente), então:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\}=\alpha\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}+\beta\,\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Linearidade da Transformada Inversa de Laplace

A transformada Inversa de Laplace também é linear. Se $\alpha, \beta \in$ são constantes e $F(s)$ e $G(s)$ são as Transformadas de Laplace das funções *f*(*t*) e g(t) (respectivamente), então:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\,\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Exemplo: podemos aplicar a propriedade de Linearidade da Transformada Inversa de Laplace no cálculo das inversas.

Veja a seguir como determinar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^3+5s^2+80}{s^3(s^2+16)}\right\}$.

Temos que $\dfrac{2s^3+5s^2+80}{s^3(s^2+16)} = \dfrac{A}{s^3} + \dfrac{B}{(s^2+16)} \Rightarrow \dfrac{2s^3+5s^2+80}{s^3(s^2+16)} = \dfrac{As^2+A.16}{s^3} + \dfrac{Bs^3}{(s^2+16)}$.

A = 5 e B = 2. Assim, $\dfrac{2s^3+5s^2+80}{s^3(s^2+16)} = \dfrac{5}{s^3} + \dfrac{2}{(s^2+16)}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3+5s^2+80}{s^3(s^2+16)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^3} + \frac{2}{(s^2+16)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+16)}\right\} = \frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{2}sen(4t)$$

Faça você mesmo

Calcule: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^3+3s-18}{s^2(s^2+9)}\right\}$

Pesquise mais

Você poderá obter mais informações sobre a Transformada de Laplace e a Transformada Inversa de Laplace acessando o site da UEL. Disponível em: <http://www.uel.br/pessoal/marciojorge/arquivos/Laplace.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2016.

Decomposição em frações parciais

A ferramenta de decomposição em frações parciais é bastante importante nos cálculos da Transformada Inversa de Laplace. Destacaremos as situações: (I) quando o denominador apresenta fatores lineares distintos; (II) quando o denominador apresenta fatores lineares repetidos; (III) quando o denominador apresenta fator quadrático que não pode ser fatorado, com fatores quadráticos distintos; e (iv) quando o denominador possui fatores quadráticos repetidos.

Caso 1: denominador com *k* fatores lineares distintos.

Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s^2-3s+2}\right\}$

Resolução: fatoramos s^2-3s+2. A equação de 2º Grau $s^2-3s+2=0$ apresenta as raízes $s_1=1$ e $s_2=2$, então $s^2-3s+2=(s-1)(s-2)$. Escrevemos:

$$\frac{5}{s^2-3s+2}=\frac{5}{(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}$$

$$\frac{5}{s^2-3s+2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}=\frac{A(s-2)+B(s-1)}{(s-1)(s-2)}=\frac{(A+B)s-2A-B}{(s-1)(s-2)}$$

Observando os numeradores à esquerda e à direita, temos as equações: $A+B=0$

(pois não há termos em *s* no numerador de $\dfrac{5}{s^2-3s+2}$ e $-2A-B=5$ (pois temos

que a constante no numerador em $\dfrac{5}{s^2-3s+2}$ é 5). Resolvendo o sistema em *A* e

B, temos $A=-5$ e $B=5$. Da linearidade da Transformada Inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2-3s+2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-5}{s-1}+\frac{5}{s-2}\right\}=-5\quad\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+5\quad\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=-5e^{t}+5e^{2t}$$

Caso 2: denominador com fatores lineares repetidos.

Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-2)^2(s+1)^3}\right\}$

Resolução: vamos reescrever $\frac{s-3}{(s-2)^2(s+1)^3}$ como:

$$\frac{s-3}{(s-2)^2(s+1)^3}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s+1}+\frac{D}{(s+1)^2}+\frac{E}{(s+1)^3}\text{, então:}$$

$$s-3=A(s-2)(s+1)^3+B(s+1)^3+C(s-2)^2(s+1)^2+D(s-2)^2(s+1)+E(s-2)^2;$$

$$s-3=(s+1)^3\left[A(s-2)+B\right]+(s-2)^2\left[C(s+1)^2+D(s+1)+E\right].$$

O fator $(s+1)$ aparece três vezes e precisamos de três equações relacionadas com este fator. Assim, derivamos a igualdade anterior duas vezes para obter estas duas outras equações. O fator $(s-2)$ aparece duas vezes, então precisamos derivar mais uma vez a identidade para obter esta outra equação. Substituímos $s=-1$ e $s=2$ para obter as constantes A, B, C, D e E.

Substituindo $s=-1$: $-1-3=(0)^3\left[A(-3)+B\right]+(-3)^2\left[C(0)^2+D(0)+E\right]$

$$-4=9E\Rightarrow E=-\frac{4}{9}$$

Substituindo $s=2$: $2-3=(3)^3\left[A(0)+B\right]+(0)^2\left[C(3)^2+D(3)+E\right]$

$$-1=27B\Rightarrow B=-\frac{1}{27}$$

Derivando a primeira vez: $1=3(s+1)^2\left[A(s-2)+B\right]+(s+1)^3A+$

$$2(s-2)\left[C(s+1)^2+D(s+1)+E\right]+(s-2)^2\left[2C(s+1)+D\right].$$

Substituímos $s=-1$: $1=-6E+9D$. Substituindo $E=-4/9$, obtemos $D=-5/27$. Substituímos $s=2$: $1=27B+27A$. Substituindo $B=-1/27$, obtemos: $A=2/27$.

Derivando a segunda vez: $0 = 6(s+1)\left[A(s-2)+B\right] + 3A(s+1)^2 + 3(s+1)^2 A +$
$2\left[C(s+1)^2 + D(s+1) + E\right] +$

$$2(s-2)\ \left[2C(s+1)+D\right] + 2(s-2)\left[2C(s+1)\ \ +D\right] + 2C(s-2)^2 \cdot$$

Fazemos $s=-1$: $0 = 2E - 12D + 18C \Rightarrow C = -\dfrac{2}{27}$.

Então: $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-2)^2(s+1)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{27}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{27}}{(s-2)^2} + \frac{-\frac{2}{27}}{s+1} + \frac{-\frac{5}{27}}{(s+1)^2} + \frac{-\frac{4}{9}}{(s+1)^3}\right\} =$$

$$\frac{2}{27}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{1}{27}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} - \frac{2}{27}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{5}{27}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \frac{4}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} =$$

$$= \frac{2}{27}e^{2t} - \frac{1}{27}te^{2t} - \frac{2}{27}e^{-t} - \frac{5}{27}te^{-t} - \frac{2}{9}t^2e^{-t}$$

Caso 3: fatores quadráticos que não podem ser fatorados.

Quando temos fatores quadráticos irredutíveis aparecendo uma vez no

denominador, teremos frações parciais da forma: $\dfrac{As+B}{as^2+bs+c}$. As constantes A e B devem ser determinadas.

Caso 4: fatores quadráticos repetidos.

Por fim, se aparecerem potências de fatores quadráticos irredutíveis no denominador, teremos uma soma de frações parciais:

$$\frac{A_1s+B_1}{as^2+bs+c} + \frac{A_2s+B_2}{\left(as^2+bs+c\right)^2} + \ldots + \frac{A_ns+B_n}{\left(as^2+bs+c\right)^n}$$

Pesquise mais

Você poderá saber mais detalhes e encontrar mais exemplos sobre a utilização do método de decomposição em frações parciais para a Transformada Inversa de Laplace em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/fourier/laplace.pdf> (páginas 19 e seguintes). Acesso em: 11 jul. 2016.

Transformada de Laplace de derivadas

Assimile

Considere funções f, f', ..., $f^{(k)}$ todas de ordem exponencial e contínuas no intervalo $[0,\infty)$. Suponha ainda que a função $f^{(k+1)}$ seja contínua por partes no intervalo $[0,\infty)$. Então vale que:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(k+1)}(t)\right\} = s^{k+1}F(s) - s^k f(0) - s^{k-1}f'(0) - \ldots - f^{(k)}(0),$$

sendo que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Podemos particularizar o resultado anterior para a primeira derivada. Fica assim:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \text{, onde } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} .$$

Deve ser destacada, na igualdade anterior, uma das propriedades notáveis da Transformada de Laplace em relação aos outros métodos de resolução de EDO's lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes: a condição inicial já "sai" da transformada.

Para a segunda derivada ficamos com a expressão:

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$. E para a terceira derivada:

$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - sf(0) - sf'(0) - f''(0)$.

Exemplo: seja $f(t) = sen(2t)$. Temos que $f'(t) = 2cos(2t)$. Além disso,

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{sen(2t)\} = \dfrac{2}{s^2+4}$. Assim, $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{2cos(2t)\} =$

$$s\mathcal{L}\{sen(2t)\} - f(0) = \frac{2s}{s^2+4} - sen(0) = \frac{2s}{s^2+4} .$$

Propriedade de convolução

Inicialmente destacamos que não é válida, para Transformadas de Laplace, uma propriedade de "fatoração": a transformada de Laplace do produto $f(t) \cdot g(t)$ não é o produto das Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} \neq \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Reflita

Por que não é verdade que $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$? Qual contraexemplo poderia atestar isso?

O que existe mais próximo desta ideia de "transformada do produto igual ao produto das transformadas" é a propriedade de convolução, como veremos agora, o Teorema da Convolução.

Assimile

Teorema da convolução: considere *f* e *g* funções contínuas por partes, de ordem exponencial tais que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$. Então:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-x)g(x)dx\right\} = F(s)G(s).$$

A relevância deste resultado é que ele facilita o cálculo de Transformadas Inversas de Laplace. Em alguns casos, podemos calcular a Transformada Inversa de Laplace tanto por frações parciais quanto por convolução. No entanto, o cálculo utilizando o Teorema de Convolução pode ser mais simples.

Define-se a convolução de *f* com *g* por: $(f*g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx$.

Então, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f*g)(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$.

De acordo com Boyce e DiPrima (2015, p. 180), "as convoluções aparecem em diversas aplicações em que o comportamento do sistema em qualquer instante *t* não depende apenas do estado no instante *t*, mas também de sua história passada".

Outro aspecto da convolução é que ela funciona como um "produto generalizado". Por vezes, podemos decompor uma Transformada de Laplace *H*(*s*) no produto de duas outras transformadas *H*(*s*) = *F*(*s*) . *G*(*s*) e estas transformadas *F*(*s*) e *G*(*s*) podem ser de mais fácil transformação inversa que a transformada H(s).

Assimile

Não é verdade que o produto de Transformadas de Laplace seja igual à transformada de Laplace do Produto, contudo, se $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$, $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}$, então $\mathcal{L}\{f*g\}=F(s)G(s)$.

Reflita

Usando o teorema da convolução e o princípio da indução finita, é possível demonstrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-c)^{k+1}}\right\}=\dfrac{e^{ct}t^k}{k!}$ e $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{ct}t^k}{k!}\right\}=\dfrac{1}{(s-c)^{k+1}}$.

Como será essa demonstração?

Valem também as seguintes propriedades para a fórmula de convolução:

I) Comutativa: $(f*g)(t)=(g*f)(t)$.

II) Associativa: $(f(t)*g(t))*h(t)=f(t)*(g(t)*h(t))$.

III) Distributiva: $f(t)*(g(t)+h(t))=f(t)*g(t)+f(t)*h(t)$.

IV) $f(t)*0=0*f(t)=0$.

Contudo, não é verdade que $f(t)*1=f(t)$ (Consulte Boyce e DiPrima (2015, p. 180).

Pesquise mais

Seguem duas sugestões de vídeos para você conhecer mais sobre convolução:

1) Convolução na Transformada de Laplace. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=8C2F_c0kDIc>. Acesso em: 23 ago. 2016.

2) A convolução e a Transformada de Laplace. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/differential-equations/laplace-transform/convolution-integral/v/the-convolution-and-the-laplace-transform>. Acesso em: 8 ago. 2016.

Sem medo de errar

Para que você, no escritório de engenharia, possa resolver uma EDO com Transformadas de Laplace, deverá determinar a função $x(t)$ sabendo que $x(s) = \mathcal{L}\{x\}$.

Você observou que é bastante frequente encontraremos expressões de Transformadas de Laplace na forma de funções racionais $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, em que $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios.

A determinação da transformada Inversa de Laplace de $F(s)$ pode ser realizada utilizando-se a técnica de frações parciais. Como já vimos, podemos dividir o problema da utilização de frações parciais para determinação da Transformada Inversa de Laplace em quatro casos: fatores lineares distintos, fatores lineares repetidos, fatores quadráticos distintos e fatores quadráticos repetidos.

Sua tarefa agora é determinar a transformada Inversa de Laplace por expansão

em frações parciais. Vamos supor que $F_1(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, com P e Q polinômios. Pelo

teorema já visto na Seção 4.1, obrigatoriamente $F(s) \to 0$ para $s \to \infty$. Assim, vamos estudar apenas os casos em que o grau de P for menor que o grau de Q e não existem fatores em comum entre os dois polinômios para os casos a seguir.

Você deverá apresentar um procedimento para determinar a Transformada Inversa de Laplace para:

Caso 1 (fatores lineares distintos): suponha que o polinômio $Q(s)$ tenha apenas fatores lineares todos distintos, ou seja, podemos escrever $Q(s) = (s - a_1)(s - a_2)\ldots(s - a_n)$. Utilize este procedimento para determinar a transformada Inversa de Laplace para $F_1(s) = \dfrac{s^2 - 4s + 5}{s(s+1)(s+2)}$.

Resolução:

Para que possamos resolver esse primeiro caso, decompomos F na forma:

$F(s)=\dfrac{A_1}{s-a_1}+\ldots+\dfrac{A_n}{s-a_n}$. Determinamos cada um dos A_1 por igualdade de polinômios. Daí, efetuamos a transformada Inversa de Laplace de cada uma das parcelas $\dfrac{A_1}{s-a_1}$, ..., $\dfrac{A_n}{s-a_n}$.

Vejamos com o exemplo: $F_1(s)=\dfrac{s^2-4s+5}{s(s+1)(s+2)}$

Observando que o denominador $Q(s)$ possui apenas fatores lineares distintos, escrevemos:

$$F_1(s)=\frac{s^2-4s+5}{s(s+1)(s+2)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+1}+\frac{A_3}{s+2}$$

Efetuando a adição do lado direito:

$$\frac{s^2-4s+5}{s(s+1)(s+2)}=\frac{A_1(s+1)(s+2)+A_2s(s+2)+A_3s(s+1)}{s(s+1)(s+2)}=$$

$$\frac{(A_1+A_2+A_3)s^2+(2A_1+2A_2+A_3)s+2A_1}{s(s+1)(s+2)}$$

Utilizando a igualdade de polinômios nos numeradores temos o sistema:

$$\begin{cases}(A_1+A_2+A_3)=1\\(2A_1+2A_2+A_3)=-4\\2A_1=5\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $A_1=\dfrac{5}{2}$, $A_2=-\dfrac{15}{2}$, $A_3=6$ e:

$$F_1(s)=\frac{s^2-4s+5}{s(s+1)(s+2)}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{6}{s+2}$$

Por fim, $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{15}{2}e^{-t}+6e^{-2t}$.

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Frações parciais para determinar Transformada inversa de Laplace	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Uso de frações parciais na determinação da Transformada Inversa de Laplace.
3. Conteúdos relacionados	Frações parciais e Transformada Inversa de Laplace
4. Descrição da situação-problema	Uma das situações escolhidas por você para explicar para seus colegas de trabalho como determinar Transformada Inversa de Laplace originou-se de um problema de vibrações mecânicas. Foi desenvolvida uma equação diferencial para modelar estas vibrações. Para estudar as soluções desta equação diferencial, você utilizou a Transformada de Laplace. Uma parte importante da resolução do problema envolve a determinação da Transformada Inversa de Laplace. Nesta situação-problema, você vai utilizar a técnica de expansão em frações parciais para determinar a Transformada Inversa de Laplace para o Caso 2 (fatores lineares repetidos). Suponha que a Transformada de Laplace possa ser escrita como $F_2(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ com $Q(s)=(s-a_1)^{m_1}(s-a_2)^{m_2}(s-a_3)^{m_3}$ $(s-b_1)(s-b_2)\cdots(s-b_n)$. Como proceder para determinar a Transformada Inversa de Laplace para $F_2(s)=\dfrac{s}{(s-3)^2}$?

5. Resolução da situação-problema	Neste caso, teremos $F_2(s) = \dfrac{s}{(s-3)^2} = \dfrac{A_1}{s-3} + \dfrac{A_2}{(s-3)^2}$. Efetuamos a adição do lado direito: $\dfrac{s}{(s-3)^2} = \dfrac{A_1(s-3)+A_2}{(s-3)^2}$. Então: $\dfrac{s}{(s-3)^2} = \dfrac{A_1 s - 3A_1 + A_2}{(s-3)^2}$. Temos o sistema: $\begin{cases} A_1 = 1 \\ -3A_1 + A_2 = 0 \end{cases}$. Portanto, $A_2 = 3$ e $F_2(s) = \dfrac{1}{s-3} + \dfrac{3}{(s-3)^2}$. Logo, $\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = e^{-3t} + 3te^{-3t}$.

Faça valer a pena

1. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^7}\right\}$ e assinale a alternativa que contém o resultado:

a) $\dfrac{1}{6!}t^6$

b) $\dfrac{7}{6!}t^7$

c) $\dfrac{1}{5!}t^5$

d) $\dfrac{1}{7!}t^7$

e) $\dfrac{1}{8!}t^8$

2. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{12}{s^2+81}\right\}$ e assinale a alternativa correta.

a) $\dfrac{1}{12}sen(9t)$

b) $\dfrac{12}{9}sen(9t)$

c) $\dfrac{9}{12}sen(81t)$

d) $\dfrac{81}{12}sen(69t)$

e) $\dfrac{1}{9}sen(12t)$

3. Seja $f(t) = 3sen^2(t)$. Determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e assinale a alternativa que contém a resposta correta.

a) $\dfrac{2s}{s^2+6}$

b) $\dfrac{6}{s^2+4}$

c) $\dfrac{2}{s^2-4}$

d) $\dfrac{6}{s\left(s^2+4\right)}$

e) $\dfrac{4}{s\left(s^2-4\right)}$

Seção 4.3

Propriedades da Transformada de Laplace

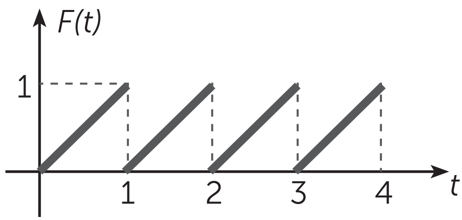
Diálogo aberto

Você já estudou o que é a Transformada de Laplace, na primeira seção desta unidade, e o que é a Transformada Inversa de Laplace, na segunda seção. Nesta seção, você continuará seu trabalho na empresa de soluções industriais. Neste momento, você deverá apresentar a seus colegas de trabalho diversas propriedades e teoremas sobre Transformadas de Laplace (e Transformadas Inversas de Laplace) que serão, posteriormente, utilizadas na resolução das equações diferenciais ordinárias resultantes dos projetos da empresa.

Veja a seguir um exemplo de uma equação diferencial com uma força externa periódica e seccionalmente contínua, associada com um dos projetos da empresa. Observe como as Transformadas de Laplace atuam nesta classe de problemas.

Imagine um carro em uma estrada esburacada. Como você acha que a indústria de suspensão pode avaliar o impacto dos buracos na suspensão do automóvel? Para estudar a influência dos buracos na suspensão do automóvel, a empresa de soluções industriais vai submeter a suspensão de um veículo a uma força externa do tipo dente de serra (veja a Figura 4.12).

Figura 4.12 | Força externa



Fonte: elaborada pelo autor.

Vejamos como fica estre problema na linguagem matemática: considere que a suspensão do automóvel possa ser modelada como um sistema mecânico com uma massa m conectada à uma mola com constante de elasticidade k. A mola possui uma de suas extremidades fixada na origem. O sistema admite uma constante de amortecimento b. Da Lei de Hooke, a força restauradora da mola é proporcional à distância x da mola da sua posição de equilíbrio. Considere ainda uma força externa atuando sobre a massa fixada à mola. Suponha que a força externa seja periódica e representada pelo gráfico da figura anterior. Este sistema pode ser representado pela equação diferencial:

$$mx'' + bx' + kx = F(t)$$

A empresa de soluções industriais em que você trabalha pretende que você apresente para seus colegas a Transformada de Laplace da força externa representada pela função dente de serra apresentada na figura anterior e que, além disso, você também apresente como se determina a Transformada de Laplace da função $F(kt)$, em que k é um número real dado.

Seu desafio nesta seção é utilizar as propriedades da Transformada de Laplace da função $F(t)$ apresentada anteriormente para poder posteriormente na última seção desta unidade, determinar a solução desta equação diferencial com este tipo de força externa. Vamos lá?

Não pode faltar

Nesta seção estudaremos diversas propriedades da Transformada de Laplace úteis para os cálculos na resolução de problemas de equações diferenciais. Entre estas propriedades, temos as de translação (ou deslocamento), Transformada de Laplace da função degrau, mudança de escala, Transformada de Laplace de derivadas, derivada de uma Transformada de Laplace, Transformada de Laplace de integrais, integrais de uma Transformada de Laplace, Transformada de funções periódicas, Transformada da função impulso unitário e os teoremas do valor inicial e final.

Assimile

Primeiro Teorema de Translação (ou de deslocamento)

Seja a um número real. Então é válido que:

$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$, onde $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$

Uma simples aplicação desse teorema é no cálculo de $\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cos(3t)\right\}$, pois é conhecido que $\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2+9}$. Então: $\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cos(3t)\right\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{s^2+4s+13}$.

Faça você mesmo

Utilize o primeiro teorema sobre deslocamento para mostrar que:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}t^n)\right\} = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}\ ;\quad \mathcal{L}\left\{e^{ct}\cos(bt)\right\} = \frac{s-c}{(s-c)^2+b^2}\ ;$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}sen(bt)\right\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

Função degrau unitário

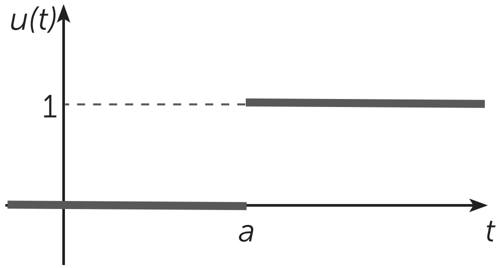
A função degrau unitário é utilizada para modelar matematicamente situações em que uma carga de valor fixado igual a 1 (um) é aplicada de forma muito rápida (praticamente instantânea). Após a aplicação da carga ela continua por um tempo longo.

Define-se a função degrau unitário por:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, t < a \\ 1, t > a \end{cases}$$

A função degrau unitário é descontínua no ponto $t = a$ (veja a figura a seguir).

Figura 4.13 | Função degrau unitário



Fonte: elaborada pelo autor.

Transformada de Laplace da função degrau unitário

Considere a função degrau unitário definida anteriormente. A Transformada de Laplace dessa função é dada por:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-as}}{s},\ s>0$$

Assimile

Segundo Teorema de Translação (ou de deslocamento)

Seja $F(s)=\mathcal{L}\{f_1(t)\}$ e $f_2(t)=\begin{cases} f_1(t-a), & t>a \\ 0, & t<a \end{cases}$. Então, para todo a>0, vale que

$$\mathcal{L}\{f_2(t)\} = e^{-as}F(s)$$

Este segundo Teorema apresenta o resultado de uma translação (ou deslocamento) no tempo.

Exemplificando

Considere $f(t)=\begin{cases} t^3, t\geq 4 \\ 0, t<4 \end{cases}$. Determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$ usando o segundo

teorema de Translação.

Resolução: precisamos escrever a função $f(t)$ na forma $u(t-4)g(t-4)$. Para que a função *g*(*t*) seja igual à função *f*(*t*) para $t\geq 4$ deve ser deslocada quatro unidade para a direita: $g(t)=(t+4)^3$. Podemos verificar esta afirmação escrevendo: $g(t-4)=(t-4+4)^3=t^3=f(t)$, $t\geq 4$.

Temos que $g(t)=(t+4)^3=t^3+12t^2+48t+64$. Assim,

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=\mathcal{L}\{t^3+12t^2+48t+64\}=\mathcal{L}\{t^3\}+\mathcal{L}\{12t^2\}+\mathcal{L}\{48t\}+\mathcal{L}\{64\}=$$

$$\frac{3!}{s^4}+\frac{12\cdot 2!}{s^3}+\frac{48}{s^2}+\frac{64}{s};$$

$$G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}=\frac{6}{s^4}+\frac{24}{s^3}+\frac{48}{s^2}+\frac{64}{s}.$$

Do segundo Teorema da Translação temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{u(t-4)g(t-4)\}=e^{-4s}G(s)=e^{-4s}\left[\frac{6}{s^4}+\frac{24}{s^3}+\frac{48}{s^2}+\frac{64}{s}\right].$$

Valem as seguintes propriedades acerca de Transformadas de Laplace de funções que envolvam a função degrau unitário.

Teorema: se existe $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ para $s>C\geq 0$, com $a>0$ e $u(t-a)$ função degrau unitário, então: $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-C)\}=e^{-Cs}\mathcal{L}\{f(t)\}=e^{-Cs}F(s)$, $s>a$.

Por outro lado, se $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então: $u(t-a)f(t-C)=\mathcal{L}^{-1}\{e^{-Cs}F(s)\}$.

Propriedade de mudança de escala (ou homotetia)

Se $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ então: $\mathcal{L}\{f(kt)\}=\dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{s}{k}\right)$, $k>0$.

A propriedade de mudança de escala pode ser interpretada da seguinte forma: se "comprimirmos" a variável *t* (ou seja, se multiplicarmos *t* por um fator 0 < *k* < 1, então a Transformada de Laplace será "esticada". Por outro lado, se a constante *k* for maior que 1 (a variável *t* está sendo "esticada", então a Transformada de Laplace será "comprimida"). Outra forma de se apresentar a propriedade de mudança de escala é a seguinte: $\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{k}\right)\right\} = kF(ks), k > 0$.

Exemplificando

Determine $\mathcal{L}\{sen(5t)\}$ usando que $\mathcal{L}\{sen(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$ e a propriedade de mudança de escala

Resolução: neste exemplo temos que $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Assim,

$$F(s/5) = \frac{1}{(s/5)^2+1} = \frac{25}{s^2+25}.$$

Da propriedade de mudança de escala,

$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right) \Rightarrow \mathcal{L}\{sen(5t)\} = \frac{1}{5}F\left(\frac{s}{5}\right) = \frac{1}{5}\frac{25}{s^2+25} = \frac{5}{s^2+25}.$$

Transformada de Laplace de derivadas

A Transformada de Laplace transforma derivadas de *f*(*t*) na multiplicação por *s*:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0) \quad ; \quad \mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

E, para o caso geral temos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Derivada de uma Transformada de Laplace (ou multiplicação por potências de *t*)

Se n for um número natural, então: $\mathcal{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n}$.

Reflita

Você percebeu como a multiplicação de *f*(*t*) por potências de t tem como efeito a derivação das Transformadas de Laplace de *f*?

Veja como utilizar o resultado anterior para calcular $\mathcal{L}\{t^2\cos(5t)\}$. Antes,

contudo, vale lembrar que $\mathcal{L}\{\cos(5t)\} = \dfrac{s}{s^2+5^2} = \dfrac{s}{s^2+25}$. Fazemos n = 2 no

resultado anterior: $\mathcal{L}\{t^2\cos(5t)\} = (-1)^2 \dfrac{d^2F(s)}{ds^2}$. Então:

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+25}\right) =$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2-25}{\left(s^2+25\right)^2}\right) = \frac{(2s)\left(s^2+25\right)-\left(s^2-25\right)(2s)}{\left(s^2+25\right)^4} = \frac{100s}{\left(s^2+25\right)^4}.$$

Assim: $\mathcal{L}\{t^2\cos(5t)\} = \dfrac{100s}{\left(s^2+25\right)^4}$.

Faça você mesmo

Utilize o Teorema sobre Derivadas de transformadas para calcular $\mathcal{L}\{te^{-3t}sen(4t)\}$

Transformada de Laplace de integrais

Suponha que $f(t)$ seja uma função seccionalmente contínua e exponencial de ordem a e, além disso, considere $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Então é válido que:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Exemplificando

Sabendo que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s(s+c)}$, determine $f(t)$

Resolução: poderíamos usar decomposição em frações parciais, mas usaremos, neste exemplo, a Transformada de Laplace de integrais. Da tabela de Transformadas de Laplace sabemos que $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ e que

$$\mathcal{L}\left\{e^{-ct}\right\} = \frac{1}{s+c}.$$

Temos que se $g(t) = e^{-ct}$, então $\mathcal{L}\left\{\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-c\tau}\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\left[\frac{1}{s+c}\right]$ (pela Transformada de Laplace de integrais). Logo $f(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-c\tau}\,d\tau = \frac{1-e^{-ct}}{c}$ (BUTKOV, 1978).

Integral da transformada de Laplace (ou divisão por *t*)

Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Então: $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\,du$, $s > \gamma$

Com a condição de que exista o limite $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ esta propriedade é "inversa" da

multiplicação por potências de *t*. A divisão de *f*(*t*) por *t* tem como consequência, a realização de integrais da transformada de Laplace de *f*(*t*).

Transformada de Laplace de funções periódicas

Uma situação real na qual temos uma força externa periódica ocorre em circuitos elétricos: a voltagem pode ser uma função contínua por partes e periódica. Sobre Transformadas de Laplace de funções periódicas vale o seguinte Teorema:

Assimile

Considere *f* função de ordem exponencial e período *p*. Então:

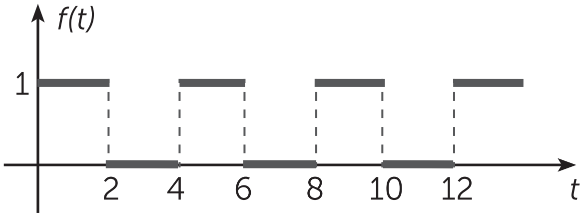
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^p e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-sp}}$$

Uma função importante em aplicações é a chamada "onda quadrada", cuja expressão, de período 4, é dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t < 4 \end{cases}$$

No restante da reta, $f(T+4) = f(t)$. Calcule a transformada de Laplace da função cujo gráfico está representado na figura a seguir.

Figura 4.14 | Gráfico de *f*(*t*)



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução: pelo teorema da transformada de uma função periódica, temos para $p = 4$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^4 e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-4s}} = \frac{1}{1-e^{-4s}}\left[\int_0^2 e^{-st}\,1dt + \int_2^4 e^{-st}\,0dt\right] =$$

$$\frac{1}{1-e^{-4s}}\left[\frac{1-e^{-2s}}{s}\right] = \frac{\left(1-e^{-2s}\right)}{s\left(1-e^{-2s}\right)\left(1+e^{-2s}\right)} = \frac{1}{s\left(1+e^{-2s}\right)}$$

A função impulso unitário (ou função delta de Dirac)

É frequente na engenharia a situação de sistemas mecânicos que sofrem a ação de uma força externa atuante durante um pequeno intervalo de tempo e grande intensidade. Pode ser um bate-estaca atuando em uma obra de construção civil, um martelo pregando um prego ou ainda uma tacada de golfe. Segundo Zill (2003), a função impulso unitário é uma função definida por várias sentenças da seguinte forma: $\delta_x\left(t-t_0\right)=\begin{cases}0, & 0 \le t < t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a}, & t_0 \le t < t_0 + a \\ 0, & t \ge t_0 + a\end{cases}$

Para modelar matematicamente aquela situação de uma força atuando por um brevíssimo intervalo de tempo e de grande intensidade, define-se como delta de Dirac o limite $\delta\left(t-t_0\right)=\lim\limits_{x\to 0}\delta_x\left(t-t_0\right)$. O delta de Dirac tem como propriedades:

I. $\delta\left(t-t_0\right)=\begin{cases}\infty, & t = t_0 \\ 0, & t \ne t_0\end{cases}$ II. $\int_0^{\infty}\delta\left(t-t_0\right)dt = 1$

Destacamos que não existe nenhuma função que possa satisfazer simultaneamente as condições I e II anteriores. Foge do escopo deste texto tratar de funções generalizadas (que é a formalização matematicamente rigorosa das funções impulso). Este tratamento rigoroso deve-se ao matemático francês Laurent Schwartz (1915-2002) que o fez com o desenvolvimento da Teoria das Distribuições.

Transformada de Laplace de funções impulso

Para se determinar a Transformada de Laplace da função delta de Dirac, devemos supor (formalmente) que a Transformada de Laplace da função impulso é representada pelo seguinte limite: $\mathcal{L}\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\mathcal{L}\left\{\delta_x\left(t-t_0\right)\right\}$

Além disso, se efetuarmos a integral imprópria para a função impulso, teremos como resultado : $\mathcal{L}\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\}=e^{-st_0}$, para $t > t_0$

Assimile

Teorema do valor inicial: seja *f*(*t*) uma função que não seja descontínua em $t = 0$. Então, *f*(*t*) para $t = 0$ é dado por:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s), \text{ com } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Teorema do valor final: se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ então o valor final de *f*(*t*) é dado pelo limite:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Uma aplicação imediata do teorema do valor inicial é para o cálculo de *f*(0)

dado que $F(s) = \dfrac{5s}{s^2 - 16} + \dfrac{4e^{-3s}}{s} + \dfrac{4s}{s^2 + 81}$. Qual seria então o valor inicial f(0) neste caso? Suponha que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

Para resolvermos, aplicamos o teorema do valor inicial:

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{5s^2}{s^2 - 16} + \frac{4se^{-3s}}{s} + \frac{4s^2}{s^2 + 81} = 5 + 0 + 4 = 9$$

Pesquise mais

Complemente seus estudos com o material indicado a seguir:

Pacheco, Antonio Luiz Schalata. **Transformada de Laplace**: algumas aplicações. Monografia submetida à UFSC. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/121197/Antonio_Luiz_Schalata_%20Pacheco.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 ago. 2016.

Sem medo de errar

Vamos retomar o problema proposto inicialmente, visto que agora temos embasamento suficiente para tratá-lo. Em primeiro lugar, vamos determinar a transformada de Laplace da função periódica em formato dente de serra. Vejamos como:

A função *f*(*t*) é definida por: $f(t) = t$, $0 \le t \le 1$ e $f(t+1) = f(t)$. Essa função é periódica de período 1. Utilizamos a fórmula para transformada de Laplace de funções periódicas:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^p e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-sp}} = \frac{\int_0^1 e^{-st}\, t\, dt}{1-e^{-s\cdot 1}} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$$

Agora, estamos em condições de utilizar a propriedade de mudança de escala para determinar a Transformada de Laplace da função *F*(*kt*). Veja como isso é feito:

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ então: $\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right), k > 0$. Como $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$,

então:

$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k}\left(\frac{k^2}{s^2} - \frac{k^2 e^{-\frac{s}{k}}}{s^2} - \frac{k e^{-\frac{s}{k}}}{s}\right)$$

Com isso, você tem informações suficientes para apresentar aos seus colegas de empresa. Que tal criar uma apresentação passo a passo com os principais pontos a serem tratados?

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Aplicando o teorema de Transformada de Laplace de Derivadas	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.

2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar o Teorema de Transformada de Laplace de derivadas.
3. Conteúdos relacionados	Transformada de Laplace
4. Descrição da situação-problema	Possivelmente, a propriedade mais relevante da Transformada de Laplace para a resolução de equações diferenciais ordinárias seja o resultado referente à relação entre $\mathcal{L}\{f(t)\}$, $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}$ e $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\}$ Considere a equação diferencial $ax''+bx'+cx=F(t)$, em que a, b e c são constantes dadas e *F*(*t*) é uma força externa. Aplique a Transformada de Laplace a esta equação e escreva a Transformada de Laplace da função incógnita $x(t)$ em termos da Transformada de Laplace da força externa *F*(*t*) e da expressão resultante da transformada de Laplace da EDO. O teorema da Transformada de Laplace de derivadas foi importante aqui?
5. Resolução da situação-problema	É importante que você fique tranquilo quanto a este problema. A Seção 4.4 tratará com muito mais detalhes o que estamos apresentando aqui apenas como um “aperitivo”. O Teorema da Transformada de Laplace é fundamental para responder à questão. Vejamos: $\mathcal{L}\{ax''+bx'+cx\}=\mathcal{L}\{F(t)\}$ Aplicamos a Transformada de Laplace dos dois lados da EDO. Do lado direito escrevemos simplesmente: $\mathcal{L}\{F(t)\}=G(s)$. Em seguida, aplicamos a linearidade da Transformada de Laplace: $\mathcal{L}\{ax''+bx'+cx\}=a\mathcal{L}\{x''\}+b\mathcal{L}\{x'\}+c\mathcal{L}\{x\}$ Escrevemos: $\mathcal{L}\{x\}=X(s)$. Agora aplicamos o teorema da Transformada de Laplace de derivadas: $a\mathcal{L}\{x''\}=a\left[s^2X(s)-sx(0)-x'(0)\right] \Rightarrow$ $b\mathcal{L}\{x'\}=b\left[sX(s)-x(0)\right]$ Então: $\mathcal{L}\{ax''+bx'+cx\}=G(s)$ $a\left[s^2X(s)-sx(0)-x'(0)\right]+b\left[sX(s)-x(0)\right]+cX(s)=G(s)$ $as^2X(s)-asx(0)-ax'(0)+bsX(s)-bx(0)+cX(s)=G(s)$ $\left(as^2+bs+c\right)X(s)-ax'(0)-(as+b)x(0)=G(s)$ Então: $\left(as^2+bs+c\right)X(s)=G(s)+ax'(0)+(as+b)x(0)$. E, finalmente:

	$X(s)=\dfrac{G(s)+ax'(0)+(as+b)x(0)}{(as^2+bs+c)}$

Faça valer a pena

1. O primeiro teorema de translação também conhecido como propriedade de amortecimento facilita em muito os cálculos de transformadas de Laplace (BUTKOV, 1978). Considerando que *f*(*t*) seja "amortecida" pelo fator exponencial e^{-at}, sua transformada de Laplace apresentará um deslocamento para a esquerda em relação à nova variável. Utilize o 1º Teorema do deslocamento para determinar a transformada de Laplace de $f(t)=e^{3t}t^2$. Depois, marque a alternativa que contém tal transformada.

a) $\mathcal{L}\left\{e^{3t}t^2\right\}=\dfrac{2}{s^2+3}$

b) $\mathcal{L}\left\{e^{3t}t^2\right\}=\dfrac{3}{(s-2)^5}$

c) $\mathcal{L}\left\{e^{3t}t^2\right\}=-\dfrac{2}{(s+2)^3}$

d) $\mathcal{L}\left\{e^{3t}t^2\right\}=\dfrac{6}{(s-3)^3}$

e) $\mathcal{L}\left\{e^{3t}t^2\right\}=\dfrac{2}{(s-3)^3}$

2. Segundo Butkov (1978, p. 186), "A característica fundamental da Transformada de Laplace, ocasionada pela própria natureza da integral de Laplace, é que duas funções idênticas em $0\le t<c$, mas distintas em outros pontos, possuem a mesma Transformada de Laplace". Esta característica está relacionada com o segundo teorema do Deslocamento.

Considere a função $f(t)=\begin{cases} cos\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right), & t>\dfrac{\pi}{3} \\ 0, & t<\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$. Então, a transformada de Laplace de *f*(*t*) é dada por:

a) $e^{-\frac{2\pi}{3}s}\,\dfrac{s}{s^2-1}$

b) $e^{-\frac{\pi}{3}s}\,\dfrac{s}{s^2+1}$

c) $e^{-s}\,\dfrac{s}{s^2+4}$

d) $e^{\frac{\pi}{3}s}\,\dfrac{3}{s^2+1}$

e) $e^{-\pi s}\,\dfrac{s}{s^2+4}$

3. A transformada de Laplace possui como característica distintiva, a facilidade operacional no tratamento de funções seccionalmente contínuas. Considere $u(t)$ a função degrau. Seja a função $f(t)=(t-7)^2\,u(t-7)$. Então, a transformada de Laplace de *f* é:

a) $-\dfrac{3}{s^2}e^{-7s}$

b) $\dfrac{6}{(s+7)^3}e^{7s}$

c) $\dfrac{2}{s^3}e^{-7s}$

d) $\dfrac{6}{(s-7)^3}e^{-3s}$

e) $\dfrac{1}{(s-7)^6}e^{-5s}$

Seção 4.4

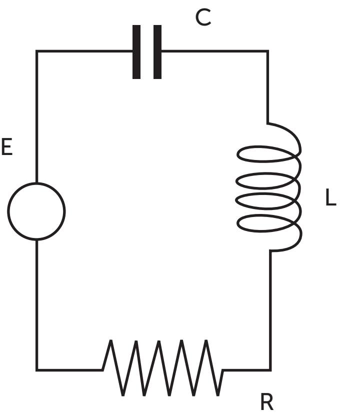
Transformada de Laplace e problemas de valor inicial

Diálogo aberto

Olá, aluno! Tudo bem? Nesta seção, concluiremos nossa Unidade 4 sobre Transformadas de Laplace. O percurso que fizemos nestas quatro seções culmina nas soluções de EDOs não homogêneas com a força externa podendo ser uma função seccionalmente contínua, periódica ou do tipo impulso.

Você já estudou várias técnicas para efetuar a Transformada de Laplace e a "voltar", ou seja, efetuar a Transformada Inversa de Laplace: os teoremas de deslocamento, as frações parciais, o teorema da convolução, dentre inúmeras outras técnicas. Nesta seção, você, como colaborador da empresa de soluções industriais, deverá apresentar para seus colegas como resolver determinados problemas de engenharia que resultam em EDOs não homogêneas. Em particular, vocês vêm trabalhando com alguns tipos de sistemas mecânicos e sistemas elétricos. Na figura a seguir, o resistor é representado pela letra *R*, o indutor pela letra *L* e o capacitor pela letra *C*. A fonte é representada por *E*. Observe que em um circuito elétrico podemos ter soluções que apresentam periodicidade, dependendo dos valores numéricos de seus componentes.

Figura 4.15 | Circuito elétrico Resistor-Indutor-Capacitor (RLC)



Fonte: elaborada pelo autor.

A empresa de vocês vem sendo chamada para prestar consultoria para sistemas elétricos para os quais a força externa é periódica ou uma exponencial decrescente. Em especial, é do interesse dos engenheiros projetistas estudar o comportamento da solução da equação diferencial após um tempo suficientemente longo. Você, na sua atividade profissional, será chamado a efetuar este tipo de análise nas soluções obtidas: qual o comportamento da solução da equação diferencial conforme modificamos a força externa?

No sistema em série da figura a anterior, temos um resistor com resistência 16 ohms, um capacitor de 0,01 farads e um indutor de 1 henry. Suponha que um gerador seja ligado, também em série, com $E(t)=60sen(5t)$ volts. No instante inicial ($t=0$), a carga no capacitor e a corrente no circuito são nulas.

No resistor, a queda de potencial é RI, no capacitor é $\frac{Q}{C}$ e no indutor é $L\frac{dI}{dt}$

A força eletromotriz é $V(t)$. Usando a 2ª Lei de Kirchoff temos a equação diferencial:

$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=V(t)$. Usando ainda que $I=\frac{dQ}{dt}$, temos que $\frac{dI}{dt}=\frac{d^2Q}{dt^2}$ a equação diferencial fica:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V(t)$$

Com condições iniciais $Q(0)=Q_0$ e $Q'(0)=I_0$. Assim, você tem uma equação diferencial linear não homogênea de 2ª Ordem, com coeficientes constantes, para a qual também poderemos aplicar a técnica de Transformada de Laplace.

Seu desafio nesta seção é mostrar para seus colegas como resolver a equação diferencial definida pelo circuito da figura apresentada anteriormente usando Transformada de Laplace. Para tratar esta situação-problema, você deverá articular os conteúdos das seções anteriores desta unidade com as técnicas para resolução de equações diferenciais com Transformadas de Laplace.

Não pode faltar

Como já informamos nas seções anteriores, a Transformada de Laplace é utilizada na resolução de equações diferenciais com coeficientes constantes, com forças externas seccionalmente contínuas, periódicas ou tipo impulso.

Equações diferenciais não homogêneas com força externa (caso geral)

Considere o Problema de Valor inicial (PVI) constituído por uma equação diferencial linear de 2ª ordem não homogênea:

$$ax'' + bx' + cx = F(t)$$

Em que *a, b* e *c* são constantes dadas, com condições iniciais: $x(0) = x_0$ e $x'(0) = x_0'$ com x_0 e x_0' constantes dadas. Para determinar a solução deste PVI, seguiremos os passos descritos a seguir:

Assimile

Passo 1: aplicamos a Transformada de Laplace aos dois lados da equação e temos: $\mathcal{L}\{ax'' + bx' + cx\} = \mathcal{L}\{F(t)\}$.

Passo 2: aplicando na equação anterior a linearidade da Transformada de Laplace: $a\mathcal{L}\{x''\} + b\mathcal{L}\{x'\} + c\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{F(t)\}$.

Passo 3: considere que $\mathcal{L}\{F(t)\} = G(s)$ e que $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, e, do Teorema de Transformada de Laplace de derivadas da Seção 4.3, temos:

$$a\left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] + b\left[sX(s) - x(0)\right] + cX(s) = G(s);$$

$$as^2X(s) - asx(0) - ax'(0) + bsX(s) - bx(0) + cX(s) = G(s);$$

$$\left(as^2 + bs + c\right)X(s) - (as + b)x(0) - ax'(0) = G(s);$$

$$X(s) = \frac{G(s) + (as + b)x(0) + ax'(0)}{\left(as^2 + bs + c\right)}.$$

Passo 4: agora, deve-se determinar a Transformada Inversa de Laplace de $X(s)$ para determinar a solução $x(t)$ da equação diferencial.

Após este exemplo com a ideia geral do processo, vejamos um exemplo com valores numéricos.

Exemplificando

Considere a equação diferencial $x''-3x'+2x=8e^{2t}$, com: $x(0)=3$ e $x'(0)=2$.

Resolução: aplicamos a Transformada de Laplace aos dois lados da equação:

$$\mathcal{L}\{x''-3x'+2x\}=\mathcal{L}\left\{8e^{t}\right\}\Rightarrow s^2X(s)-sx(0)-x'(0)-3sX(s)-3x(0)+2X(s)=\frac{8}{s-2}$$

Substituímos as condições iniciais na equação anterior, temos:

$$\left(s^2-3s+2\right)X(s)-3s-2-9=\frac{8}{s-2}\Rightarrow X(s)=\frac{3s^2+5s-14}{(s-2)\left(s^2-3s+2\right)}=\frac{3s^2+5s-14}{(s-2)(s-1)(s-2)}$$

Usando frações parciais na equação anterior (observe que temos um fator linear repetido):

$$X(s)=\frac{3s^2+5s-14}{(s-2)(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s-1}$$

Multiplicamos os dois lados da equação anterior por $(s-2)(s-1)(s-2)$:

$$3s^2+5s-14=A(s-2)(s-1)+B(s-1)+C(s-2)^2$$

Fazendo s = 1: $C=-6$. Fazendo s = 2: $B=8$

Igualando os termos quadráticos: $3=A-6\Rightarrow A=9$. Então:

$$X(s)=\frac{9}{s-2}+\frac{8}{(s-2)^2}-\frac{6}{s-1}$$

Lembrando que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2}\right\}=te^{at}$, temos

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s-2}\right\}=9e^{2t}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{(s-2)^2}\right\}=8te^{2t}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s-1}\right\}=6e^{t}$, ou

seja, a solução fica: $x(t)=9e^{2t}+8te^{2t}-6e^{t}$.

Equações diferenciais não homogêneas com força externa descontínua

Considere o problema de valor inicial $ax''+bx'+cx=f(t)$, $x(0)=x_0$, $x'(0)=x'_0$, em que $f(t)$ é uma função seccionalmente contínua. Para resolver

este problema vamos usar a função degrau unitário: $u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geq a\end{cases}$

Suponha que tenhamos uma função $F(t)$ definida por várias sentenças. Por

exemplo: $f(t)=\begin{cases}f_1(t), & 0\leq t<a\\ f_2(t), & t\geq a\end{cases}$

Utilizando a função degrau unitário, podemos escrever $f(t)$ da seguinte forma: $f(t)=f_1(t)-u(t-a)f_1(t)+u(t-a)f_2(t)$

Se a função $f(t)$ fosse definida por três sentenças: $f(t)=\begin{cases}f_1(t), & 0\leq t<a\\ f_2(t), & a\leq t\leq b\\ f_3(t), & t\geq b\end{cases}$

Então teríamos:

$$f(t)=f_1(t)-u(t-a)f_1(t)+u(t-a)f_2(t)-u(t-b)f_2(t)+u(t-b)f_3(t)$$

Reflita

Caro aluno, para refletir: como seria a escrita de uma função com quatro sentenças? E com cinco sentenças? E com n sentenças?

Se $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, aplicando o segundo teorema de translação temos:

$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$. Lembramos ainda que $\mathcal{L}\{u(t-a)\}=\dfrac{e^{-as}}{s}$.

Para entender como aplicar esses conceitos, considere o seguinte problema de valor inicial: $x''-3x'+2x=f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$

Em que $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leq t<4\\ 2, & 4\leq t<6\\ 5, & t\geq 6\end{cases}$. Escrevemos *f* como

$f(t)=3-3u(t-4)+2u(t-4)-2u(t-6)+5u(t-6)$. A Transformada de Laplace de *f* é:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{3\}-3\mathcal{L}\{u(t-4)\}+2\mathcal{L}\{u(t-4)\}-2\mathcal{L}\{u(t-6)\}+5\mathcal{L}\{u(t-6)\}=$$

$$\frac{3}{s}-\frac{3e^{-4s}}{s}+\frac{2e^{-4s}}{s}-\frac{2e^{-6s}}{s}+\frac{5e^{-6s}}{s}=\frac{3-3e^{-4s}+2e^{-4s}-2e^{-6s}+5e^{-6s}}{s}$$

Aplicamos a Transformada de Laplace aos dois lados da equação:

$$\mathcal{L}\{x''-3x'+2x\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\Rightarrow s^2X(s)-sx(0)-x'(0)-3sX(s)-3x(0)+2X(s)=$$

$$\frac{3-3e^{-4s}+2e^{-4s}-2e^{-6s}+5e^{-6s}}{s}$$

Substituímos as condições iniciais e separamos a função $X(s)$, preparando "o terreno" para efetuar a Transformada Inversa de Laplace:

$$X(s)=\frac{3-e^{-4s}+3e^{-6s}}{s\left(s^2-3s+2\right)}=\frac{3}{s(s-2)(s-1)}-\frac{e^{-4s}}{s(s-2)(s-1)}+\frac{3e^{-6s}}{s(s-2)(s-1)}$$

Para que o segundo teorema do deslocamento possa ser utilizado, definimos

$Y(s)=\dfrac{1}{s(s-2)(s-1)}$. Então: $X(s)=\dfrac{3-e^{-4s}+3e^{-6s}}{s\left(s^2-3s+2\right)}=\left(3-e^{-4s}+3e^{-6s}\right)Y(s)$

Pelo segundo teorema do deslocamento, a solução $x(t)$ será dada por:

$$x(t)=3y(t)-u(t-4)y(t-4)+u(t-6)y(t-6),$$

em que a função $y(t)$ é a Transformada Inversa de Laplace de $Y(s)$.

Para determinar $Y(s)$, usamos frações parciais:

$$\frac{1}{s(s-2)(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-1}=\frac{(A+B+C)s^2-(3A+B+2C)s+2A}{s(s-2)(s-1)}$$

Temos o sistema: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+B+2C=0 \\ 2A=1 \end{cases}$

Ao resolver o sistema, obtermos: $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-1$. Então: $Y(s)=\frac{1}{s(s-2)(s-1)}=\frac{1}{2s}+\frac{1}{2(s-2)}-\frac{1}{s-1}$. Logo: $y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}-e^{t}$.

Por fim, a solução da equação diferencial escreve-se como:

$$x(t)=3y(t)-u(t-4)y(t-4)+u(t-6)y(t-6)=$$

$$3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}-e^{t}\right)-u(t-4)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2(t-4)}-e^{(t-4)}\right)+u(t-6)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2(t-6)}-e^{(t-6)}\right)$$

Faça você mesmo

Considere $f(t)=\begin{cases} e^{2t}, & 0\le t<\frac{\pi}{2} \\ 3\cos(t), & \frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3\pi}{2} \\ -sen(t), & t\ge\frac{3\pi}{2} \end{cases}$.

Escreva $f(t)$ usando a função degrau $u(t)$

Equações diferenciais não homogêneas com força externa do tipo impulso

Funções impulso surgem em problemas em que uma força de elevada intensidade atua durante um intervalo de tempo muito pequeno.

Considere a equação diferencial: $3x''-x'-4x=\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)sen(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=\frac{1}{50}$

Aplica-se a Transformada de Laplace:

$$3s^2X(s)-3sx(0)-3x'(0)-sX(s)-x(0)-4X(s)=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$\left(3s^2-s-4\right)X(s)-\frac{3}{50}=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

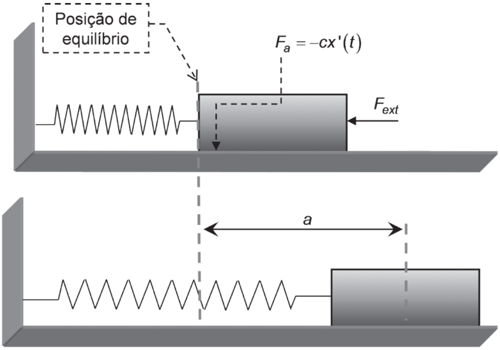
$$X(s)=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}+\frac{3}{50}}{\left(3s^2-s-4\right)}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{3\left(s-\frac{4}{3}\right)(s+1)}+\frac{\frac{3}{50}}{3\left(s-\frac{4}{3}\right)(s+1)}=e^{-\frac{\pi}{2}s}Y(s)+\frac{3}{50}Y(s)$$

$$Y(s)=\frac{1}{3\left(s-\frac{4}{3}\right)(s+1)}$$

Aplicações à mecânica

Considere um sistema massa-mola com uma massa *m* fixada a uma mola de constante elástica *k*. Em função da restauração da mola, temos a força de restauração $F_r=-kx(t)$. A massa está sujeita à ação de uma força (associada ao amortecimento) $F_a=-cx'(t)$. A constante de amortecimento $c>0$ está associada às condições do sistema ou à resistência da mola. Também atua sobre a massa uma força externa $F_{ext}(t)$. A posição da massa é modelada pela equação diferencial $mx''+cx'+kx=F_{ext}(t)$.

Figura 4.16 | Sistema mecânico modelado pela equação diferencial $mx''+cx'+kx=F_{ext}(t)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Consideremos as condições iniciais: $x(0)=0$, $x'(0)=0$. Suponha que $F_{ext}(t)=F_0\mathrm{sen}(\omega t)$. Aplicando a Transformada de Laplace à equação diferencial

temos: $\mathcal{L}\{mx''+cx'+kx\}=\mathcal{L}\{F_0 cos(\omega t)\}\Rightarrow X(s)=\dfrac{\dfrac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}}{(ms^2+cs+k)}$.

Vamos analisar um caso particular: suponha que o termo de amortecimento seja nulo (ou seja, c = 0), e que o coeficiente de restauração seja escrito na forma: $k=\omega_0^2$. Inicialmente, suponha $\omega_0\neq m\omega$. A Transformada de Laplace fica:

$$X(s)=\frac{\dfrac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}}{\left(ms^2+\omega_0^2\right)}=\frac{F_{0\omega}}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(ms^2+\omega_0^2\right)}.$$

Aplicando frações parciais: $\dfrac{F_0\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(ms^2+\omega_0^2\right)}=$

$\dfrac{A}{s^2+\omega^2}+\dfrac{B}{ms^2+\omega_0^2}=\dfrac{(mA+B)s^2+A\omega_0^2+B\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(ms^2+\omega_0^2\right)}$, temos o sistema: $\begin{cases} mA+B=0 \\ A\omega_0^2+B\omega^2=F_0\omega \end{cases}$

Solução: $A = \frac{F_0\omega}{\omega_0^2 - m\omega^2}$ e $B = -\frac{mF_0\omega}{\omega_0^2 - m\omega^2}$.

Assim: $X(s) = \frac{F_0\omega}{\left(\omega_0^2 - m\omega^2\right)} \frac{1}{\left(s^2 + \omega^2\right)} - \frac{mF_0\omega}{\left(\omega_0^2 - m\omega^2\right)} \frac{1}{\left(ms^2 + \omega_0^2\right)} =$

$$\frac{F_0\omega}{\left(\omega_0^2 - m\omega^2\right)} \left[\frac{1}{\left(s^2 + \omega^2\right)} - \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{\omega_0^2}{m}\right)} \right].$$

Portanto: $x(t) = \frac{F_0\omega}{\left(\omega_0^2 - m\omega^2\right)} \left[\frac{1}{\omega_0} sen\left(\omega_0 t\right) - \frac{1}{m\omega} \operatorname{sen}\left(\omega t\right) \right].$

Apenas para facilitar a escrita da solução, suponha que m = 1. Então, a Transformada de Laplace fica: $X(s) = \frac{F_0\omega_0}{\left(s^2 + \omega_0^2\right)^2}$. Neste caso, a solução fica

$$x(t) = \frac{F_0}{2\omega_0^2}\left[sen\left(\omega_0 t\right) - \omega_0 t \cos\left(\omega_0 t\right) \right]$$

Observe que esta última solução é a solução de ressonância.

Pesquise mais

Como sugestão de leitura complementar, apresentamos: Andrade, Doherty. **Transformada de Laplace**. Maringá: Universidade Estadual de Maringá – Departamento de Matemática. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/transforlaplace.pdf>. Acesso em: 2 ago. 2016.

Sem medo de errar

Como vimos no início desta seção, o sistema sobre o qual você deverá se debruçar para explicar para seus colegas de trabalho como utilizar Transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais tem as condições a seguir: é um circuito elétrico em série em que temos um resistor com resistência 16 ohms, um capacitor de 0,01 farads e um indutor de 1 henry. O gerador, com $E(t) = 60sen(5t)$volts, é ligado em série e no instante inicial (t = 0), a carga no capacitor e a corrente no circuito são nulas.

Lembre-se

A Transformada de Laplace para $f(t) = sen(kt)$ é $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$.

Resolução: a equação diferencial é:

$$\frac{Ld^2Q}{dt^2} + \frac{RdQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t) \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0,01} = 60sen(5t) \Rightarrow$$

Após substituirmos os valores numéricos do enunciado temos:

$$\frac{Ld^2Q}{dt^2} + \frac{RdQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t) \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0,01} = 60sen(5t) \Rightarrow$$

Aplicamos a Transformada de Laplace utilizando a propriedade de linearidade da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0,01}\right\} = \frac{60 \cdot 5}{s^2 + 25} \Rightarrow s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 16sX(s) - 16x(0) + \frac{X(s)}{0,01} = \frac{300}{s^2 + 25}$$

Agora, isolamos *X*(*s*):

$$\left(s^2 + 16s + 100\right)X(s) = \frac{300}{s^2 + 25} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{300}{\left(s^2 + 25\right)\left(s^2 + 16s + 100\right)}$$

Então, utilizamos a técnica de frações parciais:

$$\frac{300}{\left(s^2 + 25\right)\left(s^2 + 16s + 100\right)} = \frac{As + B}{s^2 + 25} + \frac{Cs + D}{s^2 + 16s + 100} \Rightarrow \frac{300}{\left(s^2 + 25\right)\left(s^2 + 16s + 100\right)} =$$

$$\frac{(As + B)\left(s^2 + 16s + 100\right) + (Cs + D)\left(s^2 + 25\right)}{\left(s^2 + 25\right)\left(s^2 + 16s + 100\right)} =$$

$$\frac{(A+C)s^3+(16A+B+D)s^2+(100A+16B+25C)s+100b+25D}{(s^2+25)(s^2+16s+100)}$$

Resolvendo o sistema linear $\begin{cases} A+C=0 \\ 16A+D+B=0 \\ 100A+16B+25C=0 \\ 100B+25D=300 \end{cases}$, temos que: $A=-\dfrac{192}{481}$,

$B=\dfrac{900}{481}$, $C=\dfrac{192}{481}$, $D=\dfrac{2172}{481}$.

Substituímos os valores numéricos para *A*, *B*, *C* e *D* na Transformada de Laplace *X*(*s*):

$$X(s)=-\frac{768}{1924}\frac{s}{s^2+25}+\frac{900}{481}\frac{1}{s^2+25}+\frac{768}{1924}\frac{s}{(s+8)^2+36}+\frac{2172}{481}\frac{1}{(s+8)^2+36}$$

Vamos somar e subtrair 8 para podermos usar os resultados da tabela de Transformadas Inversas de Laplace.

$$X(s)=-\frac{768}{1924}\frac{s}{s^2+25}+\frac{900}{481}\frac{1}{s^2+25}+\frac{768}{1924}\frac{s+8-8}{(s+8)^2+36}+\frac{2172}{481}\frac{1}{(s+8)^2+36}$$

Separamos as parcelas:

$$X(s)=-\frac{768}{1924}\frac{s}{s^2+25}+\frac{900}{481}\frac{1}{s^2+25}+\frac{768}{1924}\frac{s+8}{(s+8)^2+36}-\frac{993}{481}\frac{1}{(s+8)^2+36}$$

Usamos $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k^2}\right\}=\cos(kt)$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+k^2}\right\}=\operatorname{sen}(kt)$,

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+a}{(s+a)^2+k^2}\right\}=e^{-at}\cos(kt)$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+a)^2+k^2}\right\}=e^{-at}\operatorname{sen}(kt)$:

Finalmente:

$$x(t)=-\frac{768}{1924}\cos(5t)+\frac{180}{481}sen(5t)+\frac{768}{1924}e^{-8t}cos(6t)-\frac{993}{481}e^{-8t}sen(6t).$$

Podemos interpretar este resultado de duas formas:

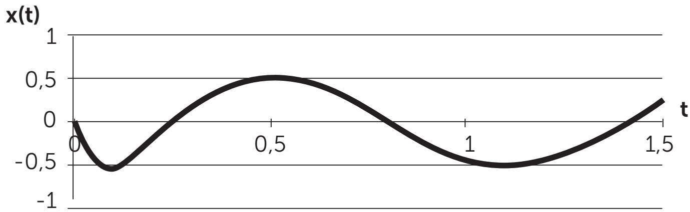
1. Observando que temos uma componente periódica da solução da equação diferencial dada pelas duas primeiras parcelas:

$$x(t) = -\frac{192}{481}\cos(5t) + \frac{180}{481}sen(5t) + \frac{192}{481}e^{-8t}\cos(6t) - \frac{993}{481}e^{-8t}sen(6t).$$

Como as duas últimas parcelas estão multiplicadas por uma função exponencial com forte amortecimento, para *t* maior que algum valor t_0, a componente periódica predomina no comportamento da solução do circuito elétrico.

2. Podemos também interpretar este resultando plotando o gráfico da solução: $x(t) = -\frac{192}{481}\cos(5t) + \frac{180}{481}sen(5t) + \frac{192}{481}e^{-8t}\cos(6t) - \frac{993}{481}e^{-8t}sen(6t)$ ao longo do tempo. Veja na figura a seguir:

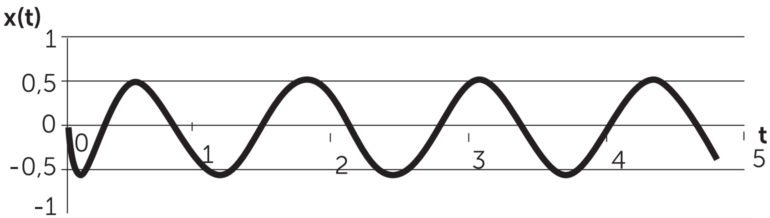
Figura 4.17 | Gráfico de x(t)



Fonte: elaborada pelo autor.

Neste trecho, a solução periódica ainda não está predominando no comportamento de *x*(*t*). Contudo, se plotarmos o mesmo gráfico para um tempo suficientemente longo, veremos que a solução da equação diferencial assume um caráter eminentemente periódico (em outras palavras, a exponencial "some" do comportamento de *x*(*t*).

Figura 4.18 | Gráfico de *x*(t)



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

O que muda no comportamento da solução da equação diferencial se o sinal da componente exponencial fosse positivo? Por exemplo: $x(t) = -\frac{192}{481}\cos(5t) + \frac{180}{481} sen(5t) + \frac{192}{481} e^t \cos(6t) - \frac{993}{481} e^t sen(6t)$.
Qual pode ser a importância deste comportamento para um engenheiro que esteja projetando o circuito elétrico?

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Transformada de Laplace para resolver EDO com força externa $E(t) = 60e^{-5t}$	
1. Competências	Conhecer e ser capaz de aplicar, na engenharia e área de exatas, os cálculos referentes a: integrais múltiplas, equações diferenciais ordinárias e à teoria de transformada de Laplace.
2. Objetivos de aprendizagem	Utilizar transformada de Laplace na determinação de solução de circuito elétrico com força externa do tipo $E(t) = Ae^{bt}$.
3. Conteúdos relacionados	Transformada de Laplace
4. Descrição da situação-problema	Agora você tem em mãos um novo problema para resolver. Este problema é semelhante ao do circuito elétrico que você já resolveu no *Sem medo de errar*, mas a força externa é da forma $E(t) = 60e^{-5t}$. A partir da solução obtida para o problema de valor inicial, apresentar a previsão para o comportamento do circuito elétrico.
5. Resolução da situação-problema	Ao substituir a força externa $E(t) = 60e^{-5t}$ na equação diferencial obtemos: $\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0{,}01} = 60e^{-5t}$. Aplicando nessa equação a Transformada de Laplace, chegamos a: $(s^2 + 36s + 100)X(s) = \frac{60}{s-5} \Rightarrow X(s) = \frac{60}{(s-5)(s^2+36s+100)}$ Usando frações parciais na última equação, temos: $X(s) = \frac{60}{(s-5)(s^2+36s+100)} = 60\left[\frac{A}{s-5} + \frac{Bs+C}{(s^2+36s+100)}\right]$

Da igualdade anterior, organizamos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 36A+C=0 \\ 100A-5B-5C=1 \end{cases}$$

Este sistema linear possui solução única igual a:

$$A=\frac{1}{285},\ B=-\frac{1}{285},\ C=-\frac{12}{95}$$

Substituindo as soluções do sistema na equação para $X(s)$, obtemos a seguinte expressão:

$$X(s)=60\left[\frac{1}{s-5}-\frac{1}{285}\frac{s}{(s+8)^2+36}-\frac{12}{95}\frac{1}{(s+8)^2+36}\right]$$

Aqui somamos e subtraímos 8 para podermos utilizar a tabela de Transformadas Inversas de Laplace.

$$X(s)=60\left[\frac{1}{s-5}-\frac{1}{285}\frac{s+8-8}{(s+8)^2+36}-\frac{12}{95}\frac{1}{(s+8)^2+36}\right]$$

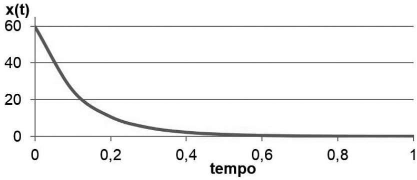
$$X(s)=60\left[\frac{1}{s-5}-\frac{1}{285}\frac{s+8}{(s+8)^2+36}-\frac{532}{5415}\frac{1}{(s+8)^2+36}\right]$$

Portanto, a solução procurada para a equação diferencial $\frac{d^2Q}{dt^2}+16\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{0,01}=60e^{-5t}$ é:

$$x(t)=60\left[e^{-5t}-\frac{1}{285}e^{-8t}\cos(6t)-\frac{12}{95}e^{-8t}sen(6t)\right]$$

Na figura a seguir inserimos o gráfico de x(t):

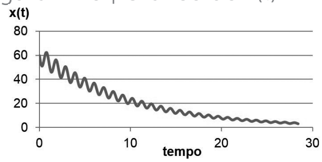
Figura 4.19 | Gráfico de x(t)



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe como ficaria o gráfico de x(t) se alterássemos os parâmetros para $x(t)=60\left[e^{-0,1t}-\frac{1}{285}e^{-0,1t}\cos(6t)-\frac{12}{95}e^{-0,1t}sen(6t)\right]$:

Figura 4.20 | Gráfico de *x*(*t*)



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Considere o seguinte problema de valor inicial:
$x''+3x'-4x=3t$, $x(0)=0$, $x'(0)=2$.

Marque a alternativa que contém a solução do PVI:

a) $x(t)=-\dfrac{5}{8}-\dfrac{11}{8}t+3e^{2t}+\dfrac{12}{5}e^{4t}$

b) $x(t)=\dfrac{4}{3}t-\dfrac{7}{2}t^2+te^{t}+\dfrac{7}{16}te^{-2t}$

c) $x(t)=-\dfrac{25}{9}-\dfrac{27}{8}t+e^{-t}+\dfrac{49}{64}e^{4t}$

d) $x(t)=-\dfrac{23}{16}-\dfrac{3}{4}t+e^{t}+\dfrac{7}{16}e^{-4t}$

e) $x(t)=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}t+3te^{-t}-\dfrac{7}{16}e^{-4t}$

2. Considere $f(t)=\begin{cases}\cos(5t), & 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0, & t>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ e a equação diferencial

$x''+16x=f(t)$, com as condições iniciais $x(0)=0$, $x'(0)=0$. Determine a solução da equação diferencial nas condições dadas e marque a alternativa que contém a solução correta.

a) $x(t)=-\frac{1}{3}\cos(5t)+\frac{1}{3}\cos(4t)+\frac{1}{3}u(t-2\pi)\cos(5(t-2\pi))-\frac{1}{3}u(t-2\pi)\cos(4(t-2\pi))$

b) $x(t)=\frac{1}{9}\cos(5t)-\frac{1}{9}\cos(4t)-\frac{1}{9}u(t-\pi)\cos(5(t-\pi))+\frac{1}{9}u(t-\pi)\cos(4(t-\pi))$

c) $x(t)=-\frac{1}{9}\cos(5t)+\frac{1}{9}\cos(4t)+\frac{1}{9}u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(5\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{1}{9}u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(4\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

d) $x(t)=-\frac{1}{5}\cos(25t)+\frac{1}{4}\cos(16t)+\frac{1}{5}u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(25\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{1}{4}u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(16\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

e) $x(t) = -\frac{1}{9}\cos(5t) + \frac{1}{9}\cos(4t) + \frac{1}{9}u\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(5\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{9}u\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(4\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

3. Considere a função $f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 4 \\ 5t - 2, & t > 4 \end{cases}$. Determine a Transformada de Laplace desta função e assinale a alternativa que a contém.

a) $e^{-2s}\left(\frac{4}{s^2} + \frac{5}{s}\right)$

b) $e^{4s}\left(\frac{5}{s^2} - \frac{22}{s}\right)$

c) $e^{-5s}\left(\frac{5}{s^2} + \frac{3}{s^3}\right)$

d) $e^{-4s}\left(\frac{5}{s^2} + \frac{18}{s}\right)$

e) $e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{12}{s}\right)$

Referências

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard, C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2833-0/cfi/6/2!/4/2/2@0:2.88>. Acesso em: 26 jul. 2016.

BRANNAN, James; BOYCE, William. **Equações diferenciais**: uma introdução aos métodos modernos e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2013. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2337-3/cfi/0!/4/ 4@0.00:0.00>. Acesso em: 10 ago. 2016.

BUTKOV, Eugene. **Física matemática**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.

COUTO, Roberto Toscano. **Equações diferenciais, resolução de equações diferenciais por séries e Transformada de Laplace**. Departamento de Matemática Aplicada. UFF. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/marco/equacoes_diff-2014/eqsdif-.pdf>. Acesso em: 8 ago. 2016.

EDWARDS JUNIOR, C. Henry; PENNEY, David E. **Equações diferenciais elementares com problemas de contorno**. 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995.

PACHECO, Antonio Luiz Schalata. **Transformada de Laplace**: algumas aplicações. 2011. 84 f. Monografia (Pós-Graduação em Matemática)-Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/121197/Antonio_Luiz_Schalata_%20Pacheco.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 3 ago. 2016.

SILVA, Marcio Antonio Jorge da. **Notas de aula**: a transformada de Laplace. Disponível em: <http://www.uel.br/pessoal/marciojorge/arquivos/Laplace.pdf>. Acesso em: 2 ago. 2016.

SPIEGEL, Murray R. **Transformadas de Laplace**. Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1981.

STRAUCH, Irene. **Transformada de Laplace em nove aulas**. Departamento de Matemática Pura e Aplicada. Instituto de Matemática (UFRGS). Disponível em: <https://chasqueweb.ufrgs.br/~dmarcon/aplicada2015-1/laplace_strauch.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2016.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Thomson Learning, 2003.

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

ISBN 978-85-8482-535-6

9 788584 825356 >