KLS

Cálculo diferencial e integral II

Cálculo diferencial e integral II

André Luís Delvas Fróes
Francine de Mendonça Fábrega
Daniel Geraldini

© 2016 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente
Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação
Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico
Dieter S. S. Paiva
Camila Cardoso Rotella
Emanuel Santana
Alberto S. Santana
Lidiane Cristina Vivaldini Olo
Cristiane Lisandra Danna
Danielly Nunes Andrade Noé
Ana Lucia Jankovic Barduchi
Grasiele Aparecida Lourenço
Paulo Heraldo Costa do Valle
Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisor Técnico
João Carlos dos Santos

Editoração
Emanuel Santana
Lidiane Cristina Vivaldini Olo
Cristiane Lisandra Danna
André Augusto de Andrade Ramos
Erick Silva Griep
Adilson Braga Fontes
Diogo Ribeiro Garcia
eGTB Editora

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Fróes, André Luís Delvas
F925c Cálculo diferencial e integral II / André Luís Delvas Fróes, Francine de Mendonça Fábrega, Daniel Geraldini. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016.
232 p.

ISBN 978-85-8482-534-9

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. I. Fábrega, Francine de Mendonça. II. Geraldini, Daniel. III. Título.

CDD 515.33

2016
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Unidade 1 | Introdução às integrais e suas aplicações 7

Seção 1.1 - A integral de Riemann 9
Seção 1.2 - As integrais imediatas 24
Seção 1.3 - Cálculo de áreas sobre e entre curvas 37
Seção 1.4 - Problemas de valores iniciais imediatos 48

Unidade 2 | Regras avançadas de integração e coordenadas polares 59

Seção 2.1 - Cálculo de volume de sódio de revolução 61
Seção 2.2 - Integração por partes e mudanças de variáveis 73
Seção 2.3 - Curvas em coordenadas polares 88
Seção 2.4 - Integração por substituição trigonométrica 103

Unidade 3 | Funções de várias variáveis e derivadas parciais 117

Seção 3.1 - Funções de várias variáveis 119
Seção 3.2 - Gráficos de superfícies 131
Seção 3.3 - Derivadas parciais e de ordem superior 146
Seção 3.4 - Derivada direcional 160

Unidade 4 | Aplicações de derivadas parciais e integrais duplas 173

Seção 4.1 - Vetor gradiente e otimização 175
Seção 4.2 - Integrais duplas: introdução 190
Seção 4.3 - Integrais duplas: coordenadas polares 204
Seção 4.4 - Integrais duplas: aplicações 215

Palavras do autor

Seja bem-vindo ao curso de *Cálculo Diferencial e Integral* II. Antes de mais nada, você sabe por que deveria fazer esse curso com afinco? Você já se deparou com um aparelho eletrônico, objeto ou imóvel e se perguntou: por que ele possui esse formato?

E depois, por que custa esse preço? Essas perguntas são difíceis de responder, não são? Pois então, o cálculo lhe trará as primeiras visualizações das respostas, permitindo que você analise curvas e superfícies, para calcular áreas e volumes. Portanto, com o conhecimento do estudo de cálculo você poderá analisar algumas situações e assim tomar melhores decisões do que aquele que não detém esse conhecimento.

Na primeira unidade desse curso, estudaremos a integração em uma variável e aprenderemos a calcular a área sob um gráfico. Essa primeira unidade é fundamental para o desenvolvimento posterior do curso. Na segunda unidade, aprenderemos a calcular volumes de objetos simples e simétricos, e também a usar algumas técnicas mais avançadas de integração.

Já na terceira unidade, começaremos nossos estudos com funções de mais de uma variável, que são as funções mais próximas de nossa realidade, pois poucos são os problemas que envolvem uma única variável, não é mesmo? Aqui o foco estará em melhorar sua visualização em três dimensões e saber calcular as taxas de variações dessas funções.

Por último, na quarta unidade, terminaremos nossos estudos de derivadas parciais, com as mais interessantes aplicações sobre taxa de variações de funções, em particular a otimização. Concluiremos o curso com as integrais duplas, através das quais veremos, entre outras coisas, como é feito o cálculo do centro de massa de um objeto.

Curioso para aprender sobre tudo isso? Então, vamos lá. Um degrau de cada vez! Desejamos boa sorte e que possamos aprender juntos esse difícil – porém interessante – conteúdo.

Introdução às integrais e suas aplicações

Convite ao estudo

Olá, estudante! Esperamos que você esteja entusiasmado para iniciar os estudos da disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral II*. Essa disciplina tem como principal aplicação as integrais, mas certamente sua primeira pergunta deve ser: "para que estudar integrais?". As integrais são aplicadas nas mais diversas áreas da engenharia como, por exemplo, para calcular o centro de massa de uma estrutura, para compreendermos o desgaste de um equipamento mecânico, para calcular o campo elétrico e magnético, para entendermos o comportamento de um fluido ou de uma reação química, ou até mesmo o custo de um processo industrial. No contexto do estudo de cálculo, a integral de uma função permite determinar a área sob uma curva em um plano cartesiano. Como veremos, existem diversas técnicas de integração.

Visando alcançar os nossos objetivos e compreendendo a relevância do tema, temos como competência geral conhecer técnicas de integrais aplicadas ao cálculo de área e volume esta unidade tem os seguintes objetivos de aprendizagem: (1) compreender a integral definida; (2) aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo; (3) compreender o conceito de antiderivada; (4) aplicar a integral de Riemann; (5) conhecer e aplicar as integrais imediatas: polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas; (6) executar os cálculos de áreas sob e entre curvas, e, finalmente, (7) resolver problemas de valores iniciais imediatos.

Vamos imaginar que você trabalha em uma empresa que realiza a pintura de chapas de metal galvanizadas utilizadas na construção civil. Esta empresa produz uma grande quantidade

dessas placas e é conhecida no mercado por oferecer um preço competitivo e um produto de ótima qualidade, conquistando cada vez mais clientes e aumentando a sua produtividade. Para que a empresa consiga continuar a oferecer um preço competitivo, um planejamento criterioso sobre a quantidade de tinta que está sendo utilizada na pintura de suas placas deverá ser realizado. Dessa forma, você foi designado para ser o responsável a quantificar o consumo de tinta e analisar o impacto desse consumo nos lucros da empresa.

Aplicando os conceitos apresentados nessa unidade você deverá realizar os cálculos referentes ao consumo de tinta da empresa, bem como quanto a empresa está lucrando com a venda dessas placas. Aceita o desafio? Siga em frente! Bons estudos!

Seção 1.1

A integral de Riemann

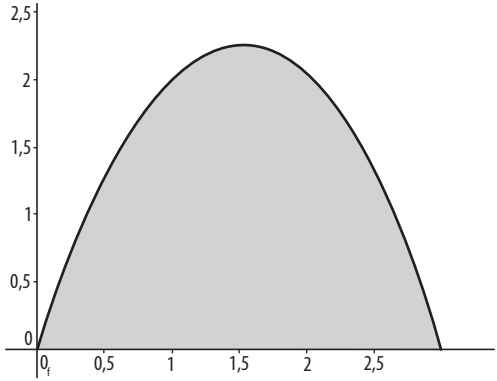
Diálogo aberto

Caro aluno, vamos iniciar os nossos estudos sobre as integrais conhecendo sua interpretação geométrica na aplicação da Integral de Riemann. Conheceremos também as integrais definidas, o Teorema Fundamental do Cálculo e as antiderivadas (também conhecidas como integrais primitivas). O conhecimento desses conceitos que fundamentam as integrais é essencial para que possamos resolver problemas das mais diversas áreas do nosso cotidiano.

A integral de Riemann foi a primeira definição robusta do conceito de integral em um intervalo e é muito simples de ser utilizada, mas apresenta limitações em sua aplicação. Consiste em dividir a área que representa a integral em retângulos de bases iguais e alturas apropriadas, posteriormente as áreas desses retângulos são calculadas e somadas, dessa forma esse método também é conhecido como Soma de Riemann e a divisão dessa área total, o segmento em subsegmentos, é chamada partição (como será visto mais à frente).

Lembre-se de que você possui um desafio para resolver! Você trabalha em uma empresa que realiza a pintura de chapas metálicas galvanizadas e foi designado para ser o responsável a quantificar o consumo de tinta e analisar o impacto desse consumo nos lucros da empresa. Nesse momento a empresa está fabricando um lote de chapas que precisam ser pintadas e você precisará apresentar um cálculo aproximado com a finalidade de se obter um primeiro resultado sobre a quantidade de tinta utilizada. Mas você já imaginou qual a quantidade de tinta utilizada para pintar uma chapa metálica? Já pensou que a quantidade de tinta está diretamente relacionada a área da placa? A chapa metálica que receberá a pintura possui o formato apresentado na Figura 1.1. Como calcular a quantidade de tinta?

Figura 1.1 | Representação das chapas metálicas a serem pintadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Não pode faltar

O problema do cálculo de áreas não é novo. Os gregos avançaram muito no tema, séculos antes do início da nossa era, graças a grandes nomes como Eudoxo e Arquimedes. Eles conseguiram definir as conhecidas fórmulas das áreas de figuras geométricas simples.

Por exemplo, eles mostraram que a área de um retângulo de lados B e H é:

$$A_{\square} = B \cdot H$$

Caso você não se lembre da unidade de área, basta verificar que na fórmula indicada há duas distâncias multiplicadas, portanto, teremos uma unidade de distância elevada ao quadrado. No Sistema Internacional de Unidades (SI), por exemplo, utilizamos sempre m^2 (metros quadrados).

Dividindo esse retângulo ao meio, através de sua diagonal, obtemos dois triângulos retângulos idênticos. Imagine-se com um retângulo de cartolina e uma tesoura em mãos, cortando o retângulo ao meio através de sua diagonal. Ficará claro que a área de cada triângulo será metade da área do retângulo, e teremos a conhecida fórmula para a área de um triângulo:

$$A_{\Delta} = \frac{B \cdot H}{2}$$

Conhecemos a área de diversas figuras geométricas, incluindo círculos. Entretanto, na natureza poucas são as ocorrências de figuras geométricas perfeitas. Os gregos já desejavam descobrir a área das mais diversas figuras, afinal, muitos terrenos têm por fronteira obstáculos naturais (como rios por exemplo) que não seguem linhas retas, e sempre é bom estimar a quantidade de material necessária para construir objetos (por exemplo, tecidos para roupas) antes de iniciar a produção.

Uma solução muito inteligente criada por eles para resolver seus problemas é o chamado MÉTODO DA EXAUSTÃO. Ele consiste em preencher figuras curvas de área desconhecida com figuras cuja área eles já sabiam calcular, em geral retângulos e triângulos.

Figura 1.2 | Método da exaustão

Fonte: elaborada pelo autor.

É um método trabalhoso, mas que permite ao final ter uma boa estimativa da área, somando as áreas das figuras utilizadas para o preenchimento.

Uma aplicação simples é o cálculo de áreas entre os gráficos de funções reais e o eixo x.

Assimile

Perceba que a área sob um gráfico pode ter as mais diversas unidades. Digamos que você é executivo e está analisando um gráfico de custos com fornecedores ao longo do tempo. Seu eixo y contém um valor em $R\$$ e seu eixo x o tempo em anos. Calculando a área do gráfico, sua unidade de área seria $R\$ \cdot ano$. Não é uma quantidade muito significativa, mas perceba que dividindo tal resultado pelo tempo (base sob a curva) teríamos exatamente o custo médio com fornecedores ao longo da história da empresa, em $R\$$. Nos exemplos tratados no texto, quando não estiver definido um contexto, utilizaremos a unidade genérica u.a. (unidade de área).

Na análise da área propriamente dita, começaremos observando o gráfico e imaginando quais figuras geométricas poderiam ser

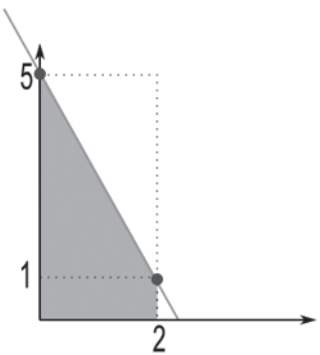
encaixadas em seu interior. Depois, basta calcular a área das figuras utilizadas e somar. Caso as figuras não preencham completamente os espaços (será o caso para a maioria dos gráficos curvos), devemos entender que a área real é maior do que a estimativa obtida. Entretanto, perceba que podemos avançar bastante, inserindo figuras cada vez menores, de maneira que nosso resultado se aproxima cada vez mais do valor real.

Exemplificando

Identifique e determine a área abaixo do gráfico $f(x) = 5 - 2x$ até o eixo x (reta horizontal y=0), limitada nas laterais pelo eixo y (reta vertical x=0) e a reta vertical (x=2).

Resolução: faça um esboço do gráfico

Figura 1.3 | Área sob o gráfico



Fonte: elaborada pelo autor.

Observando o gráfico, parece natural que utilizemos um triângulo e um retângulo para preencher a área desejada, não é mesmo? A boa notícia é que as duas figuras escolhidas preencherão completamente a área desejada, portanto o resultado será exato. Vamos lá?

$$A_{\triangle} = \frac{B_{\triangle} \cdot H_{\triangle}}{2} = \frac{2 \cdot (5-1)}{2} = 4\,\text{u.a.}$$

$$A_{\square} = B_{\square} \cdot H_{\square} = 2 \cdot 1 = 2\ \text{u.a.}$$

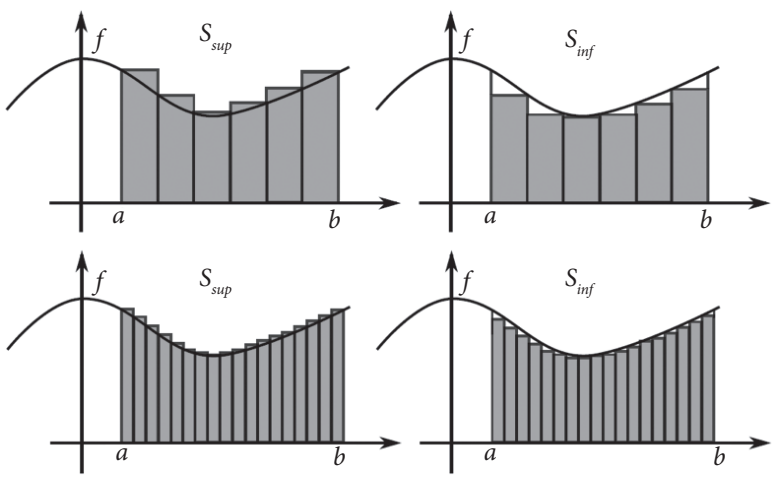
Área total: 4 u.a. + 2 u.a. = 6 u.a.

Método de Riemann

Riemann, o famoso matemático, criou um método para a estimativa de áreas sob curvas. Com esse método, utilizamos somente retângulos para preencher os espaços, em que a altura é o valor da função em um determinado ponto e o comprimento da base pode variar. Quanto menor o tamanho da base e, portanto, maior o número de retângulos, melhor a estimativa da área obtida. Este método é muito fácil de se implementar computacionalmente, sendo a base para o funcionamento de softwares importantes, que você utilizará em seu dia a dia.

O método tem pequenas variações, dependendo do ponto que é tomado como a altura do retângulo. Basicamente, os retângulos podem ficar acima da curva, fornecendo uma estimativa superior da área (pois o resultado será maior do que o valor real) ou podem estar abaixo da curva, fornecendo uma estimativa inferior. Outra maneira inteligente de utilizar o método é utilizar o valor da função no ponto central do intervalo, fornecendo uma estimativa mais exata. Os dois primeiros casos estão exemplificados na Figura 1.4.

Figura 1.4 | Método da exaustão com somas de Riemann



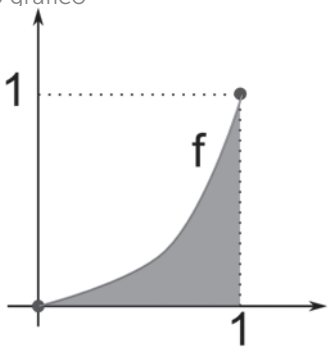
Fonte: elaborada pelo autor.

O valor real da área é sempre um valor entre S_{sup} e S_{inf}. Então, o que Riemann fez, foi usar o conceito de limite, fazendo o comprimento da base dos retângulos tender a zero aumentando,

consequentemente, o número de retângulos até o infinito. No caso, S_{sup} e S_{inf} convergirão para um mesmo valor, o valor exato da área.

Vamos ver como funciona na prática? Que tal fazer uma aproximação para a área entre o gráfico da função $f(x) = x^2$ e o eixo x, limitado pelo eixo y e pela reta vertical x=1? Trata-se da área mostrada na Figura 1.5. Podemos implementar o método de Riemann de qualquer uma das três maneiras descritas no texto, utilizaremos as estimativas superior e inferior, para que você compreenda que os resultados obtidos são diferentes.

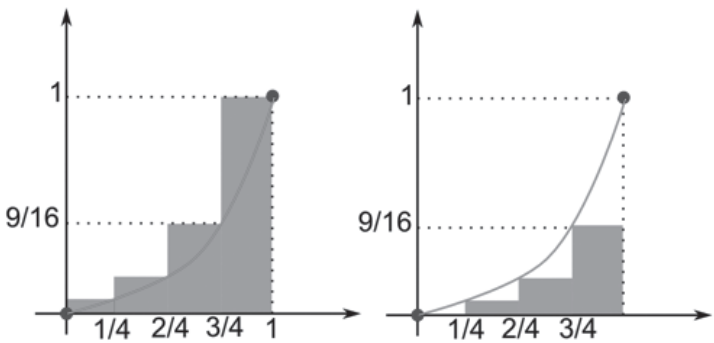
Figura 1.5 | Área sob o gráfico



Fonte: elaborada pelo autor.

Para a estimativa, dividiremos o intervalo em quatro partes iguais. Veja a Figura 1.6.

Figura 1.6 | Somas de Riemann



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, utilizando a fórmula de base vezes altura para cada retângulo e somando-as, temos

$$S_{\text{sup}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{16} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16} + \frac{1}{4}\cdot 1 \approx 0{,}47$$

$$S_{\text{inf}} = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{16} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16} \approx 0{,}22$$

Assim, não é difícil verificar que nossa área A desejada está entre esses valores, isto é,

$$0{,}22\ u.a. \leq A \leq 0{,}47\ u.a.$$

Para descobrir o resultado exato, temos primeiramente que entender o conceito de integração. Vamos a ele.

Integração

A partir de seu método, Riemann conseguiu formalizar o conceito de integração. Integrar uma função em um intervalo definido é realizar uma operação matemática que nos fornece sempre a área entre o gráfico da função e o eixo x do plano cartesiano. O resultado da integração é igual ao limite da soma de Riemann fazendo o comprimento da base dos retângulos tender a zero, em consequência, aumentando o número de retângulos até o infinito.

Assimile

Dizemos que uma função *f* é Riemann integrável quando

$$\lim_{base\to 0}(S_{\text{sup}}) = \lim_{base\to 0}(S_{\text{inf}})$$

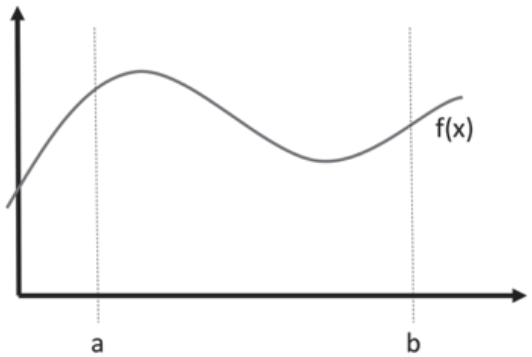
e nesse caso definimos a integral definida de *f* no intervalo [a,b] por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{base\to 0}(S_{\text{sup}})$$

A operação integração é denotada por $\int f(x)dx$. Vemos que a função f(x) é colocada entre o símbolo $\int$ e o símbolo dx . Quando desejamos a área entre dois pontos específicos a e b sobre o eixo x, que chamaremos de "limites de integração", utilizamos o mesmo símbolo com uma pequena modificação, que nos lembra quais são

eles: $\int_a^b f(x)dx$. Lê-se: "integral de f(x) de a até b". Veja a representação desta função e destes pontos de intervalo na figura a seguir:

Figura 1.7 | Representação da função f(x) nos intervalos de a até b



Fonte: elaborada pelo autor.

O símbolo da integral "$\int$" representa a soma de retângulos sobre o intervalo que começa em a e termina em b, a função f como a altura dos retângulos e e dx arbitrariamente pequeno o comprimento da base.

Retomando o problema anterior, aquele da função $f(x) = x^2$, cuja área está entre as duas somas de áreas de retângulos S_{sup} e S_{inf}, se calcularmos os limites da soma, concluiremos que o valor exato da área é 1/3.

Note que, como esperávamos, $0{,}22\ u.a. \leq 0{,}33\ u.a. \leq 0{,}47\ u.a.$ Aquela área pode ser representada por:

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{base \to 0} \left(S_{\sup}\right) = \frac{1}{3}.$$

Pesquise mais

Caso você queira saber como calcular esse limite, acesse: <http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap21_Calc1.html>. Acesso em: 16 maio 2016.

Os computadores atuais conseguem fazer essa soma enorme de áreas de pequenos retângulos em velocidades espantosas.

Entretanto, quando o Cálculo foi desenvolvido, centenas de anos atrás, tais recursos não estavam disponíveis. Os matemáticos da época descobriram que existe uma maneira analítica de resolver as integrais. Para isso, precisamos fazer uma operação inversa à derivação. É o que chamamos de antiderivada. Veja só: qual a função que, quando derivada, resulta em $f(x) = x^2$? É a função: $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Trata-se de uma antiderivada de $f(x) = x^2$.

A diferença

$$F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$$

Felizmente isso não é só uma coincidência, pois o Teorema Fundamental do Cálculo afirma que:

Assimile

Sempre que f(x) for Riemann integrável no intervalo de x=a até x=b, e existir uma antiderivada F(x) tal que F'(x)=f(x), então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Lê-se a expressão acima da seguinte forma: "a integral de f(x) em relação a x de a até b é igual à antiderivada de f(x) calculada no ponto b menos a antiderivada de f(x) calculada no ponto a".

A partir desse teorema, o estudo de integrais fica resumido a encontrar essas funções F, que chamaremos de "primitivas".

Você deve ter observado que a função $F(x) = \frac{x^3}{3}$ não é a única função cuja derivada é $f(x) = x^2$, pois se derivarmos a função $G(x) = \frac{x^3}{3} + C$ teremos a mesma resposta para qualquer constante C, uma vez que a derivada de uma constante é zero. Assim, observamos que a primitiva de uma função não é única, na verdade existe uma família delas, diferenciando uma das outras apenas por uma constante.

Exemplificando

Encontre a antiderivada *F*(x) da função $f(x) = x + 5x^3$, e com base no teorema fundamental do cálculo encontre a integral de f(x) no intervalo de x=1 a x=2.

Resposta:

Para encontrar a antiderivada é necessário parar e pensar: qual a função que derivada resultará em f(x)?

Vamos simplificar. Qual a antiderivada de x? Pense em uma derivada simples que deixa como resto x, sem se importar com as constantes. Você se lembrará que a derivada de um polinômio reduz sua potência em 1, portanto testaremos x^2

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Temos que obter como resultado x desacompanhado de constante. Então:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2x}{2} = x$$

Portanto, uma antiderivada de x será $\frac{x^2}{2}$.

Qual a antiderivada de $5x^3$? Mesmo raciocínio. A derivada de x^4 é:

$$\frac{d}{dx}\left(x^4\right) = 4x^3$$

Desejamos $5x^3$, então:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^4}{4}\right) = 5x^3$$

Portanto, uma antiderivada de $5x^3$ será $\frac{5x^4}{4}$.

Temos então que:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4} + C$$

Podemos agora utilizar o teorema fundamental do cálculo para obter a integral no intervalo citado:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^2 (x + 5x^3)dx = F(2) - F(1) = \frac{2^2}{2} + \frac{5 \cdot 2^4}{4} - \frac{1^2}{2} - \frac{5 \cdot 1^4}{4} = 20{,}25\,u.a.$$

Faça você mesmo

Encontre a antiderivada $F(x)$ da função $f(x) = 3x^2 + 6x^5$, e com base no teorema fundamental do cálculo encontre a integral de f(x) no intervalo de x=1 a x=2.

Pesquise mais

Entenda o mecanismo de obtenção de funções primitivas estudando esse assunto no livro *Cálculo*, de James Stewart, no item 4.9, nas páginas de 310 a 314. Áreas e distâncias são tratadas a partir da página 326.

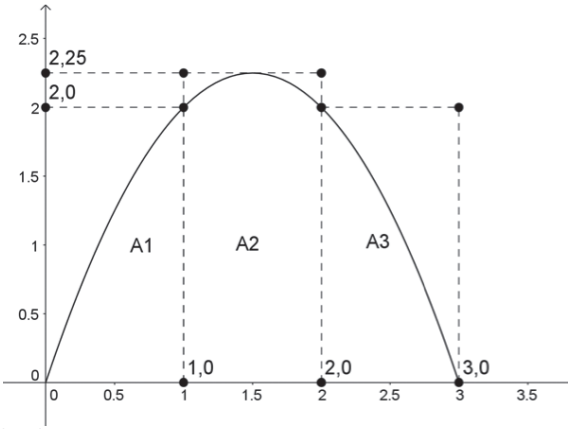
STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage, 2013. v. 1.

Sem medo de errar

Agora, vamos dar início ao nosso desafio? Para calcular a quantidade de tinta aproximada para se realizar a pintura de uma chapa metálica podemos utilizar a integral de Riemann. Já sabemos que quanto maior o número de retângulos mais próxima da área sob o gráfico estará o resultado obtido.

Você realizou a medição da chapa metálica com o auxílio de uma trena e construiu um gráfico (Figura 1.8) com as medidas que encontrou conforme as linhas pontilhadas, sendo que ambos os eixos estão em unidade de metro. Posteriormente, iniciou o procedimento para calcular a área da chapa dividindo a curva em retângulos ($A = b \cdot h$). Primeiramente, a chapa metálica foi dividida em três retângulos de bases iguais, ou seja, cada retângulo possui uma base de um metro. Com a sua trena você realizou a medição da base até a curva, e procedeu dessa maneira para os três retângulos, calculando as áreas. Posteriormente, somando-as encontrou o valor de 6,25 m^2 .

Figura 1.8 | Cálculo da integral de Riemann com 3 retângulos



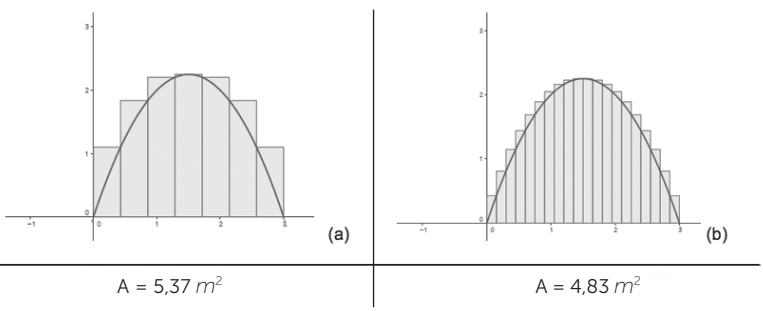
Fonte: elaborada pelo autor.

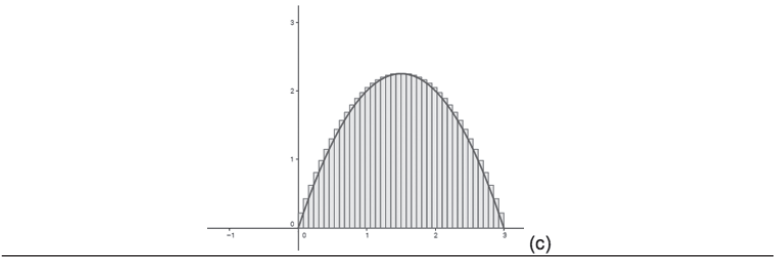
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2{,}25 + 1 \cdot 2 = 6{,}25\ m^2$$

Você observou que o cálculo está bastante impreciso e decidiu aumentar o número de retângulos dividindo a base e dando origem a sete retângulos, realizando o mesmo procedimento encontrou o resultado de 5,37 m^2 (Figura 1.9 a). Ainda não satisfeito com o resultado, você dividiu a base em 20 (Figura 1.9 b), e realizando o mesmo cálculo encontrou um valor de 4,83 m^2, e como última tentativa de melhoria utilizando esse método, você dividiu a chapa em 40 retângulos obtendo o valor de 4,67 m^2 (Figura 1.9 c) e ficou satisfeito com o resultado, pois não observou mais uma discrepância significativa comparando-se com o resultado anterior, partindo para o cálculo da quantidade de tinta a ser utilizada.

Figura 1.9 | Cálculo da integral de Riemann

(a) 7 retângulos, (b) 20 retângulos e (c) 40 retângulos





A = 4,67 m^2

Fonte: adaptada de:<https://goo.gl/VQBjh3>. Acesso em: 28 abr. 2016.

Atenção

Observe o cálculo da integral de Riemann dividindo a curva em uma quantidade maior de retângulos. Disponível em: <http://www.geogebra.org/m/c48XAWNr>. Acesso em: 28 abr. 2016.

Finalizando, você precisa calcular a quantidade de tinta aproximada. Para isso, vamos considerar que o rendimento da tinta é de 7,16m^2 / L. Sendo assim, temos que:

$Q_t = A / R$;

Onde:

Q_t = Quantidade de tinta (em L)

A = Área a ser pintada (em m^2)

R = Rendimento (em m^2/ L)

Logo, a quantidade aproximada de tinta utilizada para pintar uma chapa metálica desse modelo é de 0,65 L.

Avançando na prática

Determinando a área de uma construção

Descrição da situação-problema

Um terreno, onde será construída uma casa, é limitado por um rio modelado pela curva $y = 0{,}3x^2 - 2{,}5x + 20$, e por outro lado é limitado por uma estrada modelada pela reta $y = 0$, com $0 \leq x \leq 10$ (unidade metros). Você foi designado pelo seu superior para calcular a área que essa fazenda ocupa. Como você poderá realizar esse cálculo?

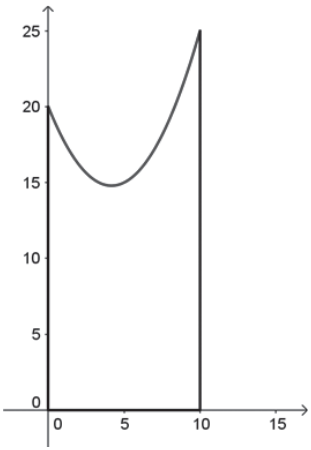
Lembre-se

Estude mais sobre integrais definidas acessando o *link* disponível em:<https://jhcruz.mat.ufg.br/up/39/o/Cap%C3%ADtulo_8.pdf>. Acesso: 28 abr. 2016.

Resolução da situação-problema

1º Passo: devemos esboçar e identificar a área.

Figura 1.10 | Função representando o terreno



Fonte: elaborada pelo autor.

2º Passo: agora identificamos a integral correspondente à área.

$$A = \int_0^{10} \left(0,3x^2 - 2,5x + 20\right)\, dx$$

3º Passo: encontramos a primitiva da função.

$$\int \left(0,3x^2 - 2,5x + 20\right)\, dx = \frac{0,3x^3}{3} - \frac{2,5x^2}{2} + 20x + C$$

4º Passo: calculamos a integral com o Teorema Fundamental do Cálculo.

$$A = \int_0^{10} \left(0,3x^2 - 2,5x + 20\right)\, dx = \left(\frac{0,3\cdot 10^3}{3} - \frac{2,5\cdot 10^2}{2} + 20\cdot 10 + C\right) - \left(\frac{0,3\cdot 0^3}{3} - \frac{2,5\cdot 0^2}{2} + 20\cdot 0 + C\right) = 175m^2$$

Faça você mesmo

Você deseja comprar um terreno para construir uma casa e um vendedor te oferece um que é modelado pela função $y = 5x^3 - 4x^2 + 2$ (m^2) e por outro lado é limitado por uma rua modelada pela reta $y = 0$, com $0 \leq x \leq 20$. Analise se é possível construir uma casa nesse terreno.

Faça valer a pena

1. Faça uma estimativa inferior da área entre o gráfico da função $f(x) = x^3 - x + 1$ e o eixo x, limitado pelas retas x=0 e x=1. Utilize 5 retângulos com base 0,2. O valor estimado da área é:

a) 0,32 u.a.

b) 0,45 u.a.

c) 0,68 u.a.

d) 0,82 u.a.

e) 1,13 u.a.

2. Marque a função que é uma primitiva de $f(x) = 2x^7 + 1$.

a) $\frac{x^8}{8} + x^2 + 12$

b) $7x^7 + x + 1$

c) $\frac{2x^9}{5} + x^2 + 7$

d) $\frac{x^8}{4} + \frac{x^2}{3} + 8$

e) $\frac{x^8}{4} + x + 25$

3. A alternativa que corresponde ao valor da integral $\int_{-1}^{1} 4x^3 dx$ é:

a) –2

b) –1

c) 0

d) 1

e) 2

Seção 1.2

As integrais imediatas

Diálogo aberto

Na seção anterior aprendemos que a Integral de Riemann nos fornece um valor aproximado do cálculo da área através da divisão dessa área em retângulos e que quanto maior o número de retângulos melhor será essa aproximação. Dessa forma formalizou-se o conceito de integração, com o estudo das antiderivadas e do teorema fundamental.

Nesta seção vamos estudar o conceito de integrais imediatas, que, por meio de um conjunto de regras simples, nos permitem ter resultados exatos para a obtenção de áreas sob curvas. Assim sendo, conheceremos e aplicaremos as integrais imediatas: polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Veremos ao longo da seção que é possível realizar o cálculo de uma integral imediata utilizando-se uma tabela, facilitando assim o seu uso.

Voltamos agora ao seu desafio! Você foi designado pela empresa onde trabalha para analisar o impacto do consumo de tinta usada na pintura de chapas metálicas nos lucros da empresa. Você já quantificou o volume aproximado de tinta a ser utilizado, mas para que você possa apresentar um resultado preciso sobre o impacto nos lucros será necessário que você calcule o valor exato de tinta utilizada para pintar cada chapa metálica. Dessa forma, você levou a chapa metálica para o projetista da empresa e, após um estudo, ele forneceu a função matemática que descreve o formato da chapa. Agora você terá condições para realizar um cálculo exato sobre a quantidade de tinta a ser utilizada! Mas como você fará esse cálculo?

Dedique-se a esta seção e aplique os conhecimentos aprendidos para resolver esse desafio e muitos outros que você enfrentará na sua carreira profissional. Preparado? Bons estudos!

Não pode faltar

Olá, estudante! Vamos continuar aprofundando nossos conhecimentos. Você foi apresentado a uma ferramenta poderosa na seção anterior. Descobrindo a antiderivada da função, podemos estimar a área de seu gráfico utilizando o teorema fundamental do cálculo! Entretanto, ficar pensando em "qual é a função que derivada resultará no que desejamos" dá muito trabalho, não é mesmo? Somar as áreas de retângulos mais ainda! Veremos agora que a integração possui um conjunto de regras muito semelhantes às da derivação, que nos permitirão obter a área do gráfico até o eixo x de maneira simples e rápida. É a operação que conhecemos como "integração".

Na presente seção, trabalharemos muito com integrais INDEFINIDAS. Dada uma função *f* com uma primitiva *F*, chamamos a família de primitivas da função *f* de integral INDEFINIDA e denotamos por

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

onde C é uma constante qualquer, e os limites de integração não foram especificados. Quando temos uma integral DEFINIDA, com limites de integração dados, então não há necessidade de adicionar uma constante, pois obteremos o valor exato no final do cálculo. No caso da integral definida, teremos:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Note que o símbolo $F(x)\Big|_a^b$ significa que devemos substituir o valor final (b, acima da barra) na função, e depois substituir o valor inicial (a, abaixo da barra), subtraindo como mostrado na equação.

Temos as seguintes regras para resolver as integrais das mais diversas funções:

• Integral de uma constante:

$$\int a\,dx = a \cdot x + C$$

onde a é um número real qualquer.

• Integral de uma variável elevada a uma constante real *n*.

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (*n* uma constante qualquer, número real diferente de –1)

Exceção: monômio com n=–1:

$\int x^{-1} \, dx = \ln |x| + C$

• Integral de funções trigonométricas comuns:

$\int sen(x) \, dx = -\cos(x) + C$

$\int \cos(x) \, dx = sen(x) + C$

• Integral de uma constante elevada a uma variável:

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

caso particular importante:

$\int e^x dx = e^x + C$ (uma vez que $\ln(e) = 1$).

Lembre-se, "e" é o número de Euler, ou número neperiano: e=2,718... Trata-se de um número irracional.

• Integral de um logaritmo neperiano (base *e*).

$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

Pesquise mais

Para resolver integrais, é muito útil ter acesso a tabelas mais completas. Veja:

<http://www2.feg.unesp.br/Home/PaginasPessoais/profernestovieiraneto/tabela03.pdf> e <http://www.if.ufrgs.br/tex/fisica-4/tab-integrais.pdf>. Acesso em: 29 abr. 2016.

Reflita

Percebemos que a primitiva para uma constante *c* é *cx*. É natural, uma vez que a derivada de cx resulta em c. Uma das primitivas para a função x^n é $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, se $n \neq -1$. Nessa regra importante, basta somar +1 ao expoente e dividir por (expoente+1). Derivando essa primitiva, o que obteremos? Qual será a relação entre a operação derivada e a operação integral?

Exemplificando

Determine os valores para as integrais definidas ou indefinidas a seguir:

a) $\int_0^5 x^4\,dx$

b) $\int \sqrt{x}\,dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

d) $\int_1^2 5dx$

e) $\int_1^e x^{-1}dx$

Resposta:

a) Observe que vamos calcular a integral de x^4, da qual, por nossa regra, a primitiva é $\frac{x^{4+1}}{4+1}=\frac{x^5}{5}$ então, a forma mais direta de resolver uma integral definida é a seguinte: $\int_0^5 x^4\,dx=\frac{x^5}{5}\Big|_0^5=\frac{5^5}{5}-\frac{0^5}{5}=625$

b) $\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{1/2}\,dx$.

Perceba que ainda não realizamos a operação de integração, somente alteramos a função para descobrir qual regra utilizaremos. Agora está claro que trata-se de uma variável elevada a uma potência. O símbolo da integração somente é retirado após a aplicação de uma regra. Seguimos:

$$\int x^{1/2}\,dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1}{x^{1/3}}dx = \int x^{-1/3}dx$

Agora, sabemos qual regra utilizar. Realizando a integração:

$$\int x^{-1/3}dx = \frac{x^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}x^{2/3} + C$$

d) $\int_1^2 5dx = 5x\Big|_1^2 = 5\cdot 2 - 5\cdot 1 = 10 - 5 = 5.$

e) $\int_1^e x^{-1}dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$

Entendeu como aplicar as regras apresentadas? Não deixe as dúvidas se acumularem. Releia atentamente as deduções, anote suas dúvidas, converse com seus colegas, leve suas dúvidas para seu professor ou tutor. Agora, vamos determinar as regras para as funções trigonométricas seno e cosseno em um caso um pouco mais geral:

Seja *n* um número real, então

$$\int \cos(nx)dx = \frac{1}{n}sen(nx) + C$$

e

$$\int sen(nx)dx = -\frac{1}{n}\cos(nx) + C.$$

Lembrando que você sempre pode conferir o resultado de suas integrais! Basta fazer uma derivada da resposta obtida e verificar se você obtém a função original. A propósito, você se lembra da "regra da cadeia"?

Reflita

A regra da cadeia

Faça a derivada de $f(x) = \frac{1}{7}sen(7x) + C.$

Calcule agora a integral de cos(7x). Faz sentido?

Exemplificando

Determine os valores para as integrais definidas ou indefinidas a seguir:

a) $\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx$

b) $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}(3x)\,dx$

c) $\int \cos\left(\frac{1}{5}x\right)dx$

d) $\int \operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}x\right)dx$

Resolução: vamos aplicar as regras para integrais de funções trigonométricas e o Teorema Fundamental do Cálculo, quando necessário.

a) $\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(0) = 0.$

b) $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)\Big|_0^{\pi/3} = -\frac{1}{3}\cos\pi - \left(-\frac{1}{3}\cos 0\right) = \frac{2}{3}.$

c) $\int \cos\left(\frac{1}{5}x\right)dx = \frac{1}{1/5}sen\left(\frac{1}{5}x\right) + C = 5sen\left(\frac{1}{5}x\right) + C.$

d) $\int \operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}x\right)dx = -\frac{1}{4/3}cos\left(\frac{4}{3}x\right) + C = -\frac{3}{4}cos\left(\frac{4}{3}x\right) + C.$

É essencial entender por completo as regras apresentadas anteriormente. Se necessário volte, releia, para somente depois seguir. Se está tudo bem, vamos então avançar um pouco mais estudando agora as integrais das funções logarítmicas e exponenciais. Seja *n* um número real, então

$$\int e^{nx}dx = \frac{1}{n}e^{nx} + C$$

e

$$\int \ln(nx)\,dx = \frac{1}{n}\left(nx \cdot \ln(nx) - nx\right) + C = x \cdot \ln(nx) - x + C\,.$$

Não se esqueça, nesse início do curso, de tirar a prova real de tudo o que fizer!

Exemplificando

Determine os valores para as integrais definidas ou indefinidas abaixo:

a) $\int_0^1 e^{3x}dx$

b) $\int_1^e \ln(5x)\,dx$

c) $\int e^{\frac{x}{2}}dx$

d) $\int \ln\left(\frac{3}{5}x\right)dx$

Resolução: vamos aplicar as regras para integrais de funções logarítmicas e exponenciais e o Teorema Fundamental do Cálculo, quando necessário.

a) $\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}e^0 = \frac{e^3-1}{3}$

b) $\int_1^e \ln(5x)\,dx = x\ln(5x) - x\Big|_1^e = (e \cdot \ln(5e) - e) - (\ln 5 - 1) \approx 3{,}77$

c) $\int e^{\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{1/2}e^{\frac{x}{2}} + C = 2e^{\frac{x}{2}} + C$

d) $\int \ln\left(\frac{3}{5}x\right)dx = x \cdot \ln\left(\frac{3}{5}x\right) - x + C$

Seguem as regras mais importantes da operação "integração":

• Multiplicar uma função por uma constante e depois integrar resulta no mesmo que integrar a função e depois multiplicar o resultado final pela constante. Ou seja:

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

Onde a é um número real qualquer.

• A integral de uma soma de funções é igual à soma das integrais das funções. Portanto, $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Perceba que isso ajuda muito a organizar nossas soluções, pois podemos calcular as integrais relevantes termo a termo e somar todos os resultados no final.

• Seja um ponto c tal que $a \leq c \leq b$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Note que esta regra faz todo o sentido, especialmente quando nos lembramos de que a integral nos permite encontrar a área entre um determinado gráfico e o eixo x. Afinal, quando cortamos uma figura geométrica em dois pedaços, a soma das áreas de cada pedaço é igual à área total inicial.

Exemplificando

Determine os valores para as integrais indefinidas a seguir:

a) $\int \left(\frac{4}{x} + 3x^2 \right) dx$

b) $\int (3sen(3x) + 4\ln x)\, dx$

c) $\int \left(\pi \cdot e^{\pi x} - \frac{5}{x^2} \right) dx$

Resolução: vamos optar por aplicar as regras passo a passo, embora o colega, com o tempo, seja capaz de suprimir esses passos.

a) $\int \left(\frac{4}{x} + 3x^2 \right) dx = \int \frac{4}{x} dx + \int 3x^2 dx = 4\int \frac{1}{x} dx + 3\int x^2 dx = 4\ln|x| + x^3 + C$.

b) $\int (3sen(3x) + 4\ln x)\, dx = 3\int sen(3x)\, dx + 4\int \ln x dx =$

$= -\cos(3x) + 4(x\ln x - x) + C$.

c) $\int \left(\pi \cdot e^{\pi x} - \frac{5}{x^2} \right) dx = \int \pi \cdot e^{\pi x} dx + \int \frac{-5}{x^2} dx$

$= \pi \int e^{\pi x} dx - 5\int x^{-2} dx = e^{\pi x} + \frac{5}{x} + C$.

Faça você mesmo

Encontre uma primitiva para função f dada por

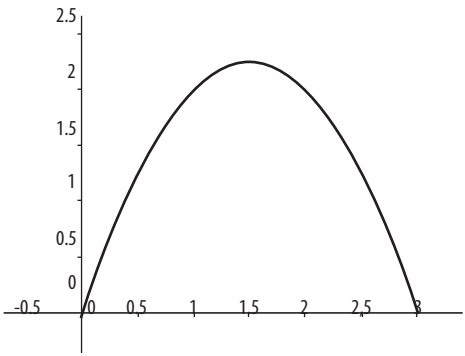
$$f(x) = 2x^{3/5} - \frac{6}{x} + 4\cos(5x) - 2sen(3x) + 7e^{3x} - 5\ln 8x.$$

Dica: encontre as primitivas separadamente, para cada termo da função, depois some os resultados.

Sem medo de errar

Já sabemos que o formato da chapa metálica em questão pode ser representado como mostra a Figura 1.11.

Figura 1.11 | Representação do formato da chapa metálica



Fonte: adaptada de: <https://goo.gl/GPQsS2>. Acesso em: 28 abr. 2016.

Você já calculou a quantidade aproximada de tinta utilizada para pintar uma dessas chapas, porém, para que você apresente um estudo mostrando como a quantidade de tinta impacta na lucratividade da empresa é necessário que esse cálculo seja preciso. Você estudou e concluiu que para obter esse valor exato é necessário realizar um cálculo integral envolvendo o tamanho da chapa e, para isso, você precisa da função matemática que representa esse formato. Portanto, você levou a chapa para o projetista da empresa, e após um estudo, ele te forneceu a função matemática que descreve o formato da placa, a qual é representada pela seguinte equação:

$$\int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right)\, dx$$

Agora é necessário integrar a função e, assim, encontrar o valor exato da área da chapa metálica, da seguinte forma:

$$A = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right)\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{3 \cdot 0^2}{2}\right)$$

$A = 4{,}5\ m^2$.

Atenção

Estude mais sobre integrais imediatas. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~adao/ii1.pdf>. Acesso em: 29 abr. 2016.

Finalizando, você precisa calcular a quantidade exata de tinta. Para isso, vamos considerar que o rendimento da tinta é de 7,16 m^2 / L. Sendo assim, temos que:

$Q_t = A / R$;

Onde:

Q_t = Quantidade de tinta (em L)

A = Área a ser pintada (em m^2)

R = Rendimento (em m^2 / L)

Logo, a quantidade exata de tinta utilizada para pintar uma chapa metálica desse modelo é de 0,63 L. Observa-se que a quantidade de tinta é menor do que a do cálculo aproximado realizado anteriormente. É natural, pois o método de Riemann foi realizado com uma estimativa superior, com os retângulos acima da curva.

Avançando na prática

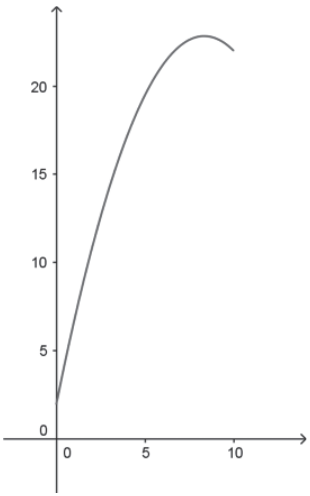
Calculando os lucros obtidos por uma empresa

Descrição da situação-problema

Uma empresa de produtos eletrônicos está no mercado há 10 anos e o proprietário resolveu fazer uma análise da taxa de variação dos lucros da empresa (lucro/tempo). Com os dados, foi feito um gráfico, observando-se que a função tem o comportamento mostrado na Figura 1.12, bem modelado pela função $L'(t) = -0{,}3t^2 + 5t + 2$, sendo a abscissa o período em anos desde sua fundação e a ordenada a taxa de

variação dos lucros em milhões de reais por ano. Sendo assim, o que podemos concluir sobre os lucros obtidos pela empresa?

Figura 1.12 | Representação da taxa de variação do lucro pelo tempo em anos



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se

Você pode utilizar o conceito de integrais imediatas para resolver os mais diversos tipos de problema, incluindo problemas relacionados a economia, como taxa de juros, custos e lucros.

Resolução da situação-problema

Podemos observar que o comportamento da lucratividade da empresa sempre se apresentou crescente, porém, há três anos apresenta queda. É possível utilizar o conceito das integrais imediatas para obtermos o valor do lucro obtido no período de 10 anos de funcionamento da empresa realizando o seguinte cálculo:

$$L = \int_0^{10} \left(-0{,}3t^2 + 5t + 2\right)\, dt = -\frac{0{,}3t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + 2t \Big|_0^{10} = \left(-\frac{0{,}3\cdot 10^3}{3} + \frac{5\cdot 10^2}{2} + 2\cdot 10\right) - \left(-\frac{0{,}3\cdot 0^3}{3} + \frac{5\cdot 0^2}{2} + 2\cdot 0\right)$$

L=170 milhões de reais.

Portanto, a empresa obteve um lucro total de 170 milhões de reais em 10 anos de funcionamento.

Faça você mesmo

Uma microempresa tem uma taxa de variação de lucros dada pela função $L'(t) = 4t^2 - 3t + 7$, sendo a abscissa o tempo em anos desde sua fundação. Qual o lucro total obtido pela empresa nos 3 primeiros anos de funcionamento?

Faça valer a pena

1. Uma primitiva para $f(x) = 4x^3 - 3\cos(3x)$ é:

a) $F(x) = 4x^4 - 9sen(3x)$

b) $F(x) = x^4 + 9sen(3x)$

c) $F(x) = 4x^4 + 3sen(3x)$

d) $F(x) = x^4 - 3sen(3x)$

e) $F(x) = x^4 - sen(3x) + \pi$

2. Uma primitiva para $f(x) = \frac{5}{x^2} + 4sen(2x) + 1$ é:

a) $F(x) = \frac{5}{x^3} + 8sen(2x) + 1$

b) $F(x) = -\frac{5}{x^3} + 4sen(2x) + x$

c) $F(x) = -\frac{5}{x} - 2cos(2x) + x$

d) $F(x) = -\frac{5}{x} + 2sen(2x) + 1$

e) $F(x) = \frac{5}{x} - 2sen(2x) + x$

3. Uma primitiva para $f(x) = e^{3x} + \ln(3x) + \pi$ é:

a) $F(x) = e^{3x} + \frac{1}{x} + \pi x$

b) $F(x) = e^{3x} + \frac{1}{3x} + \pi x$

c) $F(x) = 3e^{3x} + x\ln(x) - x + \pi x$

d) $F(x) = \frac{e^{3x}}{3} + x\ln(3x) + (\pi - 1)x$

e) $F(x) = \frac{e^{3x}}{3} + 3x\ln(3x) + (\pi - 3)x$

Seção 1.3

Cálculo de áreas sobre e entre curvas

Diálogo aberto

Nessa primeira unidade de ensino nós já estudamos a integral de Riemann, o Teorema Fundamental do Cálculo e as antiderivadas – também conhecidas como integrais primitivas –, reunindo esses conceitos para fundamentar o conceito de integração. Também conhecemos as integrais imediatas: polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Dando continuidade, vamos nos aprofundar agora no cálculo de áreas, analisando a área sobre e entre curvas, que é largamente utilizado em projetos diversos, como, por exemplo, no cálculo de tubulações, estruturas metálicas, reatores químicos, corrente elétrica, finanças, dentre outros.

Retomando o desafio de analisar como a quantidade de tinta utilizada na pintura de chapas metálicas impacta nos lucros da empresa, você já sabe qual é a quantidade exata de tinta necessária para a pintura de uma chapa. Agora, a empresa recebeu uma encomenda na qual o cliente deseja que a chapa receba um corte, reduzindo assim a área de pintura. Se a chapa receber primeiro a pintura e posteriormente for cortada, ocorrerá um desperdício de tinta, portanto, a chapa receberá o corte aderindo ao formato requisitado pelo cliente e, posteriormente, receberá a pintura. Dessa forma, para que não haja desperdícios, qual será a nova quantidade de tinta a ser utilizada nessa produção?

Estude com afinco esta seção para conseguir encarar o desafio! Bons estudos!

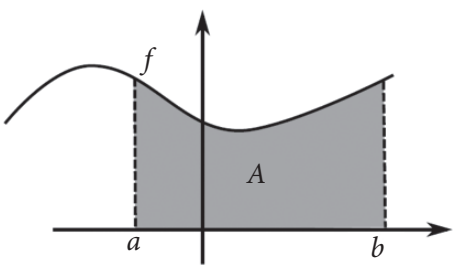
Não pode faltar

Olá, estudante! Seguimos adquirindo novos conhecimentos, e agora aprenderemos a encontrar áreas de superfícies um pouco mais complexas. Você entenderá que as necessidades da indústria e as exigências dos clientes pedem componentes com os formatos

mais variados e com curvas bem acentuadas. Em outras áreas, a comparação entre dois gráficos pode exigir a área formada entre entre ambos, e é justamente o que aprenderemos o que aprenderemos o que aprenderemos a fazer agora.

Antes, vamos discutir um ponto importante. Talvez você já tenha notado que algumas vezes o resultado de uma integral é negativo. É bastante estranho, uma vez que indicamos que a integral nos fornecia uma área, e áreas são sempre positivas. O que ocorre é que a integral nos fornece uma área **orientada**, ou seja, ela diferencia por meio de um sinal uma área que está acima do eixo x de uma área que se encontra abaixo do eixo x. Veja só: a área entre a curva f e o eixo x, especificamente entre os pontos a e b do eixo x, é indicado como A na Figura 1.13.

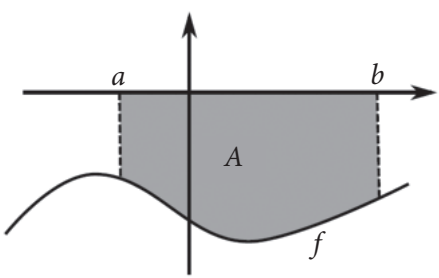
Figura 1.13 | Função que assume valores maiores que zero



Fonte: elaborada pelo autor.

No caso, $A = \int_a^b f(x)dx$. Como a função é, em todos os pontos, positiva, teremos que A será um valor positivo. Veja agora a função da Figura 1.14. A função assume valores negativos, não é mesmo?

Figura 1.14 | Função que assume valores menores que zero



Fonte: elaborada pelo autor.

A integral da função f(x) indicará o fato de que a função assume valores negativos, pois resultará ela mesma em um valor negativo. Portanto, se desejamos a área entre o gráfico da função e o eixo x, lembrando que áreas são valores sempre positivos, teremos $A = -\int_a^b f(x)dx$. Para garantir, você pode utilizar também a regra com um módulo, que serve para os dois casos (positivo e negativo), desde que: **a função não troque de sinal no intervalo estudado**. Teremos $A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$ (área entre uma função e o eixo x, desde que ela não troque de sinal no intervalo).

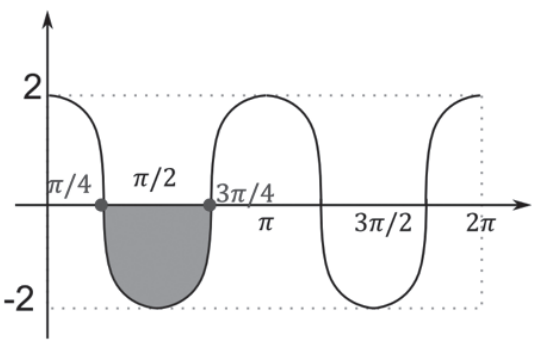
Exemplificando

Uma peça metálica para um motor pode ser medida pela região entre as retas $x = \frac{\pi}{4}$ $x = \frac{3\pi}{4}$, $y = 0$ e pela curva y = 2cos (2x). Esboce a região e calcule a área dessa peça.

Resolução:

1º passo: faça um esboço da peça.

Figura 1.15 | Esboço da curva y = 2cos (2x)



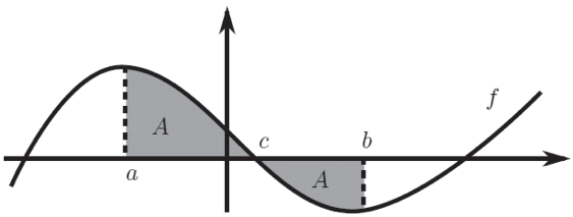
Fonte: elaborada pelo autor.

2º passo: chamamos de *A* essa área e identificamos a integral que devemos calcular, em seguida, aplicamos as regras de integração que conhecemos.

$$A = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\cos(2x)dx = -sen(2x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,u.a.$$

Temos ainda uma questão importante para discutir. Veja agora a Figura 1.16.

Figura 1.16 | Função que assume valores maiores e menores que zero



Fonte: elaborada pelo autor.

Qual seria a área entre f(x) e o eixo x, limitada pelas retas $x = a$, $x = b$? No caso, a função assume valores MAIORES e também MENORES que zero. Que tal simplesmente fazer a integral de a até b? O problema é que a parte que se encontra abaixo do eixo x contribuirá com valores negativos, enquanto a parte que está acima do eixo x contribuirá com valores positivos. O que precisamos, de verdade, é que ambas as partes contribuam positivamente para obter a área.

O primeiro passo para encontrar uma solução é encontrar o zero (ou, em casos mais gerais, os zeros) da função. No caso, estudar o ponto c, através da função f(x)=0, resolvendo e obtendo o x correspondente. Depois, basta fazer o seguinte:

$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

onde invertemos o sinal da parte negativa da integral. Ou, de maneira ainda mais simples:

$$A = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$ (onde c é raiz da função f(x)).

Assimile

Para uma função qualquer f(x), contínua de x = a até x = b, podemos obter a área entre seu gráfico e o eixo x com o seguinte procedimento:

1- Descubra todos os seus n zeros (x_i) no intervalo a – b, resolvendo f(x)=0.

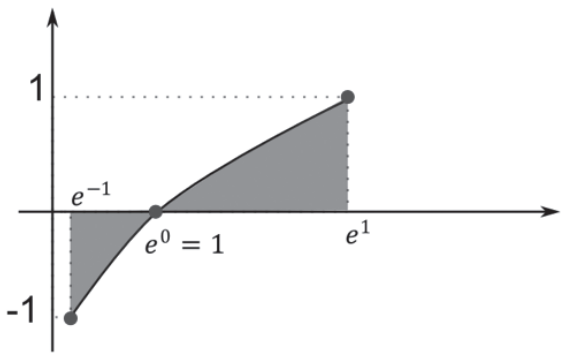
2- Calcule $A = \sum_{i=0}^{n+1} \left|\int_{x_i}^{x_f} f(x)\,dx\right|$, onde $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$.

Exemplificando

O percurso de um rio pode ser modelado pela curva $y = \ln x$. Uma empresa irá construir uma ponte sobre esse rio e usará como terreno de obras a área limitada pelo rio e pela pista (modelada pela reta $y = 0$), entre as distâncias $x = e^{-1}$ e $x = e^{1}$. Esboce e calcule a área do terreno de obras.

Resolução:

Figura 1.17 | Esboço da curva $y = \ln x$



Fonte: elaborada pelo autor.

Localizado o zero da função (x = 1), podemos utilizar a técnica que acabamos de aprender. Vamos calcular separadamente o módulo da integral para as regiões à direita e à esquerda da reta x = 1:

$$\left|\int_{e^{-1}}^{1} \ln x dx\right| = \left|x\ln x - x\right|\Big|_{e^{-1}}^{1} = \left|-1 + 2e^{-1}\right| \approx 0,26 u.a.,$$

$$\left|\int_{1}^{e} \ln x dx\right| = +\left|x\ln x - x\right| = \left|1\right| = 1 u.a.$$

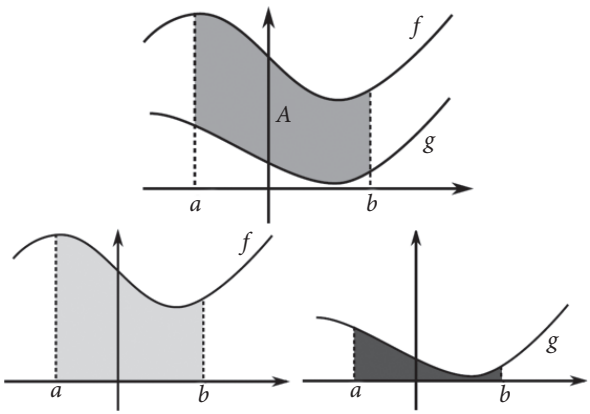
Basta somar os resultados para obter a área total. Será aproximadamente 1,26 u.a.

Muito bem! A única questão é que ainda estamos bastante limitados pelo fato de que sempre encontramos a área com relação ao eixo x. Agora, vamos considerar que temos duas funções e que queremos calcular o gráfico entre elas.

Já sabemos que a área entre cada uma das funções e o eixo x

pode ser obtida por meio de integrais, com as regras mostradas acima. Observe a Figura 1.18. Não fica evidente que, para obter a área entre as curvas, poderíamos tomar a área sob a curva f, e **subtrair** a área sob a curva g? No caso, pode ser utilizada a seguinte regra: a integral da função cujo gráfico está por cima, menos a integral da função cujo o gráfico está por baixo.

Figura 1.18 | Área entre curvas



Fonte: elaborada pelo autor..

$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$ (dado que $f(x) \geq g(x) \; \forall \; x$ no intervalo estudado)

Temos somente que tomar um cuidado, pois pode ocorrer ainda de os gráficos se cruzarem em algum ponto, de modo que g passe a estar acima de f. Então, bastará estudar cada intervalo separadamente, como fizemos para uma única curva que cruza o eixo x.

Assimile

Para duas funções *f(x)* e *g(x)* quaisquer, contínuas no intervalo $x = a$ até $x = b$, podemos obter a área da região entre ambas com o seguinte procedimento:

1- descubra todos os n zeros (x_i) da função *f(x) – g(x)* no intervalo *a – b*, resolvendo *f(x) – g(x)*=0.

2- calcule $A = \sum_{i=0}^{n+1} \left| \int_{x_i}^{x_f} f(x) - g(x) dx \right|$, onde $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$.

Reflita

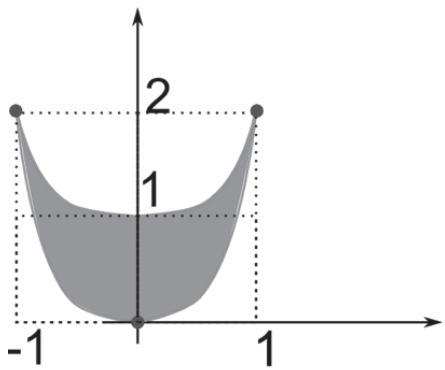
O que acontece com o valor da área se ambas as funções têm valores estritamente negativos (mas g ainda encontra-se abaixo de f)?

Exemplificando

Podemos modelar a superfície de um bumerangue pela região limitada entre as curvas $y = 2x^2$ e $y = x^2 + 1$. Sabendo disso, esboce e determine a sua área.

Resolução:

Figura 1.19 | Esboço da área entre as curvas $y = 2x^2$ e $y = x^2 + 1$



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos utilizar a expressão $A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$, já que a segunda função está sempre abaixo da primeira ou no máximo se tocam nas extremidades.

$$A = \int_{-1}^{1} 1 + x^2 dx - \int_{-1}^{1} 2x^2 dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = 4/3 \, u.a.$$

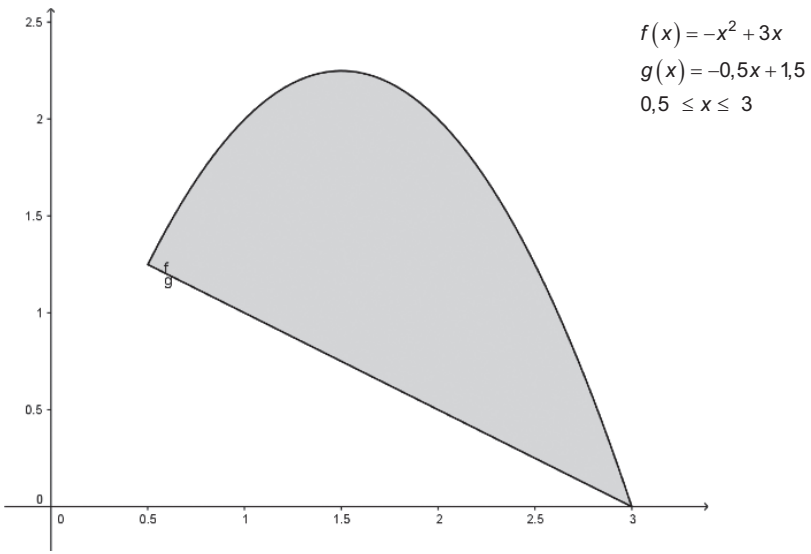
Faça você mesmo

Calcule a área entre a curva $y = \text{sen}x$ e as retas $y = 1/2$, $x = \pi/6$ e $x = 5\pi/6$.

Sem medo de errar

A chapa metálica original possui um formato correspondente à função matemática $f(x) = -x^2 + 3x$, sendo $0 \leq x \leq 3$, assim o projetista da empresa analisou o formato requerido pelo cliente e constatou que o corte da peça obedecerá o comportamento dado pela reta $g(x) = -0{,}5x + 1{,}5$, sendo $0{,}5 \leq x \leq 3$. Dessa forma, para que a chapa adquira o formato correto, os limites de x para f(x) devem ser modificados para $0{,}5 \leq x \leq 3$. A chapa terá o formato apresentado pela Figura 1.20.

Figura 1.20 | Representação do formato da chapa metálica requerida pelo cliente



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora vamos aplicar os conceitos adquiridos sobre o cálculo de áreas sobre e entre curvas para calcular a área da chapa metálica cortada. A sequência e conceitos a serem seguidos são apresentados a seguir:

$$A = \int_{0,5}^{3} (f(x) - g(x)) = \int_{0,5}^{3} \left(-x^2 + 3x\right) - \left(-0,5x + 1,5\right) dx = \int_{0,5}^{3} -x^2 + 3,5x - 1,5 \; dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3,5x^2}{2} - 1,5x \right) \Bigg|_{0,5}^{3} = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3,5 \cdot 3^2}{2} - 1,5 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{0,5^3}{3} + \frac{3,5 \cdot 0,5^2}{2} - 1,5 \cdot 0,5 \right) =$$

$$= 2,6 \; m^2.$$

Finalizando, vamos continuar considerando que o rendimento da tinta é de $7,16 m^2 / L$. Sabemos que: $Q_t = A / R$.

A quantidade exata de tinta utilizada para pintar uma chapa metálica desse modelo é de 0,36 L. Assim, comparando-se com os 0,63 L de tinta obtidos para toda a chapa, na seção anterior, verificamos que a empresa terá uma grande economia de tinta!

Atenção

Veja mais exemplos sobre os conceitos vistos nesta seção acessando o *link* a seguir: Disponível em: <http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/x/listas/areasgraf/area.html>. Acesso em: 29 abr. 2016.

Avançando na prática

Construindo uma peça

Descrição da situação-problema

Uma peça que efetuava o ligamento entre duas engrenagens de uma máquina quebrou. Agora, você deve fazer uma peça nova. O manual da máquina informa que essa peça pode ser recriada, considerando a área limitada pelas curvas $y = sen\, x$ e $y = \cos\, x$ para $\pi/4 \leq x \leq 5\pi/4$. Você deverá calcular o volume de material necessário para construir a peça considerando que a espessura é de duas unidades.

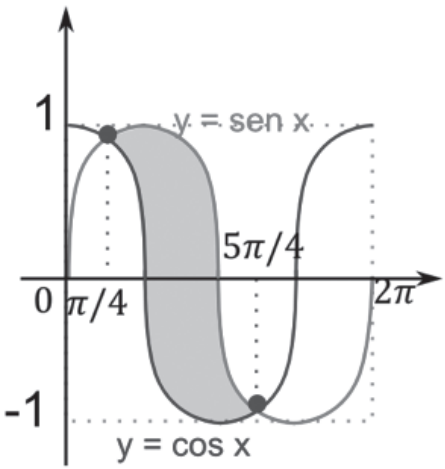
Lembre-se

Você deve identificar qual função possui o gráfico por cima e qual função possui o gráfico por baixo; nesse caso, não importa se as funções são positivas ou negativas.

Resolução da situação-problema

1º passo: Considerando que o volume da peça é dado pelo produto da área com a espessura, deve-se, primeiramente, plotar as funções e identificar a área que queremos calcular.

Figura 1.21 | Esboço da área entre as curvas y = sen x e y = cos x.



Fonte: elaborada pelo autor.

2º passo: Chamamos essa área de A e identificamos as integrais que devemos calcular, em seguida, aplicamos as regras de integração que conhecemos.

$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(f(x) - g(x)\right) = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(sen\ x\right) - \left(\cos x\right) dx = -\cos x - sen\ x \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}\ u.a.$$

3º passo: Para calcularmos o volume (*V*), multiplicamos a área da peça por sua espessura. Logo,

$$V = área \cdot espessura = 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}\ \text{u.v.}$$

Faça você mesmo

Uma peça mecânica pode ter sua área calculada através das funções $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ para $-1 \leq x \leq 1$. Para que você possa solicitar a fabricação dessa peça será necessário calcular a sua área.

Faça valer a pena

1. A área entre as retas y = 0, x = 0, x = 50 e a função y(x) = 50 – x é:

a) –2500 u.a.

b) –1250 u.a.

c) –1000 u.a.

d) 1000 u.a.

e) 1250 u.a.

2. A área entre as retas y=0, x = –5, x = 3 e a função $y(x) = x^2 - 36$ é:

a) 115,49 u.a.

b) 176,13 u.a.

c) 237,33 u.a.

d) 285,72 u.a.

e) 333,33 u.a.

3. A área entre as retas y = 0, x = 1/e , x = 1 e a curva y(x) = ln(x) é:

a) 0,15 u.a.

b) 0,19 u.a.

c) 0,22 u.a.

d) 0,26 u.a.

e) 0,35 u.a.

Seção 1.4

Problemas de valores iniciais imediatos

Diálogo aberto

Chegamos a nossa última seção desta unidade de ensino, encerrando nossa introdução às integrais e dando continuidade com um aprofundamento, estudando diversas aplicações no decorrer dessa disciplina. Até agora nós já aprendemos muito sobre a integração de Riemann, integrais definidas e indefinidas e o Teorema Fundamental do Cálculo. Conhecemos as integrais imediatas: polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, e as utilizamos para encontrar áreas sob e entre curvas.

Nesta seção, vamos conhecer e resolver os problemas de valores iniciais imediatos que são essenciais para compreender o uso das integrais no cotidiano e em outras disciplinas de exatas, que você ainda conhecerá ao longo do seu curso. Esses conceitos são bastante utilizados para resolver problemas de engenharia e aplicados à física e à economia, por exemplo.

Vamos concluir o nosso desafio? Você trabalha em uma empresa que realiza a pintura de chapas de metal galvanizadas que serão utilizadas na construção civil e deve apresentar uma análise mostrando como a quantidade de tinta utilizada na pintura de chapas metálicas impacta nos lucros da empresa. A empresa está atualmente executando a pintura em dois tipos de peças, uma delas com formato conforme a função matemática $f(x) = -x^2 + 3x$ e limitada pelo eixo x, para $0 \leq x \leq 3$. A outra chapa corresponde à anterior com um corte realizado conforme a função $g(x) = -0{,}5x + 1{,}5$, sendo $0{,}5 \leq x \leq 3$. Após alguns estudos, você concluiu que a empresa deve adotar uma nova tecnologia, que reduzirá gradativamente a quantidade de tinta utilizada. Você estimou o impacto positivo da ação na variação dos lucros da empresa, bem representado pela função $L'(t) = 0{,}3t + 3$ se $0 \leq t \leq 10$, onde t é o tempo em anos e L' tem unidade milhões de reais por ano. Sabendo que o fato de não pintar a área que sofreu corte gerou imediatamente um lucro de R$ 3 milhões para a empresa, e que a lucratividade com as chapas cortadas crescerá

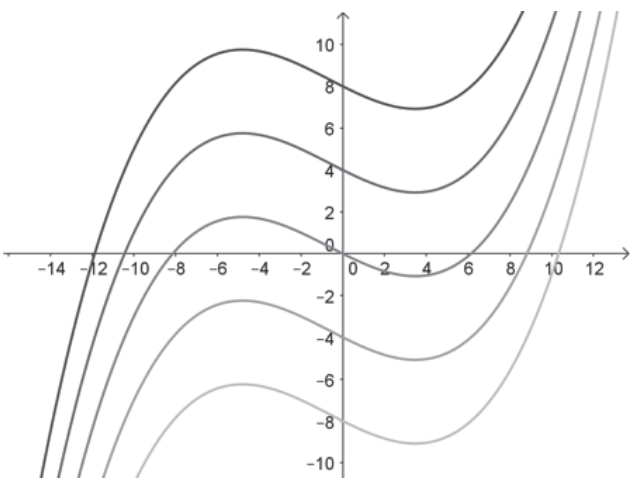
conforme a taxa descrita pela adoção da nova tecnologia, qual poderá ser o lucro total da empresa nos próximos 10 anos, no que se refere a estas medidas em particular?

Neste contexto, assimilando os conceitos desta seção, você poderá concluir esse desafio e muitos outros que surgirão no seu cotidiano profissional. Siga em frente! Bons Estudos!

Não pode faltar

Olá, estudante! Como vimos nas seções anteriores, devemos sempre acompanhar uma integral indefinida por uma constante C. Isso ocorre porque existe uma família de primitivas que nos respondem a pergunta: qual a função F(x) que, derivada, resulta na função *f(x)*? Qualquer função *F(x) + C* resultará na mesma derivada *f(x)*, uma vez que a derivada de uma constante é zero. Observe a Figura 1.22. Você percebe que todas as funções apresentadas têm a mesma derivada no mesmo valor constante de x? São a mesma função, deslocadas no eixo y. Todas cruzam o eixo y em valores distintos.

Figura 1.22 | Elementos de uma família de primitivas



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

Quando realizamos uma integral definida, obtemos um número, um valor específico com relação ao eixo x. No caso da integral indefinida, obtemos sempre a família de primitivas. Portanto, obtemos funções.

Em alguns casos, como veremos a seguir, é importante e tem significado a escolha precisa de uma determinada primitiva, com a obtenção da constante de integração C. Um exemplo de aplicação muito comum vem da Física. A velocidade instantânea de um corpo é dada pela variação da posição com relação ao tempo. Ou seja, a derivada da posição com o tempo. Digamos que você conhece a função que descreve essa velocidade em função do tempo: $v(t) = 3t^2 - 2t + 1$. Pode ser que você queira obter a posição desse objeto em um determinado instante de tempo, não é mesmo? Basta integrar, pois a função posição é uma das primitivas da função velocidade. Teremos então:

$$s(t) = \int v(t)dt = \int 3t^2 - 2t + 1dt = t^3 - t^2 + t + C$$

No instante 3 s, qual a posição exata do objeto? Obteremos como resposta:

$$s(3) = 3^3 - 3^2 + 3 + C = 21 + C$$

Ou seja, não obtivemos a posição inicial exata! Obtivemos apenas o deslocamento do objeto no intervalo de 3 segundos, 21 metros. A resposta exata depende da posição inicial do corpo ou, ao menos, que tenhamos conhecimento da posição do corpo em algum instante. Se for de nosso conhecimento que a posição inicial do corpo era 5 m, ou seja:

$$s(0) = 5m,$$

então sabemos que

$$s(0) = 0^3 - 0^2 + 0 + C = 5m,$$

e portanto:

$$C = 5m.$$

Utilizando a condição inicial, podemos descobrir qual a posição do corpo no instante 3 s:

$$s(3) = 3^3 - 3^2 + 3 + 5 = 21 + 5 = 26m$$

Esta é uma aplicação específica. No geral, teremos sempre uma "condição inicial" ou uma "condição de contorno". Receberemos o

valor da função em um determinado ponto, algo do tipo $F(a)+C=b$ com a e b números reais. Tal informação nos permitirá encontrar a constante C. Poderíamos também receber a constante de integração e obter o limite a ou o limite b.

Assimile

No geral, temos duas tarefas a realizar.

1º passo: integrar a função f(x) obtendo F(x) + C.

2º passo: utilizar a informação extra fornecida pelo enunciado, na forma F(a) + C = b, para obter C.

Exemplificando

Em uma refinaria, uma máquina parou de funcionar, gerando uma taxa de variação do prejuízo (em milhares de reais) em função do tempo (em horas) em que a máquina fica parada dada por:

$P'(t) = 2t + 20$

Sabendo que com a máquina funcionando não há prejuízo ($P(0) = 0$), calcule o prejuízo da empresa caso a máquina fique parada por 4 horas.

Resolução:

Para iniciar o problema, uma boa conduta é sempre organizar suas ideias, anotando todas as informações

$$\begin{cases} \textit{Derivada}: P'(t)=2t+20. \\ \textit{Valor inicial}: P(0)=0. \\ \textit{Objetivo}: P(4)=? \end{cases}$$

1º passo: como conhecemos a derivada da função, utilizamos a integral indefinida, obtendo $P(t)=\int 2t+20dt = t^2+20t+C$.

2º passo: como ($P(0) = 0$), substituindo 0 na função devemos obter o valor 0, com isso podemos concluir que $0^2 + 20(0) + c = 0$

Portanto, C = 0 e $P(t) = t^2 + 20t + 0$

Logo, $P(4) = 4^2 + 20 \cdot 4 = 96$ *mil* reais

Perceba que em muitos casos precisamos utilizar derivadas de segunda ordem para obter a função desejada. No caso, utilizaremos o mesmo procedimento, a diferença será que precisaremos de duas informações: f(a) = b e f'(c) = d. Primeiro faremos a integral indefinida de f'', obtendo f' + C e utilizando a informação f'(c) = d. Depois, integramos f' para obter f + D, onde D é uma segunda constante de integração. Utilizamos a informação f(a) = b e descobrimos D.

Trata-se de algo muito comum, diversos problemas de Física, de Economia e de Engenharia dependem disso. Na Física, por exemplo, podemos receber como informação uma função aceleração a(t) de um móvel, sua velocidade inicial e sua posição inicial, para encontrar a posição final do móvel. Na verdade, faremos um problema que envolve espaço s = s(*t*), velocidade v = s'(*t*) e aceleração a = s"(*t*).

Vamos fazer um exemplo mais geral, para entender bem. Qual é a função *f* cuja derivada de segunda ordem é dada por $f''(x) = 6x + 6$, sabendo que $f'(2) = 20$ e $f(1) = 5$?

Resolução:

1º passo: como conhecemos a derivada de segunda ordem da função, utilizamos a integral indefinida como antiderivada para obter a derivada da função f', veja:

$$f'(x) = \int (6x + 6)\,dx = 3x^2 + 6x + C$$

2º passo: como $f'(2) = 20$, substituindo 2 na função derivada devemos obter o valor 20, com isso podemos concluir que

$$3(2)^2 + 6(2) + c = 20.$$

Assim, $C = -4$ e $f'(x) = 3x^2 + 6x - 4$.

Agora, basicamente repetimos os primeiros passos para determinar nossa função f.

3º passo: como conhecemos a derivada da função, utilizamos a integral indefinida como antiderivada, obtendo

$$f(x) = \int \left(3x^2 + 6x - 4\right)dx = x^3 + 3x^2 - 4x + D$$

4º passo: como $f(1) = 5$, substituindo 1 na função devemos obter o valor 5, com isso podemos concluir que

$$1^3 + 3(1)^2 - 4(1) + D = 5.$$

Portanto,

$$D = 5.$$

Logo,

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 5.$$

Faça você mesmo

Qual é a função f cuja derivada é dada por $f'(x) = 2\cos(2x) + 2x$ e onde $f(\pi) = 0$?

Exemplificando

Em uma corrida de automóveis, a largada é feita em movimento. Após 3 segundos, um carro encontra-se a 10 m da linha de largada ($s(3) = 10$) e após 2 segundos, a velocidade é de 10 m/s ($s'(2) = 10$). Sabendo que a aceleração do automóvel é dada por $s''(t) = 2t$ m/s^2, determine a posição do carro após 6 segundos.

Resolução:

O problema em questão envolve as funções espaço $s = s(t)$, velocidade $v = s'(t)$ e aceleração $a = s''(t)$. Atenção: não adianta tentar utilizar as equações que você conhece da Física do Ensino Médio. O movimento estudado acima não é uniforme nem uniformemente variado. Com esta técnica, você pode **deduzir** todas aquelas equações e resolver problemas muito mais interessantes!

1º passo: anotando os dados, temos

$$\begin{cases} s''(t) = 2t\ m/s^2; \\ s'(2) = 10 m/s; \\ s(3) = 10 m; \\ s(6) = ?; \end{cases}$$

2º passo: como conhecemos a derivada de segunda ordem da função, utilizamos a integral indefinida como antiderivada, obtendo

$$s'(t) = \int 2t\,dt = t^2 + C$$

3º passo: como s'(2) = 10 m / s, substituindo 2 na função derivada, devemos obter o valor 10; com isso, podemos concluir que

$$2^2 + C = 10$$

Portanto, C = 6 e $s'(t) = t^2 + 6$. Nosso objetivo é obter a equação da posição, portanto, seguimos em frente!

4º passo: como conhecemos a derivada da função, utilizamos a integral indefinida como antiderivada, obtendo

$$s(t) = \int \left(t^2 + 6\right) dt = \frac{t^3}{3} + 6t + D$$

5º passo: como s(3) = 10m, substituindo 3 na função derivada, devemos obter o valor 10, com isso, podemos concluir que

$$\frac{3^3}{3} + 6(3) + D = 10$$

Portanto, D = –17 e $s(t) = \frac{t^3}{3} + 6t - 17$. Logo, S(6) = 91 m.

Sem medo de errar

Vamos analisar a lucratividade da empresa em relação à quantidade de tinta utilizada na pintura das chapas metálicas como última etapa do nosso desafio. Você se lembra de que, por não pintar a área da chapa que foi cortada, a empresa teve uma economia imediata de 3 milhões, que pode ser revertida para seus lucros. Pela adoção de uma nova tecnologia que economiza tinta na aplicação, a taxa de lucro da empresa aumentou conforme a expressão $L'(t) = t + 3$ Qual será o impacto no lucro da empresa, nos 10 anos seguintes, devido às iniciativas propostas?

Resolução: Para iniciar o problema, vamos organizar as informações no que concerne à chapa metálica sem cortes.

Então temos a função que representa a taxa de variação do lucro da

empresa, o valor inicial e o valor que queremos encontrar para 10 anos:

Derivada: $L'(x) = 0{,}3x + 3$

Valor Inicial: $L(0) = 3$

Objetivo: $L(10) = ?$

1º passo: como conhecemos a derivada da função, utilizamos a integral indefinida, obtendo:

$$L(x) = \int 0{,}3x + 3 \, dx = \frac{0{,}3x^2}{2} + 3x + C$$

2º passo: como $L(0) = 3$ substituindo 0 na função devemos obter o valor da constante 3, com isso podemos concluir que $\frac{0{,}3 \cdot 0^2}{2} + 3 \cdot 0 + C = 3$

Portanto, C = 3 e $L(x) = \frac{0{,}3x^2}{2} + 3x + 3$

Logo, $L(10) = \frac{0{,}3 \cdot 10^2}{2} + 3 \cdot 10 + 3 = 48$ milhões de reais

Encontramos que a empresa obterá um lucro de 48 milhões de reais com a implementação das medidas sugeridas. É um grande resultado!

Avançando na prática

Esgotando um reservatório

Descrição da situação-problema

Uma caixa d'água está com um vazamento que pode ser descrito pela função $V'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ litros em função do tempo em minutos. Sabendo que, no instante inicial já haviam vazado 20 litros, ou seja $V'(0) = 20$, você deverá determinar quantos litros já terão vazado em 49 minutos.

Lembre-se

Para determinar o valor de C, deve-se utilizar o valor inicial dado.

Resolução da situação-problema

Primeiramente, anotando os dados, temos:

$$\text{Derivada: } V'(x) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\text{Valor Inicial: } V(0) = 20$$

$$\text{Objetivo: } V(49) = ?$$

1º passo: como conhecemos a derivada da função, basta realizar a integral indefinida

$$V(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{t} + C.$$

2º passo: como $V(0) = 20$, podemos concluir que $\sqrt{0} + C = 20$

Portanto, C = 20 e $V(x) = \sqrt{t} + 20$

Logo,

$V'(49) = \sqrt{t} + 20 = 27$ litros.

Assim sendo, vazaram 27 litros de água da caixa d'água em 49 minutos.

Faça você mesmo

Um carro inicialmente em repouso possui uma aceleração cujo comportamento pode ser descrito pela função $s''(t) = \frac{2t}{9}\ m/s^2$. Descubra a velocidade desse carro após 20 segundos.

Faça valer a pena

1. Qual é a função f cuja derivada é dada por $f'(x) = 2x + 5$ e $f(0) = 2$?

a) $f(x) = x^2 + 3$

b) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

c) $f(x) = x^2 + 5x + 3$

d) $f(x) = x^2 + 5x + 2$

e) $f(x) = 5x + 2$

2. Qual é a função f cuja derivada é dada por $f'(x) = 2e^{2x} - 3$ e $f(0) = 1$?

a) $f(x) = e^{2x} - 3x + 1$

b) $f(x) = e^{2x} - 3x$

c) $f(x) = 2e^{2x} - 3x + 1$

d) $f(x) = 2e^{2x} - 3x$

e) $f(x) = e^{2x} + 1$

3. Qual é a função f cuja derivada é dada por $f'(x) = \ln(2x) + 1$ e $f(1) = 0$?

a) $f(x) = x \ln(2x) - 2x + 2$

b) $f(x) = \ln(2x) - \ln 2$

c) $f(x) = \frac{2}{x} - 2$

d) $f(x) = \ln(2x) + 1$

e) $f(x) = x \ln(2x) - \ln 2$

Referências

FLEMMING, D. M.; GONCALVES, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivação, integração. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1992.GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

LARSON, R.; EDWARDS, B. **Cálculo com aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

LIMA, E. L. **Curso de análise**: Projeto Euclides. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. v. 1.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. **Física**: mecânica. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage, 2013. v. 1.

THOMAS, G. B. **Cálculo de George B. Thomas**. 10. ed. São Paulo: Pearson/Addison Wesley, 2003. v. 2.

Regras avançadas de integração e coordenadas polares

Convite ao estudo

Contextualização

Iniciamos os nossos estudos da disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral II* aprendendo as integrais e suas aplicações. Dentro deste assunto nós conhecemos a integral de Riemann e as integrais imediatas e estudamos como aplicá-las calculando áreas sobre e entre curvas e resolvendo os problemas de valores iniciais imediatos.

Continuando os nossos estudos, nessa unidade, nós vamos conhecer e aplicar as regras avançadas de integração e coordenadas polares, estudando o cálculo de volume de sólidos de revolução, integração por partes e mudanças de variáveis, curvas em coordenadas polares e o cálculo de áreas sobre e entre curvas polares.

Com a finalidade de atingir os nossos objetivos e compreendendo a relevância do tema, temos como competência geral conhecer conceitos e técnicas relativas às derivadas e integrais de funções de uma e duas variáveis e suas aplicações. Esta unidade tem os seguintes objetivos de aprendizagem: (1) saber identificar e calcular uma integral de volume; (2) saber relacionar um volume com uma integral; (3) saber identificar um sólido de revolução; (4) saber identificar e estimar o volume de um sólido, utilizando integrais; (5) assimilar as regras avançadas de integração: integrais por partes e mudança de variáveis nas integrais; (6) saber identificar coordenadas polares; (7) esboçar curvas polares; e (8) saber identificar e calcular os problemas com coordenadas polares.

Neste contexto, você trabalha em um escritório de engenharia civil que foi contratado para realizar um projeto de construção de um museu de matemática. Sabemos que um projeto como esse é composto por diversas etapas, como: instalações de água e

eletricidade, infraestrutura, estrutura, cobertura e custos. O museu será composto por sete pavimentos com mezanino em estrutura metálica; centro elevador panorâmico central, também em estrutura metálica; iluminação especial e ventilação sob dutos. A estrutura da construção será em sistema de casca de concreto armado autoportante e no topo do edifício estará localizada a caixa d'água. A equipe comandada por você será responsável pelos cálculos em função da área onde o museu será construído e a determinação do custo da casca de concreto do edifício. Você já pensou como o *cálculo diferencial e integral* te auxiliará a cumprir essas etapas e fazer da sua equipe um sucesso dentro do escritório? Como calcular o valor do projeto utilizando esses conceitos?

Aplicando os conhecimentos adquiridos nessa unidade você deverá solucionar essas etapas do projeto de construção do museu, dentre outros desafios da realidade profissional. Siga em frente! Bons estudos!

Vamos imaginar que você trabalha em uma empresa que realiza a pintura de chapas de metal galvanizadas utilizadas na construção civil. Ela produz uma grande quantidade dessas placas e é conhecida no mercado por oferecer um preço competitivo e um produto de ótima qualidade, conquistando cada vez mais clientes e aumentando a sua produtividade. Para que a empresa consiga continuar a oferecer um preço competitivo, um planejamento criterioso sobre a quantidade de tinta que está sendo utilizada na pintura de suas placas deverá ser realizado. Dessa forma, você foi designado para ser o responsável a quantificar o consumo de tinta e analisar o impacto desse consumo nos lucros da empresa.

Aplicando os conceitos apresentados nessa unidade você deverá realizar os cálculos referentes ao consumo de tinta da empresa, bem como quanto a empresa está lucrando com a venda dessas placas. Aceita o desafio? Siga em frente! Bons estudos!

Seção 2.1

Cálculo de volume de sólido de revolução

Diálogo aberto

Aplicando a geometria euclidiana, podemos ver que é muito simples encontrar o volume de um cilindro ou de um cubo, porém, no nosso cotidiano, podemos encontrar as mais variadas formas e assim podemos observar que a minoria delas é regular, como as supracitadas. Essas formas, tão comuns à nossa volta, podem ser expressas através de funções matemáticas, mas como resolver essas funções matematicamente a fim de se encontrar o volume dessas formas? Antes que as teorias do cálculo fossem desenvolvidas, esses volumes eram calculados de forma aproximada, porém, atualmente, podemos obter o volume de formas sinuosas através do cálculo.

Assim sendo, nessa seção, você vai aprender como calcular o volume de formas complexas a partir de suas funções matemáticas, especialmente aplicadas aos sólidos de revolução, obtidos girando o gráfico de uma função em torno de um dos eixos canônicos e, dessa forma, cumpriremos o nosso objetivo de aprendizagem, que é saber identificar e estimar o volume de um sólido, utilizando integrais. Assim sendo, você será o responsável pela construção de um museu de matemática, sabendo que a execução de um projeto como esse demanda várias etapas de desenvolvimento.

Na primeira etapa, você vai direcionar a sua equipe a realizar o projeto da construção onde será instalado o museu de matemática. A primeira etapa desse projeto será calcular o volume de concreto armado autoportante utilizado para construir a casca do edifício. Sabendo-se que a casca de concreto deve possuir 30 cm de espessura e a construção tem 25 metros de altura, estudaram-se as possibilidades junto à sua equipe e foi concluído que essa construção deverá ser calculada rotacionando a região limitada entre as retas $y = 0, x = 0$, a curva $y = 25 - x^2$ onde x encontra-se no intervalo $-5 \leq x \leq 5$ determinará o formato externo na casca, e a curva $y = 24{,}7 - 1{,}12x^2$ onde x encontra-se no intervalo $-4{,}7 \leq x \leq 4{,}7$ determinará o formato interno, sendo ambas em torno do eixo y, formando a casca. A partir desses dados, como você vai direcionar a sua equipe a calcular o volume de concreto? É possível usar integrais para realizar essa etapa do projeto?

Utilizando os conceitos apresentados nessa seção, você poderá resolver essa etapa do projeto do museu de matemática, dentre outros com complexidade ainda maior. Então, vamos lá! Para que essa tarefa siga com qualidade, domínio e segurança, fique atento a todas as técnicas que serão abordadas no decorrer dessa seção. Sucesso na sua jornada!

Não pode faltar

Estimando volumes

Hoje, estudaremos uma maneira simples de estimar volumes de sólidos! Afinal, temos interesse em conhecer quanto espaço os objetos ocupam, quanta matéria-prima é necessária para produzi-los, ou mesmo qual sua capacidade, no caso de recipientes. Mas não se enganem, as mais diversas áreas de ciências exatas utilizam gráficos de muitas variáveis, onde o problema de obter o volume sob superfícies é muito comum e importante. Não é um conhecimento aplicado somente às Engenharias ou à Física.

O cálculo de volumes sempre foi importante ao longo da história. Lembra-se do "método da exaustão" dos gregos? Ele também era utilizado para estimar volumes. Sólidos simples, como cilindros, paralelepípedos e pirâmides, eram inseridos no interior do objeto que desejamos investigar, visando preenchê-lo. Isso nos permite uma estimativa inferior do volume do sólido, através da soma dos volumes dos sólidos utilizados.

Reflita

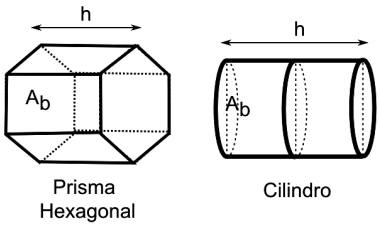
O que você faria para estimar o volume de um sólido maciço? Não dá para inserir nada no interior dele. Consegue pensar em uma maneira de fazer uma estimativa superior do volume?

Lembre-se de que para encontrar o volume de um prisma ou de um cilindro regular, basta multiplicar a área da base A_b pela altura h:

$$V = A_b \cdot h \ .$$

É claro que, se você girar a figura, o método continua a valer. Na figura 2.1, a área da lateral precisa ser multiplicada pelo comprimento.

Figura 2.1 | Prisma e cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

Para volumes, entretanto, foram desenvolvidos na antiguidade outros métodos extremamente eficientes de estimativa de volume, utilizando a água. Graças a isso, até hoje é comum à indicação de volume em litros (1/ = 1000cm^3). Você já deve ter ouvido alguma indicação de volume em litros, seja em referência ao volume do porta-malas de um carro, ou ao volume de uma mochila, não é mesmo?

Como a água adapta-se às mais diversas formas, basta despejar essa água no recipiente de formato complicado que desejamos estudar, até que ele seja completamente preenchido. Depois, é só despejar a mesma água em um recipiente vazio de volume conhecido (uma caixa de formato retangular ou cilíndrico). Multiplicamos a altura que a água atingiu pela área da base.

Reflita

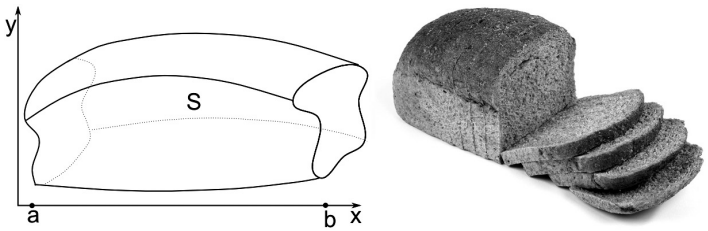
O que você faria para estimar o volume de um sólido maciço utilizando água? Não dá para inserir água no interior dele. Consegue pensar em uma maneira? Na antiguidade, o grande gênio Arquimedes conseguiu!

Os gênios da antiguidade encontraram soluções simples e práticas para calcular volumes. Com o atual desenvolvimento científico e tecnológico, entretanto, nós não queremos desperdiçar água tratada para estimar volumes, nem gastar recursos com mão de obra e laboratórios de nossas empresas, não é mesmo? Queremos usar um computador e calcular em poucos segundos. Com o Cálculo Integral, isso é possível!

Na unidade anterior, desenvolvemos a soma de Riemann, dividindo a área sob a curva em retângulos. Como podemos fazer

agora, com volumes? Sabemos que podemos calcular um volume multiplicando uma área conhecida pela altura. E se dividíssemos o sólido em fatias de alturas iguais? Imagine um pão. Poderíamos calcular seu volume somando o volume de cada uma das fatias, não é mesmo? Vamos estudar um sólido S, conforme a Figura 2.2.

Figura 2.2 | O sólido S e o pão integral

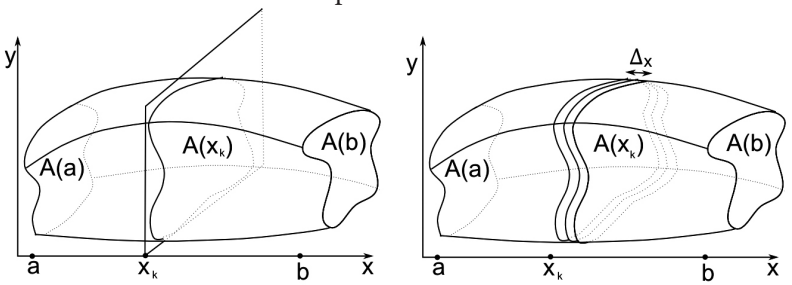


Fonte: <https://goo.gl/4z1jqB>. Acesso em: 27 jun. 2016.

Para que isso funcione, precisamos conhecer a fórmula para a área lateral, de cortes perpendiculares ao eixo x.

Figura 2.3 | Corte e fatia

elaborada pelo autor.



Fonte: elaborada pelo autor.

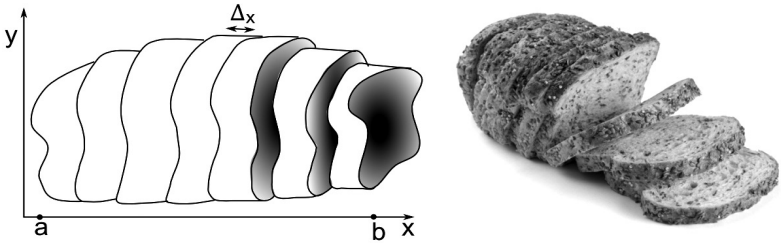
Se cortarmos nosso sólido em um ponto x_k, encontraremos uma área $A(x_k)$ como área de um lado da fatia de um pão integral. Agora, podemos fazer uma aproximação. Supor que em uma região de largura Δx a área transversal é a mesma. Sabemos que, na verdade, a área varia suavemente, mas estamos fazendo uma aproximação, assim como utilizamos retângulos na unidade anterior, mesmo sabendo que a curva varia suavemente.

O volume de cada fatia na aproximação é dado por:

$$V_K = A(x_K) \cdot \Delta x$$

Portanto, divida o intervalo [a,b] em algumas partes de comprimento Δx (as larguras das fatias) e escolha em cada parte um valor x_K para considerar a área $A(x_K)$ da fatia. Nesse caso, separamos nosso sólido em fatias conforme a Figura 2.4.

Figura 2.4 | Sólido como soma de fatias



Fonte: <https://goo.gl/r4Kg5z>. Acesso em: 27 jun. 2016. .

Somando o volume de cada fatia, teremos uma estimativa do volume do sólido completo:

$$V_s = \sum_k V_k = \sum_k A(x_k) \cdot \Delta x$$

Como melhorar a estimativa? Diminuindo as larguras Δx! Com $\Delta x \to 0$, ou seja, dividindo em infinitas fatias, tenderemos ao valor exato do volume! Essa soma (limite) é justamente o que definimos como sendo uma integral de Riemman, como pode ser visto na Figura 2.4. Logo:

Assimile

O volume do sólido S é dado por:

$$V_s = \int_a^b A(x)dx$$

Sólidos de Rotação

Um caso extremamente útil em que tal método é aplicado é no caso dos conhecidos "sólidos de rotação". Vamos supor uma função qualquer f(x). Girando-a com relação ao eixo x, obteremos um objeto de formato arredondado. Realizando um corte em

qualquer ponto x_i, obteremos um círculo com raio $f(x_i)$ e, portanto, área $A = \pi \cdot (f(x_i))^2$. Percebam que não há exigência alguma de que a rotação seja realizada em torno do eixo x. Ela pode ser realizada em torno do eixo y, e no caso o raio da circunferência será a distância entre a função e o eixo y. Com um pouco mais de trabalho, é possível realizar a rotação em torno de um eixo qualquer, marcando a distância entre o gráfico da função e o eixo desejado.

Assimile

O volume V de um sólido de revolução, obtido com a rotação em torno do eixo x da região entre a reta y=0 e o gráfico de uma função f para o intervalo $a \leq x \leq b$ é dado por: $V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 dx$.

Para rotações em torno do eixo y, teremos: $V = \int_a^b A(y)dy = \int_a^b \pi \left(d(y)\right)^2 dy$

Onde d(y) é a distância do gráfico da função até o eixo y.

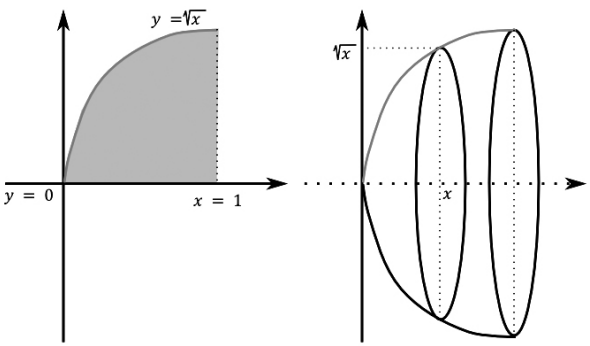
Exemplificando

Esboce e calcule o volume de um sólido de rotação, obtido girando-se a região limitada entre o gráfico da função f dada por $f(x) = \sqrt{x}$ e as retas y=0 e x=1.

Resolução:

Na figura 2.5, temos o esboço da região da rotação em torno do eixo x.

Figura 2.5 | Rotação em torno do eixo



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, nossa área de secção é dada por:

$A(x) = \pi \cdot (\sqrt{x})^2 = \pi x$

Portanto:

$$V = \int_0^1 \pi x \, dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} u.v.$$

OBS.: u.v. representa unidades de volume.

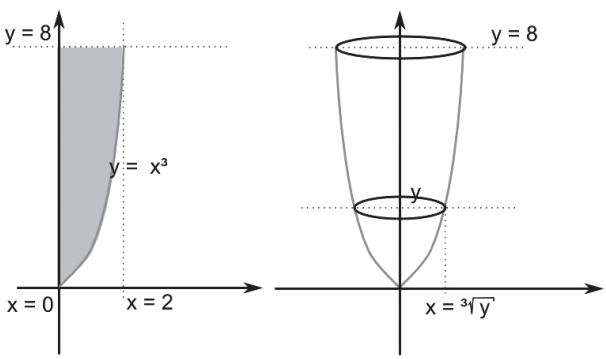
Exemplificando

Esboce e calcule o volume de uma taça, cujo recipiente é obtido através da rotação da função $f(x) = x^3$ em torno do eixo y com limite superior dado pela reta y=8.

Resolução:

O esboço do gráfico e da rotação em torno do eixo y podem ser vistos na figura 2.6.

Figura 2.6 | Rotação em torno do eixo y



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa vez, foi solicitada a rotação em relação ao y. Assim, obtemos novamente círculos e, como antes, precisamos definir seus raios. Entretanto, para cada *y* que escolhemos entre 0 e 8 temos o raio equivalente ao valor de x em função de y de *x* em função de y, isto é, se $y = x^3$ então: $x = \sqrt[3]{y}$ marca o raio do círculo. Note que agora os pequenos discos da aproximação serão áreas em função de y multiplicadas por um $\Delta y \rightarrow dy$, infinitesimal. Portanto:

$$A(y) = \pi \left(\sqrt[3]{y} \right)^2 = \pi y^{\frac{2}{3}}$$

Como y varia entre 0 e 8, então:

$$V = \int_0^8 A(y)dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3\pi}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^8 = \frac{96\pi}{5} u.v.$$

Faça você mesmo

Esboce e calcule o volume do sólido obtido girando a região limitada pelas retas y=x, y=0 e x=5 em torno do eixo x.

Pesquise mais

Nesse *link*, você poderá encontrar mais sobre volumes de sólidos em:

Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/ssr/ssr-html/ssr-br.html>. Acesso em: 27 jun. 2016.

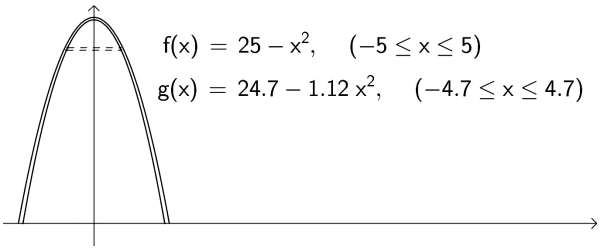
Sem medo de errar

Vamos iniciar o nosso projeto de construção do museu de matemática? Você trabalha em um escritório de engenharia civil que foi contratado para construir um museu de matemática e a sua equipe ficou responsável por algumas etapas desse projeto. A primeira etapa que deve ser cumprida pela equipe comandada por você é calcular o volume de concreto que será utilizado na construção da casca do edifício que comportará esse museu. Foi concluído por você, junto à sua equipe, que essa construção deverá ser calculada rotacionando a região limitada entre as retas $y = 0$, $x = 0$, a curva $y = 25 - x^2$, onde x encontra-se no intervalo $-5 \leq x \leq 5$ determinará o formato externo na casca, e a curva $y = 24{,}7 - 1{,}12x^2$ onde x encontra-se no intervalo $-4{,}7 \leq x \leq 4{,}7$ determinará o formato interno, sendo ambas em torno do eixo y, formando a casca. Como calcular o volume de concreto?

Resolução:

Primeiramente, esboce a região da construção e conforme as curvas que representam a estrutura do edifício apresentando 25 metros de altura e a espessura de 30 cm da casca.

Figura 2.7 | Projeto do museu



Fonte: elaborada pelo autor.

Após essa primeira etapa, você deverá determinar a área de corte A(y) para cada y. Sabendo que $A(y) = \pi \cdot (x)^2$ para o volume de um sólido de rotação, temos que $y = 25 - x^2$, ajustando a equação, teremos que $x = \sqrt{25 - y}$, portanto, $A(y) = \pi\,(\sqrt{25 - y})^2 = \pi\,(25 - y)$.

Atenção

Você deve determinar a função inversa, pois a rotação é em y.

Sendo assim, vamos calcular o volume do sólido integrando essa função, sabendo que y está entre 0 e 25, representando a altura da construção, então:

$$V = \int_0^{25} A(y)dy = \pi \int_0^{25} 25 - y\ dy = \left(25\pi y - \pi \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{25} = 625\pi - 312{,}5\pi = 981{,}25\ m^3$$

Agora, vamos calcular o volume considerando a segunda função apresentada, que representa a construção internamente, dessa forma sabendo que $A(y) = \pi \cdot (x)^2$ para o volume de um sólido de rotação, temos que $y = 24{,}7 - 1{,}12x^2$, ajustando a equação, teremos que $x = \sqrt{22{,}05 - 0{,}89y}$, portanto, $A(y) = \pi\,(\sqrt{22{,}05 - 0{,}89y})^2 = \pi(22{,}05 - 0{,}89y)^2$. Agora, vamos calcular o volume do sólido integrando a sua função, sabendo que y está entre 0 e 24,7, pois representa a altura da construção subtraindo-se a espessura referente à casca de concreto, então:

$$V = \int_0^{24,7} A(y)dy = \pi \int_0^{24,7} 22,05 - 0,89y \; dy = \left(22,05\pi y - 0,89\pi \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{24,7} = 273,1\pi - 0\pi = \; 858,11\, m^3$$

Para se obter o volume de concreto armado autoportante referente à casca da construção, deve-se subtrair os volumes encontrados através das funções que representam a construção, assim, temos que o volume de concreto a ser utilizado é de: V = 981,25 - 858,11=123,14 m^3

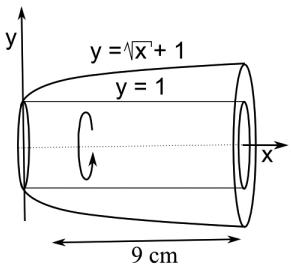
Avançando na prática

Cilindro Pneumático

Descrição da situação-problema

Cilindros pneumáticos são muito utilizados como amortecedores, sendo assim, sua construção necessita de precisão. Você é o projetista de uma empresa que constrói cilindros pneumáticos e deseja construir uma base para um cilindro, obtida girando-se a região entre as curvas $y = \sqrt{x} + 1$ e $y = 1$, para x entre 0 e 9 e a unidade do volume é cm^3. Como calcular o volume desse cilindro?

Figura 2.8 | Base para cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se

Quando há duas funções envolvidas, você deve identificar qual função possui o gráfico por fora e qual função possui o gráfico por dentro, para depois fazer a diferença entre os volumes.

Resolução da situação-problema

O primeiro passo é determinar os volumes a serem calculados. Para calcularmos o volume total, utilizaremos o volume com a curva externa e subtrairemos o volume com a curva interna.

Para a curva externa, temos:

$$V_{externo} = \int_0^9 A(x)\,dx = \pi \int_0^9 \left(\sqrt{x}+1\right)^2 dx = \pi \int_0^9 x + 2\sqrt{x} + 1\,dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right)\Bigg|_0^9 = 85{,}5\pi \ cm^3$$

Para a curva interna, temos:

$$V_{\text{int}erno} = \int_0^9 A(x)\,dx = \int_0^9 (1)^2 dx = \pi \int_0^9 1\,dx = \pi x\Big|_0^9 = 9\pi \ cm^3$$

Para determinar o volume total do cilindro, vamos agora finalizar o nosso cálculo subtraindo os dois volumes encontrados:

$V_{total} = V_{externo} - V_{interno} = 85{,}5\pi - 9\pi = 76{,}5\pi\ cm^3$

Faça você mesmo

Esboce e calcule o volume de um sólido, obtido girando-se em torno do eixo y a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Faça valer a pena

1. Qual integral você resolveria para obter o volume do sólido obtido a partir da rotação da área entre a função $x^4 + x + 1$ e o eixo x, em torno do eixo x, no intervalo $0 \leq x \leq 1$?

a) $V = \int_0^1 2\left(x^4 + x + 1\right)dx$

b) $V = \int_0^1 \pi\left(x^4 + x + 1\right)dx$

c) $V = \int_0^1 \pi\left(x^4 + x + 1\right)^2 dx$

d) $V = \int \left(x^4 + x + 1\right)dx$

e) $V = \int_0^1 \pi^2\left(x^4 + x + 1\right)dx$

2. O volume do sólido obtido girando-se em relação ao eixo x, a região limitada pelas retas y=0, x=0, $x = 3$ e $y = x^{3/2}$ é:

a) $30\pi\ u.v.$

b) $\frac{52\pi}{3} u.v.$

c) $\frac{44\pi}{7} u.v.$

d) $15\pi\ u.v.$

e) $\frac{81\pi}{4} u.v.$

3. O volume do sólido obtido girando-se em relação ao eixo y, a região limitada pelas retas x=0, y=1, y=2 e $y = \sqrt[5]{x^2}$ é:

a) $4\pi\ u.v.$

b) $\frac{13\pi}{3} u.v.$

c) $\frac{32\pi}{3} u.v.$

d) $13\pi\ u.v.$

e) $\frac{55\pi}{3} u.v.$

Seção 2.2

Integração por partes e mudanças de variáveis.

Diálogo aberto

Na primeira seção da segunda unidade da disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral II*, aprendemos sobre como calcular o volume de um sólido de revolução. Você lembra que na unidade anterior aprendemos a soma de Riemann? Sabemos que para calcular um volume é necessário multiplicar uma área conhecida pela altura, e então vimos que, se dividíssemos o sólido em partes iguais, poderíamos calcular seu volume somando o volume de todas essas partes e, assim, aplicamos esses conceitos para calcular o volume de um sólido de revolução.

Nessa seção, vamos voltar a estudar regras de integração. Você já deve ter percebido que não sabemos fazer integrais de produto ou divisão de funções, certo? Pois bem, nessa seção, iremos trabalhar alguns desses problemas aplicando as técnicas de integração por partes e a substituição de variáveis. Através da integração por partes é possível expressar a integral de um produto de funções em uma outra integral. Já o método de substituição por variáveis é aplicado sempre que temos uma integral que possa ser representada pela forma $u = g(x)$.

Continuando o nosso desafio, você trabalha em um escritório de engenharia civil que foi contratado para realizar a construção de um museu de matemática. Sua equipe e você já estudaram o terreno da construção e calcularam o volume de concreto necessário para construir a casca do edifício que contemplará o museu. Em posse desses dados, agora, sua equipe e você deverão planejar o custo desse concreto. Sabendo-se que o tempo de construção possui uma expectativa de 7,5 meses, o setor financeiro da construtora concluiu que a função que descreve o custo da estrutura da obra do museu é: $p'(t) = t^2e^{1,04t}$ em reais por m^3. Qual será o custo de concreto necessário na construção da sua estrutura do museu de matemática? Como calcular esse custo a partir dessa função?

Dedique os conhecimentos adquiridos com os estudos dessa seção para resolver esse desafio e muitos outros que você enfrentará na sua carreira profissional. Pronto? Ótimos estudos!

Não pode faltar

Vamos, agora, continuar aprofundando nossos conhecimentos no que diz respeito às integrais. Na seção anterior, tivemos a oportunidade de aprender como calcular volumes de sólidos de rotação. Já somos capazes de resolver problemas interessantes utilizando o cálculo integral, não é mesmo? Entretanto, você já deve ter notado que sempre estamos resolvendo integrais muito simples. Você é capaz de fazer derivadas de funções muito mais complexas do que as funções que temos integrado. Afinal, com poucas regras, como a regra do produto e a regra da cadeia, somos capazes de encontrar derivadas de funções muito complicadas com relativamente pouco esforço!

Existe um número bem maior de técnicas de integração, diferentes para cada tipo de problema. Você precisa dominar ao menos as mais importantes. Na presente seção, apresentaremos duas técnicas fundamentais: a integração por partes e a substituição de variáveis.

Integração por partes

Na integração por partes, aprenderemos a lidar com integrais de produtos de funções, do tipo: $\int a(x)b(x)\,dx$. Devemos admitir que a expressão que acabamos de mostrar não traz nenhuma ideia de como lidar com tais integrais. O que nos ajudará aqui será usar nossos conhecimentos de derivação, mais especificamente a regra do produto. Considere duas funções deriváveis a(x) e b(x). A regra do produto indica que:

$$\frac{d}{dx}\left[a(x)b(x)\right] = a'(x)b(x) + a(x)b'(x).$$

Lembre-se

As derivadas são representadas utilizando diferentes notações: $\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$.

Perceba que a integral é a operação inversa da derivada. Portanto:

$$\int \frac{d}{dx}\left[a(x)b(x)\right]dx = a(x)b(x) + C$$

Pela regra do produto:

$$\int \frac{d}{dx}\left[a(x)b(x)\right]dx = \int \left(a'(x)b(x) + a(x)b'(x)\right)dx = \int a'(x)b(x)dx + \int a(x)b'(x)dx$$

Então:

$$\int a'(x)b(x)dx + \int a(x)b'(x)dx = a(x)b(x) + C$$

Ou:

$$\int a(x)b'(x)dx = a(x)b(x) + C - \int a'(x)b(x)dx$$

Assimile

A regra de **integração por partes** diz que dadas duas funções deriváveis *a* e *b*, então:

$$\int a(x)b'(x)dx = a(x)b(x) + C - \int a'(x)b(x)dx$$

Ou no caso das integrais definidas, temos:

$$\int_c^d a(x)b'(x)dx = a(x)b(x)\Big|_c^d - \int_c^d a'(x)b(x)dx$$

Vamos aplicar esse conceito?

Exemplificando

Obtenha a integral a seguir:

$$\int_0^1 xe^x dx$$

Resolução

Temos um produto de funções, no qual conhecemos a integral de cada função isolada, mas não conhecemos a integral do produto. Utilizaremos a integração por partes. Devemos comparar a integral que possuímos com o lado esquerdo da expressão da técnica, a integral:

$$\int_c^d a(x)b'(x)dx$$

Portanto, entre as duas funções que estão multiplicadas dentro da integral, devemos escolher uma para ser *a* e outra para ser *b'*. Vamos fazer a seguinte escolha:

$$\begin{cases} a(x) = x \\ b'(x) = e^x \end{cases}$$

Para utilizar o lado direito da regra, precisamos obter *a'* e *b*, ou seja, devemos derivar *a* e integrar *b'*. Portanto:

$$\begin{cases} a(x) = x; \quad a'(x) = 1 \\ b'(x) = e^x; \quad b(x) = e^x \end{cases}$$

Na integração de *b'*, escolha a primitiva com constante zero. Assim:

$$\int_0^1 a(x)b'(x)dx = a(x)b(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 a'(x)b(x)dx$$

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

E agora é possível finalizar o problema resolvendo uma integral imediata:

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x - e^x\Big|_0^1 = e - 0 - e + 1$$

$$\int_0^1 xe^x dx = 1$$

Reflita

O que ocorreria se você tivesse feito a definição inversa no exemplo acima?

$$\begin{cases} a(x) = e^x \\ b'(x) = x \end{cases}$$

Você obteria uma solução para o problema?

Em alguns casos, mais de uma aplicação da integração por partes pode ser necessária para resolver o problema. Vamos ver outro exemplo?

Exemplificando

Obtenha a integral a seguir:

$$\int x^2 \cos(x)dx$$

Resolução

Utilizaremos a integração por partes.

$$\int a(x)b'(x)dx$$

Vamos fazer a seguinte escolha:

$$\begin{cases} a(x) = x^2 \\ b'(x) = \cos(x) \end{cases}$$

Para utilizar o lado direito da regra, precisamos obter *a*' e *b*, ou seja, devemos derivar *a* e integrar *b*'. Portanto:

$$\begin{cases} a(x) = x^2; \quad a'(x) = 2x \\ b'(x) = \cos(x); \quad b(x) = sen(x) \end{cases}$$

Na integração de <<Eqn039.eps>>, escolha a primitiva com constante zero. Assim:

$$\int a(x)b'(x)dx = a(x)b(x) + C - \int a'(x)b(x)dx$$

$$\int x^2 \cos(x)dx = x^2 sen(x) - \int 2x\, sen(x)dx + C$$

Percebam que ainda não estamos prontos para encontrar a solução. Entretanto, podemos utilizar pela segunda vez a integração por partes, para resolver a integral:

$$\int xsen(x)dx$$

Escolheremos:

$$\begin{cases} a(x) = x \\ b'(x) = \text{sen}x \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} a(x) = x; & a'(x) = 1 \\ b'(x) = \text{sen}x; & b(x) = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x\text{sen}x\,dx = -x\cos x - \int 1(-\cos x)dx + C'$$

E agora é possível finalizar o problema resolvendo uma integral imediata:

$$\begin{aligned} \int x^2\cos(x)dx &= x^2 sen(x) - 2\int x\,sen(x)dx + C \\ &= x^2 sen(x) + 2x\cos(x) - 2\int \cos(x)dx + C - 2C' \\ &= x^2 sen(x) + 2x\cos(x) - 2sen(x) + C'' \end{aligned}$$

Existe uma estratégia clara nos dois exemplos acima. Polinômios sempre reduzirão seu grau quando derivados, de maneira que o definindo como função a e repetindo o procedimento sempre poderemos eliminá-lo. Logaritmos também, em geral, são definidos como função a. Funções trigonométricas e exponenciais em geral são definidos como função b'.

Faça você mesmo

Encontre a integral a seguir:

$\int x \ln x\,dx$

Vamos, agora, resolver mais um exemplo.

Exemplificando

Calcule a integral indefinida

$\int e^x \cos x\,dx$

Resolução

Em casos assim, também utilizamos a integração por partes. Escolheremos:

$$\begin{cases} a(x) = e^x \\ b'(x) = \cos x \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} a(x) = e^x; \quad a'(x) = e^x \\ b'(x) = \cos x; \quad b(x) = senx \end{cases}$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x sen(x) + C - \int e^x senx\, dx$$

Não parece que avançamos muito, não é? Mas ainda assim utilizaremos a integração por partes uma segunda vez, para a integral:

$$\int e^x senx\, dx$$

Escolheremos:

$$\begin{cases} a(x) = e^x; \quad a'(x) = e^x \\ b'(x) = senx; \quad b(x) = -\cos x \end{cases}$$

Então:

$$\int e^x senx\, dx = -e^x \cos x + C' - \int e^x (-\cos x)\, dx$$

Substituindo o novo resultado, teremos:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x sen(x) + C - \int e^x senx\, dx$$

$$e^x sen(x) + C + e^x \cos x - C' - \int e^x \cos x\, dx$$

Portanto:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x (senx + \cos x) + C'' - \int e^x \cos x\, dx$$

Você notou algo diferente? Que a mesma integral se repete do lado direito e do lado esquerdo da equação, com sinais opostos? Então, podemos fazer o seguinte:

$$\int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx = e^x (senx + \cos x) + C''$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x (senx + \cos x) + C''$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (senx + \cos x) + D$$

Mudança de variáveis

Aprenderemos, agora, uma segunda técnica de integração iimportante, a conhecida mudança de variáveis. Determinadas integrais permitem que se realize uma transformação na variável, que reduz uma integral mais complicada em uma integral simples, imediata.

Definimos uma nova variável u relacionada com a variável x por meio da expressão:

$u = g(x)$

Ee usaremos, também, o seguinte:

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \quad \rightarrow \quad du = g'(x)dx$$

O objetivo é partir de uma integral não imediata e obter uma nova integral, cuja resolução é imediata. Em geral, teremos o seguinte caso:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

Resolvida a integral imediata, tomamos o resultado e o retornamos à variável original.

Observaremos que a função f é multiplicada por uma função que é a derivada (ou um múltiplo da derivada) da função que se encontra no interior da função f. Vamos a um exemplo?

Exemplificando

Determine o valor para a integral a seguir:

$$\int \cos\left(x^2\right) 2x dx$$

Resolução

Observe a integral acima. Sabemos que $2x$ é a derivada de x^2. Então, definiremos:

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}x^2 = 2x \quad \rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

Então:

$$\int \cos\left(x^2\right) 2x dx = \int \cos(u) du = sen(u) + C$$

Chegamos a uma integral imediata e a resolvemos. Basta, agora, tomar o resultado e retornar à variável original.

$$\int \cos\left(x^2\right) 2x dx = sen(x^2) + C$$

Não é uma técnica de integração difícil de utilizar. Precisamos apenas aprender a identificar as situações em que ela é mais útil.

Exemplificando

Determine o valor para a integral a seguir:

$$\int 7\left(x^3 + 5\right)^8 x^2 dx$$

Resolução

Observe a integral acima. Perceba que temos uma função no interior de uma função. Não é um caso tão óbvio quanto o tratado anteriormente, mas podemos perceber que no interior da potência há um polinômio de ordem 3 e, multiplicando, um polinômio de ordem dois. Podemos tentar definir:

$$u = x^3 + 5$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 + 5\right) = 3x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{3} = x^2 dx$$

Então:

$$\int 7\left(x^3 + 5\right)^8 x^2 dx = \int \frac{7}{3}(u)^8 du = \frac{7}{27}(u)^9 + C$$

Obtivemos uma integral imediata, que foi resolvida. Basta, agora, retornar à variável original, obtendo:

$$\int 7\left(x^3 + 5\right)^8 x^2 dx = \frac{7}{27}\left(x^3 + 5\right)^9 + C$$

Sem medo de errar

Nessa etapa do projeto da construção do museu de matemática, sua equipe e você deverão calcular o valor que a construtora deverá receber para custear esse projeto incluindo os seus lucros. Sabe-se que o tempo de construção possui uma expectativa de 7,5 meses, o setor financeiro da construtora concluiu que a função que descreve a variação no custo da estrutura da obra do museu é: $p(t) = t^2 e^{1,04t}$ em reais por m^3. Vamos determinar o custo de concreto? Para iniciar o nosso raciocínio, temos que lembrar que já aprendemos problemas de valores iniciais imediatos.

Resolução:

1º passo: anotando os dados, temos:

$$\begin{cases} Derivada: p(t) = t^2 e^{1,04t} \ ; \\ Valor\ inicial: p(0) = 0. \end{cases}$$

Devemos encontrar o valor total ($p(7,5)$) do pagamento para o projeto de 7,5 meses.

2º passo: já que conhecemos a derivada da função, utilizamos a integral indefinida como antiderivada, obtendo:

$$p(t) = \int t^2 e^{1,04t} dt.$$

3º passo: escolha a e b entre as funções da integral.

$$\begin{cases} a(t) = t^2; \\ b'(t) = e^{1,04t}; \end{cases}$$

4º passo: determine a' e b através de a e b'.

$$\begin{cases} a(t) = t^2; a'(t) = 2t. \\ b'(t) = e^{1,04t}; b(t) = 0,96\, e^{1,04t} \ . \end{cases}$$

5º passo: substitua as funções na regra de integração por partes.

$$\int a(x) b'(x) dx = \ a(x) b(x) - \int a'(x) b(x) dx + C.$$

$$p(t) = \int t^2 e^{1,04t} dt = 0,96t^2 e^{1,04t} - 1,92 \int te^{1,04t}\ dt + C$$

Para:

$$\int te^{1,04t}\ dt.$$

Atenção

Como não resolvemos a integral em um único passo, teremos que aplicar novamente a regra de integração por partes para a integral restante.

6º passo: escolha *a* e *b*' entre as funções da integral.

$$\begin{cases} a(t) = t; \\ b'(t) = e^{1,04t}; \end{cases}$$

7º passo: determine *a'* e *b* através de *a* e *b*'.

$$\begin{cases} a(t) = t; a'(t) = 1. \\ b'(t) = e^{1,04t}; b(t) = 0,96e^{1,04t} \end{cases}.$$

8º passo: substitua as funções na regra de integração por partes.

$$\int a(x)b'(x)dx = a(x)b(x) - \int a'(x)b(x)dx + C.$$

$$\int te^{1,04t}\ dt = 0,96te^{1,04t} - 0,96 \int e^{1,04t}\ dt + C$$

$$= 0,96te^{1,04t} - 0,92e^{1,04t} + C$$

Juntando esse valor à integral anterior (não precisa considerar o segundo C), temos:

$$p(t) = 0,96\ t^2\ e^{1,04t} - 1,85te^{1,04t} + 1,77e^{1,04t} + C$$

9º passo: lembrando que a construtora receberá um pagamento mensal e, assim, no início da construção o pagamento é zero, $p(0) = 0$ substituindo 0 na função, devemos obter o valor 0, com isso, podemos concluir que:

$$0,96(0^2)e^0 - 1,85(0)e^0 + 1,77e^0 + C = 0.$$

Portanto:

$$C = -1{,}77$$

$$p(t) = 0{,}96t^2 e^{1{,}04t} - 1{,}85te^{1{,}04t} + 1{,}77e^{1{,}04t} - 1{,}77$$

Logo, o custo total de concreto para a estrutura do museu é:

$$p(7{,}5) = 0{,}96\cdot(7{,}5)^2 e^{1{,}04\cdot 7{,}5} - 1{,}85\cdot(7{,}5)e^{1{,}04\cdot 7{,}5} + 1{,}77e^{1{,}04\cdot 7{,}5} - 1{,}77 \cong 93.607{,}44 \text{ reais}$$

Avançando na prática

Calculando Áreas

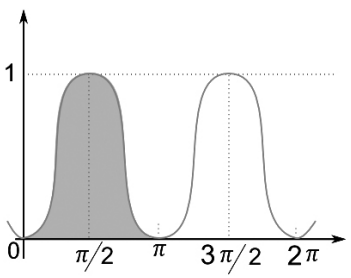
Descrição da Situação-Problema

Você trabalha em uma construtora que está iniciando o planejamento para uma grande obra. Como primeira etapa desse planejamento, você precisará modelar o terreno através da região limitada pela curva e as retas, então, você e sua equipe foram ao local, realizaram as medições e concluíram que a área desse terreno pode ser representada pela função $A = \int_0^{\pi} \text{sen}^2(x)\,dx$. Como você irá descobrir qual a área total do terreno?

Resolução da Situação-Problema

1º passo: Como sabemos que a função que representa o terreno é $A = \int_0^{\pi} \text{sen}^2(x)\,dx$, vamos, primeiramente, identificar a área que queremos calcular, fazendo um esboço da região.

Figura 2.9 | Área a calcular



Fonte: elaborada pelo autor.

2º passo: chamamos essa área de identificamos a integral que devemos calcular, em seguida, aplicamos as regras de integração que conhecemos.

3º passo: escolha e entre as funções da integral.

$$\begin{cases} a(t) = \operatorname{sen}(x); \\ b'(t) = \operatorname{sen}(x); \end{cases}$$

4º passo: determine *a*' e *b* através de *a* e *b*'.

$$\begin{cases} a(t) = \operatorname{sen}(x); a'(t) = \cos x. \\ b'(t) = \operatorname{sen}(x); b(t) = -\cos x\ . \end{cases}$$

5º passo: substitua as funções na regra de integração por partes.

$$\int a(x)b'(x)dx = \ a(x)b(x) - \int a'(x)b(x)dx + k.$$

$$\int \operatorname{sen}^2(x)dx = -\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \int -\cos^2(x)dx + k$$

Usando que $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$ temos que:

$$\int \operatorname{sen}^2(x)dx = -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \int 1 - \operatorname{sen}^2(x)dx + k,$$

isto é,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)dx = -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \operatorname{sen}^2(x)dx + k,$$

assim,

$$2\int \operatorname{sen}^2(x)dx = -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + x + k.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen}(x)\cos(x)) + k.$$

Logo,

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen}(x)\cos(x))\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} u.a.$$

Lembre-se

Integração por partes não resolve a integral diretamente, apenas troca uma integral por outra.

Faça você mesmo

Calcule a integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx.$$

Faça valer a pena

1. O valor da integral $\int_1^4 xe^x dx$ é:

a) 0

b) 1,33

c) 85, 65

d) 163,79

e) 247,86

2. O valor da integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ é:

a) -2π

b) $-\pi$

c) 0

d) π

e) 2π

3. O valor da integral $\int_{e^2}^{e^3} x \ln x dx$ é:

a) 156,77

b) 235,68

c) 392,52

d) 463,34

e) 529,47

Seção 2.3

Curvas em coordenadas polares

Diálogo aberto

Nessa segunda unidade da disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral II*, aprendemos calcular o volume de um sólido de revolução multiplicando uma área conhecida pela altura, e então vimos que, se dividíssemos o sólido em partes iguais, poderíamos calcular seu volume somando o volume de todas essas partes. Já aprendemos, também nessa unidade, a integrar utilizando o método das integrais por partes, sendo possível expressar a integral de um produto de funções em uma outra integral e o método de mudança de variáveis, podendo representar essas funções na forma de $u = g(x)$.

Dando sequência, nessa seção vamos estudar as curvas em coordenadas polares. É bastante usual localizarmos um ponto em um plano através de suas coordenadas cartesianas, porém, existem outros tipos de coordenadas, como as coordenadas polares, que necessitam do raio e ângulo para determinar um ponto no plano. Essas coordenadas são muito utilizadas na programação de máquinas automáticas de usinagem (máquinas CNC – máquinas por Comando Numérico Computacional, resistência dos materiais e cálculo de estruturas, por exemplo).

Dessa forma, vamos voltar ao nosso desafio. Você trabalha em um escritório de engenharia civil que foi contratado para realizar a construção de um museu de matemática. Sua equipe e você já estudaram o terreno da construção, calcularam o volume e estimaram os custos referentes à quantidade de concreto necessário para construir a casca do edifício que contemplará o museu. Continuando o nosso projeto, no topo da construção, serão instaladas a caixa d'água e a casa de máquinas, e sabemos que essas instalações são passíveis de manutenção, sendo assim, é necessária a instalação de luminárias visando facilitar a circulação de pessoas no local, bem como os procedimentos de manutenção quando se fizerem necessários. Você e a sua equipe já realizaram as medições e já sabem quais são os melhores locais para a instalação dessas luminárias, porém, definiram

essas medidas em coordenadas cartesianas e o projetista solicitou que fossem apresentadas em coordenadas polares. Como você irá proceder junto à sua equipe? Como fornecerá essas medidas para o projetista da construtora?

Utilizando os seus conhecimentos adquiridos nessa seção, você irá resolver esse problema e muitos outros que encontrará na sua profissão. Vamos lá? Bons estudos!

Não pode faltar

Na presente seção, vamos aprender a fazer uma transformação de coordenadas em um problema. Transformaremos coordenadas cartesianas (x,y) em coordenadas polares (r,θ), ou seja, deixaremos de descrever posições em termos de uma distância com relação ao eixo x e uma distância com relação ao eixo y para descrever em termos de um raio e um ângulo. Talvez, inicialmente, você não perceba como isso pode ser útil, mas mostraremos na próxima seção que problemas muito difíceis de serem resolvidos em coordenadas cartesianas são resolvidos de maneira surpreendentemente fácil em coordenadas polares. As coordenadas polares são úteis em situações onde as curvas estudadas são círculos, elipses, parábolas, entre outras.

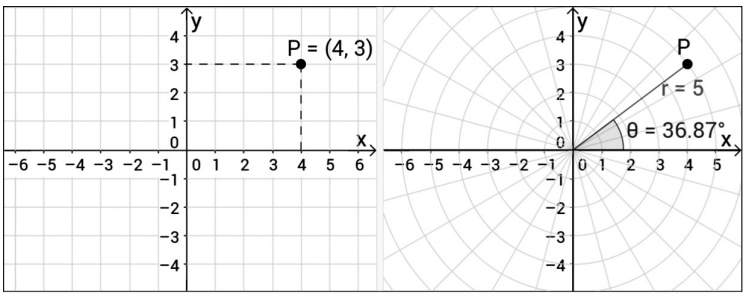
Isso é algo bastante geral em matemática. Por exemplo, quando estudarmos problemas em três dimensões, muitas vezes será mais fácil substituir as coordenadas cartesianas em coordenadas cilíndricas ou esféricas. Existem muitos sistemas de coordenadas! Cada um é útil em uma determinada classe de problemas. Em geral, o sistema de coordenadas que escolhemos tem a ver com a simetria do problema.

Reflita

Você sabe o que é simetria? Procure o significado da palavra em um dicionário online. Nas aplicações que estamos estudando, em geral, o que você tomaria como uma pista de que estamos trabalhando com simetria circular e, portanto, que seria útil usar coordenadas polares? O formato do gráfico? A forma da equação?

Veja a figura 2.10. Nela, o ponto (4,3) é representado em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares.

Figura 2.10 | Ponto representado em coordenadas cartesianas e polares



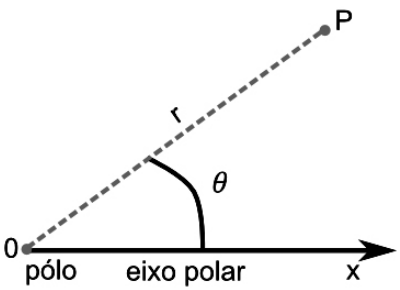
Fonte: <https://goo.gl/LmIgSI>. Acesso em: 19 maio 2016

A conversão de um sistema de coordenadas para outro é bem conhecida de todos nós.

Assimile

Primeiramente, definimos um ponto *O* no plano para ser origem ou polo das coordenadas polares; depois, consideramos um eixo *Ox* chamado de eixo polar. Normalmente, o eixo polar é desenhado na horizontal, correspondendo ao eixo *x* positivo em coordenadas cartesianas. Um ponto *P* pode ser localizado no plano polar através das coordenada polar $P(r,\theta)$, onde θ é o ângulo orientado entre o eixo polar ao eixo *OP* e *r* é a distância orientada entre o polo *O* e o ponto *P*, como fica evidenciado na figura 2.11.

Figura 2.11 | Raio e ângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

As relações importantes para relacionar os dois sistemas de coordenadas são:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

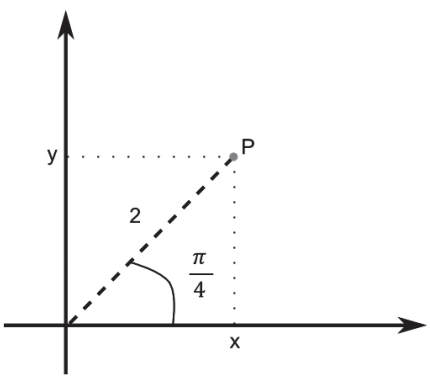
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vamos fazer um exemplo prático para fixar os conceitos!

Exemplificando

1) Considere um ponto *P* no plano, cujo segmento que o liga à origem tem comprimento *2* e faz um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com o eixo , conforme figura 2.12.

Figura 2.12 | O ponto P



Fonte: elaborada pelo autor.

Dadas apenas essas informações do ponto *P*, determine suas coordenadas cartesianas.

Resolução

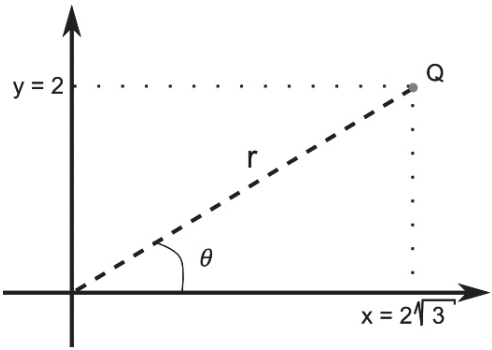
Utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, veremos que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{x}{2} \text{ e } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{2}.$$

Portanto, $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$.

2) Considere o ponto Q no plano, cujas coordenadas cartesianas sejam $x = 2\sqrt{3}$ e $y = 2$, conforme a figura 2.13.

Figura 2.13 | O ponto Q



Fonte: elaborada pelo autor.

Para encontrar r basta utilizar o teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

Para calcular o θ, utilizaremos as relações trigonométricas no triângulo retângulo:

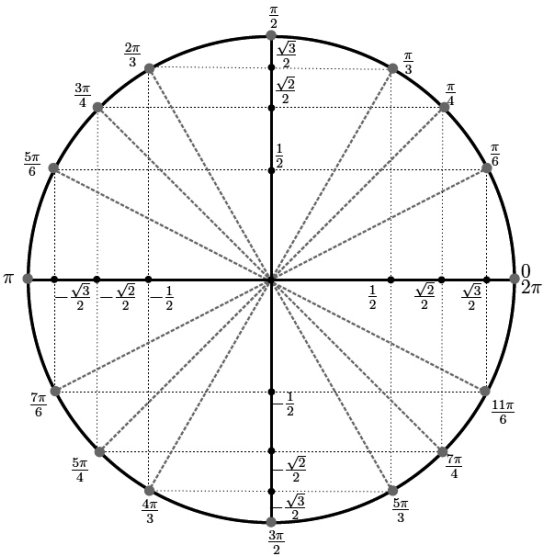
$$\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Podemos, agora, utilizar a função inversa do seno ou do cosseno, obtendo o ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Você já deve ter percebido que precisará lembrar bem os conceitos de trigonometria. Lembre-se de que o raio é sempre um valor positivo (ou zero, no caso da origem). O ângulo poderá assumir valores negativos. Nesse caso, um ângulo positivo é marcado a partir do eixo x no sentido anti-horário, enquanto que um ângulo negativo é marcado a partir do eixo x no sentido horário. Na figura 2.14, encontramos os valores de seno e cosseno com as posições dos ângulos em radianos. Os valores de seno estão sobre a vertical e os valores do cosseno na horizontal.

Figura 2.14 | Ângulos e os valores de seno e cosseno

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{sen} x$	0	1	0	-1	0



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

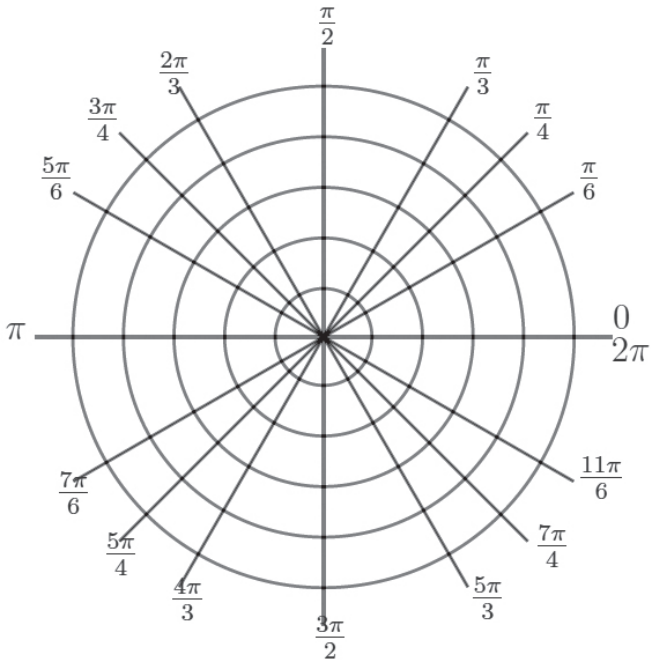
Marque os seguintes pontos no plano polar indicado na figura 2.15.

a) $P\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$

b) $P\left(5, -\frac{7\pi}{6}\right)$

c) $P\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$

Figura 2.15 | Plano polar



Fonte: elaborada pelo autor.

Gráficos

A partir de agora, vamos discutir alguns gráficos importantes que podem ser facilmente transformados para coordenadas polares. Da mesma forma que representamos uma curva no plano cartesiano por $y = f(x)$ e seu gráfico pelo conjunto de pontos $(x, f(x))$, no plano polar, representamos as curvas polares do tipo $r = g(\theta)$ ou $\theta = h(r)$. Tais funções são fáceis de integrar com as técnicas que aprenderemos na próxima seção.

Círculo

Iniciaremos discutindo o círculo, cuja expressão é:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = {r_0}^2$$

Onde x e y são as coordenadas usuais, (X_0, y_0) são as coordenadas do centro do círculo e r_o é o raio da circunferência.

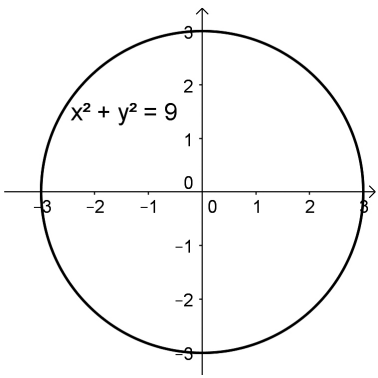
Suponha, por simplicidade, um círculo centrado na origem do sistema de coordenadas $x^2 = y^2 = r_0^2$.Perceba que o gráfico do círculo é composto por duas funções, que podem ser obtidas isolando y em nossa expressão original:

$y = \sqrt{r_0^2 - x^2}$ (metade da circunferência sobre o eixo x)

$y = -\sqrt{r_0^2 - x^2}$ (metade da circunferência abaixo do eixo x)

Qual é, portanto, a curva que representa $x^2 = y^2 = 9$? Ela é representada na figura 2.18. Perceba que a equação do círculo indica que o raio deverá ser 3, o que pode ser percebido antes mesmo do esboço da curva.

Figura 2.16 | Circunferência de raio 3



Fonte: elaborada pelo autor.

O ideal é que tais equações comuns sejam conhecidas de memória. Mas, se sua memória falhar, não há problema. Teste diferentes valores de x e vá inserindo em um eixo cartesiano os pares x, y obtidos. A forma começará a aparecer aos poucos, e você perceberá rapidamente qual a curva correspondente. Como será que a equação indicada acima fica em coordenadas polares? Lembre-se: $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$. Então:

$x^2 + y^2 = 9$

$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 9$

$r^2(\cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta) = 9$

Lembra-se da identidade trigonométrica $sen^2\ \theta + cos^2\ \theta = 1$? Então:

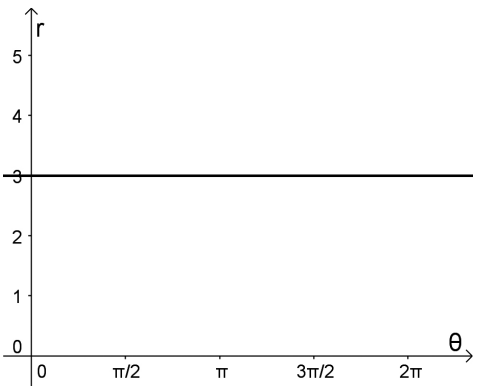
$r^2 = 9$

$r = 3$

Uma equação muito, muito simples, não é mesmo? E muito fácil de integrar! É exatamente por isso que estamos estudando este assunto.

Como ficaria um gráfico de $r = g(\theta)$, com r e θ no lugar de x e y em um eixo cartesiano? Veja a figura 2.17.

Figura 2.17 | Gráfico da função $r = g(\theta)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Ou seja, uma simples reta!

Faça você mesmo

Faça a transformação da parábola $y = 2x^2$ para coordenadas polares e encontre a função resultante do tipo $r = f(\theta)$.

Gráficos úteis

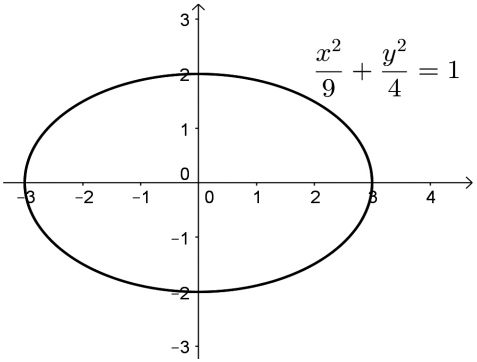
Aproveitamos para introduzir dois gráficos que serão muito úteis nas próximas unidades!

As elipses são formas geométricas dadas pela seguinte equação:

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$$

Onde a e b são os conhecidos semieixos da elipse. A figura 2.18 mostra a representação de uma elipse no plano cartesiano.

Figura 2.18 | Gráfico de uma elipse



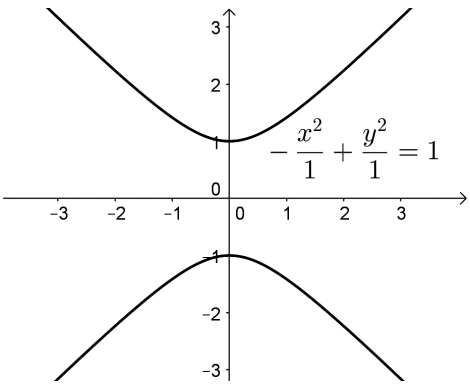
Fonte: elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

Faça a transformação da elipse $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$ para coordenadas polares e encontre a função resultante do tipo $r = f(\theta)$.

Gostaríamos, também, de apresentar a hipérbole $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$, que tem o gráfico mostrado na figura 2.19.

Figura 2.19 | Gráfico de uma hipérbole



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Saiba mais sobre os gráficos estudados acima, que são conhecidos como superfícies cônicas! Estude as seções 10.5 e 10.6 do livro:

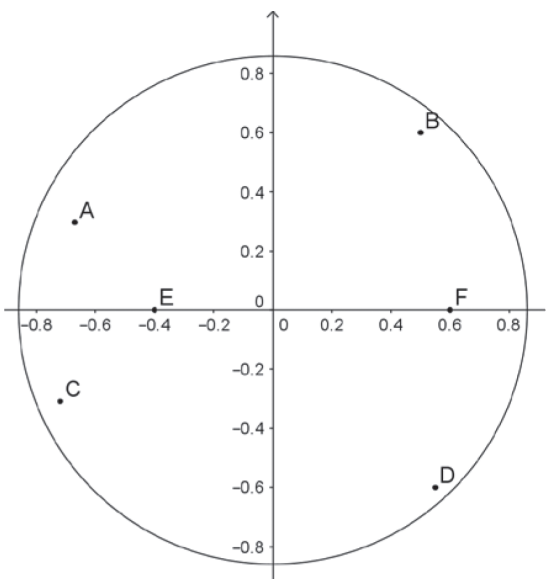
STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage, 2013. v. 2

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson, 2005. v. 2

Sem medo de errar

Dando continuidade ao projeto do museu de matemática, você e a equipe que coordena já realizaram as medições e já sabem quais são os melhores locais para a instalação dessas luminárias, porém, definiram essas medidas em coordenadas cartesianas e o projetista solicitou que fossem apresentadas em coordenadas polares. Conforme o projeto da estrutura do edifício que contemplará o museu, você observou em planta baixa que a laje possui um raio de 0,86 m e, então, você e a sua equipe determinaram os melhores pontos para a instalação das luminárias, como mostra a Figura 2.20, sendo que os pontos A, B, C, D, E e F indicam os locais onde as luminárias devem ser instaladas.

Figura 2.20 | Planta baixa da laje do museu de matemática



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembrando que as coordenadas polares são representadas por raio e ângulo (r,θ). Vamos utilizar o Teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas para converter as coordenadas cartesianas para polares. Assim sendo, vamos encontrar o valor do raio (r) através do Teorema de Pitágoras: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}86$. Para calcular o θ utilizaremos as relações trigonométricas no triângulo retângulo: $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ e $\text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$. Você e a sua equipe realizaram todas as conversões de os resultados podem ser apresentados na Tabela 2.1.

Atenção

Para converter as coordenadas cartesianas em polares, deve-se utilizar o Teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas para se encontrar o raio e o ângulo, respectivamente.

Tabela 2.1 | Resultados das conversões das coordenadas cartesianas em coordenadas polares

Luminária	Coordenadas Cartesianas (x;y)	Coordenadas Polares (r;θ)
A	(-0,67;0,3)	(0,73;156,12º)
B	(0,5;0,6)	(0,78;50,19º)
C	(-0,72;-0,31	(0,78;203,22º)
D	(0,55;-0,6)	(0,81;312,51º)
E	(-0,4;0)	(0,4;180º)
F	(0,6;0)	(0,6;0º)

Fonte: elaborada pelo autor.

Pronto! Mais uma etapa do projeto concluída, agora você pode entregar as coordenadas polares ao projetista.

Avançando na prática

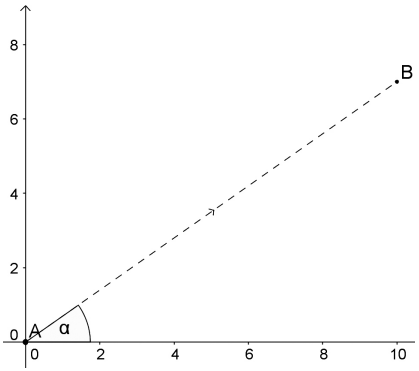
Decolagem de um Avião

Descrição da situação-problema

A decolagem do avião é um dos momentos mais críticos do voo, por exigir maior potência dos motores e cuidados extras com a tripulação e passageiros. Para que o avião atinja a altitude desejada

num determinado tempo, deve-se seguir uma trajetória pré-determinada como mostra a Figura 2.21. Observa-se que a posição do ponto B foi fornecida ao piloto do avião em coordenadas cartesianas, sendo B (10;7), mas é necessário que essa coordenada seja polar. O que você fará para converter?

Figura 2.21 | Trajetória do avião



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Para converter o ponto B, que é apresentado em coordenadas cartesianas, para coordenadas polares, vamos utilizar o Teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas. Assim sendo, vamos encontrar o valor do raio (r) através do Teorema de Pitágoras: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Para calcular o θ utilizaremos as relações trigonométricas no triângulo retângulo: $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ e $\text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$. Assim sendo, temos que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10^2 + 7^2} = 12{,}21\ m$$

$$\cos(\theta) = \frac{10}{12{,}21} \Rightarrow \theta = 34{,}99^{\circ}$$

Portanto, a representação de B em coordenadas polares é (12,21;34,99).

Lembre-se

Vale lembrar que que as coordenadas polares são representadas por raio e ângulo (r,θ).

Faça você mesmo

Em um dos cômodos de uma casa em construção, foram determinados os seguintes pontos a instalação de tomadas de energia: A ($\sqrt{2}$,π/4), B (2,π/2). Como você fará para transformar essas coordenadas polares em cartesianas?

Faça valer a pena

1. Determine a coordenada cartesiana do ponto $P\left(5,\frac{-\pi}{4}\right)$ em coordenadas polares.

a) $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)$

b) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

e) $\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

2. Determine a coordenada cartesiana do ponto $P\left(2,\frac{-\pi}{3}\right)$ em coordenadas polares.

a) $(1,-\sqrt{3})$

b) $(1,\sqrt{2})$

c) $(-1,\sqrt{3})$

d) $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{3})$

e) $(-\sqrt{2},\ 1)$

3. Assinale a alternativa que corresponde a uma representação em coordenada polar do ponto$(3,-3\sqrt{3})$.

a) $P\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$

b) $P\left(6,-\frac{5\pi}{3}\right)$

c) $P\left(6,\frac{5\pi}{3}\right)$

d) $P\left(3,-\frac{\pi}{3}\right)$

e) $P\left(4,-\frac{4\pi}{3}\right)$

Seção 2.4

Integração por substituição trigonométrica

Diálogo aberto

Chegamos ao final da segunda unidade de *Cálculo Diferencial e Integral II* e até aqui nós aprendemos a calcular o volume de um sólido de revolução multiplicando uma área conhecida pela altura, a integrar utilizando o método das integrais por partes ,sendo possível expressar a integral de um produto de funções em uma outra integral, o método de mudança de variáveis podendo representar essa funções na forma de $u = g(x)$ e, também, as curvas em coordenadas polares.

Nessa última seção, encerraremos essa unidade estudando as integrais em coordenadas polares. A integração em coordenadas polares é muito utilizada para encontrar a área de curvas representadas por coordenadas polares, resolvendo assim diversos problemas das áreas de ciências exatas e engenharia, como o cálculo da capacidade dos mais diversos equipamentos, máquinas e construções.

Neste contexto, estamos chegando ao final do projeto do museu de matemática e dentre as mais diversas etapas você e a sua equipe estudaram o terreno da construção, calcularam o volume e estimaram os custos referentes à quantidade de concreto necessário para construir a casca do edifício que contemplará o museu e definiram em coordenadas polares os melhores locais para a instalação das luminárias localizadas no topo da construção, onde serão instaladas a caixa d'água e a casa de máquinas. Agora, vocês vão estudar a fundação (alicerce) da construção! A fundação dessa construção foi realizada em concreto armado para fundação rasa, em sistema radier e agora como última etapa desse projeto você a sua equipe precisam calcular a área da fundação do edifício. Sabe-se que essa fundação possui um raio de meio metro além da base do edifício e que sua espessura possui o mesmo valor, assim, tem-se que a função que descreve a fundação é dada por $x^2 + y^2 = 30{,}25$. Como você e a sua equipe farão o cálculo dessa área?

Vamos obter essas e muitas outras respostas iniciando os nossos estudos com esta seção, resolvendo esse e muito outros problemas aplicando as integrais em coordenadas polares. Bons estudos!

Não pode faltar

Usaremos os conceitos apresentados na seção anterior para calcular integrais, apresentando uma nova técnica de integração: a substituição trigonométrica! É uma variação da técnica de mudança de variáveis, que estudamos anteriormente. Você se lembra?

Na mudança de variáveis, uma nova variável *u* é relacionada com a variável *X* por meio da expressão $u = g(x)$. Na substituição trigonométrica, faremos algo parecido, mas $x = f(\theta)$ onde f é uma função trigonométrica. Portanto, teremos $\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \quad \rightarrow \quad dx = f'(\theta)\,d\theta$.

O objetivo é o mesmo: a partir de uma integral não imediata obter uma nova integral, cuja resolução é imediata.

Quando lidamos com integrais de curvas que possuem simetria polar, como aquelas estudadas na seção anterior, chegaremos sempre em situações típicas, onde a substituição de uma função $x = a\cos\theta$, onde a é um número real positivo, e θ um ângulo entre 0 e ≠ resolverá nosso problema!

Pesquise mais

O método da substituição trigonométrica também funciona em outros casos não discutidos aqui, onde x é substituído por outras funções trigonométricas! Aprofunde-se no tema! Leia a seção 7.3 da referência.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage, 2013. v. 1

Nas integrais por substituição trigonométrica que estudaremos na presente seção, teremos sempre uma função do tipo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Substituindo $x = a\cos\theta$ obtém-se:

$$y = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\theta}$$

Isolando a, teremos:

$$y = \sqrt{a^2(1 - \cos^2\theta)}$$

E lembrando da identidade trigonométrica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, então:

$y = \sqrt{a^2 sen^2\theta}$

Ou:

y = asenθ

Lembre-se de que a é um real positivo e θ um ângulo entre 0 e ≠, portanto, não há necessidade do módulo após a realização da raiz quadrada. Conseguiremos realizar integrais e, portanto, será possível obter áreas sob curvas, dentre outras aplicações interessantes.

Assimile

Nas integrais por substituição trigonométrica que estudaremos na presente seção, teremos sempre uma função do tipo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Para resolver, substitua *x* = acosθ, onde a

Vamos a um exemplo prático?

Exemplificando

Encontre a área entre a metade superior de um círculo de raio *r* = 3*m* e o eixo x.

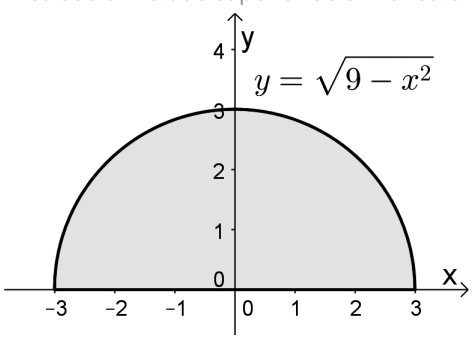
Resolução

Sabemos que a equação que descreve o círculo completo é $x^2 + y^2 = 9$. Isolando y, obtemos:

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

tomando a função positiva, que descreve a metade superior da circunferência. É importante fazer um esboço, especialmente para obter os limites de integração:

Figura 2.22 | Área sob a metade superior de um círculo



Fonte: elaborada pelo autor..

Os limites de integração de interesse serão entre -3 e 3, uma vez que o domínio da função $y = \sqrt{9 - x^2}$ está restrito a esse intervalo, de modo a evitar a raiz quadrada de um valor negativo. Estamos prontos para escrever a integral que descreve a área sob o gráfico:

$$A = \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

Utilizando as regras que aprendemos anteriormente, não saberíamos nem como começar a resolução. Não se trata de um produto de funções, e nem há um múltiplo de 2x multiplicando a raiz quadrada. A substituição trigonométrica nos auxiliará. Comparando com a expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$, percebemos que a = 3, e, portanto, realizaremos a substituição trigonométrica com $x = 3\cos\theta$:

$$y = \sqrt{9 - 9\cos^2\theta}$$

$$y = \sqrt{9 \cdot (1 - \cos^2\theta)}$$

$$y = \sqrt{9 \cdot sen^2\theta}$$

$$y = 3\,sen\,\theta$$

Precisamos também obter dx:

Ou seja:

$dx = (3\cos\theta)' d\theta = -3\text{sen}\theta\, d\theta$

$$A = \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int_{\pi}^{0} (3sen\,\theta) \cdot (-3sen\,\theta\, d\theta)$$

$$A = -9\int_{\pi}^{0} sen^2\theta\, d\theta$$

Note que os limites de integração foram substituídos. Afinal, agora, $x = 3\cos\theta$ Então:

$-3 = 3\cos\theta \rightarrow \cos\theta = -1 \rightarrow \theta = \pi$

$3 = 3\cos\theta \rightarrow \cos\theta = 1 \rightarrow \theta = 0$

OK, parece um pouco melhor. Mas como resolveremos a função seno elevada ao quadrado? Não é uma integral imediata. Entretanto, precisamos nos lembrar da seguinte identidade trigonométrica:

$\cos(2\theta)\ 1 - 2\text{sen}^2\theta$, e portanto:

$$sen^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}.$$

$$A = -9 \cdot \int_{\pi}^{0}\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta$$

$$A = -\frac{9}{2}\cdot\int_{\pi}^{0} d\theta - \frac{9}{2}\cdot\int_{\pi}^{0}\cos(2\theta)\,d\theta$$

Agora, podemos calcular o valor final da integral:

$$A = -\frac{9}{2}\cdot\theta - \frac{9}{2}\cdot\frac{sen(2\theta)}{2}\Big|_{\pi}^{0} = -\frac{9}{2}(-\pi + 0 - 0 + 0) = \frac{9\pi}{2}$$

$$A = \frac{9\pi}{2} \approx 14{,}1m^2$$

Faça você mesmo

Calcule a área entre a parte superior de uma elipse descrita pela equação $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ e o eixo x.

A substituição trigonométrica aplica-se a casos muito gerais. Vamos tentar resolver mais um exemplo?

Exemplificando

Calcule a área entre a curva descrita pela função $y(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ e o eixo x, no intervalo $0 \le x \le 1$.

Resolução

Comparando com a expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$, percebemos que *a = 2*, e, portanto realizaremos a substituição trigonométrica com $x = 2\cos\theta$:

$$y = \sqrt{4 - 4\cos^2\theta}$$

$$y = \sqrt{4 \cdot sen^2\theta}$$

$$y = 2\,sen\,\theta$$

Precisamos também obter dx:

Ou seja:

$dx = (2\cos\theta)'\, d\theta = -2\,sen\theta\, d\theta$

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{-2sen\,\theta\, d\theta}{2sen\,\theta} \right)$$

O resultado é surpreendente:

$$A = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

Note que os limites de integração foram substituídos. Afinal, agora, $x = 3\cos\theta$. Então:

$$0 = 3\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$1 = 2\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Esperamos ter deixado claro o poder da técnica. Agora, podemos calcular com facilidade o resultado da integral:

$$A = -\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$A = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52\,u.a.$

Reflita

Existem diversas técnicas de integração. O cálculo integral não nos dá as respostas tão diretamente quanto o cálculo diferencial, não é mesmo? Quanto maior o número de técnicas que você dominar, mais facilmente resolverá os exercícios.

Sem medo de errar

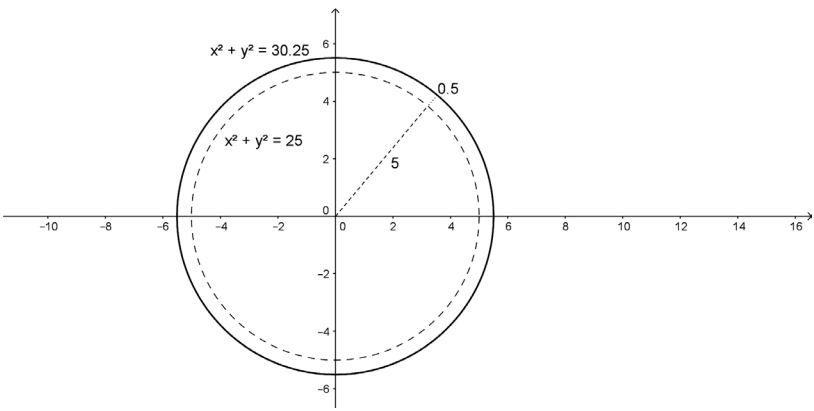
Você e a sua equipe estão chegando ao final do projeto do museu de matemática e concluíram todas as etapas dadas a vocês com muito sucesso. Para finalizar esse desafio, vocês precisarão calcular a área ocupada pela fundação do edifício que contemplará o museu. A fundação dessa construção foi realizada em concreto armado em

fundação (alicerce) rasa, em sistema radier e agora, como última etapa desse projeto, você a sua equipe precisam calcular a área da fundação do edifício. Sabe-se que essa fundação possui um raio de meio metro além da base do edifício e que sua espessura possui o mesmo valor, assim, tem-se que a função que descreve a fundação é dada por $x^2 + y^2 = 30{,}25$, conforme a figura 2.23. Sendo assim, o raio da fundação é de 5,5 metros, então, vamos integrar a função e descobrir a área ocupada por essa construção?

Atenção

Podemos utilizar a integração por substituição trigonométrica para encontrar áreas circulares.

Figura 2.23 | Fundação da construção do museu de matemática



Fonte: elaborada pelo autor.

Primeiramente, temos que preparar a equação para a integração, isolando y, obtemos:

$$y = \sqrt{30{,}25 - x^2}$$

Os limites de integração de interesse serão entre -5,5 e 5,5, devido ao raio da fundação e função $y = \sqrt{30{,}25 - x^2}$. Estamos prontos para escrever a integral que descreve a área da fundação:

$$A = \int_{-5{,}5}^{5{,}5} \sqrt{30{,}25 - x^2}\, dx$$

Comparando com a expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$, percebemos que a = 5,5, e

portanto realizaremos a substituição trigonométrica com $x = 5{,}4\cos\theta$:

$$y = \sqrt{30{,}25 - 30{,}25\cos^2\theta}$$

$$y = \sqrt{30{,}25 \cdot (1 - \cos^2\theta)}$$

$$y = \sqrt{30{,}25 \cdot sen^2\theta}$$

$$y = 5{,}5\,sen\,\theta$$

Precisamos também obter dx:

Ou seja:

$$dx = (5{,}5\cos\theta)'\,d\theta = -5{,}5sen\theta\,d\theta$$

$$A = \int_{-5{,}5}^{5{,}5} \sqrt{30{,}25 - x^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} (5{,}5sen\,\theta) \cdot (-5{,}5sen\,\theta\,d\theta)$$

$$A = -30{,}25\int_{\pi}^{0} sen^2\theta\,d\theta$$

Note que os limites de integração foram substituídos. Afinal, agora $x = 5{,}5\cos\theta$. Então:

$$-5{,}5 = 5{,}5\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = -1 \quad \rightarrow \quad \theta = \pi$$

$$5{,}5 = 5{,}5\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = 0$$

Agora, precisamos nos lembrar da seguinte identidade trigonométrica:

$\cos(2\theta) = 1 - 2sen^2\theta$, portanto:

$$sen^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$$

$$A = -30{,}25 \cdot \int_{\pi}^{0} \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta$$

$$A = -\frac{30{,}25}{2} \cdot \int_{\pi}^{0} d\theta - \frac{30{,}25}{2} \cdot \int_{\pi}^{0} \cos(2\theta)\,d\theta$$

Agora, podemos calcular o valor final da integral:

$$A = -\frac{30{,}25}{2} \cdot \theta - \frac{9}{2} \cdot \frac{sen(2\theta)}{2}\Bigg|_{\pi}^{0} = -\frac{30{,}25}{2}(-\pi + 0 - 0 + 0) = \frac{30{,}25\pi}{2}$$

$$A = \frac{30,25\pi}{2} = 47,52\ m^2$$

Pronto! Agora, sabemos qual é a área da fundação da construção. Parabéns para você e sua equipe, pois concluíram todas das etapas do projeto com muito sucesso.

Lembre-se

Nas integrais por substituição trigonométrica estudadas na presente seção, teremos sempre uma função do tipo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Avançando na prática

Calculando a área de um tanque em uma indústria química

Descrição da situação-problema (máximo 20 linhas)

Você trabalha em uma indústria química que possui um sistema de tancagem para armazenagem de suas matérias-primas e produtos. Felizmente, a produção desse ano aumentará e com isso a empresa precisa construir um novo tanque de armazenagem. Como esse projeto replicará um tanque já existente, sabe-se que a função que representa a base do tanque é $x^2 + y^2 = 4$ e que o raio da base é de 2 metros. Como engenheiro da planta, você precisa saber qual é área que o tanque ocupará para analisar se o local da construção é adequado. Como você calculará essa área?

Resolução da situação-problema

Para calcular a área da base do tanque a ser construído precisamos, primeiramente, preparar a equação para a integração, isolando y, obtemos:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

Os limites de integração de interesse serão entre -2 e 2, devido ao raio da fundação e função $y = \sqrt{4 - x^2}$. Estamos prontos para escrever a integral que descreve a área da fundação:

$$A = \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

Comparando com a expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$, percebemos que $a = 2$, e portanto realizaremos a substituição trigonométrica com $x = 2\cos\theta$:

$$y = \sqrt{4 - 4\cos^2\theta}$$

$$y = \sqrt{4 \cdot (1 - \cos^2\theta)}$$

$$y = \sqrt{4 \cdot sen^2\theta}$$

$$y = 2\,sen\,\theta$$

Precisamos também obter dx:

Ou seja:

$$dx = (2\cos\theta)'\, d\theta = -2sen\theta\, d\theta$$

$$A = \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int_{\pi}^{0} (2sen\,\theta) \cdot (-2sen\,\theta\, d\theta)$$

$$A = -4\int_{\pi}^{0} sen^2\theta\, d\theta$$

Note que os limites de integração foram substituídos. Afinal, agora $x = 5{,}5\cos\theta$. Então:

$$-4 = 4\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = -1 \quad \rightarrow \quad \theta = \pi$$

$$4 = 4\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = 0$$

Agora, precisamos nos lembrar da seguinte identidade trigonométrica:

$\cos(2\theta) = 1 - 2sen^2\theta$, e portanto:

$$sen^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$$

$$A = -4 \cdot \int_{\pi}^{0} \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta$$

$$A = -\frac{4}{2} \cdot \int_{\pi}^{0} d\theta - \frac{4}{2} \cdot \int_{\pi}^{0} \cos(2\theta)\, d\theta$$

Agora, podemos calcular o valor final da integral:

$$A = -\frac{4}{2}\cdot\theta - \frac{9}{2}\cdot\frac{sen(2\theta)}{2}\Big|_{\pi}^{0} = -\frac{4}{2}(-\pi + 0 - 0 + 0) = \frac{4\pi}{2}$$

$$A = \frac{4\pi}{2} = 6{,}28\ m^2$$

Lembre-se

Fazer o esboço correto da figura continua sendo a parte mais importante do problema.

Faça você mesmo

Calcule a área da base de um monumento que possui base circular representada pela função $x^2 + y^2 = 1$ e possui um metro de raio.

Faça valer a pena

1. Observe a integral abaixo:

$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$$

Para resolvê-la, você utilizaria qual das técnicas indicadas?

a) Regra da cadeia.

b) Integração por partes.

c) Substituição trigonométrica.

d) Regra do produto.

e) Integração por frações parciais.

2. O valor da integral $\int_{-2}^{0} \sqrt{4 - x^2}\,dx$ é:

a) 0

b) π/2

c) π

d) $3\pi/2$

e) 2π

3. Encontre a área que corresponde à metade superior da elipse indicada abaixo, com relação ao eixo x.

$$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$$

a) 16π

b) 12π

c) 8π

d) 4π

e) 0

Referências

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo** A: Funções, Limite, Derivação, Integração. 5. ed. São Paulo: Editora Makron Books do Brasil, 1992.

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**. São Paulo: L, 2001. v. 1..

LARSON, R.; EDWARDS, B. **Cálculo com Aplicações**. 6. ed. São Paulo: LTC, 2005.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. Projeto Euclides. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. v. 1.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. **Física**. v. 1 Mecânica. 5. ed. São Paulo: LTC, 2003.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2005. v. 2

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003. v. 2.

Funções de várias variáveis e derivadas parciais

Convite ao estudo

Olá, aluno. Tudo bem?

Chegamos à metade dos nossos estudos de *Cálculo Diferencial e Integral II*. Aprendemos muitos assuntos até esse momento, como a integral de Riemann e as integrais imediatas, aplicando-as no cálculo de áreas sobre e entre curvas e resolvendo os problemas de valores iniciais imediatos. Estudamos o cálculo de volume de sólidos de revolução, integração por partes e mudanças de variáveis, curvas em coordenadas polares e o cálculo de áreas sobre e entre curvas polares.

Nesta terceira unidade nós estudaremos as funções de várias variáveis incluindo derivadas em superfícies, as chamadas derivadas parciais de primeira ordem e de ordem superior, e as derivadas direcionais. Veremos também nesta unidade como construir os gráficos de superfícies. Você já pensou como problemas comuns presentes à nossa volta normalmente envolvem mais de uma variável? Dessa forma, podemos afirmar que problemas representados por funções multivariáveis estão mais presentes em nosso cotidiano.

Visando a atingir os nossos objetivos e compreendendo a relevância do tema, iremos conhecer conceitos e técnicas relativas às derivadas e integrais de funções de uma e duas variáveis e suas aplicações. Para isso, teremos nesta unidade os seguintes objetivos de aprendizagem: (1) saber identificar uma função de várias variáveis, (2) saber construir gráficos de superfícies, (3) conhecer e calcular as derivadas parciais, e (4) conhecer as derivadas direcionais.

Você é o engenheiro mecânico de uma grande empresa fabricante de motores. Os executivos da empresa decidiram lançar um novo modelo de motor de combustão interna e você foi designado para supervisionar algumas etapas desse projeto. Dentre

elas, você será responsável por coordenar a escolha do material que trará maior resistência ao motor, comandará a sua equipe para criar o design do motor, bem como os custos do projeto. Mas será que as funções de várias variáveis são aplicáveis a esse projeto? Como as derivadas parciais serão empregadas na resolução desse projeto? Como esboçar partes do motor utilizando os gráficos de superfície?

Vamos empregar os conhecimentos adquiridos nesta unidade nas etapas do projeto de um motor de combustão interna, dentre outros desafios da realidade profissional. Vamos em frente! Bons estudos!

Seção 3.1

Funções de várias variáveis

Diálogo aberto

Iniciando esta terceira unidade, estudaremos as funções de várias variáveis. Essas funções representam todos os problemas à nossa volta, como por exemplo: para calcular volumes (de construções, piscinas, peças mecânicas, etc.), estimar derramamentos de óleo em corpos d'água, calcular a pressão de um determinado gás, calcular os custos de um determinado produto, investimentos, entre outros.

Um ponto muito importante relativo às funções de várias variáveis é a definição de seu domínio e de sua imagem. Você se lembra o que são domínio e imagem? O domínio é o conjunto dos valores possíveis das abscissas (x), ou seja, a região do universo em que a função pode ser definida. A imagem é o conjunto dos valores das ordenadas (y) resultantes da aplicação da função f(x), ou seja, da lei de associação mencionada.

Você é o engenheiro mecânico de uma grande empresa fabricante de motores de combustão interna e foi designado para supervisionar algumas etapas desse projeto. Na primeira etapa, você deverá realizar uma pesquisa com uma liga metálica composta por duas substâncias em maior quantidade, (x) e (y), com o objetivo de obter maior resistência na construção do motor. Sabe-se que as quantidades dessas duas substâncias que irão compor essa mistura estão no domínio da função f dada por: $f(x,y)=\frac{\ln\left(y-x^3\right)}{\sqrt{x^2-y}}$. Como você determinará o domínio da função f ? Como você poderia esboçar graficamente essa função?

Utilizando os conceitos apresentados nesta seção, você poderá resolver essa etapa do projeto do motor de combustão, dentre outros ainda mais complexos. Vamos lá? Para que essa tarefa se realize com sucesso, fique atento a todos os conceitos abordados ao longo dessa seção. Bons estudos!

Não pode faltar

Quando resolvemos problemas de engenharia, estudamos as leis da natureza, ou quando usamos dados para compreender a capacidade financeira de uma empresa, precisamos elaborar modelos matemáticos complicados, em que vários fatores podem influenciar nossos resultados. Nas equações matemáticas, esses diferentes fatores entram na forma de variáveis.

Até agora, trabalhamos com funções de apenas uma variável, como por exemplo: y = f(x), onde a função y depende da variável x. Com funções desse tipo aprendemos a fazer limites, derivadas, integrais e gráficos. Utilizamos este conhecimento para resolver diversos problemas relevantes. Entretanto, chegou a hora de avançar.

Reflita

Qual o significado das variáveis em um problema de Matemática, Física ou Engenharia? Em que elas se distinguem dos parâmetros fixos ou dos constantes? Você consegue imaginar uma situação do dia a dia que pode ser modelada envolvendo parâmetros fixos e variáveis?

Nessa seção, trabalharemos com as funções de várias variáveis. Vamos a um exemplo prático. Digamos que você esteja planejando guardar dinheiro mensalmente em um investimento para aumentar o patrimônio de sua família. Seu patrimônio futuro dependerá de várias variáveis. Por exemplo: quanto dinheiro você tem hoje? Quanto você será capaz de guardar mensalmente? Qual a taxa de juros que remunerará seu investimento? Por fim, quantos meses você pretende investir? O valor final de seu investimento (f) será dado pela seguinte função de várias variáveis:

$$f(P,\ M,\ i,\ n) = P(1+i)^n + M\frac{\left[(1+\mathrm{i})^n - 1\right]}{\mathrm{i}}$$

onde

P é o dinheiro que se tem hoje, conhecido como valor presente.

M é a quantidade de dinheiro que vai se investir por mês.

I é a taxa de rendimento (ou juros) do seu investimento.

n é a quantidade de meses que esse investimento irá durar.

Exemplificando

Suponha que você possua hoje uma poupança P = R$3.000,00 e que pretenda transferir esse valor e mais M = R$200,OO mensais para um investimento que renda 1% (i = 0,01) ao mês durante 20 anos (240 meses). Quanto você irá obter ao fim do período?

Resolução:

Sabemos que

$$f(P,\ M,\ i,\ n) = P(1+i)^n + M\frac{\left[(1+\mathrm{i})^n - 1\right]}{\mathrm{i}}.$$

Então:

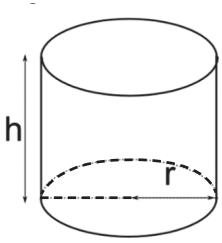
$$f(3000,\ 240, 0.01, 300) = 3000(1+0,01)^{240} + 200\frac{\left[(1+0,01)^{240} - 1\right]}{0,01}.$$

$$f(3000,\ 200, 0.01, 300) = 32.677,66 + 197.851,07 = R\$230.528,73.$$

Note o poder dos juros com o tempo, pois sem eles você teria guardado R$3000,00 + 240 · R$200,00 = R$51.000,00, bem menos do que o valor final obtido. Do mesmo modo, pense duas vezes (e faça as contas) antes de fazer um financiamento, pois nesse caso os juros trabalham contra você!

Para simplificar um pouco, vamos trabalhar na presente unidade com funções de duas variáveis, do tipo w = g(x,y), onde w é uma função das variáveis x e y. Um exemplo simples e útil de função de duas variáveis é a equação do volume de um cilindro. É essa equação que você utilizaria para calcular o volume de uma caixa d'água, ou o volume de grãos estocados em um silo da agroindústria.

Figura 3.1 | Cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

O volume de um cilindro é dado pela área da base (πr^2) multiplicada por sua altura (h). Assim, a função volume V é dada por

$$V(r,h) = \pi r^2 h.$$

Portanto, temos uma função de duas variáveis (r,h), e podemos calcular os valores específicos de volume inserindo um par de informações, contendo raio e altura.

$$V(1,2) = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi; \qquad V(2,1) = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 4\pi.$$

Atente para a ordem do par. O primeiro indica raio, o segundo indica altura.

Um ponto muito importante relativo às funções de várias variáveis é a definição de seu domínio e de sua imagem. Você se lembra o que são domínio e imagem? Vamos pensar na função f(x,y).

Assimile

Segundo Stewart (2013, p. 792), "uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x,y) de um conjunto D um único valor real, denotado por f(x,y). O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$."

Perceba que para funções de uma única variável, o domínio era sempre um conjunto contido nos números reais. Para duas variáveis, temos conjuntos de pares ordenados que pertencem ao plano real, de modo que $D \subset R^2$. Para identificar os domínios das funções, precisamos lembrar que:

• Não existe divisão por zero.

• Não existe logaritmo de número negativo ou de zero.

Desejamos também que a função f devolva um número real, portanto:

• Não devemos ter raiz (expoente par) de número negativo.

Assim, os pares ordenados que originem as situações descritas acima, no interior da função estudada, devem ser eliminados do domínio.

Exemplificando

Determine e esboce o domínio D das seguintes funções:

a) A função f, dada por $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$.

b) A função g, dada por $g(x,y) = \frac{1}{xy - 1}$.

c) A função h, dada por $h(x,y) = \ln(y - x)$.

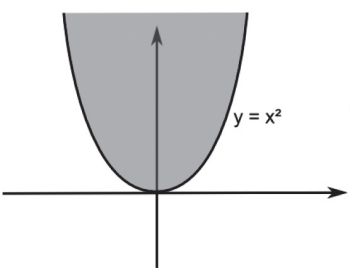
Resolução:

a) Neste caso, devemos garantir que a raiz não seja calculada sobre valores negativos, ou seja:

$$y - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad y \geq x^2.$$

Assim, D = {(x,y) ∈ R^2 | y ≥ x^2}. Lê-se: o domínio da função é o conjunto dos pares ordenados (x, y) pertencentes ao plano real, tal que y ≥ x^2.

Figura 3.2 | Representação de D



Fonte: elaborada pelo autor.

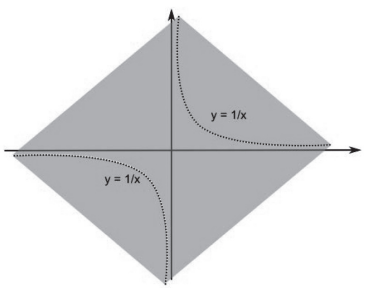
b) Devemos garantir que não haja divisão por zero, ou seja,

$$xy - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad y \neq \frac{1}{x}.$$

Assim, o domínio será todo o plano real, excluindo-se a hipérbole $y = 1/x$. Portanto:

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid y \neq \frac{1}{x} \right\}.$$

Figura 3.3 | Representação de D



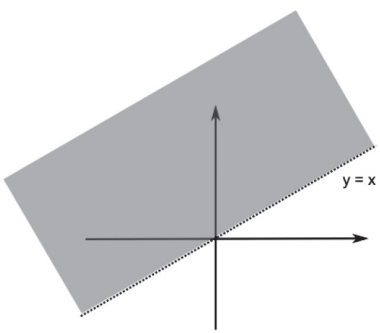
Fonte: elaborada pelo autor.

c) Devemos garantir que o logaritmo seja calculado sobre valores positivos, ou seja:

$y - x > 0 \quad \rightarrow \quad y > x.$

Assim, $D = \{(x,y) \in R^2 \mid y > x\}$. Perceba que a própria reta $y = x$ está excluída do domínio.

Figura 3.4 | Representação de D



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

Esboce e determine o domínio D das seguinte função f, dada por:

$$f(x,y)=\frac{\ln(x-1)}{y-2x}$$

Pesquise mais

Leia a seção 14.1 do livro de James Stewart, volume 2:

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. Cengage, 2013. v. 2.

Sem medo de errar

Você é o engenheiro mecânico de uma grande empresa fabricante de motores de combustão interna e foi designado para supervisionar algumas etapas desse projeto. Nessa primeira etapa, você deverá realizar uma pesquisa com uma liga metálica composta por duas substâncias em maior quantidade, (x) e (y), com o objetivo de obter maior resistência na construção do motor. Sabe-se que as quantidades das duas substâncias que irão compor essa mistura estão no domínio da função f dada por: $f(x,y)=\frac{\ln(y-x^3)}{\sqrt{x^2-y}}$.

Primeiramente, vamos encontrar o domínio dessa função? Para isso, vamos realizar a resolução a seguir:

Resolução:

Lembre-se

Consulte as três regras que devemos observar para determinar um domínio.

1º passo: devemos garantir que o logaritmo seja calculado sobre valores positivos, ou seja,

$$y - x^3 > 0 \rightarrow y > x^3.$$

Assim,

$$D_1 = \{(x,y) \in R^2 \mid y > x^3\}.$$

2º passo: devemos garantir que a raiz não seja calculada sobre valores negativos e que não haja divisão por zero, ou seja,

$$x^2 - y > 0 \rightarrow y < x^2.$$

Assim,

$$D_2 = \{(x,y) \in R^2 \mid y < x^2\}.$$

3º passo: devemos juntar as restrições em um único conjunto e esboçar a região:

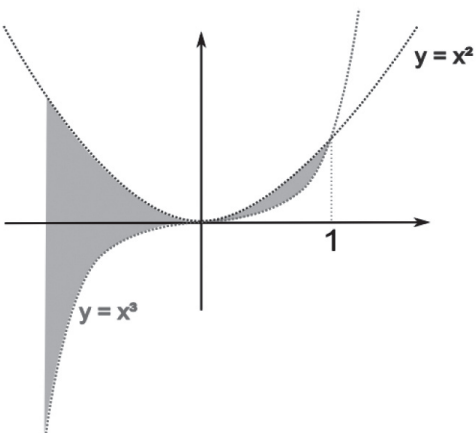
$$D = D_1 \cap D_2 = \{(x,y) \in R^2 \mid x^3 < y < x^2\}.$$

Atenção

Não confunda a interseção dos conjuntos com a união deles.

Uma vez encontrado o domínio da função, vamos agora esboçá-la graficamente. A Figura 3.5 mostra o esboço dessa função.

Figura 3.5 | Representação gráfica do domínio da função em questão



Fonte: elaborada pelo autor.

Como a quantidade das substâncias (x) e (y) não pode ser negativa, temos uma pequena região para escolha das quantidades corretas, visando aumentar a resistência na construção do motor. E assim, concluímos essa etapa do projeto.

Avançando na prática

Uma pequena colina

Descrição da situação-problema

Uma pequena colina pode ser modelada pela função f dada por $z = f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, para $e^{-4} \leq z \leq 1$. Como a função poderá ser esboçada?

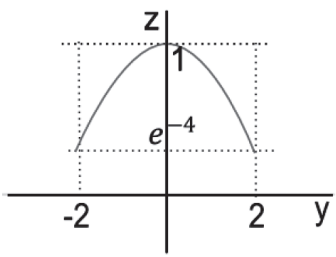
Lembre-se

Esboce com cuidado as retas auxiliares.

Resolução da situação-problema

1º passo: considere o corte com a perspectiva de um x fixo. Um valor fácil de obter o corte normalmente é x = 0. Neste caso, $z = e^{-y^2}$ Portanto, quando consideramos x= 0, obtemos uma curva entre os eixos z e y, representada pela Figura 3.6.

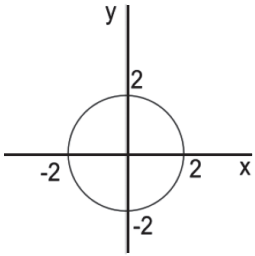
Figura 3.6 | Corte com x fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

2º passo: considere o corte com a perspectiva de um z fixo. Um valor interessante para o corte é $z = e^{-4}$. Nesse caso, $e^{-4} = e^{-x^2-y^2}$ ou seja, $x^2 + y^2 = 4$. Portanto, quando consideramos $z = e^{-4}$, obtemos uma circunferência de raio 2 entre os eixos x e y (Figura 3.7).

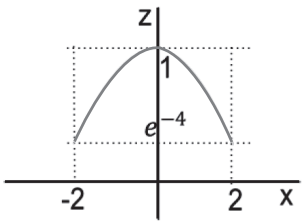
Figura 3.7 | Corte com z fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

3º passo: considere o corte com a perspectiva de um y fixo. Um valor fácil de se obter o corte normalmente é y = 0. Nesse caso, $z = e^{-x^2}$ Portanto, quando consideramos y = 0, obtemos uma curva entre os eixos z e x (Figura 3.8).

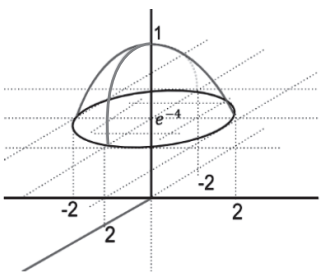
Figura 3.8 | Corte com y fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

4º passo: junte todos os cortes para entender o formato da figura. Coloque as retas auxiliares encontrando os pontos. Depois, identifique os locais das três curvas. A representação é dada pela Figura 3.9.

Figura 3.9 | Juntando os cortes



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

Esboce o gráfico sobre da função f dada por:

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 4.$$

Faça valer a pena

1. Marque a alternativa que contém o domínio da função real:

$$g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{2x-3y}}.$$

a) $D = \{(x,y) \in R^2 \mid y < \frac{2}{3}x\}$.

b) $D = \{(x,y) \in R^2 \mid y \leq \frac{2}{3}x\}$.

c) $D = \{(x,y) \in R^2 \mid y > 3x\}$.

d) $D = \{(x,y) \in R^2 \mid y \neq \frac{1}{x}\}$.

e) $D = \{(x,y) \in R^2 \mid y < \frac{1}{x}\}$.

2. Suponha que você não possua poupança hoje (P = 0), mas que pretenda investir M = R$100,00 por mês em um investimento que renda 1,5% (i = 0,015) ao mês durante 30 anos (n = 30 x 12 = 360). Dado:

$$f(P, M, i, n) = P(1+i)^n + M\frac{\left[(1+\mathrm{i})^n - 1\right]}{\mathrm{i}},$$

quanto você irá obter ao fim?

a) R$ 365.427,34.

b) R$ 465.367,23.

c) R$ 578.327.89.

d) R$ 1.045.345,12.

e) R$ 1.411.358,54.

3. O índice de massa corpórea (IMC) é um indicador muito usado por especialistas em saúde. Ele pode ser calculado através da função f dada por

$f(h,m)=\frac{m}{h^2}$, onde m é a massa em quilos e h é a altura em metros. Sabendo disso, o IMC de uma pessoa com 1,89 m de altura e 95 kg é:

a) 12,6.

b) 17,8.

c) 20,4.

d) 26,6.

e) 30,4.

Seção 3.2

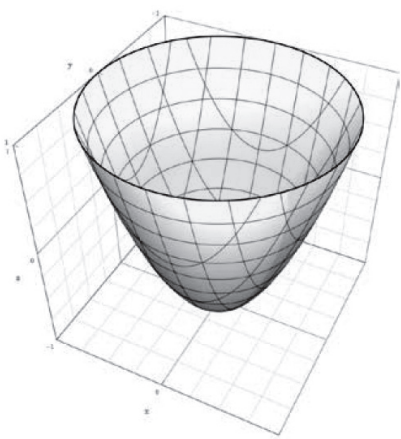
Gráficos de superfícies

Diálogo aberto

Olá, aluno. Demos início à nossa terceira unidade de *Cálculo Diferencial e Integral II*. Estamos aprendendo as funções de várias variáveis, representando o seu domínio e esboçando essas funções. Essas funções são de grande importância, pois representam todos os problemas do nosso cotidiano, por exemplo: custos, investimentos e diversos problemas de engenharia.

Nesta seção, vamos continuar nosso estudo conhecendo gráficos em três dimensões, principalmente os de superfícies quádricas (Figura 3.10), que são as versões em três dimensões das cônicas. A propósito, você sabe o que são superfícies cônicas? Certamente você conhece um ou dois exemplos: a parábola e a circunferência. Esses gráficos são conhecidos como gráficos de superfícies e são muito utilizados se deseja localizar combinações vantajosas entre dois conjuntos de dados.

Figura 3.10 | Superfície quádrica



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Qu%C3%A1drica>. Acesso em: 27 jun. 2016.

Você é o engenheiro mecânico de uma grande empresa fabricante de motores de combustão interna e foi designado para supervisionar algumas etapas desse projeto. Você concluiu a primeira etapa do projeto determinando o domínio da função e esboçando-a corretamente. Nessa segunda etapa, você está projetando a capa externa do motor de combustão e já determinou que essa peça é representada pela superfície quádrica $z = y^2 - x^2 + 4$. Como essa capa deverá ser esboçada para que seja apresentada aos demais integrantes da empresa?

Resolva essa etapa do projeto aplicando os conceitos sobre gráficos de superfícies. Você está pronto? Vamos lá!

Não pode faltar

Em ciências exatas e engenharias estamos acostumados a esboçar gráficos e desenhar curvas. A visualização é uma ferramenta poderosa, que facilita a compreensão e resolução de problemas.

Nas funções de uma variável, do tipo $y = f(x)$, podemos esboçar um gráfico sobre um plano cartesiano. Mesmo que se trate de uma função complicada, em geral podemos escolher alguns valores inteligentes para x, como por exemplo -1, 0, 1, 2, e inserir tais valores na função f, obtendo o par ordenado (x, y). Esse par pode ser inserido como um ponto diretamente no plano cartesiano, escrevendo-se eixos apropriados em um papel milimetrado, por exemplo. Com alguns pontos inseridos, em geral já conseguimos esboçar o formato da função. Como vimos em um curso anterior, podemos tomar cuidados adicionais como, por exemplo, os zeros da função e suas derivadas primeiras e segundas, de maneira a fazer um esboço muito bem detalhado.

Reflita

É possível desenhar o gráfico de uma função de duas ou mais variáveis em uma folha de papel? São necessárias técnicas especiais para se fazer isso? Por quê?

Quando temos uma função f de duas variáveis, podemos desenvolver técnicas semelhantes, mas esbarraremos na dificuldade visual de que precisaremos de três eixos para representar as superfícies, pois precisaremos do par ordenado (x,y) para então

esboçar seu gráfico, que é conjunto de todos os pontos (x, y, f(x,y)) no espaço. O gráfico de f também é chamado de superfície w = f(x,y).

Pesquise mais

Para representar um objeto tridimensional em uma folha de papel ou um tablet da maneira mais fiel possível, precisamos conhecer e utilizar técnicas de desenho. Estudantes de Engenharia, em geral, têm acesso às orientações básicas no curso de desenho técnico. Entretanto, a tecnologia atual nos permite superar as limitações. Temos softwares para as mais diversas necessidades educativas e profissionais. Um software gratuito que atende às nossas necessidades para o curso é o GeoGebra. Saiba mais!

Disponível em: <https://www.geogebra.org/?ggbLang=pt_BR>. Acesso em: 20 jun. 2016.

Nas funções de duas variáveis, temos uma técnica muito útil para compreender e desenhar a superfície de interesse: trabalhar com cortes. Por exemplo, podemos tomar uma função w = f(x,y) e substituir valores como x = 0, por exemplo, obtendo, assim, uma função de uma variável que corresponde ao corte da função com relação ao plano x = 0. Tente imaginar tudo isso! Tome um objeto qualquer na sua frente. Caso você realizasse um corte do objeto, da espessura de uma folha de papel, o que encontraria? Vamos fazer um exemplo para compreender melhor.

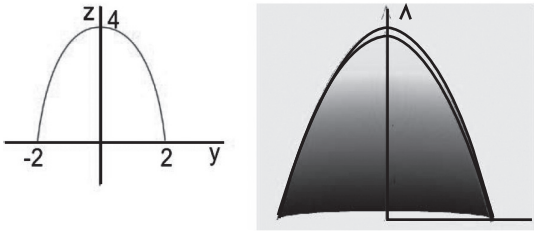
Exemplificando

Esboce o gráfico da função $z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, para $0 \leq z \leq 4$.

Resolução:

A superfície que desejamos compreender e desenhar é tridimensional e, portanto, difícil de imaginar. Como já sabemos trabalhar bem com funções de somente uma variável, uma maneira fácil de começar é por meio do estudo dos cortes da superfície completa em determinados planos. Considere o corte com a perspectiva de um x = 0. Nesse caso, temos $z = 4 - y^2$. Trata-se de uma parábola voltada para baixo entre os eixos z e y, conforme pode ser visto na Figura 3.11.

Figura 3.11 | Corte com x fixo

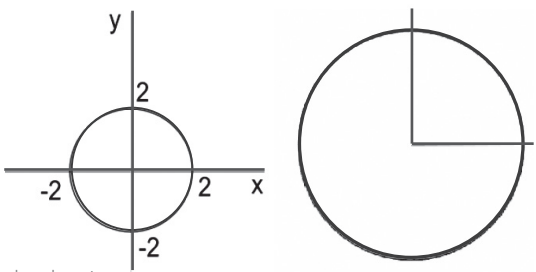


Fonte: elaborada pelo autor.

Considere agora o corte com a perspectiva de um z fixo. Um valor que geralmente é fácil de trabalhar é z = 0. Nesse caso, $x^2 + y^2 = 4$.

Portanto, como apresentado na Figura 3.12, quando consideramos z = 0, obtemos uma circunferência de raio 2 entre os eixos x e y.

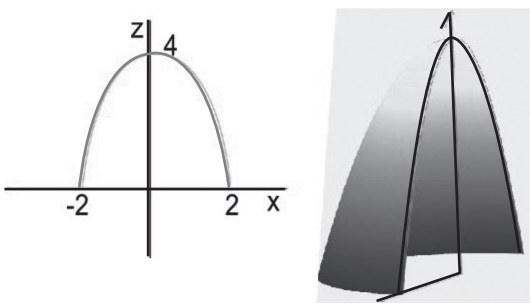
Figura 3.12 | Corte com z fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, considere o corte y = 0. Nesse caso, $z = 4 - x^2$, e temos mais uma parábola entre os eixos z e x, como pode ser visto na Figura 3.13.

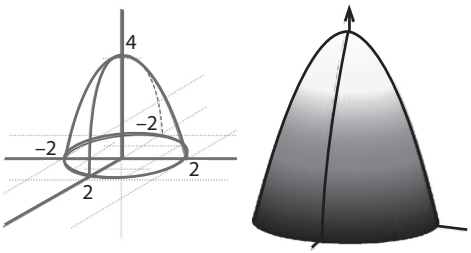
Figura 3.13 | Corte com y fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, precisamos de um pouco de imaginação. Junte todos os cortes em cada par de eixos para entender o formato da figura em três dimensões. Assim, temos a Figura 3.14.

Figura 3.14 | Juntando os cortes



Fonte: elaborada pelo autor.

Imagine um cálice de vinho de cabeça para baixo, mas sem a base e sem a haste de apoio, somente o recipiente do líquido em si. Ele é formado em suas laterais por parábolas, e sua extremidade é circular.

Ainda não conseguiu visualizar? Acesse o *link* disponível em: <https://www.geogebra.org/m/dUbBpjKw>. (acesso em: 20 jun. 2016) e gire o objeto à vontade, clicando na base cinza e arrastando.

Exemplificando

Esboce o gráfico da superfície:

$$\frac{y^2}{4^2}+\frac{x^2}{2^2}-\frac{z^2}{3^2}=1$$

Resolução:

Para entender melhor a função que estamos estudando, é importante isolar z (ou tentar). Temos:

$$z=\sqrt{\frac{3^2y^2}{4^2}+\frac{3^2x^2}{2^2}-3^2\cdot 1}$$

e

$$z=-\sqrt{\frac{3^2y^2}{4^2}+\frac{3^2x^2}{2^2}-3^2}\,.$$

Vemos que não se trata de somente uma função, mas na verdade, de duas.

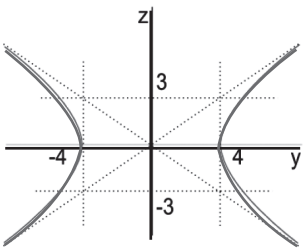
De todo modo, retornaremos para a função original e realizaremos cortes, para tentar visualizar a superfície estudada. Vamos considerar valores fáceis.

O corte X = 0 resulta na função

$$\frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1 \cdot$$

Trata-se, como pode ser visto na Figura 3.15, de uma hipérbole entre os eixos z e y.

Figura 3.15 | Corte com x fixo



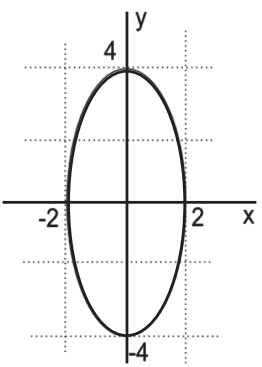
Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando o corte z = 0, temos:

$$\frac{y^2}{4^2} + \frac{x^2}{2^2} = 1,$$

uma elipse entre os eixos x e y, como se vê na Figura 3.16.

Figura 3.16 | Corte com z fixo



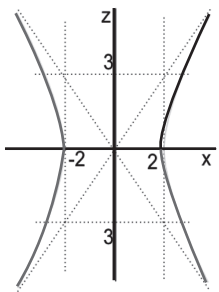
Fonte: elaborada pelo autor.

Considere agora o corte com a perspectiva de um y fixo. No caso, y = 0. Neste caso,

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1.$$

Portanto, quando consideramos y = 0, obtemos uma hipérbole, conforme Figura 3.17, entre os eixos z e x.

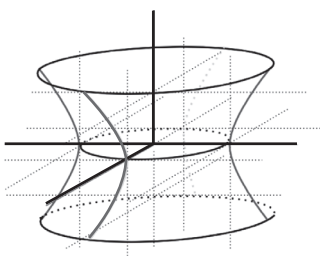
Figura 3.17 | Corte com y fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

Junte todos os cortes para entender o formato da figura.
Coloque as retas auxiliares encontrando os pontos principais. Depois, identifique os locais das três curvas, conforme Figura 3.18.

Figura 3.18 | Juntando os cortes

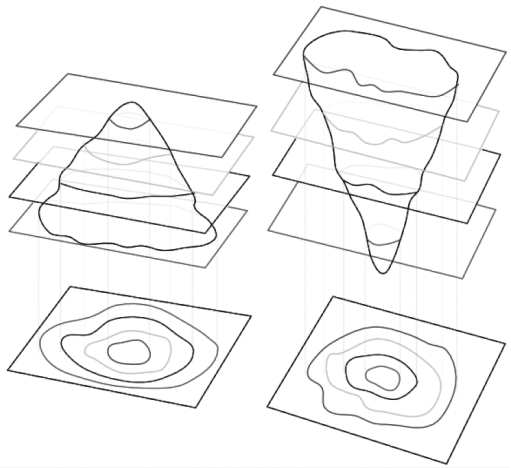


Fonte: elaborada pelo autor.

Está difícil de visualizar? Verifique o *link* disponível em: <https://www.geogebra.org/m/hU26Ng7S>. Acesso em: 20 jun. 2016. Clique e segure na área cinza e gire à vontade.

Outra técnica de visualização de elementos tridimensionais conhecida é a das curvas de nível. Você já viu curvas de nível em livros de Geografia? É uma técnica em que realizamos cortes na superfície com espaçamentos na altura e, depois, desenhamos tudo sobre um único plano, como apresentado na Figura 3.19.

Figura 3.19 | Curvas de níveis



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

Nas curvas de níveis é importante que você escreva a função na forma w = f(x,y) e depois escolha um conjunto de valores constantes para w, para efetuar os cortes. Em geral, escolhem-se valores simples como -1, 0 e 1, ou valores especiais, em que a dica sobre quais valores escolher é justamente reconhecer características básicas das superfícies somente olhando sua equação. Tente acostumar-se com elas, lembrar seus nomes!

Exemplificando

Esboce as curvas de níveis do paraboloide circular $z = x^2 + y^2$.

Resolução:

Considere vários cortes com a perspectiva de um z fixo.

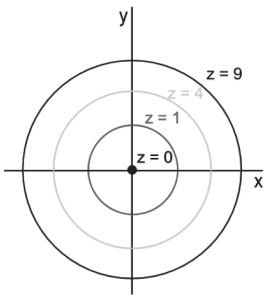
$z = 0$. Se $z = 0$, então $x^2 + y^2 = 0$. Portanto, $x = 0$ e $y = 0$, isto é , nossa curva é, na verdade, um único ponto.

$z = 1$. Se $z = 1$, então $x^2 + y^2 = 1$. Portanto, nossa curva é, na verdade, uma circunferência de raio 1.
$z = 4$. Se $z = 4$, então $x^2 + y^2 = 4$. Portanto, nossa curva é, na verdade, uma circunferência de raio 2.

$z = 9$. Se $z = 9$, então $x^2 + y^2 = 9$. Portanto, nossa curva é, na verdade, uma circunferência de raio 3.

Agora, esboce todas as curvas em um mesmo plano, de acordo com a Figura 3.20.

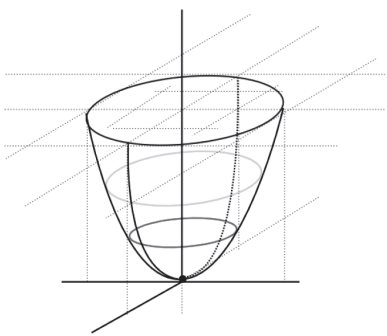
Figura 3.20 | Curvas de nível do paraboloide



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, fica mais fácil visualizar o objeto, não é mesmo? Então, veja a Figura 3.21.

Figura 3.21 | Paraboloide



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Nesse *link* você poderá encontrar mais sobre cônicas e superfícies quádricas. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_GuilhermeFreire.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2016.

Sem medo de errar

Você é o engenheiro mecânico de uma grande empresa fabricante de motores de combustão interna e foi designado para supervisionar algumas etapas desse projeto. Nessa segunda etapa, você está projetando a capa externa do motor de combustão e já determinou que essa peça é representada pela superfície quádrica $z = y^2 - x^2 + 4$, e agora deve esboçar a capa externa desse motor, para que ela seja apresentada aos demais integrantes da empresa. Para concluir esse desafio, você deverá realizar os seguintes passos:

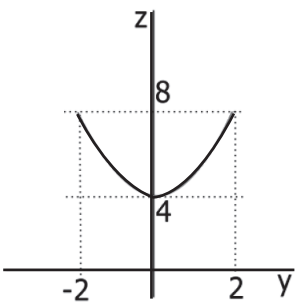
Atenção

Faça os cortes cuidadosamente.

Resolução:

1º passo: considere o corte com a perspectiva de um x fixo. Um valor fácil de obter o corte normalmente é x = 0. Nesse caso, $z = y^2 + 4$. Portanto, quando consideramos x = 0, obtemos uma parábola entre os eixos z e y, como mostra a Figura 3.22.

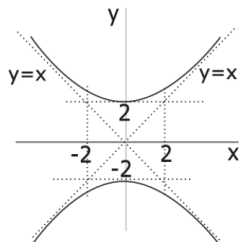
Figura 3.22 | Corte com x fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

2º passo: considere o corte com a perspectiva de um z fixo. Um valor bom para obter o corte é z = 8. Nesse caso, $y^2 - x^2 = 4$. Portanto, quando consideramos z = 8, obtemos uma hipérbole: $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$ (Figura 3.23).

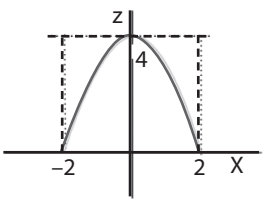
Figura 3.23 | Corte com z fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

3º passo: considere o corte com a perspectiva de um y fixo. Um valor fácil de obter o corte normalmente é y = 0. Nesse caso, $z = 4 - x^2$. Portanto, quando consideramos y = 0, obtemos uma parábola entre os eixos z e x (Figura 3.24).

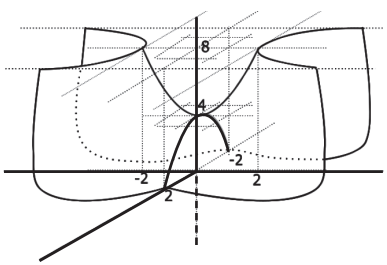
Figura 3.24 | Corte com y fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

4º passo: junte todos os cortes para entender o formato da figura. Coloque as retas auxiliares encontrando os pontos principais. Depois, identifique os locais das três curvas, como mostra a Figura 3.25.

Figura 3.25 | Juntando os cortes



Fonte: elaborada pelo autor.

Esta superfície quádrica é conhecida como paraboloide hiperbólico.

Lembre-se

Coloque cada corte em seu devido local.

Avançando na prática

Bola de futebol americano

Descrição da situação-problema

Uma bola de futebol americano é facilmente reconhecida pelo seu formato. Mas você já imaginou que uma bola como essa pode ser representada por um gráfico de superfície? Como você esboçaria essa bola, sabendo que ela pode ser modelada pela superfície quádrica $\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{4^2}+\frac{x^2}{2^2}=1$? Como a função poderá ser esboçada?

Lembre-se

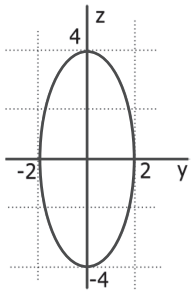
Tome muito cuidado ao diferenciar uma cônica de outra na hora do corte.

Resolução da situação-problema

Para esboçar essa função, trabalharemos com os chamados cortes, que são diferentes visões de um mesmo objeto.

1º passo: considere o corte com a perspectiva de um x fixo. Um valor fácil de obter o corte normalmente é x = 0. Nesse caso, $\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{4^2}=1$. Portanto, quando consideramos x = 0, obtemos uma elipse entre os eixos z e y (Figura 3.26).

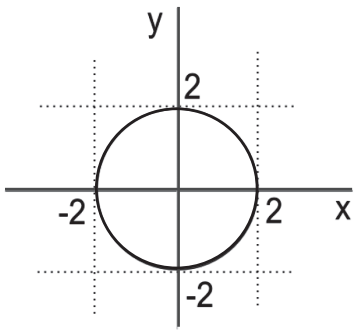
Figura 3.26 | Corte com x fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

2º passo: considere o corte com a perspectiva de um z fixo. Um valor fácil de obter o corte normalmente é z = 0. Nesse caso, $x^2 + y^2 = 4$. Portanto, quando consideramos z = 0, obtemos uma circunferência de raio 2 entre os eixos x e y (Figura 3.37).

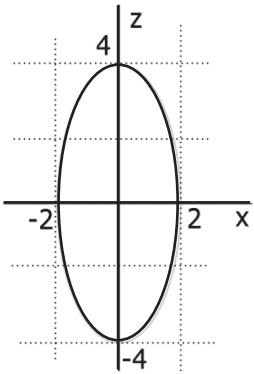
Figura 3.27 | Corte com z fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

3º passo: considere o corte com a perspectiva de um y fixo. Um valor fácil de obter o corte normalmente é y = 0. Nesse caso, $\frac{x^2}{2^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$. Portanto, quando consideramos y = 0, obtemos uma circunferência de raio 2 entre os eixos z e x (Figura 3.28).

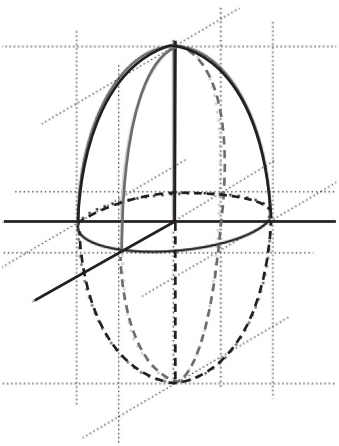
Figura 3.28 | Corte com y fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

4º passo: junte todos os cortes para entender o formato da figura. Coloque as retas auxiliares encontrando os pontos principais. Depois, identifique os locais das três curvas, como mostra a Figura 3.29.

Figura 3.29 | Juntando os cortes



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, nossa superfície quádrica é, na verdade, um elipsoide.

Faça você mesmo

Esboce o hiperboloide de duas folhas

$$\frac{z^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1.$$

Faça valer a pena

1. As curvas de nível das superfícies $z = 2x^2 + 2y^2$ para $z > 0$ são:

a) Retas.

b) Parábolas.

c) Senoidais.

d) Circunferências.

e) Elipses.

2. As curvas de nível das superfícies $z = -x^2 + y$ são:

a) Retas.

b) Parábolas.

c) Senoidais.

d) Circunferências.

e) Elipses.

3. As curvas de nível das superfícies $z = 2x + 3y$ são:

a) Retas.

b) Parábolas.

c) Senoidais.

d) Circunferências.

e) Elipses.

Seção 3.3

Derivadas parciais e de ordem superior

Diálogo aberto

Olá, aluno. Chegamos à terceira seção dessa unidade! Nas seções anteriores, nós aprendemos as funções de várias variáveis, representando o seu domínio e esboçando-as. Entendemos que essas funções são de grande importância, pois representam todos os problemas do nosso cotidiano, inclusive problemas das mais diversas áreas da engenharia. Conhecemos também os gráficos em três dimensões, principalmente os de superfícies quádricas, que são as versões em três dimensões das cônicas, ou seja, das parábolas e da circunferência.

Nessa seção, vamos voltar a estudar derivadas. Quando o nosso problema é representado por uma função de várias variáveis, temos que derivar essa função em relação a uma única variável por vez. Por esse motivo, esse tipo de derivada é denominada de parcial. Veremos também nessa seção que, assim como no caso das derivadas em uma única variável, existem derivadas de ordens superiores para as derivadas parciais.

Você é o engenheiro mecânico de uma grande empresa fabricante de motores de combustão interna, e foi designado para supervisionar algumas etapas desse projeto. Você já concluiu duas etapas do projeto! Na primeira etapa você determinou o domínio da função e esboçou-a corretamente e, na segunda etapa, esboçou o projeto da capa externa do motor de combustão.

Agora, você chegou à terceira etapa desse projeto! A empresa decidiu colocar à venda dois novos tipos de motores de combustão, sendo um modelo *Premium* (x) e um modelo *Standard* (y). Os custos de produção da empresa devem contabilizar os dois tipos de motores e, assim, você determinou que esses custos são dados pela função: $C(x,y)=15+10\sqrt{16x+9y}$, onde x e y são dados em milhares de unidades. Qual será o custo de produção se forem fabricadas mil unidades de x e mil unidades de y? Qual será a taxa de variação em relação a cada uma das quantidades, considerando a produção de mil

unidades de cada? Qual a melhor decisão a ser tomada quanto aos custos da empresa? Aumentar a produção do produto *Premium* ou do *Standard*?

A partir de agora, você utilizará os conceitos dessa unidade para resolver esses e muitos outros problemas. Bons estudos!

Não pode faltar

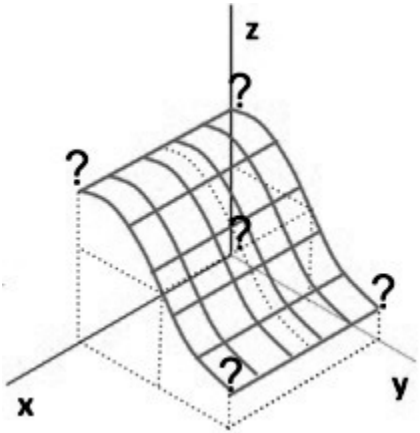
Nas seções anteriores, aprendemos a trabalhar com funções de várias variáveis. De agora em diante, estudaremos como podem ser resolvidos problemas importantes de Matemática, Física, Engenharias e Economia utilizando tais funções.

Já aprendemos que o estudo das variações de funções de uma variável, em termos de suas derivadas, é muito importante. Por exemplo, vimos que as derivadas representam taxas de variação em geral. Aprendemos a resolver problemas de otimização, encontrando pontos de máximo e mínimo de uma função usando as derivadas primeiras e segundas. Em Física, sabemos que a taxa de variação da posição com relação a variável tempo é a velocidade, e a taxa de variação da velocidade com relação ao tempo é a aceleração.

É natural imaginarmos que a derivada terá um papel importante na análise de funções de várias variáveis. Entretanto, estamos acostumados a fazer derivadas com relação a somente uma variável. Como faremos com duas (ou mais) variáveis?

Uma derivada é um conceito que captura variações na função em uma determinada direção. Compreenderemos, portanto, que as derivadas mais simples de considerar serão aquelas em que verificaremos a variação em uma linha reta paralela aos eixos (Figura 3.30).

Figura 3.30 | Derivadas em superfícies



Fonte: elaborada pelo autor.

Em primeiro lugar, percebemos que será necessário marcar exatamente com qual variável estamos trabalhando. Nesse contexto, precisaremos substituir nossa notação usual f '(x). Se estamos fazendo a derivada na direção do eixo x, trataremos a variável y como se fosse uma constante, e vice-versa. Com relação às regras de derivação, essa será a única mudança.

Chamaremos as derivadas desse tipo de derivadas parciais, e trocaremos a notação f' pelas notações f_x e f_y (que já deixam evidente com relação a qual variável ou direção espacial estamos derivando). Trocaremos também a notação $\frac{d}{dx}$ por $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$, que indicam o fato de que estamos fazendo uma derivada parcial, com relação a uma direção espacial específica.

Assimile

Seja f uma função derivável de duas variáveis f (x,y). A derivada parcial de f em relação a y ocorre quando consideramos x fixo e derivamos em relação a y. Portanto:

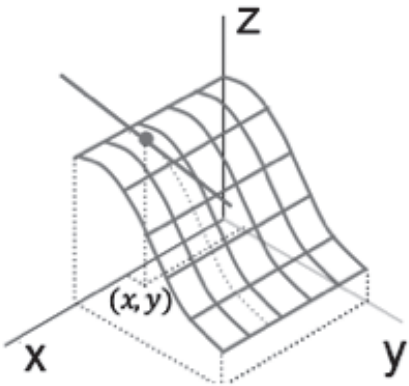
$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

A derivada parcial de f em relação a x ocorre quando consideramos y fixo e derivamos em relação a x. Portanto:

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

O valor $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$, como nas derivadas normais, representam o coeficiente angular da reta tangente à curva T (x,y) e no ponto (x,y). No primeiro caso, com y fixo e variando na direção x, e no segundo caso, x fixo variando na direção y, conforme Figura 3.31 abaixo:

Figura 3.31 | Taxa de variação para x fixo



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

Você aprendeu o conceito de reta tangente a uma curva em um curso anterior, não é mesmo? Em uma variável, a reta tangente sobre um determinado ponto era única. Você consegue imaginar que, no caso de duas variáveis, temos diversas retas tangentes em um único ponto, que acompanham a superfície, inclinadas em várias direções distintas? Sabe a razão disso?

Assimile

Todas as regras de derivação que já estudamos são válidas para as derivadas parciais. Você lembra de todas?

1. Regras básicas da derivação:

a) $[c]' = 0$.

b) $\left[x^n\right]' = nx^{n-1}$.

c) $[\cos x]' = -\text{sen}x$.

d) $[\text{sen}x]' = \cos x$.

e) $\left[e^x\right]' = e^x$.

f) $[\ln x]' = \frac{1}{x}$.

2. Regras com operações:

a) $[cu]' = cu'$.

b) $[u+v]' = u' + v'$.

c) $[uv]' = u'v + uv'$.

d) $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

3. Regra da cadeia:

a) $\left[u^n\right]' = n u^{n-1} u'$

b) $[\cos u]' = -\text{sen}(u)u'$.

c) $[\text{sen}u]' = \cos(u)u'$.

d) $\left[e^u\right]' = e^u u'$.

e) $[\ln u]' = \frac{u'}{u}$.

Onde c e n são números reais, e u e v são funções da variável x.

Exemplificando

Considere uma chapa quadrada de metal com 2m de lado que compõe a proteção lateral de um equipamento mecânico, que pode ser desenhada no primeiro quadrante do plano xy, conforme Figura 3.32. Um engenheiro mediu sua temperatura e chegou à seguinte função para descrever o resultado de sua observação:

$$T(x,y)=\frac{90}{y^2+1}+x^2+30,$$

onde T é a temperatura em °C para 0 ≤ x ≤ 2 e 0 ≤ y ≤ 2 (ambos em metros). Sabendo disso, determine:

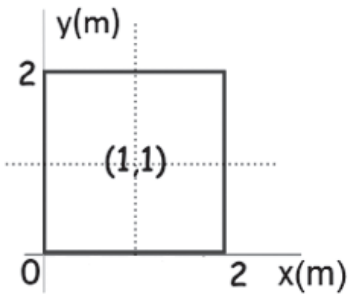
a) A função que descreve a temperatura nas arestas e no meio da placa.

b) A função que descreve a taxa de variação da temperatura para x fixo.

c) A função que descreve a taxa de variação da temperatura para y fixo.

d) A taxa de variação da temperatura no centro da placa para x e depois para y fixo.

Figura 3.32 | Placa de metal



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

a) Para calcular as temperaturas, basta calcular a função sobre (0,0), (0,2), (2,0), (1,1) e (2,2). Então:

$$T(0,0)=\frac{90}{0^2+1}+0^2+30=120\,°C,$$

$$T(0,2)=\frac{90}{2^2+1}+0^2+30=48\,°C,$$

$$T(2,0)=\frac{90}{0^2+1}+2^2+30=124\,°C,$$

$$T(1,1)=\frac{90}{1^2+1}+1^2+30=76\,°C$$

$$T(2,2) = \frac{90}{2^2+1} + 2^2 + 30 = 52°C$$

b) Quando realizamos uma derivada parcial em y, tratamos x como se fosse uma constante numérica, e derivamos normalmente. Então:

$$T_y(x,y) = -\frac{180y}{(y^2+1)^2} + 0 + 0 = -\frac{180y}{(y^2+1)^2}$$

c) Tratando y como se fosse uma constante numérica, podemos derivar em x normalmente. Então:

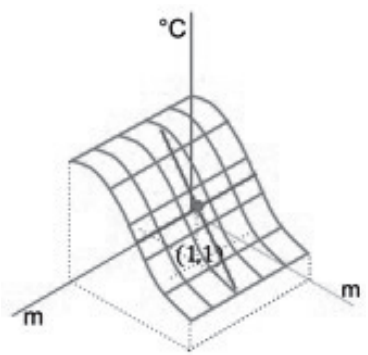
$$T_x(x,y) = 0 + 2x + 0 = 2x$$

d) Nos itens anteriores obtivemos funções gerais, válidas para qualquer posição, bastando substituir os valores apropriados de x e y. Portanto, precisamos somente calcular T_y (1,1) e T_x (1,1) para saber exatamente qual a taxa de variação (Figura 3.33) no ponto indicado. Portanto:

$$T_y(1,1) = -\frac{180}{(1^2+1)^2} = -45°C/m,$$

$$T_x(1,1) = 2 \cdot 1 = 2°C/m.$$

Figura 3.33 | Taxa de variação no centro da chapa



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Para cada função f, calcule as derivadas parciais f_x e f_y.

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$.
b) $f(x,y) = \cos(xy)$.
c) $f(x,y) = e^{x^2 + y^2}$.
d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Resolução:

a) Derivando na variável x, tratando a variável y como constante:
$f_x(x,y) = 2x + 2y + 0 = 2(x + y)$.

Derivando na variável y, tratando a variável x como constante:
$f_y(x,y) = 0 + 2x + 2y = 2(x + y)$.

b) Analogamente, teremos:
$f_x(x,y) = -\operatorname{sen}(xy)\, y$.
$f_y(x,y) = -\operatorname{sen}(xy)\, x$.

c) Para a função do item, as derivadas parciais serão:
$f_x(x,y) = 2xe^{x^2 + y^2}$.
$f_y(x,y) = 2ye^{x^2 + y^2}$.

d) Teremos:

$$f_x(x,y) = \frac{y\left(x^2 + y^2\right) - 2x^2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^3 - yx^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x\left(x^2 + y^2\right) - 2xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Assim como no caso das derivadas em uma única variável, existem derivadas de ordens superiores para as derivadas parciais. Assim, no caso de duas variáveis, podemos realizar duas derivadas seguidas na variável x, ou duas derivadas seguidas na derivada y, como mostra a Figura 3.34. Entretanto, surge uma nova possibilidade: derivadas

parciais cruzadas! Podemos realizar uma derivada na variável x e depois outra derivada em y, ou vice-versa. No caso, utilizaremos a notação:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Assimile

Seja f uma função derivável até segunda ordem de duas variáveis (x,y). As derivadas parciais de segunda ordem (derivadas das derivadas) são:

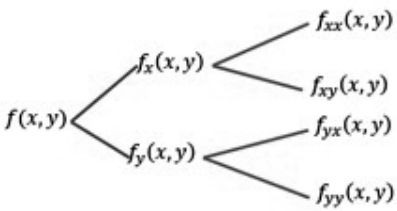
f_{xx} é a derivada parcial de em relação a x de f_x.

f_{xy} é a derivada parcial de em relação a y de f_x.

f_{yx} é a derivada parcial de em relação a x de f_y.

f_{yy} é a derivada parcial de em relação a y de f_y.

Figura 3.34 | Derivadas parciais de segunda ordem



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

Calcule as derivadas de segunda ordem dos exemplos anteriores:

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$.

b) $f(x,y) = \cos(xy)$.

c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

d) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Exemplificando

Para cada função f, calcule as derivadas parciais de segunda ordem:

a) $f(x,y) = 3yx^3 + 4xy + x^2y^2$.

b) $f(x,y) = 3\cos(x)\,\text{sen}(y)$.

Resolução:

a) Realizando as derivadas primeiras, teremos:

$f_x(x,y) = 9yx^2 + 4y + 2xy^2$.

$f_y(x,y) = 3x^3 + 4x + x^2 2y$.

Agora, podemos aplicar novamente as derivadas parciais em x e y sobre as funções acima:

$f_{xx}(x,y) = 18yx + 2y^2$.

$f_{xy}(x,y) = 9x^2 + 4 + 4xy$.

$f_{yx}(x,y) = 9x^2 + 4 + 4xy$.

$f_{yy}(x,y) = 2x^2$.

b) Primeiro, obtém-se as derivadas de primeira ordem:

$f_x(x,y) = -3\,\text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$

$f_y(x,y) = 3\cos(x)\cos(y)$

Assim,

$f_{xx}(x,y) = -3\cos(x)\,\text{sen}(y)$

$f_{xy}(x,y) = -3\,\text{sen}(x)\cos(y)$

$f_{yx}(x,y) = -3\,\text{sen}(x)\cos(y)$

$f_{yy}(x,y) = -3\cos(x)\,\text{sen}(y)$.

Observou que em ambos os exemplos $f_{xy} = f_{yx}$? De fato, existe um teorema matemático que nos mostra que isso é verdade em muitos casos! É o conhecido Teorema de Clairaut. Para os casos simples estudados em nosso livro, ele sempre será válido.

Pesquise mais

Saiba mais sobre derivadas parciais, sua interpretação e suas aplicações. Sugerimos as páginas 814 a 817 do livro de James Stewart:

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage, 2013. v. 2.

Sem medo de errar

Como engenheiro mecânico de uma grande empresa fabricante de motores de combustão interna, você chegou agora na terceira etapa desse projeto! A empresa decidiu colocar à venda dois novos tipos de motores de combustão, sendo um modelo *Premium* (x) e um modelo *Standard* (y). Os custos de produção da empresa devem contabilizar os dois tipos de motores. Assim, você determinou que esses custos são dados pela função: $C(x,y) = 15 + 10\sqrt{16x + 9y}$, onde X e Y são dados em milhares de unidades.

Vamos calcular qual será o custo de produção se forem fabricadas mil unidades de x e mil unidades de y, taxa de variação em relação a cada uma das quantidades, e também concluir sobre a melhor decisão a ser tomada quanto aos custos da empresa. Para isso, vamos realizar os seguintes cálculos:

Resolução:

a) Calcular o custo é uma tarefa simples, pois é exatamente isso que nossa função retorna. Portanto, para calcular o custo, basta calcular a função sobre (1,1).

$$C(1,1) = 15 + 10\sqrt{16 + 9} = R\$65.000,00.$$

Atenção

Fique atento às unidades da função e de suas variáveis.

b) A taxa de variação são as derivadas parciais sobre cada uma das variáveis:

- $C_x(x,y) = \frac{80}{\sqrt{16x+9y}}$;
- $C_y(x,y) = \frac{45}{\sqrt{16x+9y}}$.

Assim,

- $C_x(1,1) = \frac{80}{\sqrt{16+9}} = \frac{80}{5} = R\$16.000,00$ / unidade de produtos *Premium*.
- $C_y(1,1) = \frac{45}{\sqrt{16+9}} = \frac{45}{5} = R\$9.000,00$ / unidade de produtos *Standard*.

Portanto, podemos concluir que o custo do produto *Premium* é maior e, para que a sua produção seja rentável, o preço de venda deve ser maior. Parabéns! Você concluiu mais uma etapa desse projeto.

Avançando na prática

Problemas de valores iniciais

Descrição da situação-problema

Considere C o custo do conjunto na produção dois artigos: x e y. Sabendo que o custo fixo é de C (0,0) = 100 unidades monetárias e que os custos marginais são C_x (x,y) = $3y^2$ + 4x e C_y (x,y) = 6xy. Como você encontrará o custo na produção de três unidades de x e 5 de y (C (3,5))?

Lembre-se

Lembre-se de integrais como antiderivadas.

Resolução da situação-problema

1º passo: monte o problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \textit{Derivadas}: \ C_x(x,y) = 3y^2 + 4x \ \textit{e} \ C_y(x,y) = 6xy. \\ \textit{Valor inicial}: \ C(0,0) = 100. \\ \textit{Objetivo}: \ C(3,5) = \ ? \end{cases}$$

2º passo: use a integral em y como antiderivada.

$$C(x,y) = \int C_y(x,y)dy.$$

Tome o cuidado de reparar que o que não é y é constante (inclusive o x).

$$C(x,y) = \int 6xydy = 6x\int ydy = 3xy^2 + g(x).$$

Observe que, ao invés de somar uma constante, somamos uma função de x, pois, x foi considerado constante nessa operação.

3º passo: derive a equação em relação a x e compare com o C_x dado. Derivando a equação anterior em relação a x, temos $C_x(x,y) = \left[3xy^2 + g(x)\right]_x = 3y^2 + g'(x)$. Comparando as equações, obtemos $3y^2 + g'(x) = 3y^2 + 4x.$ Assim, $g'(x) = 4x.$ Onde integrando em relação a x, obtemos $g(x) = \int g'(x)dx = \int 4xdx = 2x^2 + k$. Portanto, $C(x,y) = 3xy^2 + 2x^2 + k.$

4º passo: use o valor inicial C (0,0) = 100 para determinar o valor de k. Substituindo (0,0) na equação obtemos $3\cdot0\cdot0^2 + 2\cdot0^2 + k = 100$. Portanto, k =100 e $C(x,y) = 3xy^2 + 2x^2 + 100$

Logo, $C(3,5) = 3\cdot3\cdot5^2 + 2\cdot3^2 + 100 = 343$ unidades monetárias.

Faça você mesmo

Calcule f (1,1) sabendo que f (0,0) = 1, $f_x(x,y) = 2xy^2 + y$ e que $f_y(x,y) = 2x^2y + y$.

Faça valer a pena

1. A derivada parcial em relação a x da função $f(x,y) = 3xy - 4x^2$ no ponto (1,1) é:

a) -8.

b) -5.

c) -1.

d) 0.

e) 3.

2. A derivada parcial em relação a y da função $f(x,y) = 4x^2y^2 - xy$ no ponto (1,1) é:

a) -1.

b) 0.

c) 7.

d) 5.

e) 4.

3. A derivada parcial de segunda ordem f_{xx} da função $f(x,y) = x^2 \text{sen} 2y$ no ponto $(0,\pi)$ é:

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Seção 3.4

Derivada direcional

Diálogo aberto

Olá, aluno. Vamos encerrar mais uma unidade da disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral II*? Nesta unidade, nós já aprendemos as funções de várias variáveis, representando o seu domínio e esboçando-as. Entendemos que essas funções são de grande importância, pois representam todos os problemas do nosso cotidiano, inclusive problemas das mais diversas áreas da engenharia. Conhecemos também os gráficos em três dimensões, principalmente os de superfícies quádricas, que são as versões em três dimensões das cônicas, ou seja, das parábolas e da circunferência, e estudamos as derivadas parciais de ordens superiores, que são derivadas em relação a uma única variável.

Durante os estudos de Cálculo Diferencial e Integral você já aprendeu muito sobre derivadas, não é verdade? Nesta seção, você aprenderá mais um conceito sobre derivadas, conhecendo as derivadas direcionais. Essas derivadas permitem determinar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção. São aplicáveis na localização de dados em mapas meteorológicos, construção de oleodutos, variações de altura em relação à distância, curvas de nível, dentre outras situações.

Vamos finalizar o nosso projeto? Você é o engenheiro mecânico de uma grande empresa fabricante de motores de combustão interna e foi designado para supervisionar algumas etapas desse projeto. Você já concluiu três etapas do projeto, sendo que na primeira etapa você determinou o domínio da função e esboçou-a corretamente, na segunda etapa, esboçou o projeto da capa externa do motor de combustão e, na terceira etapa, você calculou os custos da produção de dois diferentes motores que serão lançados pela empresa.

Nessa quarta etapa do projeto, você estudará o arrefecimento do motor. O arrefecimento será testado através de um medidor eletrônico, e a superfície do motor pode ser modelada pela função f dada por $f(x,y)=1-\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}$. Como podemos descrever o comportamento do

arrefecimento do motor em três direções diferentes, que são, respectivamente, 0°, 45° e -45°, será que podemos resolver essa etapa do projeto utilizando as derivadas direcionais?

Aplicando os conhecimentos adquiridos nessa unidade, você deverá solucionar mais essa etapa do projeto, dentre outros desafios da realidade profissional. Bons estudos!

Não pode faltar

Na seção anterior, nós estudamos as derivadas parciais na direção dos eixos x e y. Elas nos fornecem a inclinação de uma reta tangente nos planos xz (através da derivada parcial f_x) e yz (através da derivada parcial f_y).

Reflita

Sempre temos a liberdade de definir quais serão os eixos x e y em nosso problema, não há nada de absoluto na escolha dos eixos. Esse argumento é suficiente para você se convencer de que é possível calcular derivadas em outras direções que não as x, y definidas no problema?

De fato, é possível calcular a taxa de variação de uma função em qualquer direção espacial. Para isso, utilizaremos o conceito de **derivada direcional**. Partiremos de um vetor $\vec{u}$ contido no plano xy e, a partir dele, obteremos a derivada da função em sua direção. Escrevendo o vetor na forma:

$\vec{u} = (a,b)$, então definimos a derivada direcional com relação a $\vec{u}$:

$$D_u f(x,y) = a \cdot f_x(x,y) + b \cdot f_y(x,y).$$

Assimile

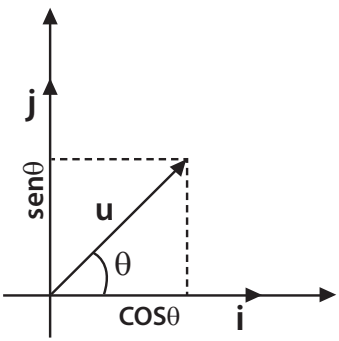
Seja f uma função diferenciável nas variáveis x e y, seja $\vec{u} = (a,b)$ um vetor no plano xy, então f tem derivada direcional na direção de $\vec{u}$ na forma:

$$D_u f(x,y) = a \cdot f_x(x,y) + b \cdot f_y(x,y).$$

Tome cuidado! O módulo do vetor influencia o resultado da derivada direcional. Para obter uma estimativa correta da taxa de variação da própria função, é importante utilizar um vetor unitário, ou versor de direção. Uma maneira rápida de escrever um versor na direção desejada é utilizando seus conhecimentos de trigonometria. No caso, temos algo indicado na Figura 3.35.

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j}.$$

Figura 3.35 | Vetor unitário



Fonte: elaborada pelo autor.

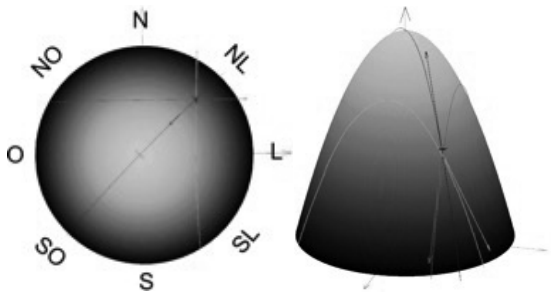
Exemplificando

Suponha que você esteja escalando um morro (Figura 3.36) cujo formato pode ser modelado pelo gráfico da função f, dada por

$$f(x,y) = 1000 - \frac{1000x^2}{80^2} - \frac{1000y^2}{100^2},$$

onde x, y e z são dados em metros. Você se encontra no ponto (64, 50, 110).

Figura 3.36 | Morro vista superior e lateral



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando ainda que o eixo positivo x aponta para Leste e o eixo positivo y aponta para o Norte, responda:
a) A partir da posição onde você se encontra, se for para Leste ou para Norte, você começará a subir ou a descer? Com que taxa de variação?

b) A partir da posição onde você se encontra, se você for exatamente para Sudoeste, você começará a subir ou a descer? Com que taxa de variação?

Resolução:

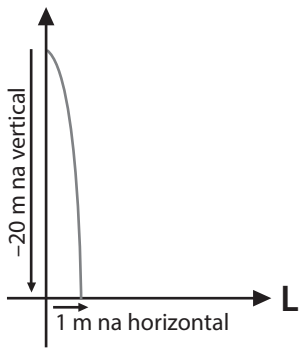
a) Para responder se você sobe ou desce, basta observar o gráfico. Mas tal informação pode ser obtida matematicamente, mesmo que você não tenha em mãos um bom esboço do gráfico (Figura 3.37).

Vamos calcular a taxa de variação em relação a direção Leste (eixo x).

$$f_x(x,y) = -\frac{2000}{80^2}x \ .$$

Em particular o ponto onde você está, temos:

Figura 3.37 | Taxa de variação na direção leste



Fonte: elaborada pelo autor.

$$f_x(64,50) = -\frac{2000}{80^2}64 = -20 \ .$$

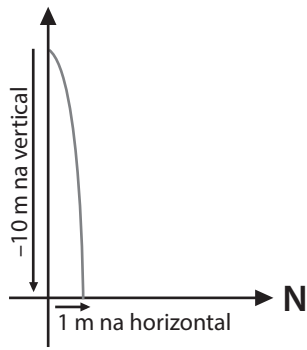
Portanto, fica claro pela taxa de variação que nessa direção temos uma descida bem íngreme, descendo 20 m para cada metro andando na direção Leste.

Vamos calcular a taxa de variação em relação à direção Norte (eixo y), como mostra a Figura 3.38.

$$f_y(x,y) = -\frac{2000}{100^2}y.$$

Em particular o ponto onde você está, temos:

Figura 3.38 | Taxa de variação na direção Norte



Fonte: elaborada pelo autor.

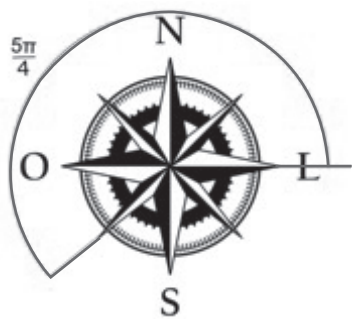
$$f_y(64,50) = -\frac{2000}{100^2}50 = -10.$$

Portanto, fica claro pela taxa de variação que nessa direção temos uma descida bem íngreme, descendo 10 m para cada metro andando na direção Norte.

b) Estamos trabalhando com uma direção e sentido diferentes dos eixos usuais. Precisamos de algo para representar essa direção e sentido.

Para direção Sudoeste, temos a Figura 3.39.

Figura 3.39 | Versor u

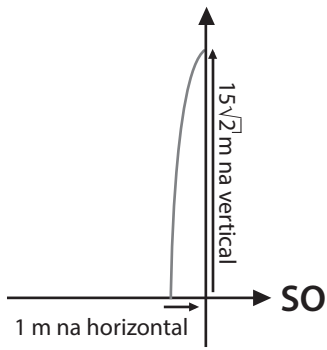


Fonte: elaborada pelo autor.

$$\vec{u} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\vec{i} + \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\vec{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

Agora, podemos aplicar nossos conhecimentos de derivada direcional (Figura 3.40):

Figura 3.40 | Taxa de variação na direção Sudoeste



Fonte: elaborada pelo autor.

$$D_u f(64,50) = f_x(64,50)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f_y(64,50)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 15\sqrt{2} \approx 21{,}21m$$

Fica claro pela taxa de variação que nessa direção temos uma subida de aproximadamente 21,2 m para cada metro andando na direção Sudoeste.

Importante observar que as derivadas direcionais estendem o conceito de derivada parcial, pois, se usarmos u = 1i + 0j (direção positiva do eixo x), temos

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y),$$

e se usarmos u = 0i + 1j (direção positiva do eixo y), temos

$$D_u f(x,y) = f_y(x,y).$$

Exemplificando

Calcule a derivada direcional de cada função dada:

a) f (x,y) = $xe^y + x \cos y$ na direção do versor $u = \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j$.

b) f (x,y) = $x^2y^2 + 5xy$ na direção do versor $u = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j$ no ponto (1,1)

Resolução:

a) Para começar, precisamos determinar as derivadas parciais da função estudada:

f_x (x,y) = $e^y + \cos y$,

f_y (x,y) = $xe^y - x\text{seny}$.

Como o vetor já foi fornecido no enunciado, então podemos calcular imediatamente a derivada direcional a partir da definição:

$D_u f$ (x,y) = a · f_x (x,y) + b · f_y (x,y).

$$D_u f(x,y) = \left(e^y + \cos y\right)\frac{1}{2} + \left(xe^y - x\text{seny}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como não foi fornecido um ponto específico para estudo, temos como resposta uma função geral.

b) Derivadas parciais da função:

f_x (x,y) = $2xy^2 + 5y$.

f_y (x,y) = $2x^2y + 5x$.

Utilizando o vetor já foi fornecido no enunciado, obtém-se:

$$D_u f(x,y) = \left(2xy^2 + 5y\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(2x^2y + 5x\right)\frac{1}{2}.$$

O ponto de interesse é (1,1). Então:

$$D_u f(1,1) = (2+5)\frac{\sqrt{3}}{2} + (2+5)\frac{1}{2} = \frac{7\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}.$$

Pesquise mais

Aprofunde-se! O mercado de trabalho exige profissionais que sabem mais do que seus pares, e vão além do conhecimento básico! Busque uma complementação no livro:

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v.1.

Sem medo de errar

Vamos finalizar o nosso projeto? Você é o engenheiro mecânico de uma grande empresa fabricante de motores de combustão interna e foi designado para supervisionar algumas etapas desse projeto. Nessa quarta etapa do projeto, você estudará o arrefecimento do motor. O arrefecimento será testado através de um medidor eletrônico, e a superfície do motor pode ser modelada pela função f dada por $f(x,y)=1-\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}$. Como podemos descrever o comportamento do arrefecimento do motor em três direções diferentes, que são, respectivamente, 0°, 45°, – 45°? Aplicando as derivadas direcionais, nós poderemos resolver essa etapa do projeto.

Resolução:

1º passo: determine as derivadas parciais.

a) $f_x(x,\ y)=-\frac{2x}{3^2}$.

b) $f_y(x,\ y)=-\frac{2y}{4^2}$.

2º passo: determine o versor de cada direção.

c) $u=\cos(0)i+\text{sen}(0)\,j=1i+0j.$

d) $v=\cos(45)i+\text{sen}(45)\,j=\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}j.$

e) $w=\cos(-45)i+\text{sen}(-45)\,j=\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}j.$

Atenção

Os vetores devem ser unitários!

Monte a derivada direcional (multiplique as derivadas com o vetor):

a) $D_u f(x,y)=-\frac{2x}{3^2}.$

b) $D_v f(x,y)=-\frac{x}{3^2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2y}{4^2}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{9}x-\frac{\sqrt{2}}{16}y$.

c) $D_w f(x,y)=-\frac{2x}{3^2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2y}{4^2}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{9}x+\frac{\sqrt{2}}{16}y.$

Avançando na prática

Tomada de decisão

Descrição da situação-problema

Uma empresa produz dois produtos, x e y, obtendo um lucro $L(x,y) = 0{,}03x^2 + 0{,}04y^2 - x - 3y$. Atualmente, a produção é de 100 unidades de cada produto. Sabendo disso, defina sobre qual direção deve ser tomada a produção para otimizar os lucros.

As direções possíveis são $u = 1i + 0j$ (focar na produção de x), $v = 0i + 1j$ (focar na produção de y), $w = \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j$ (aumentar a produção em igual quantidade de ambos os produtos).

Lembre-se

A derivada direcional não é um vetor, é uma taxa de variação escalar.

Resolução da situação-problema

1º passo: determine as derivadas parciais.

$L_x(x,y) = 0{,}06x - 1$.

$L_y(x,y) = 0{,}08y - 3$.

2º passo: calcule as derivadas parciais sobre o ponto dado.

$L_x(100, 100) = 5$;

$L_y(100, 100) = 5$;

3º passo: monte a derivada direcional (multiplique as derivadas com o vetor).

$D_u L(100, 100) = 5$;

$D_v L(100, 100) = 5$;

$$D_w L(100,100) = 5\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2} > 5.$$

Logo, a melhor opção para a empresa, nesse momento, é aumentar a produção em igual quantidade de ambos os produtos.

Faça você mesmo

Determine a derivada direcional de f dada por $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ na direção do vetor $u=\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}j$.

Faça valer a pena

1. Calcule a derivada direcional de $f(x,y)=3x^2y^2$ na direção do versor $u=-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}j$.

a) $D_uf(x,y)=6xy^2+6x^2y$.

b) $D_uf(x,y)=3xy^2+3\sqrt{3}x^2y$.

c) $D_uf(x,y)=-3xy^2+3\sqrt{3}x^2y$.

d) $D_uf(x,y)=3\sqrt{3}xy^2+3x^2y$.

e) $D_uf(x,y)=3\sqrt{3}xy^2-3x^2y$.

2. Calcule a derivada direcional de $f(x,y)=\text{sen}(xy)$ na direção do versor $u=\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}j$.

a) $D_uf(x,y)=-\frac{\sqrt{2}}{2}y\cos(xy)+\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos(xy)$.

b) $D_uf(x,y)=-\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos(xy)+\frac{\sqrt{2}}{2}y\cos(xy)$.

c) $D_uf(x,y)=-\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos(xy)i+\frac{\sqrt{2}}{2}y\cos(xy)j$.

d) $D_uf(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos(xy)-\frac{\sqrt{2}}{2}y\cos(xy)$.

e) $D_uf(x,y)=x\cos(xy)+y\cos(xy)$.

3. Calcule a derivada direcional de $f(x,y)=xy\cos(x)$ na direção do versor $u=\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}j$.

a) $D_uf(x,y)=-\frac{1}{2}x\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}y\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}yx\text{sen}(x)$.

b) $D_u f(x,y) = -\frac{1}{2} x\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} y\operatorname{sen}(x)$.

c) $D_u f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2} y\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2} x\cos(x)$.

d) $D_u f(x,y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} y\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2} x\cos(x)$.

e) $D_u f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2} y\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2} x\cos(x)$.

Referências

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. 5. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1992.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 4.

LARSON, R.; EDWARDS, B. **Cálculo com aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Harbra, 1994. v. 2.

LIMA, E. L. **Curso de análise**: projeto Euclides. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. v. 2.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. **Física**: mecânica. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage, 2013. v. 2.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2003. v. 2.

Aplicações de derivadas parciais e integrais duplas

Convite ao estudo

Finalmente chegamos à nossa última unidade da disciplina *Cálculo Diferencial e Integral II*. Até esse momento nós já estudamos a integral de Riemann e as integrais imediatas, aplicando-as no cálculo de áreas sobre e entre curvas e resolvendo os problemas de valores iniciais imediatos, compreendemos o cálculo de volume de sólidos de revolução, integração por partes e mudanças de variáveis, curvas em coordenadas polares e o cálculo de áreas sobre e entre curvas polares e vimos também, as funções de várias variáveis, incluindo derivadas em superfícies, as chamadas derivadas parciais, de primeira ordem e de ordem superior e as derivadas direcionais.

Nessa quarta unidade, nós estudaremos o vetor gradiente, a otimização de funções de duas variáveis, e as integrais duplas, aplicando-as em coordenadas polares, função densidade e centro de massa. Você já pensou que esses conteúdos são largamente aplicados em problemas das mais diversas áreas, como por exemplo: ciências naturais, as mais variadas modalidades de engenharia e economia? No decorrer dessa unidade veremos esses conceitos aplicados em muitos problemas pertencentes a essas áreas.

Compreendendo a relevância do tema, temos como competência geral conhecer conceitos e técnicas relativos às derivadas e integrais de funções de uma e duas variáveis, e suas aplicações. Além disso, esta unidade tem os seguintes objetivos de aprendizagem: (1) conhecer o vetor gradiente e suas aplicações; (2) saber otimizar uma função com duas variáveis; (3) saber calcular uma integral dupla; (4) saber calcular uma integral dupla em coordenadas cartesianas e polares; (5) aplicar o cálculo de integrais duplas para resolver situações de função densidade e centro de massa.

Você é um engenheiro químico que foi contratado por uma grande indústria multinacional para projetar um reator tubular

isotérmico. No interior desse reator ocorrerão reações homogêneas, irreversíveis e em série formando dois tipos de produtos, sendo um deles o produto principal, por possuir maior valor agregado, gerando maior lucro para a empresa. Esse reator deverá ser projetado baseado no princípio de construção casco e tubos e isolado termicamente para que não ocorra troca de calor com o ambiente. O projeto desse reator químico incluirá etapas como determinar a concentração do produto desejado em função do comprimento do reator, o volume do casco, o volume da mistura proveniente da reação química ocorrida no reator e a massa resultante do produto principal. Como as aplicações de integrais duplas serão utilizadas nesse projeto? Será possível otimizar a produção?

Vamos apreender todos os conceitos envolvidos nesta seção e aplicá-los para resolver esses e muitos outros questionamentos presentes na realidade profissional. Bons estudos!

Seção 4.1

Vetor gradiente e otimização

Diálogo aberto

Dando início à última unidade da disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral II* vamos estudar o vetor gradiente e a otimização de funções com duas variáveis. O vetor gradiente possui vasta aplicação nos mais diversos campos da engenharia, economia e ciências naturais, pois indica o sentido e a direção onde obtém-se o maior acréscimo possível de uma função. Determinar o campo elétrico a partir do gradiente do potencial elétrico e o campo de força associado a partir do gradiente da energia potencial, são exemplos de aplicações do vetor gradiente.

A otimização de funções de duas variáveis também possui vasta aplicação em diversas áreas solucionando problemas cuja finalidade é determinar os valores extremos de uma função, ou seja, o maior ou menor valor que uma função pode assumir em um dado intervalo. Problema de otimização são comuns no nosso cotidiano, como por exemplo, quando procuramos determinar o custo mínimo de produção de uma fábrica, as dimensões que maximizam a capacidade de embalagens de produtos utilizando menor quantidade de material, o lucro máximo que pode ser adquirido por uma empresa, dentre outros. Assim sendo, veremos as características de pontos de máximo, mínimo ou sela.

Você é um engenheiro químico que foi contratado por uma grande indústria multinacional para projetar um reator tubular isotérmico onde ocorrerão reações homogêneas, irreversíveis e em série com a finalidade de fabricar um produto com alto valor agregado que trará muito lucro para a empresa. Como engenheiro responsável por esse trabalho, você terá como objetivo projetar um reator que produza a concentração máxima possível desse produto (C_P) em mol/L com um comprimento mínimo do reator (L) em metros e consumindo o máximo possível do reagente (C_A) em mol/L. Para isso, você encontrou a função que descreve o comportamento da reação química envolvida no processo perante um reator tubular, sendo $C_P(C_A, L) = -(C_A - 1{,}5)^2 - (L-2)^2 + 9{,}5$. Será que esse objetivo pode ser representado por um problema de

otimização? Qual será o ponto ótimo dessa função? Quais serão os resultados obtidos?

Aplicando os conceitos que aprenderemos nessa unidade resolveremos o problema apresentado, bem como, muito outros problemas de diversas áreas e comuns ao nosso cotidiano. Bons Estudos!

Não pode faltar

Vetor gradiente

Na presente seção, estudaremos um objeto matemático muito útil e com diversas aplicações nas ciências naturais e na indústria: o vetor gradiente!

Vamos supor uma determinada superfície no espaço. Já estudamos as derivadas parciais paralelas aos eixos x e y em funções de duas variáveis. Estudamos também as derivadas direcionais, que podem apontar em qualquer direção. Uniremos agora esses conceitos.

O vetor gradiente é um campo vetorial, ou seja, uma função que fornece um vetor para cada posição espacial em que nos encontramos localizados. Mas será um vetor especial: ele indicará a direção de máxima derivada, e terá o módulo que indicará o valor da derivada direcional na direção referida.

Podemos definir o vetor gradiente da seguinte maneira:

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} j$$

ou seja, você só precisa calcular as derivadas parciais para ser capaz de escrevê-lo. Uma aplicação muito interessante é utilizá-lo para obter a derivada direcional. Perceba que realizando o produto escalar entre o vetor gradiente e um vetor $\vec{u} = (a,b)$ teremos:

$$\nabla f(x,y) \cdot \vec{u} = (f_x, f_y) \cdot (a,b) = f_x \cdot a + f_y \cdot b.$$

Para conhecer o vetor gradiente em um ponto específico da superfície, basta substituí-lo na expressão:

$$\nabla f(x,y)\big|_{P_0} = \nabla f(x_0, y_0).$$

Mas você se lembrará que isso é justamente a derivada direcional da função f no sentido do vetor. Então:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u} = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b.$$

Assimile

O **vetor gradiente** da função f em um ponto (x,y) é definido por

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j.$$

Entre suas propriedades estão:

1. O vetor gradiente é ortogonal às curvas de nível.

2. O vetor gradiente sempre aponta para a direção de maior crescimento da função.

3. O negativo do vetor gradiente sempre aponta para a direção de maior decrescimento da função.

4. A derivada direcional em vetor perpendicular ao vetor gradiente é nula, e se encontra na linha das curvas de nível.

Algumas das afirmações acima podem ser facilmente demonstradas. Pela definição de produto escalar, sabemos que:

$$D_u f(x,y) = \left|\nabla f(x,y)\right| \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \cos\theta.$$

É visível que temos o valor máximo da derivada direcional para $\theta = 0$ (vetor $\vec{u}$ na direção e sentido do vetor gradiente), valor mínimo (máximo decrescimento) para $\theta = \pi$ e derivada direcional nula para $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (direção perpendicular ao vetor gradiente).

Pesquise mais

Assista a uma aula da USP sobre derivadas direcionais e vetor gradiente, acessando o *link* disponível em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=7970> acesso em 11 jan. 2019

Muito bem! Antes de resolver a situação-problema vamos desenvolver os conceitos a respeito do vetor gradiente e otimização.

Exemplificando

Um morro pode ser modelado pelo gráfico da função f dada por

$f(x,y) = 100 - 4x^2 - 4y^2.$

Sabendo que existe uma nascente no ponto $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 64\right)$ resolva:

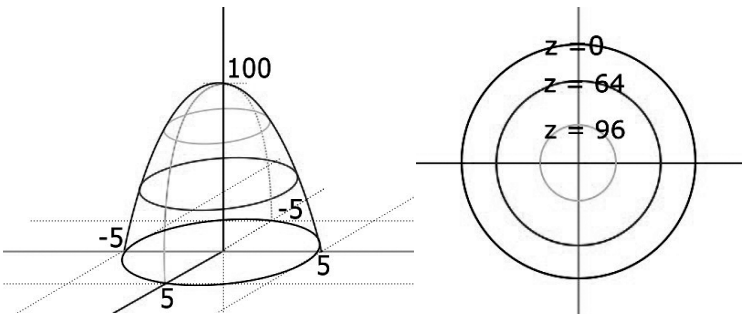
a) Esboce a superfície e algumas curvas de nível.

b) Determine a direção que a água tomará, que naturalmente será a de descida mais íngreme (maior decrescimento).

Resolução:

a) A superfície indicada é um paraboloide circular.

Figura 4.1 | Esboço do morro e curvas de nível



Fonte: elaborada pelo autor.

b) Portanto, para encontrar a direção de maior decrescimento, basta calcularmos o negativo do vetor gradiente. Iniciaremos calculando as derivadas parciais:

$f_x(x,y) = -8x.$

$f_y(x,y) = -8y.$

Agora, podemos utilizar a definição de vetor gradiente

$\nabla f(x,y) = -8xi - 8yj$

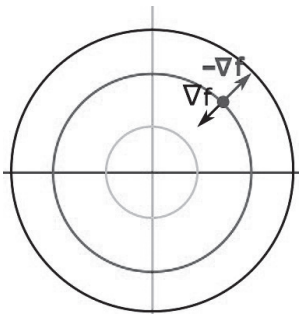
Agora, substituímos o ponto $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ na expressão geral do vetor gradiente:

$$\nabla f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -8 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} i - 8 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} j = -12\sqrt{2}i - 12\sqrt{2}j.$$

O sentido oposto ao vetor gradiente é dado por:

$$-\nabla f(x, y) = +12\sqrt{2}i + 12\sqrt{2}j.$$

Figura 4.2 | Curvas de nível e vetor gradiente



Fonte: elaborada pelo autor.

Como esperávamos, o vetor gradiente ficou perpendicular às curvas de nível e apontando para a região de maior crescimento, além disso, menos o gradiente apontou para a região de maior decrescimento, dando a direção para onde a água escorre.

Reflita

Em geral, trabalhamos com vetores unitários $\vec{u} = ai + bj$. Imagine que estejamos trabalhando com um vetor $\vec{v} = 2\vec{u}$, utilizando as definições mostradas acima. Qual o módulo de $\vec{v}$? O que ocorreria com todos os resultados? Perceba que as definições anteriores são válidas para qualquer vetor. Na interpretação dos resultados, entretanto, precisamos

Otimização

Outro tópico com grande importância em ciências exatas em geral, na economia e na engenharia em particular, é a otimização. Quando nos perguntamos: como maximizar os lucros? Como

minimizar os custos? Como maximizar a eficiência de uso de combustível? Estamos sempre resolvendo problemas de otimização.

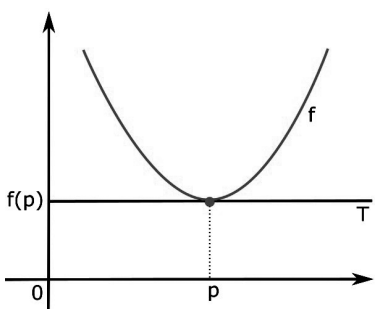
Já estudamos a otimização em problemas envolvendo uma única variável. Lá, buscamos sempre o ponto de máximo, de mínimo ou de sela a partir de derivadas. Uma derivada primeira nula indicava que a função não variava nas proximidades do ponto, indicando um ponto especial a ser estudado, chamado "ponto crítico". A derivada segunda, por sua vez, fornecia a informação sobre o ponto de mínimo ou de máximo, uma vez que a derivada segunda indica se os pontos no entorno são cada vez maiores, ou cada vez menores.

Lembre-se

Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio.

a) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então p é um ponto de mínimo local.

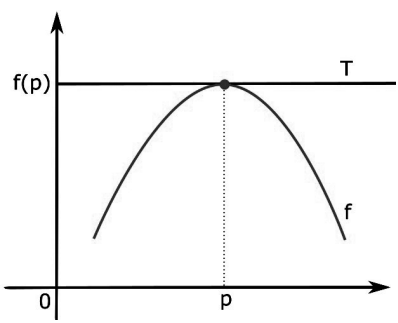
Figura 4.3 | Ponto de mínimo



Fonte: elaborada pelo autor.

b) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$, então p é um ponto de máximo local.

Figura 4.4 | Ponto de máximo



Fonte: elaborada pelo autor.

Certamente deve ser possível generalizar tais afirmações para duas variáveis. Afinal, obter pontos de máximo e mínimo em gráficos é o dia a dia de muitos profissionais das ciências exatas. A solução é similar, envolvendo as derivadas parciais.

Seja f uma função de duas variáveis e (a,b) um ponto de seu domínio.

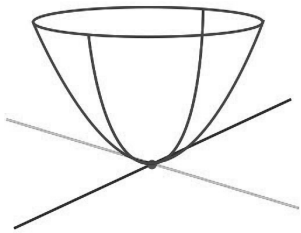
Definimos a Hessiana de f no ponto (a,b) por

$$H(a,\ b)=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,\ b) \\ f_{yx}(a,\ b) & f_{yy}(a,\ b) \end{vmatrix}=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,\ b)-\left(f_{xy}(a,\ b)\right)^2.$$

Utilizando o conceito do uso da hessiana, podemos concluir que:

a) Se f_x (a,b) = f_y (a,b) = 0, H (a,b) > 0 e f_{xx} (a,b) > 0 então, (a,b) é um ponto de mínimo local.

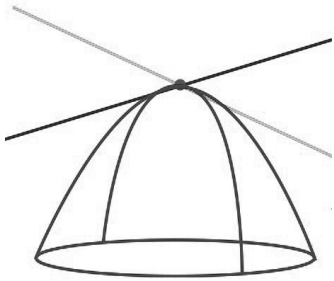
Figura 4.5 | Ponto de mínimo



Fonte: elaborada pelo autor.

b) Se f_x (a,b) = f_y (a,b) = 0, H (a,b) > 0 e f_{xx} (a,b) < 0, então, (a,b) é um ponto de máximo local.

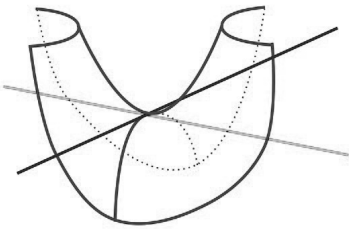
Figura 4.6 | Ponto de máximo



Fonte: elaborada pelo autor.

c) Se $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, $H(a,b) < 0$ então, (a,b) é um ponto de sela.

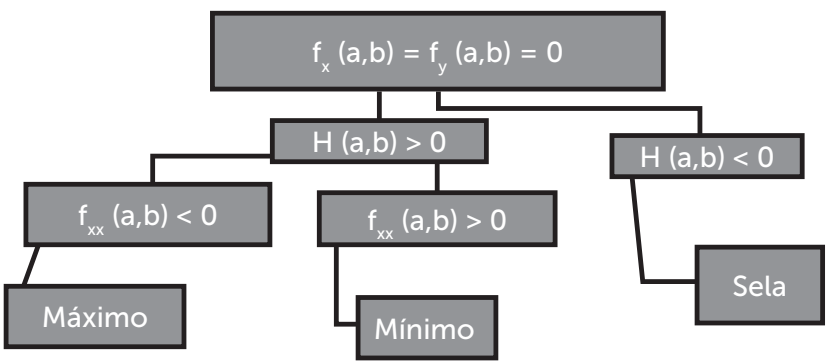
Figura 4.7 | Ponto de sela



Fonte: elaborada pelo autor.

Identificamos o ponto crítico calculando suas derivadas parciais de primeira ordem: ambas devem ser nulas $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. Depois, passamos a analisar as concavidades da região em torno do ponto, primeiro verificamos se ao redor do ponto temos concavidades distintas ($H(a,b) < 0$), nesse caso, o ponto é de sela, ou se todas as direções possuem a mesma concavidade ($H(a,b) > 0$), neste último caso verificamos se todas as direções possuem concavidade para cima, analisando uma direção ($f_{xx}(a,b) > 0$) para concluirmos que o ponto é de mínimo, ou ainda analisamos se toda a direção possui concavidade para baixo, considerando uma direção ($f_{xx}(a,b) < 0$) para concluímos que o ponto é de máximo.

Figura 4.8 | Fluxograma dos pontos críticos



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Encontre os pontos de máximo, mínimo ou de sela das funções:

a) $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$;

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3x - 3y + 1$.

Resolução:

a) Calculando as derivadas parciais de primeira ordem, obtemos:

$f_x(x,y) = y - 2x - 2$;

$f_y(x,y) = x - 2y - 2$.

Isso nos permite encontrar os pontos críticos resolvendo o sistema de equações:

$f_x(x,y) = 0 \quad \rightarrow \quad y - 2x - 2 = 0$;

$f_y(x,y) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2y - 2 = 0$.

Resolvendo o sistema linear encontramos uma única solução e, portanto, um único ponto crítico (-2,-2). Identificado o ponto crítico, é a vez de resolver a Hessiana sobre ele. Precisaremos das derivadas parciais de segunda ordem.

$f_{xx}(-2,-2) = -2$;

$f_{xy}(-2,-2) = 1$;

$f_{yy}(-2,-2) = -2$.

A Hessiana será:

$$H(-2,-2) = f_{xx}(-2,-2) f_{yy}(-2,-2) - \left(f_{xy}(-2,-2)\right)^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 3 > 0.$$

Como $f_x(-2,-2) = f_y(-2,-2) = 0$, $H(-2,-2) > 0$ e $f_{xx}(-2,-2) < 0$, então, (-2, -2) é um ponto de máximo local.

b) Calculando as derivadas parciais de primeira ordem:

$f_x(x,y) = 2x + y + 3$;

$f_y(x,y) = 2y + x - 3$.

Encontrando os pontos críticos:

$f_x(x,y)=0 \quad \rightarrow \quad 2x+y+3=0$;

$f_y(x,y)=0 \quad \rightarrow \quad 2y+x-3=0$.

Neste caso, encontramos uma única solução e, um único ponto crítico (-3, 3). As derivadas parciais de segunda ordem sobre o ponto crítico são:

$f_{xx}(-3,3)=2$;

$f_{xy}(-3,3)=1$;

$f_{yy}(-3,3)=2$.

Por fim, a Hessiana sobre o ponto crítico:

$$H(-3,3)=f_{xx}(-3,3)f_{yy}(-3,3)-\left(f_{xy}(-3,3)\right)^2=(2)(2)-(1)^2=3>0.$$

Como $f_x(-3,3)=f_y(-3,3)=0$, $H(-3,3)>0$ e $f_{xx}(-3,3)>0$, então, $(-3, 3)$ é um ponto de mínimo local.

Sem medo de errar

Você é um engenheiro químico que foi contratado por uma grande indústria multinacional para projetar um reator tubular isotérmico onde ocorrerão reações homogêneas, irreversíveis e em série com a finalidade de fabricar um produto com alto valor agregado que trará muito lucro para a empresa. Encontrar a concentração máxima possível do produto principal (C_p) em função do comprimento do reator (L) e do consumo de reagente (C_A) é um problema de otimização que pode ser resolvido a partir dos conceitos vistos nesta seção. Sabendo que a função que descreve esse comportamento pode ser representada pela equação matemática $C_P(C_A,L)=-(C_A-1{,}5)^2-(L-2)^2+9{,}5$, vamos agora encontrar seus valores ótimos.

Atenção

Recorde os conceitos para resolver as derivadas parciais já apresentados.

Resolução:

Para facilitar o procedimento de resolução, vamos nomear a variável C_A que representa a concentração de reagente de X, L que representa o comprimento do reator tubular de Y e a concentração do produto C_P de C, assim sendo, a função matemática será $C(x,y) = -(x-1{,}5)^2 - (y-2)^2 + 9{,}5$. Vamos iniciar a nossa resolução?

Lembre-se

Lembre-se do passo a passo que desenvolvemos durante a seção.

1º passo: Calcule as derivadas parciais de primeira ordem.

a) $c_x(x,y) = 3 - 2x$;

b) $c_y(x,y) = 4 - 2y$.

2º passo: Encontre os pontos críticos resolvendo o sistema de equações

c) $c_x(x,y) = 0$;

d) $c_y(x,y) = 0$.

Nesse caso,

e) $3 - 2x = 0$;

f) $4 - 2y = 0$.

Que podemos verificar que:

g) $x = 1{,}5$;

h) $y = 2$.

Portanto, o ponto crítico é (1,5;2), que devemos verificar se é de máximo ou mínimo.

3º passo: Determine as derivadas parciais de segunda ordem sobre o ponto crítico.

$$C_{xx}(1,5;2) = -2 \; ; \; C_{xy}(1,5;2 = 0 \; ; \; C_{yy}(1,5;2) = -2;$$

4º passo: Calcule a Hessiana sobre o ponto crítico.

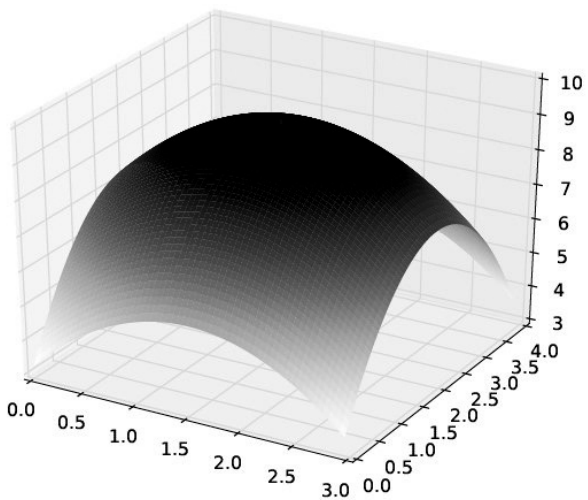
i) $$H(1,5;2) = C_{xx}(1,5;2)C_{yy}(1,5;2) - \left(C_{xy}(1,5;2)\right)^2 = -2.(-2) - (0)^2 = 4 > 0.$$

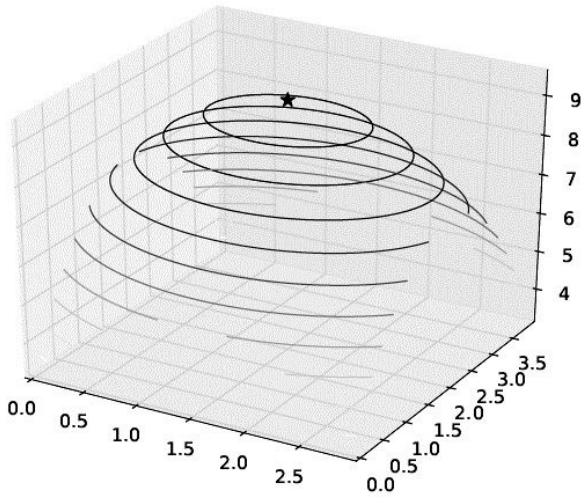
5º passo: Conclua o problema com base nos dados encontrados.

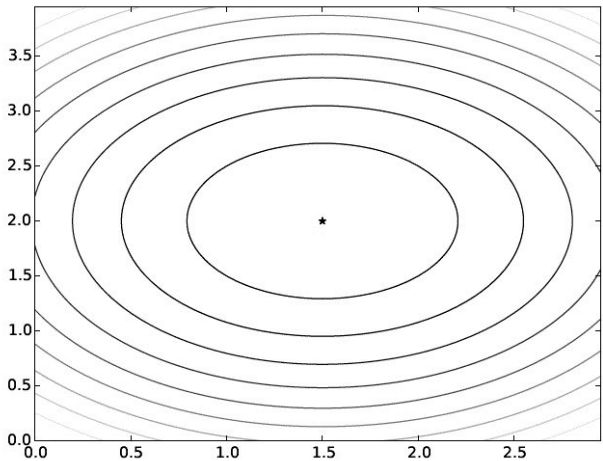
Como $C_x(1,5;2) = C_y(1,5;2) = 0$, $H(1,5;2) > 0$ e $C_{xx}(1,5;2) < 0$, então, (1,5;2) é um ponto de máximo local.

Logo, a condição ótima para o projeto do reator está em uma concentração do produto de 9,5 mol/L, a concentração do reagente em 1,5 mol/L e o comprimento do reator de 2 metros. A Figura 4.9 mostra o comportamento da função bem como a localização do ponto ótimo e suas curvas de nível.

Figura 4.9 | Representação da função







Fonte: elaborada pelo autor.

Avançando na prática

A melhor decisão

Descrição da situação-problema

Uma empresa produz dois produtos x e y obtendo um lucro $L(x,y) = 0,03x^2 + 0,04y^2 - x - 3y$. Atualmente, a produção é de 200

unidades de cada produto. Sabendo disso, defina qual direção deve ser tomada a produção para otimizar os lucros.

Lembre-se

O vetor gradiente nem sempre é unitário.

Resolução da situação-problema

1º passo: Determine as derivadas parciais:

$$L_x(x,\ y) = 0{,}06x - 1;$$

$$L_y(x,\ y) = 0{,}08y - 3.$$

2º passo: Calcule as derivadas parciais sobre o ponto dado:

$$L_x(200, 200) = 11;$$

$$L_y(200, 200) = 13.$$

3º passo: Monte o vetor gradiente da função:

$$\nabla L(200{,}200) = 11i + 13j.$$

Logo, a produção deve seguir a proporção, onde o aumento de 11 unidades de X indica que deve aumentar 13 unidades de Y.

Faça você mesmo

Determine o vetor gradiente da função f dada por $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Faça valer a pena

1. O vetor gradiente da função f, dada por $f(x,y) = 3x^2y^2$, é:

a) $\nabla f(x,y) = 6xy^2i + 6x^2yj$

b) $\nabla f(x,y) = 12xyi + 12xyj$

c) $\nabla f(x,y) = 6x^2yi + 6xy^2j$

d) $\nabla f(x,y) = 3x^2y^2i + 3x^2y^2j$

e) $\nabla f(x,y) = -3x^2y^2i - 3x^2y^2j$

2. A hessiana da função f, dada por $f(x,y) = 3x^2y^2$, é:

a) $H(x,y) = -108x^2y^2$

b) $H(x,y) = 36x^2y^2$

c) $H(x,y) = 108x^2y^2$

d) $H(x,y) = 144x^2y^2$

e) $H(x,y) = -144x^2y^2$

3. O ponto crítico da função f, dada por $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 3x + 2y + xy$, é:

a) (0,0)

b) $\left(\frac{10}{17}, \frac{11}{17}\right)$

c) $\left(-\frac{10}{17}, \frac{91}{17}\right)$

d) (–1,0)

e) (1,0)

Seção 4.2

Integrais duplas: introdução

Diálogo aberto

Demos início a última unidade de *Cálculo Diferencial e Integral II* estudando o vetor gradiente e a otimização de funções com duas variáveis e vimos que ambos os assuntos possuem vasta aplicação nos mais diversos campos da engenharia, economia, ciências naturais, dentre outras. Através deles podemos determinar o campo elétrico a partir do gradiente do potencial elétrico e o campo de força associado a partir do gradiente da energia potencial, bem como o custo mínimo de produção de uma fábrica, as dimensões que maximizam a capacidade de embalagens de produtos utilizando menor quantidade de material, o lucro máximo que pode ser adquirido por uma empresa.

Nesta seção, estudaremos as integrais duplas e suas aplicações. As integrais duplas são largamente utilizadas no cálculo do volume e, assim, aplicaremos essas integrais no cálculo do volume de diversos tipos de superfícies. Durante os nossos estudos já calculamos os volumes dos sólidos de revolução, mas como poderemos realizar esses cálculos em outros tipos de superfícies? Vamos unir as habilidades adquiridas até o momento e aplicá-las nesta seção?

Você é um engenheiro químico que foi contratado por uma grande indústria multinacional para projetar um reator tubular isotérmico onde ocorrerão reações homogêneas, irreversíveis e em série, com a finalidade de fabricar um produto com alto valor agregado que trará muito lucro para a empresa. Esse reator deverá ser projetado baseado no princípio de construção casco e tubos e isolado termicamente para que não ocorra troca de calor com o ambiente. O casco do reator possui um formato cilíndrico, porém é dividido horizontalmente em duas partes iguais, sendo que em ambas as partes circulará um fluido refrigerante com a finalidade de controlar a temperatura da reação. Realizando os cálculos referentes a esse projeto, você identificou que a função que representa a

área interna de uma dessas partes do casco é representada pela equação matemática $A(a)=\int_0^2 \sqrt{4-a^2}\ da$ porém, é necessário que você descubra o volume de fluido refrigerante que ocupa o casco do reator, sabendo que o volume é dependente do comprimento do reator. Como o volume poderá ser encontrado?

Aplicaremos os conceitos de integrais duplas no cálculo do volume do problema apresentado, bem como, de outras aplicações abordadas no contexto desta seção. Estude com afinco e adquira novas habilidades. Bons estudos!

Não pode faltar

Já utilizamos nossos conhecimentos de integração para obter áreas sob curvas e também volumes de sólidos de revolução. Na presente seção, vamos descobrir uma maneira simples de descobrir o volume de qualquer objeto, utilizando integrais duplas. São inúmeras as aplicações de tais conhecimentos na indústria.

Estamos estudando funções de duas variáveis, e aprendemos a fazer derivadas parciais. Assim como as derivadas permitem uma análise da variação da função em cada uma das variáveis, a integração também permite o cálculo de uma área sob a curva em cada variável. Poderíamos tomar a função f (x,y) e integrá-la em cada uma das variáveis, tratando a outra variável uma constante:

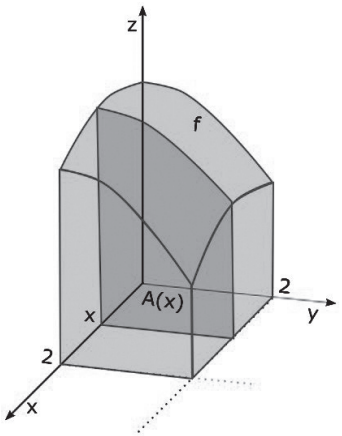
$$\int_a^b f(x,y)\,dx\ ;$$

$$\int_c^d f(x,y)\,dy\ .$$

Exemplificando

Considere a função f, dada por $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$, para $0 \le x \le 2$ e $0 \le y \le 2$. Determine a área sob a função, no corte mostrado na Figura 4.10, cujo o "teto" é o gráfico de f, válida para qualquer x no intervalo indicado. Encontre também a área para x=1.

Figura 4.10 | Sólido com f de teto.



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução: Sabemos que a área sob uma função pode ser obtida a partir de uma integração. No caso do exercício, precisamos integrar com relação à função y. Então:

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy\ ;$$

$$A(x)=\int_0^2 16-x^2-y^2\,dy\ ;$$

$$A(x)=16y-x^2y-\frac{y^3}{3}\Big|_0^2=32-2x^2-\frac{8}{3}\ ;$$

$$A(x)=\frac{88}{3}-2x^2\ .$$

O fato da função apresentar duas variáveis não alterou a mecânica da solução, x apenas foi mantido fixo e tratado como uma constante. Note que a variável y desapareceu devido à realização da integral definida. Obtivemos uma função geral, válida para qualquer x no intervalo da função. Para x=1, basta substituir:

$$A(1)=\frac{88}{3}-2\cdot 1^2=\frac{82}{3}u.a.$$

No contexto apresentado acima, qual seria a melhor maneira para se calcular o volume do sólido? Já estudamos o volume dos sólidos de rotação, graças a uma construção engenhosa onde dividimos o sólido

em fatias, escrevemos a área de cada fatia do sólido usando geometria básica e integramos na direção de seu eixo de simetria, somando o volume de cada fatia. Assim:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Podemos usar exatamente o mesmo argumento aqui. Como vimos no exemplo anterior, podemos obter a área integrando em uma variável, deixando a outra fixa.

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Depois, podemos integrar na outra variável, somando as áreas das fatias finas:

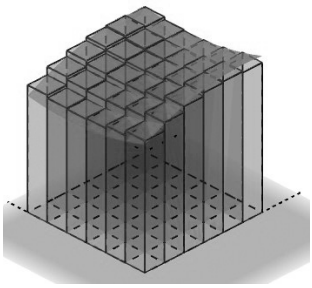
$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

O que obtivemos acima é a chamada integral dupla. Note que a integral pode resultar em valores positivos ou negativos, dependendo da função integrada. Aqui, os cuidados são os mesmos de quando calculamos as áreas. Valores negativos indicam somente que o volume estudado encontra-se abaixo do plano cartesiano xy.

Reflita

Note que podemos dar outra interpretação geométrica para a equação acima. Imagine que tomássemos pequenos retângulos de área dA = dxdy. Multiplicados por uma "altura", dada pela função f(x,y), teríamos o volume de pequenos paralelepípedos que, com o número de paralelepípedos tendendo a infinito, obtém-se o volume do sólido. Você concorda? Veja o seguinte objeto representado pela Figura 4.11 para tentar compreender o argumento (interação dinâmica acessada abrindo o *link*).

Figura 4.11 | Método de Riemann para cálculo de volumes

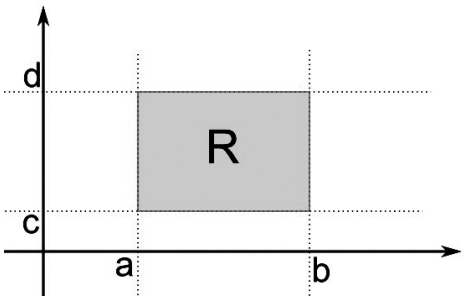


Fonte: <http://goo.gl/dkHA7Q>. Acesso em: 20 jul. 2016.

Assimile

Seja f (Figura 4.12) uma função de duas variáveis e R = {(x,y) | a ≤ x b, c ≤ y ≤ d} um retângulo contido no domínio de f, definimos a integral dupla de f sobre R como:

Figura 4.12 | Retângulo R



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Além disso, quando f é uma função positiva, o volume do sólido entre uma região do plano xy (z = 0) e o gráfico de f pode ser calculado com a integral dupla de f.

Vamos calcular um exemplo para fixar os conceitos?

Exemplificando

Considere a função f dada por $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$, para $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 2$. Determine o volume sob a função cujo o "teto" é o gráfico de f.

Resolução:

Sabemos que o volume sob o gráfico pode ser obtido a partir de uma integral dupla. A função é estritamente positiva no intervalo indicado, então não temos

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Já calculamos a área dos cortes ao longo do eixo y:

$$A(x)=\int_0^2\left(16-x^2-y^2\right)dy=\frac{88}{3}-2x^2$$

Podemos agora dar um passo além e calcular o volume do sólido:

$$V=\int_0^2 A(x)\,dx=\int_0^2\left(\frac{88}{3}-2x^2\right)dx=\frac{88}{3}x-\frac{2x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{176}{3}-\frac{16}{3}=\frac{160}{3}u.v.$$

Observe que primeiro calculamos uma integral em y considerando x constante, e depois integra-se em x. Note que no caso de um intervalo retangular, não importa a ordem de integração, se iniciamos com x ou com y.

Exemplificando

Calcule a integral dupla de f dada por $f(x,y)=e^y \operatorname{sen} x$ sobre o retângulo $R=\{(x,y)|0\le x\le\pi,\ 0\le y\le 1\}$.

Resolução:
Como o intervalo é retangular, a ordem não será importante. Vamos integrar do seguinte modo:

$$V=\int_0^1\int_0^\pi e^y \operatorname{sen} x\,dx\,dy\,.$$

Estudaremos a seguir alguns casos onde a ordem da integração é importante. Por isso, devemos esclarecer que a notação acima indica que realizamos primeiro a integral em x, para depois realizar em y. Vamos realizando as integrais sucessivas "de dentro para fora":

$$\int_0^1\left(\int_0^\pi e^y \operatorname{sen} x\,dx\right)dy=\int_0^1\left(-e^y\cos x\Big|_0^\pi\right)dy=\int_0^1\left(-e^y(\cos\pi-\cos 0)\right)dy=\int_0^1 2e^y\,dy$$

Concluída a operação em x, procedemos com a integração em y:

$$V=\int_0^1 2e^y\,dy=2e^y\Big|_0^1=2e-2\,.$$

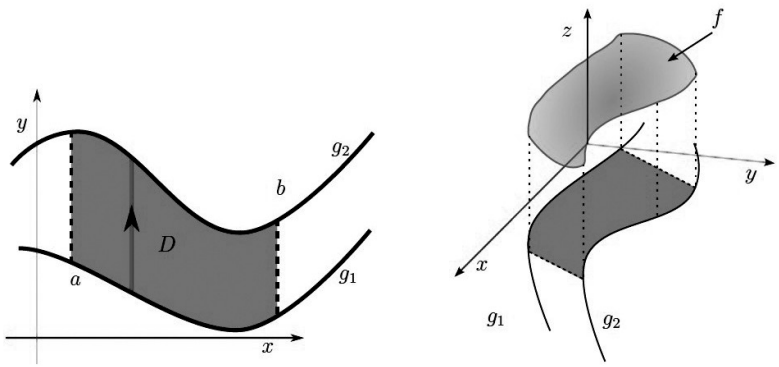
O conceito apresentado na seção atual não seria tão útil caso não permitisse a análise de formas geométricas mais complexas. Podemos

estudar regiões abaixo de funções de duas variáveis onde a região não é exatamente retangular, mas limitada por funções de uma única variável.

Assimile

Seja f (Figura 4.13) uma função de duas variáveis e a região $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ uma região contida no domínio de f, no qual, y está variando entre duas funções.

Figura 4.13 | Limites de integração.



Fonte: elaborada pelo autor.

Neste caso, definimos a integral dupla de f sobre D como

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx.$$

Vamos considerar outro problema, mas agora encontraremos x variando entre funções.

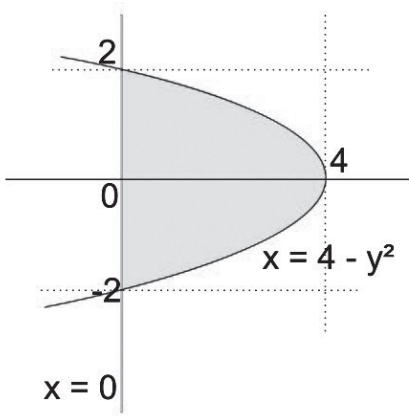
Exemplificando

Esboce o prisma limitado entre os planos z = 0 e z = 5, cuja base é formada pela região entre a reta x = 0 e a parábola $x = 4 - y^2$, em seguida, calcule seu volume utilizando integrais duplas.

Resolução:

Primeiro formamos a base do prisma no plano xy, conforme a Figura 4.14.

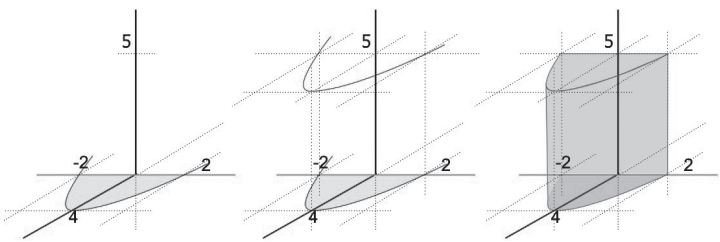
Figura 4.14 | Base com a parábola.



Fonte: elaborada pelo autor.

A imagem estudada pode ser visualizada na Figura 4.15, onde é construído o prisma até a altura de z = 5.

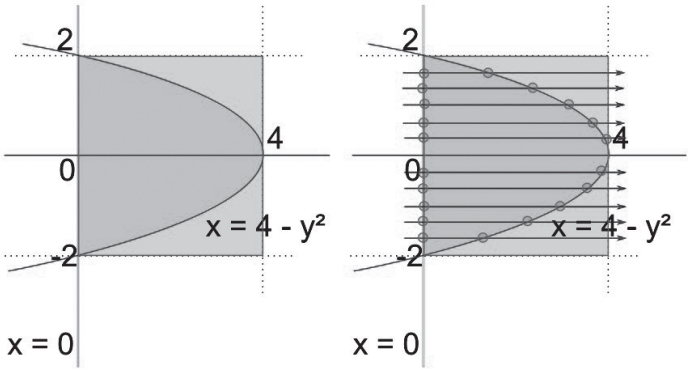
Figura 4.15 | Montando o prisma



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba a importância de refletir sobre a região de integração. Aqui podemos proceder integrando ao longo do eixo x, partindo do eixo y e limitado pela parábola na extremidade oposta (Figura 4.16).

Figura 4.16 | Montando a integral



Fonte: elaborada pelo autor.

No intervalo $-2 \leq y \leq 2$ passamos "setas" paralelas ao eixo x, para identificar que a região de integração que termina em $x = 4 - y^2$. Portanto, $0 \leq x \leq 4 - x^2$ e como o "teto" do prisma é $z = 5$ a integral que determina seu volume é

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2} 5dxdy$$

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2} 5dxdy = \int_{-2}^{2} 5x\Big|_{0}^{4-y^2} dy = \int_{-2}^{2} 20 - 5y^2 dy = 20y - \frac{5}{3}y^3\Big|_{-2}^{2} = \frac{160}{3} u.v.$$

Perceba que quando temos um intervalo não retangular, sempre poderemos escrever os extremos do intervalo como uma função de uma variável com relação à outra. Nesse caso, sempre integraremos primeiro a variável dependente, para depois integrar a variável independente (aquela cujos limites são somente números).

Faça você mesmo

Esboce o prisma triangular limitado entre os planos $z = 0$ e $z = 4$, cuja base é formada pela região entre as retas $y = x$, $x = 0$ e $y = 2 - x$, em seguida, calcule seu volume utilizando integrais duplas.

Pesquise mais

Nesse *link*, você poderá aprender um pouco sobre integrais duplas:

disponível em: <https://www.respondeai.com.br/resumos/23/capitulos/1>. Acesso em: 20 jul. 2016.

Sem medo de errar

Você é um engenheiro químico que foi contratado por uma grande indústria multinacional para projetar um reator tubular isotérmico onde ocorrerão reações homogêneas, irreversíveis e em série, com a finalidade de fabricar um produto com alto valor agregado que trará muito lucro para a empresa. Esse reator deverá ser projetado baseado no princípio de construção casco e tubos, o casco do reator possui um formato cilíndrico, porém, é dividido horizontalmente em duas partes iguais, conforme mostra a Figura 4.17, sendo que em ambas as partes circulará um fluido refrigerante com a finalidade de controlar a temperatura da reação. A Figura 4.17 mostra também a estrutura do reator que será coberta pelo casco. Realizando os cálculos referentes a esse projeto, você identificou que a função que representa a área interna de uma dessas partes do casco é representada pela equação matemática $A(a)=\int_0^{\acute{c}}\sqrt{4-a^2}\ da$, porém, é necessário que você descubra o volume de fluido refrigerante que ocupa o casco do reator, sabendo que o volume é dependente do comprimento do reator. Vamos calcular o volume de fluido refrigerante!

Figura 4.17 | Estrutura do reator que será coberta pelo casco

Fonte: <https://goo.gl/utjChX>. Acesso em: 20 jul.2016.

Resolução:

1º passo: Mostra a função a ser integrada. Para obtermos o volume do fluido refrigerante temos que integrar a equação da área (a), obtendo uma integral dupla (b).

a) $A(a) = \int_0^2 \sqrt{4 - a^2}\ da$

Atenção

Observe o posicionamento correto da simbologia das integrais.

b) $V = \int_0^L A(a)\ \mathrm{dL} = \int_0^L \int_0^2 \sqrt{4 - a^2}\ da\ dL$

2º passo: Encontramos na seção anterior que o comprimento ideal do reator é de 2 metros, portanto, vamos inserir esse valor no limite da integral.

c) $V = \int_0^2 \int_0^2 \sqrt{4 - a^2}\ da\ dL$

3º passo: Vamos resolver a integral, para isso, vamos precisar aplicar os conceitos de integrais por partes e por substituição, já vistos no decorrer dos nossos estudos.

d) $V = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \left(\mathrm{a} \cdot \sqrt{4 - a^2} + 4 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{a}{3} \right) \right) \right)\Bigg|_0^2 dL = \int_0^2 3{,}14\ dL = 6{,}28\ m^3$

Resolvendo a integral, concluímos que o volume de fluido refrigerante que ocupa uma das partes do casco é de 6,28 m^3, porém, o casco está dividido em duas partes, assim, para obtermos o volume total do fluido temos que dobrar esse valor, dessa forma, o volume de fluido refrigerante que ocupada o casco do reator é de 12,56 m^3.

Lembre-se

Revise os conceitos sobre integral por substituição e integral por partes.

Avançando na prática

A melhor decisão

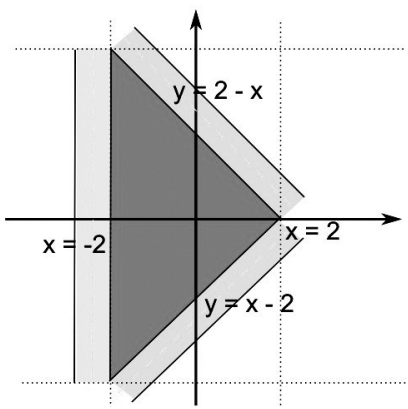
Descrição da situação-problema

Um cidadão e a prefeitura estão em uma disputa na justiça sobre o tamanho de um terreno a ser desapropriado. Sabe-se que deverá ser pago um valor de 10.000 reais por unidade de área. Determine o valor a ser pago pela prefeitura, sabendo que a região se encontra entre as ruas modeladas por $x = -2$, $x = 2$, $y = 2 - x$ e $y = x - 2$.

Resolução da situação-problema

1º passo: esboce a região no plano xy conforme Figura 4.18.

Figura 4.18 | Região entre ruas



Fonte: elaborada pelo autor.

2º passo: calcule a área da região utilizando a integral dupla.

Para calcular a área de uma região D utilizando integrais duplas, basta calcular a integral dupla de 1 (você consegue entender o porquê? Pense sobre o que isso representaria em volume!)

Portanto,

$$A = \int_{-2}^{2}\int_{x-2}^{2-x} 1\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} y\Big|_{x-2}^{2-x} dx = \int_{-2}^{2} 4 - 2x\,dx = 4x - x^2\Big|_{-2}^{2} = (8-4) - (-8-4) = 16.$$

Logo, o total a ser pago de indenização é 160 mil reais.

Lembre-se

A área também pode ser calculada utilizando integrais simples.

Faça você mesmo

Utilizando integrais duplas determine a área limitada entre a regiões $x = -2$, $x = 2$, $y = -2$ e $y = x^2 + 1$.

Faça valer a pena

1. O valor da integral $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{3} 9x^2y^2 dydx$ é:

a) -432

b) -234

c) 0

d) 234

e) 432

2. O volume do sólido limitado pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$ e $z = 4 - y$ é:

a) 0

b) 2

c) 4

d) 8

e) 16

3. O volume do sólido limitado pelos planos planos $z = 0$, $x = -2$, $x = 2$, $y = -2$ e $y = 2$ e o paraboloide. $z = 9 - x^2 - y^2$ é:

a) $\frac{102}{3}$

b) $\frac{203}{3}$

c) $\frac{304}{3}$

d) $\frac{405}{3}$

e) $\frac{506}{3}$

Seção 4.3

Integrais duplas: coordenadas polares

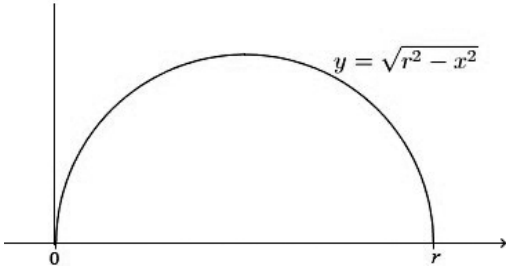
Diálogo aberto

Continuando os nossos estudos nesta quarta unidade de *Cálculo Diferencial e Integral II*, vale recordar que nós já vimos até esse momento o vetor gradiente e a otimização de funções com duas variáveis e vimos que ambos os assuntos possuem vasta aplicação nos mais diversos campos da engenharia, economia, ciências naturais, e conhecemos as integrais duplas aplicadas ao cálculo do volume de diversos tipos de superfícies.

Nesta seção, vamos estudar as integrais duplas aplicadas às coordenadas polares. Assim sendo, você terá que unir alguns conceitos vistos anteriormente, como as coordenadas polares e as integrais duplas, vistas na seção anterior. As integrais duplas em coordenadas polares podem ser aplicadas para calcular volumes em coordenadas polares, como seções circulares e sólidos em revolução.

Você é um engenheiro químico que foi contratado por uma grande indústria multinacional para projetar um reator tubular isotérmico. Durante esse projeto você já encontrou a concentração ideal do produto de maior valor agregado perante a concentração do reagente limitante e do comprimento do reator e o volume de fluido refrigerante necessário para controlar a temperatura da reação química envolvida nesse processo. Nesta terceira etapa do projeto, é necessário que você calcule o volume do casco necessário para a construção do reator, para isso, vale lembrar que esse reator deverá ser projetado baseado no princípio de construção de casco e de tubos, e isolado termicamente para que não ocorra troca de calor com o ambiente. Você já sabe que o casco do reator possui um formato cilindro e é dividido horizontalmente em duas partes iguais, sendo a parte superior representada pela Figura 4.19, e possui um raio de 3 metros. Qual função que representa o casco do reator? Qual será o volume necessário para a construção desse casco?

Figura 4.19 | Representação de uma das partes do casco do reator



Fonte: elaborada pelo autor.

Estude com afinco e adquira a habilidade de calcular volumes através das integrais duplas em coordenadas polares, resolvendo o problema apresentado e muitos outros. Bons estudos!

Não pode faltar

Já estudamos as integrais duplas na seção anterior, em intervalos retangulares e gerais, e sua aplicação no cálculo de volumes. Vamos aprender agora uma técnica simples que pode facilitar muito o cálculo de algumas integrais duplas. Para isso, usaremos as coordenadas polares, que já foram apresentadas em outra oportunidade.

Já aprendemos que nas situações onde temos simetria circular (por exemplo, uma integral em uma região circular ou na região de um anel) as coordenadas polares podem facilitar a nossa vida.

As coordenadas polares têm sua base na equação do círculo

$$r^2 = x^2 + y^2$$

e na transformação das variáveis cartesianas x e y nas variáveis polares: raio (r) e ângulo θ

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Nesse caso, podemos escrever também as regiões de integração em termos das variáveis polares. Elas terão a forma:

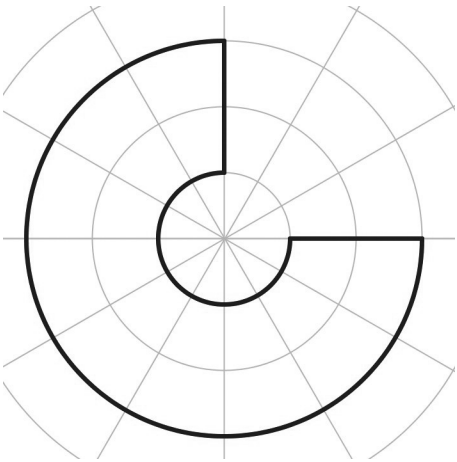
$$R = \{(r,\theta) \mid a \le r \le b; \alpha \le \theta \le \beta\}.$$

Reflita

Regiões desse tipo são chamadas usualmente de retângulos polares. Você consegue entender o porquê?

Por exemplo, o esboço da região $R = \left\{(r,\theta) \mid 1 \leq r \leq 3; \pi/2 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$ é apresentada pela Figura 4.20.

Figura 4.20 | Região polar



Fonte: elaborada pelo autor.

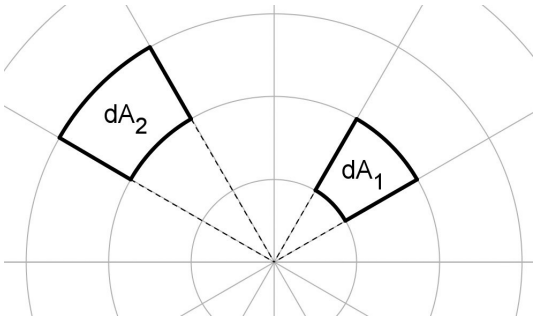
Veja que seria bem difícil descrever a região acima em termos de coordenadas retangulares. Teríamos que dividir a região em várias sub-regiões e realizar uma integração em cada região. Em termos das coordenadas polares, entretanto, a situação é simples: é uma região entre r = 1 e r = 3, onde o ângulo varia de $\pi/2$ até 2π. Em termos de coordenadas polares, a região é muito simples, e os limites de integração da função se comportam como aqueles das regiões retangulares em coordenadas cartesianas, do tipo:

$$V = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r,\theta)\, dA$$

Então, o caminho está aberto para calcular volumes em coordenadas polares. Temos, entretanto, que entender o que o elemento de área dA significa nesse contexto. Sabemos que ele é uma função dos elementos de raio e de ângulo, ou seja,

dA (dr,dθ). Vejamos dois exemplos de elemento de área em coordenadas polares mostrados pela Figuras 4.21 e 4.22.

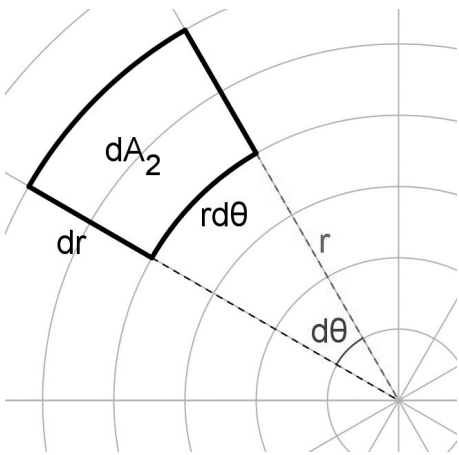
Figura 4.21 | Elementos de área em coordenadas polares



Fonte: elaborada pelo autor.

O que nos chama a atenção é que para uma mesma variação de ângulo e raio, alguns elementos de área são maiores do que outros. Isso não ocorria com as coordenadas cartesianas, onde os elementos de área são sempre dxdy quadrados de mesma área. Vemos que quanto mais distante o elemento está da origem, maior ele é. Para nossa sorte, é fácil compensar este fato. Basta considerar um elemento de área dA = rdθdr. O resultado é apropriado, pois para regiões angulares muito pequenas, o comprimento de um arco pode ser aproximado por rdθ. Portanto, a área do retângulo seria aproximadamente sua base multiplicada pela altura, ou seja dA = rdθdr. Perceba que essa só é uma boa aproximação no limite onde os elementos dr e dθ são muito pequenos.

Figura 4.22 | Elemento de área



Fonte: elaborada pelo autor.

Então, nosso procedimento será o seguinte: dada uma função de duas variáveis f(x,y) a ser integrada em uma região com simetria circular, podemos realizar a transformação da função para variáveis polares, e integrar nos novos limites de integração da região polar, usando o elemento de área dA = rdθdr.

Assimile

"Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \le a \le r \le b$ e $\alpha \le \theta \le \beta$, onde $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$, então:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\,dr\,d\theta."$$

Stewart (v. 2, p. 897, 2013).

Pesquise mais

Veja mais exemplos resolvidos no excelente livro de Stewart.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage, 2013. v. 2, 901 p.

Exemplificando

Considere a função f dada por $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$. Calcule o volume abaixo da função indicada e acima da região descrita por: $R = \left\{(r,\theta) \mid 1 \le r \le 2; 0 \le \theta \le \pi/3\right\}$. Utilize coordenadas polares.

Resolução:

Sabemos que o volume da função indicada pode ser calculada através da integral dupla:

$$V = \iint_R f(x,y)dA$$

Transformando a função de duas variáveis para coordenadas polares obtemos:

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$$

$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 9 - (r\cos\theta)^2 - (r\operatorname{sen}\theta)^2 = 9 - r^2$$

Vemos que houve uma simplificação por realizar a transformação de variáveis. Utilizando o elemento de área apropriado, $dA = r\,dr\,d\theta$, temos:

$$V = \int_0^{\pi/3}\int_1^2 \left(9 - r^2\right) r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/3}\int_1^2 \left(9r - r^3\right) dr\,d\theta$$

Resolveremos primeiro a integral interior, com relação ao raio:

$$V = \int_0^{\pi/3}\left(\int_1^2 \left(9r - r^3\right) dr\right) d\theta = \int_0^{\pi/3}\left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big|_1^2\right) d\theta$$

$$V = \int_0^{\pi/3}\left(18 - \frac{9}{2} - 4 + \frac{1}{4}\right) d\theta = \int_0^{\pi/3} \frac{39}{4} d\theta$$

Basta agora resolver uma integral com relação ao ângulo:

$$V = \int_0^{\pi/3} \frac{39}{4} d\theta = \frac{13\pi}{4} u.v.$$

Exemplificando

Calcule o volume do sólido limitado por baixo pelo disco de raio 3 com centro na origem e por cima pelo plano f(x,y) = 10 – x. Utilize coordenadas polares.

Resolução:

Sabemos que o volume da função indicada pode ser calculada através da integral dupla:

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

A região polar sobre a qual integraremos pode ser escrita na forma:

$R = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 3; 0 \le \theta \le 2\pi\}$ (um disco de raio 3 centrado na origem).

Transformando a função de duas variáveis para coordenadas polares obtemos:

$$f(x,\ y) = 10 - x$$

$$f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = 10 - r\cos\theta$$

Utilizando o elemento de área apropriado, $dA = r\,dr\,d\theta$ temos:

$$V = \int_0^{\pi/3}\int_1^2 (10 - r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(10r - r^2\cos\theta\right)dr\,d\theta$$

Resolveremos primeiro a integral interior, com relação ao raio:

$$\int_0^3 \left(10r - r^2\cos\theta\right)dr = 5r^2 - \frac{r^3\cos\theta}{3}\Bigg|_0^3 = 45 - 9\cos\theta$$

Substituindo:

$$V = \int_0^{2\pi} (45 - 9\cos\theta)\,d\theta = 90\pi\ u.v.$$

Faça você mesmo

Calcule o volume do sólido limitado por baixo pelo disco de raio 1 com centro na origem e por cima pelo plano f(x,y) =2y + 8. Utilize coordenadas polares.

Sem medo de errar

Você é um engenheiro químico que foi contratado por uma grande indústria multinacional para projetar um reator tubular isotérmico, conforme Figura 4.23. Nesta terceira etapa do projeto, é necessário que você calcule o volume do casco necessário para a construção do reator, para isso, vale lembrar que esse reator deverá ser projetado baseado no princípio de construção de casco e de tubos e isolado termicamente para que não ocorra troca de calor com o ambiente. Você já sabe que o casco do reator possui um formato cilíndrico, é dividido horizontalmente em duas partes iguais e possui um raio de 3 metros. Para calcular o volume do casco vamos agora encontrar a função que o representa e, integrando essa função em coordenadas polares encontrar o volume necessário para a construção desse caso.

Figura 4.23 | Interior do casco do reator

Fonte: <https://goo.gl/ab9VHT>. Acesso em: 26 jul. 2016.

Resolução:

1º passo: Encontrar a função que representa matematicamente a parte superior do casco e para isso devemos realizar a transformação das variáveis cartesianas x e y nas variáveis polares: raio (r) e ângulo θ, sendo que para isso precisamos substituir x = r cosθ.

a) $y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - (r\cos\theta)^2}$.

2º passo: Integrar a função utilizando os conceitos de integrais de coordenadas polares, observando na Figura 4.19 que o ângulo varia de 0 a π e o raio varia de 0 a 3 metros.

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{3} \sqrt{r^2 - (r\cos\theta)^2}\cdot r \;\; dr \;\; d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{3} \sqrt{r^2 - (r\cos\theta)^2}\cdot r \;\; dr \;\; d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{3} \sqrt{r^2 - r^2\cdot\cos^2\theta}\cdot r \;\; dr \;\; d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{3} \sqrt{r^2\cdot(1-\cos^2\theta)}\cdot r \;\; dr \;\; d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{3} r\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot r \;\; dr \;\; d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{3} r\sqrt{sen^2\theta}\cdot r \;\; dr \;\; d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{3} r\cdot sen\theta\cdot r \;\; dr \;\; d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{3} r^2\cdot sen\theta \;\; dr \;\; d\theta.$$

3º passo: Resolver a integral e encontrar o volume.

c) $V = \int_0^{\pi}\int_0^{3} r^2 \cdot sen\theta \;\; dr \; d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{3} sen\theta \; d\theta = \int_0^{\pi} 9 \cdot sen\theta \; d\theta = \left(-9\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = 18 \; m^3$.

Como a função representa somente a parte superior do casco do reator devemos dobrar o valor para obtermos o volume total do caso, portanto, o volume total é de 36 m^3.

Avançando na prática

O volume de um monumento

Descrição da situação-problema

Um monumento será construído no centro de uma grande cidade, e para dar início a esse projeto é necessário saber qual o volume ocupado pela construção. O projetista que está encarregado dessa construção relatou que esse sólido está sendo projetado acima do plano xy e, portanto, pode ser representado pela $x^2 + y^2 = 9$, sendo $R = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 3; 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Como é possível calcular o volume de concreto utilizado?

Lembre-se

Recorde os conceitos sobre coordenadas polares já vistos anteriormente em nossos estudos.

Resolução da situação-problema

A região que será ocupada pela construção R' é representada pela sua base $x^2 + y^2 = 9$, sendo $R = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 3; 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Convertendo a expressão em coordenadas polares, temos que: $9 - x^2 - y^2 = 9 - \left(r\cos\theta\right)^2 - \left(rsen\theta\right)^2 = 9 - r^2$.

Logo, escrevemos a integral da seguinte forma: $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} \left(9 - r^2\right) \cdot r \;\; dr \; d\theta$.

Resolvendo a integral obteremos o volume ocupado pela construção:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(9 - r^2\right)\cdot r \;\; dr \;\; d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(9r - r^3\right) \;\; dr \;\; d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right)d\theta = \frac{81\pi}{2}m^3$$

Faça você mesmo

Calcule a área de uma elipse que pode ser representada pela função matemática $x^2 + 4y^2 - 4x = 0$ fazendo uso dos conceitos de integrais duplas em coordenadas polares.

Faça valer a pena

1. Considere a função f dada por $f(x, y) = 4 - x^2$. Calcule o volume abaixo da função indicada e acima da região descrita por: $R = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1; 0 \le \theta \le \pi\}$. Utilize coordenadas polares.

a) $\frac{15\pi}{8} u.v.$

b) $\frac{20\pi}{3} u.v.$

c) 0

d) $\frac{10\pi}{3} u.v.$

e) $\frac{25\pi}{8} u.v.$

2. O valor da integral $\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^4 \cos(\theta)\, dr\, d\theta$ é:

a) $\frac{32}{7}$

b) $\frac{20}{3}$

c) 0

d) $\frac{32}{5}$

e) $\frac{20}{7}$

3. O valor da integral $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \theta + r^2\cos(2\theta)\,dr\,d\theta$ é:

a) $\frac{\pi^2}{6}$

b) $\frac{\pi^2}{4}$

c) 0

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{6}$

Seção 4.4

Integrais duplas: aplicações

Diálogo aberto

Chegamos à última seção da disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral II* e, até esse momento, nós estudamos o vetor gradiente e a otimização de funções com duas variáveis e vimos que ambos os assuntos possuem vasta aplicação nos mais diversos campos da engenharia, economia e ciências naturais. Conhecemos, também, as integrais duplas aplicadas ao cálculo do volume de diversos tipos de superfícies e às coordenadas polares calculando volumes em seções circulares e sólidos em revolução.

Nesta seção, vamos estudar as funções densidade e integrais que são largamente aplicadas para obter grandezas interessantes como a massa ou carga total de um objeto, bem como para descobrir a localização do centro de massa de um objeto, o que é extremamente necessário no desenvolvimento de novos produtos em engenharia. O centro de massa de um objeto é um local especial no interior de qualquer corpo rígido que se move como se toda a massa e todas as forças externas aplicadas sobre ele estivessem concentradas em um único ponto. Esses conceitos são bastante aplicados às diversas áreas da engenharia, como também aos estudos de economia e probabilidade.

Dentre as etapas do projeto de um reator tubular, solicitado por uma grande multinacional, na qual você é o engenheiro químico responsável, já foram calculados a concentração ideal do produto de maior valor agregado perante a concentração do reagente limitante e do comprimento do reator, o volume de fluido refrigerante necessário para controlar a temperatura da reação química envolvida nesse processo e o volume do casco do reator. Finalmente, você chegou à última etapa do projeto! Dentre às peças que constituem um reator tubular, as chicanas são fundamentais para o funcionamento de um reator tubular, pois aumenta a eficiência de troca térmica no interior do reator melhorando o desempenho da reação química. Diversas

chicanas são instaladas ao longo do comprimento de um reator tubular, e sabe-se que o melhor local para a solda é sobre o seu centro de massa. O formato de uma chicana pode ser modelado como a região entre a parábola $y = 4 - x^2$ e a reta $y = 0$ (em metros) considerando a densidade $\delta = 8\text{kg/m}^2$. Qual será a massa total de uma chicana? Qual a posição do seu centro de massa?

Nessa seção, vamos aprender a aplicar as integrais duplas em funções densidade para encontrar o centro de massa de diversos objetos. Estude os conceitos desta seção e encontre a solução para o problema apresentado, dentre outros. Bons estudos!

Não pode faltar

Já falamos bastante sobre o cálculo de volumes utilizando integrais duplas. Entretanto, esse é somente um exemplo das inúmeras aplicações da ferramenta matemática. Nosso desejo, agora, é discutir a função densidade e obter conhecimentos que nos permitam a obtenção de valores médios. Na física, usando funções densidade e integrais, podemos obter grandezas interessantes como a massa ou carga total de um objeto. Podemos, também, descobrir a localização do centro de massa de um objeto, o que é extremamente necessário no desenvolvimento de novos produtos em engenharia. A economia e a probabilidade também se utilizam de tais conceitos regularmente.

Para avançar, entender o significado da função densidade é fundamental. Sua aplicação mais comum é no cálculo de massas de objetos. Por exemplo, suponha que desejamos encontrar a massa de um cabo de aço de 4m de comprimento. Somos informados de que ele possui uma densidade linear constante de $\delta = 2{,}5\text{kg/m}$. Para obter sua massa total, basta realizar a seguinte integral:

$$M = \int_0^4 2{,}5dx = 2{,}5x\Big|_0^4 = 2{,}5 \cdot 4 - 2{,}5 \cdot 0 = 10kg.$$

Note que a densidade tem unidade kg/m, e na integral acima ela é multiplicada por uma distância com unidade m. Assim, o cálculo resulta em uma massa dada em kg. Você pode pensar que foi uma perda de tempo realizar uma integral para algo tão simples, pois para obter o resultado final bastaria multiplicar a densidade pelo

comprimento do cabo desde o início! Mas perceba que nem todos os materiais tem densidade linear homogênea, ou uma mesma massa por unidade de comprimento. Vamos supor um cabo que se torna cada vez mais espesso, de modo que sua densidade aumenta com relação à distância da origem. Sua densidade pode ser dada, por exemplo, por $\delta(x) = 2{,}5 + 0{,}2x$, ou depender de outra função qualquer. No caso, a integral sempre resolverá nosso problema:

$$M = \int_0^4 (2{,}5 + 0{,}2x)dx = 2{,}5x + 0{,}1x^2\Big|_0^4 = 2{,}5 \cdot 4 - 2{,}5 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 4^2 - 0{,}1 \cdot 0^2 = 11{,}6kg.$$

O uso de uma integral simples é possível por se tratar de um cabo. Entretanto, o que faríamos no caso de uma chapa retangular? A densidade dependeria da posição em duas direções, e, portanto, teria que ser marcada por uma função de densidade superficial $\delta(x,y)$, de modo que a massa total do objeto será dada por:

$$M = \iint_S \delta(x,y)dxdy,$$

onde a superfície S definirá os limites de integração da integral dupla. A densidade $\delta(x,y)$ tem unidade de massa por unidade de área (por exemplo, no SI temos kg/m^2).

Exemplificando

Uma chapa retangular é obtida com uma composição especial de metais, e sofre também variações em sua espessura, de modo que sua densidade superficial é dada pela função $\delta(x,y) = 2 + 10\cos(x) + 0{,}4xy$. Calcule sua massa total, sabendo que ela está localizada no primeiro quadrante do plano cartesiano, com uma extremidade tocando sua origem e tem comprimento 1,6m ao longo do eixo x e 1,2m ao longo do eixo y.

Resolução:

Dada a função densidade, podemos obter a massa total da chapa utilizando uma integral dupla, de acordo com a expressão:

$$M = \iint_S \delta(x,y)dxdy.$$

A chapa retangular está inteiramente localizada no primeiro quadrante,

com uma extremidade tocando a origem do eixo cartesiano. Teremos, portanto, uma integral na forma:

$$M = \int_0^{1,2}\int_0^{1,6} \left(2 + 10\cos\left(x\right) + 0,4xy\right)dxdy.$$

Resolvendo primeiramente a integral interior, em x, temos:

$$\int_0^{1,6} \left(2 + 10\cos x + 0,4xy\right)dx = 2x + 10sen x + 0,2x^2y\Big|_0^1$$

$$3,2 + 10 \cdot sen(1,6) + 0,2 \cdot 2,56 \cdot y \approx 3,48 + 0,51y.$$

De modo que

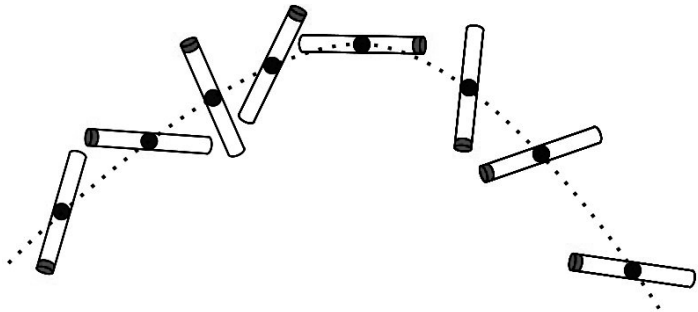
$$M = \int_0^{1,2} 3,48 + 0,51y\,dy = 3,48y + 0,25y^2\Big|_0^{1,2} = 4,18 + 0,36 = 4,54kg.$$

Tratamos especialmente o caso da função densidade de massa, mas existem aplicações similares na própria física, como as densidades de carga elétrica que podem ser integradas para obter a carga elétrica total em um objeto. Em estatística, são muito usadas as funções densidade de probabilidade. Perceba que as funções densidade também podem ser tridimensionais, e permitir o cálculo da massa total em objetos com volume. Mas isso iria além do que desejamos avançar no momento presente.

Centro de massa

O centro de massa de um objeto é um local especial no interior de qualquer corpo rígido. Ele se move como se toda a massa e todas as forças externas aplicadas sobre ele estivessem concentradas em um único ponto. Vamos dar um exemplo. Observe a Figura 4.24, onde temos um bastão lançado no ar. Um movimento bem complicado de se descrever, não é mesmo? Mas veja que o centro de massa do bastão move-se como se fosse uma pequena partícula lançada no ar, descrevendo uma parábola. Seu movimento é fácil de prever e de descrever.

Figura 4.24 | Bastão em movimento



Fonte: elaborada pelo autor.

Por sorte encontrar o centro de massa de um objeto é uma tarefa matemática relativamente simples, vamos optar por uma apresentação em ordem crescente de dificuldade.

Outra característica importante do centro de massa é que, a partir dele é possível equilibrar um corpo rígido. Você pode localizar o centro de massa de um objeto simplesmente procurando um local para apoiá-lo com os dedos de modo que ele fique equilibrado.

Assimile

Fisicamente definimos a densidade δ de um material como sendo a massa por unidade de volume. Entretanto, por conveniência para fios, barras ou hastes finas, usamos massa por unidade de comprimento, já para folhas planas e placas finas, usamos massa por unidade de área.

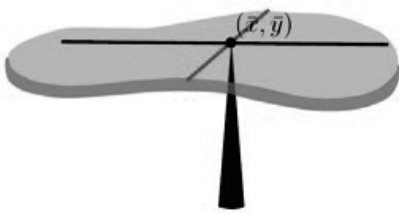
O centro de massa pode ser entendido como uma média ponderada das posições das partículas que compõem um corpo extenso, onde o peso é a massa de cada elemento. O resultado é obtido dividindo-se a integral dupla pela massa total do corpo extenso. No caso de uma superfície, ela é calculada efetuando o produto $\delta(x,y)dA$.

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA}$$

Imagine uma placa fina (Figura 4.25) determinada por uma região D sobre o plano xy, com distribuição superficial de massa através de uma densidade δ (massa por unidade de área). Precisamos descobrir as posições de equilíbrio em cada direção espacial separadamente.

Figura 4.25 | Placa fina



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

Se deseja calcular as posições do centro de massa de um objeto qualquer, calcule separadamente a posição de cada um deles com a expressão abaixo.

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA}$$

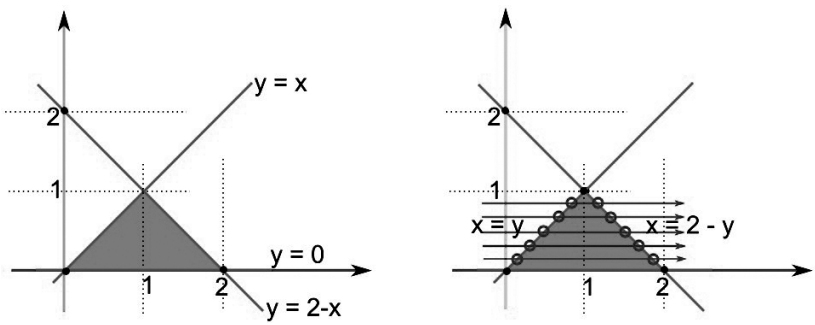
$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA}$$

Exemplificando

Determine o centro de massa do triângulo (Figura 4.26) de densidade $\delta = 1\,\text{kg/m}^2$, que é delimitado pelas retas y = 0, y = x e y = 2 – x (unidades em metros).

Resolução:

Figura 4.26 | Região triangular



Fonte: elaborada pelo autor.

A massa total do sistema pode ser obtida da seguinte maneira:

$$M = \iint_D \delta(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_y^{2-y} 1\,dx\,dy = \int_0^1 x\Big|_y^{2-y} dy = \int_0^1 (2-2y)\,dy = 2y - y^2\Big|_0^1 = 1kg$$

Para obter o centro de massa precisamos dos valores das duas integrais indicadas:

$$\iint_D x\delta(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_y^{2-y} x\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\Big|_y^{2-y} dy = \int_0^1 (2-2y)\,dy = 2y - y^2\Big|_0^1 = 1kg \cdot m$$

$$\iint_R y\delta(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_y^{2-y} y\,dx\,dy = \int_0^1 yx\Big|_y^{2-y} dy = \int_0^1 2y - 2y^2\,dy = y^2 - \frac{2y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ kg \cdot m$$

Agora podemos calcular as posições x e y do centro de massa do triângulo:

$$\overline{x} = \frac{\iint_R x\delta(x,y)\,dA}{M} = \frac{1}{1} = 1m$$

$$\overline{y} = \frac{\iint_R y\delta(x,y)\,dA}{M} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{3}m$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto (1,1/3), com unidades em metros.

Reflita

Olhando para a imagem do triângulo, você saberia indicar qual a posição x onde o centro de massa se localiza? Se você tivesse que equilibrar um triângulo com os dedos, onde tentaria inicialmente? Qual a razão disso?

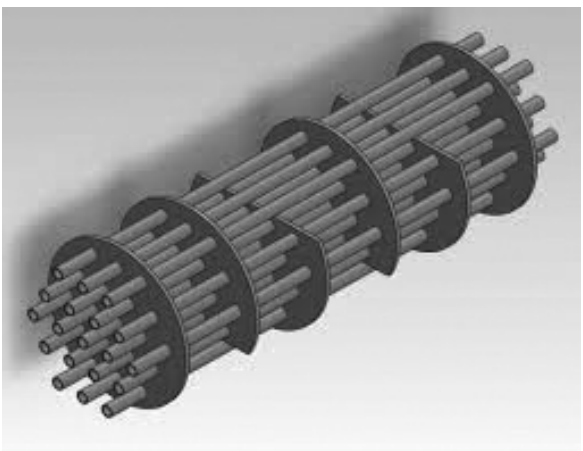
Pesquise mais

Conheça diversas outras aplicações de integrais duplas! Leia o livro: STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage, 2013. v. 2, 901 p.

Sem medo de errar

Concluindo a última etapa do nosso projeto de um reator tubular do qual você é o engenheiro químico responsável, deve-se determinar a massa total de uma chicana (Figura 4.27) e a posição do seu centro de massa, sabendo que o formato de uma chicana pode ser modelado como a região entre a parábola $y = 4 - x^2$ e a reta $y = 0$ (em metros) considerando a densidade $\delta = 8\text{kg/m}^2$.

Figura 4.27 | Chicanas instaladas ao longo de um reator tubular



Fonte: <http://goo.gl/Y2RIIK>. Acesso em: 27 jul. 2016.

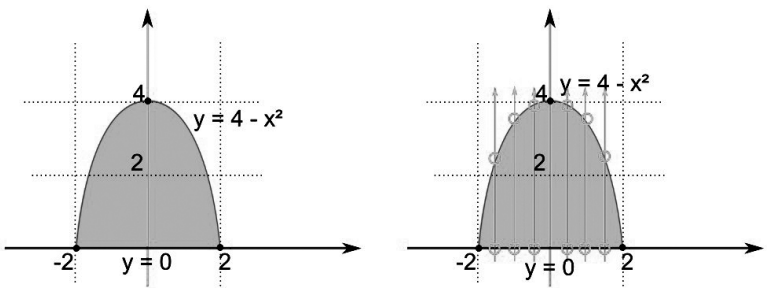
Atenção

Não se esqueça de igualar as funções para descobrir os limites dos esboços.

Resolução:

1º passo: Esboce a região que se deseja calcular o centro de massa, conforme a Figura 4.28.

Figura 4.28 | Representação de uma chicana



Fonte: elaborada pelo autor.

2º passo: Calcule a massa total de uma chicana.

$$M = \iint_D \delta(x,\ y)dA = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} 8dydx = \int_{-2}^{2} 8y\Big|_{0}^{4-x^2} dx = \int_{-2}^{2} 32 - 8x^2 dx$$

$$= 32\ x - \frac{8x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{256}{3}\ kg = 85,3kg$$

3º passo: Calcule os momentos.

$$M_y = \iint_D x\delta(x,y)dA = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} 8xdydx = \int_{-2}^{2} 8xy\Big|_{0}^{4-x^2} dx = \int_{-2}^{2} 32x - 8x^3 dx =$$

$$= 16\ x^2 - 2x^4\Big|_{-2}^{2} = 0\ kg \cdot m$$

$$M_x = \iint_D y\delta(x,y)dA = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} 8ydydx = \int_{-2}^{2} 4y^2\Big|_{0}^{4-x^2} dx = \int_{-2}^{2} 64 - 32x^2 + 4x^4 dx =$$

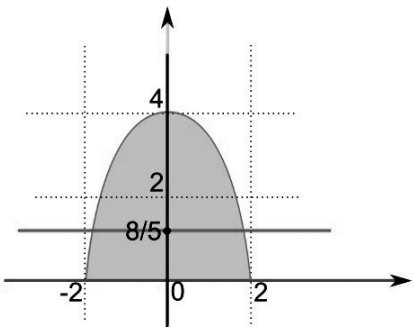
$$= 64x - \frac{32x^3}{3} + \frac{4x^5}{5}\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{960x - 160x^3 + 12x^5}{15}\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{2048}{15} \quad kg \cdot m$$

4º passo: Calcule o centro de massa.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{0}{\frac{256}{3}} = 0 \ m$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{2048}{15}}{\frac{256}{3}} = \frac{8}{5} \ m$$

Figura 4.29 | Centroide da chicana



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, observamos que uma chicana (Figura 4.29) possui uma massa total de 85,3 kg e o seu centro de massa está localizado no ponto (0;8/5), com unidades em metros. Parabéns para você por concluir todas das etapas do projeto com muito sucesso.

Avançando na prática

Centro de massa de um aerofólio

Descrição da situação-problema

Você precisa desenvolver uma máquina de cálculo de centroides (centro de massa densidade $\delta = 1 kg/m^2$) para atender uma grande fábrica de automóveis. A peça escolhida para o teste foi um pedaço de aerofólio que pode ser modelado pela região limitada entre as

parábolas $y = 2x^2$ e $y = x^2 + 1$ (unidades em metros). A máquina está apontando que o centro de massa dessa peça está localizado no ponto (0;4/5), mas os engenheiros da empresa estão receosos da resposta obtida pela máquina. Portanto, você deverá encontrar manualmente esse valor e compará-lo com o resultado obtido pela máquina. Como você executará esse cálculo?

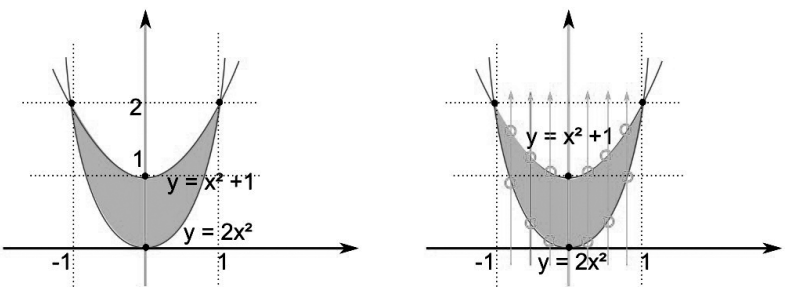
Lembre-se

Aplique as fórmulas desenvolvidas no texto para determinar o centro de massa.

Resolução da situação-problema

1º passo: Esboce a região que se deseja calcular o centro de massa (Figura 4.30).

Figura 4.30 | Aerofólio



Fonte: elaborada pelo autor.

2º passo: Calcule a massa total do sistema.

a)

$$M = \iint_D \delta(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{x^2+1} 1\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} y\Big|_{2x^2}^{x^2+1} dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\ kg$$

3º passo: Calcule os momentos.

a)

$$M_y = \iint_D x\delta(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{x^2+1} x\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} xy\Big|_{2x^2}^{x^2+1} dx = \int_{-1}^{1} x - x^3\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0\ kg\cdot m$$

b) $$M_x = \iint_D y\delta(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{x^2+1} ydydx = \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Big|_{2x^2}^{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2x^2 + 1 - 3x^4 dx =$$

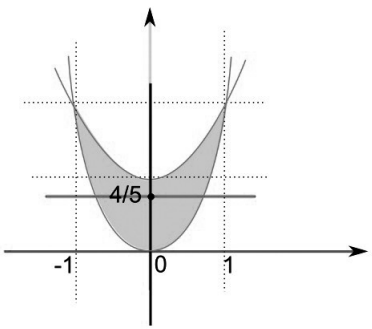
$$= \frac{2x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{3x^5}{10}\Big|_{-1}^{1} = \frac{20x^3 + 30x - 18x^5}{60}\Big|_{-1}^{1} = \frac{64}{60} = \frac{16}{15} kg \cdot m$$

4º passo: Calcule o centro de massa.

c) $$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{0}{\frac{4}{3}} = 0\,m$$

d) $$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{16}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{4}{5} m$$

Figura 4.31 | Centroide do aerofólio.



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim sendo, pode-se observar que a máquina realizou o cálculo corretamente.

Faça você mesmo

Determine o centroide da região limitada entre as retas x = 0, x = 3, $y = 3 - \frac{2}{3}x$ e $y = \frac{2}{3}x - 3$.

Faça valer a pena

1. A massa da placa de densidade δ, dada por $\delta(x,y) = x + y + 1$, limitada pelas retas x = 0, x = 4, y = 0, y = 4, é:

a) 20kg

b) 40kg

c) 80kg

d) 100kg

e) 120kg

2. O centro de massa da placa de densidade δ, dada por $\delta(x,y) = 1$, limitada pelas retas x = 0, $x = \frac{\pi}{2}$, y = 0 e a curva $y = \cos x$, é:

a) $\left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8}\right)$

b) $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2} - 1\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

d) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

3. A massa da placa de densidade δ, dada por $\delta(x,y) = yx + 1$, limitada pelas retas x = 0, y = x, y = 4, é:

a) 20kg

b) 30kg

c) 40kg

d) 50kg

e) 60kg

Referências

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. 5. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1992.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 4.

LARSON, R.; EDWARDS, B. **Cálculo com aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

LIMA, E. L. **Curso de análise**: projeto Euclides. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. v. 2.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. **Física**: mecânica. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

STEWART, James. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2005. v. 2.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage, 2013. v. 2, 901 p.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003. v. 2.

Anotações

Anotações

Anotações

ISBN 978-85-8482-534-9