KLS

Matemática instrumental

Matemática Instrumental

Rogério Siqueira Chiacchio
Junior Francisco Dias

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Chiacchio, Rogério Siqueira
C532m Matemática instrumental / Rogério Siqueira Chiacchio, Junior Francisco Dias. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016.
200 p.

ISBN 978-85-8482-350-5

1. Matemática. 2. Funções. I. Dias, Junior Francisco. II. Título.

CDD 510

2016
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Palavras do autor

Caro aluno, seja bem-vindo!

Nesta unidade curricular será explorado um dos conceitos mais importantes da Matemática: o de função. Utilizamos esse conceito o tempo todo, mas nem sempre nos damos conta disso. Observe um exemplo simples: no supermercado, ao levarmos os produtos ao caixa, o atendente passa o código de barras pelo leitor e o computador registra o preço do item. Nesse caso, o computador desempenha o papel de uma função, que recebe a informação de um código de barras e, como resposta, registra o preço do produto. Essa é a ideia básica de qualquer função, ou seja, dado certo elemento (que pode ser um objeto, um número, uma pessoa etc.), a função o relaciona a outro, podendo este ser tão diverso quanto o primeiro.

Exemplos como o anterior podem ser adaptados para mostrar a aplicação das funções em qualquer relação de comércio, mas não é somente nesse contexto que as funções são utilizadas. Ao andar de carro você já deve ter reparado a funcionalidade do velocímetro. A ação desse mecanismo também pode ser associada a uma função, pois ele recebe o sinal referente à frequência dos giros da roda do carro, transformando essa informação em registro de velocidade.

Esperamos que o fato de as funções estarem tão presentes em nosso dia a dia seja motivador para seus momentos de estudo diário, os quais devem levá-lo a conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1° e 2° graus, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Para que tudo ocorra de modo organizado, este material didático foi dividido em 4 unidades de ensino, cada qual subdividida em 4 seções de autoestudo, totalizando 16 seções. A primeira unidade trata das funções afim e quadrática , enquanto a Unidade 2 aborda as funções trigonométricas. Na Unidade 3 são trabalhadas as funções exponenciais e, por fim, na Unidade 4 são destacadas as logarítmicas. Desejamos-lhe sucesso nesta empreitada!

Função afim e função quadrática

Convite ao estudo

Olá, aluno! Na Unidade 1 deste livro didático trataremos das funções afim e quadrática. Essas duas classes de funções são muito utilizadas não somente na Matemática, mas também na Física, na Economia, na Engenharia, na Administração etc. Na Física, por exemplo, a trajetória de um projétil pode ser descrita por uma função quadrática; função essa também utilizada na Engenharia para modelar a geometria de algumas estruturas, a exemplo da ponte Juscelino Kubitschek (Figura 1.1), em Brasília, cujos arcos lembram o gráfico dessa função. A afim, por sua vez, é utilizada, por exemplo, na modelagem de alguns problemas nas áreas econômicas e de gestão, em que a utilização de outro tipo de recurso tornaria o problema muito complexo para ser resolvido.

Para tornar o assunto desta unidade mais interessante, veja uma situação em que o emprego de funções pode facilitar a gestão de um negócio.

Imagine que você seja o dono de uma empresa que fabrica bonés. Para melhor analisar os custos e lucros você decidiu estudar esses números utilizando funções e gráficos matemáticos, buscando uma melhor organização e maiores lucros, bem como um planejamento de expansão da empresa.

No decorrer desta unidade você será convidado a desempenhar o papel de dono da empresa e resolver os desafios inerentes à administração dela, mas, para tanto, precisará relacionar diversas grandezas presentes no dia a dia, bem como interpretar números e gráficos.

Seção 1.1

Função

Diálogo aberto

Para gerir melhor sua empresa, você deve analisar os custos, as receitas e o lucro, pois sem lucro a empresa não pode ser mantida.

O custo da produção dos bonés é contabilizado a partir de diversos gastos, como matéria-prima, mão de obra, energia elétrica, entre outros. Com isso, há uma relação direta entre o custo e a quantidade de bonés produzida, ou seja, quanto mais bonés produzidos, maior o custo de produção.

Figura 1.1 | Ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília

Fonte:<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ponte_JK_-_Bras%C3%ADlia.jpg>. Acesso em: 19 out. 2015.

Além do custo, outro item importante na gestão da empresa é a receita, que é o valor recebido com a comercialização dos bonés. Vamos imaginar que o preço de venda dos bonés seja de R$ 30,00 por unidade. Qual a receita obtida com a venda de 10 unidades? Com um cálculo simples podemos notar que a receita é de R$ 300,00 (10 . R$ 30,00 = R$ 300,00). Mas, e se quiséssemos escrever isso em uma planilha, de modo que em uma coluna tivéssemos a quantidade vendida e, em outra, a receita correspondente, como podemos agilizar esse cálculo para diversas quantidades comercializadas? Pense um pouco.

Por fim, o lucro é a diferença entre a receita e o custo de produção. Vamos supor que, a partir de balanços financeiros de anos anteriores, chegou-se à conclusão de que, mensalmente, o custo com a produção é composto por um custo fixo de R$ 9000,00 mais um custo variável de R$ 20,00 por boné. Nesse caso, com a produção e venda de 750 bonés em um mês, tem-se lucro ou prejuízo? E se forem produzidos e comercializados 1200 bonés?

Para responder a essas e outras perguntas, você deve empregar conceitos de funções. Vamos lá?

Não pode faltar

Conjuntos

Para compreender a ideia de função, primeiramente é necessário relembrar alguns conceitos, geralmente trabalhados no ensino médio, entre eles, **conjunto, elemento** e **pertinência**. Para uma melhor compreensão, observe os seguintes exemplos:

- Conjunto das vogais: A = {a,e,i,o,u};
- Conjunto dos planetas do sistema solar: B = {Mercúrio, Vênus, Terra, ..., Netuno};
- Conjunto dos meses do ano: C = {janeiro, fevereiro, ...,dezembro}.

Lembre-se

$e \simeq 2{,}71828$

$\pi \simeq 3{,}14159$

No primeiro exemplo, A é o símbolo utilizado para representar o **conjunto das vogais**; cada vogal é um **elemento do conjunto**. Podemos dizer inclusive que a vogal u **pertence ao conjunto** A, afirmação que pode ser expressa sinteticamente por $u \in A$ (lê-se: u pertence a A). A consoante m não pertence ao conjunto A e escrevemos $m \notin A$ (lê-se: m não pertence a A). Os exemplos mais conhecidos de conjuntos são:

- Números naturais: N = { 1,2,3,4,5,6,...,99,100,101,...};

- Números inteiros: Z = {..., -7, - 6,..., -1,0,1,2,...,5,6,7,...};

- Números inteiros, sem o zero: $\mathbb{Z}^* = \{..., -7, -6, ..., -1, 1, 2, ..., 5, 6, 7, ...\}$;

- Números racionais: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in Z \text{ e } b \in Z^* \right\}$ (lê-se: Q é o conjunto dos números $\frac{a}{b}$ tais que a pertence a z e b pertence a z*);

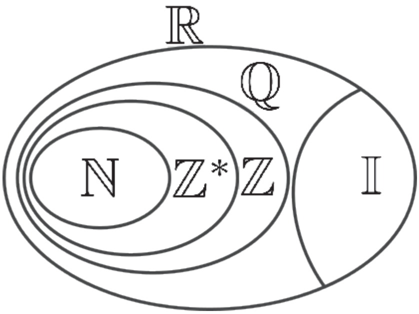
- Números reais:

$$\mathbb{R} = \left\{..., -50, ..., -\frac{37}{e}, ..., -\pi, ..., -2, ..., -\frac{1}{2}, ..., 0, ..., \frac{1}{2}, ..., 1, ..., \frac{10}{9}, ..., 2, ..., \pi, ..., 4, ..., 7\pi, ...\right\}$$

- Números irracionais: I = {x|x ∈ R e x ∉ Q} (lê-se: I é o conjunto dos números x tais que x pertence a R e x não pertence a Q).

Em relação aos conjuntos numéricos, temos as seguintes inclusões (Figura 1.2): (lê-se: N está contido em $\mathbb{Z}^*$); $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

Figura 1.2 | Conjuntos numéricos



Fonte: Os autores

Ainda sobre esses conjuntos numéricos, nenhum elemento de Q pertence a I, e nenhum elemento de I pertence a Q, ou seja, na **interseção** desses dois conjuntos, não há elementos, e indicamos isso por Q ∩ I =∅, em que ∅ é o **conjunto vazio**. Por fim, ao **reunir** os dois conjuntos, Q e I, obtemos o conjunto dos números reais, ou seja, Q ∪ I = R; ambos são **subconjuntos** de R.

Pesquise mais

Para mais detalhes sobre a teoria de conjuntos, acesse o link disponível em:<http://www.uel.br/projetos/matessencial/medio/conjuntos/conjunto.htm>. Acesso em: 20 out. 2015. Elaborado pelo professor Ulysses Sodré, da Universidade Estadual de Londrina, esse site possui alguns dos fundamentos da teoria de conjuntos, notações mais utilizadas e exemplos numéricos com linguagem bastante acessível. Vale a pena conferir!

Produto cartesiano

Outro conceito importante para o entendimento de uma função é o de produto cartesiano.

Assimile

Dados dois conjuntos A e B, o **produto cartesiano** de A por B é o conjunto dos pares ordenados (a,b) tais que $a \in A$ e $b \in B$.

$$\underbrace{A \times B}_{\downarrow} = \{(a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Produto cartesiano de A por B.

Veja um exemplo numérico de produto cartesiano:

Exemplificando

Considerando os conjuntos A= {0,2,3} e B = {-2,0,3,7}, escreva o produto cartesiano de A por B.

Resolução:

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$

Para a = 0, temos: (0, -2); (0,0); (0,3); (0,7);

Para a = 2, temos: (2, -2); (2,0); (2,3); (2,7);

Para a = 3, temos: (3, -2); (3, 0); (3,3) (3,7).

Logo, $A \times B = \{(0,-2),(0,0),(0,3),(0,7),(2,-2),(2,0),(2,3),(2,7),(3,-2),(3,0),(3,3),(3,7)\}$.

Relação

Outro conceito muito importante para o entendimento de uma função é o de relação.

Assimile

Dados dois conjuntos A e B, uma relação R de A em B é qualquer subconjunto de A × B, ou seja, $R \subset (A \times B)$.

Exemplificando

Considere os conjuntos A= {0,2,3} e B= {-2, 0, 3, 7} e escreva os elementos da relação R descrita pela equação $y=x^2-2x$, em que $x \in A$ e $y \in B$.

Resolução:

Para facilitar os cálculos dos elementos de R, vamos utilizar um quadro, como a seguir:

Elementos de A	Elementos de B	Elementos de R
x	$y=x^2-2x$	(x,y)
0	$y=x^2-2x=0^2-2{\cdot}0=0$	(0,0)
2	$y=x^2-2x=2^2-2{\cdot}2=0$	(2,0)
3	$y=x^2-2x=3^2-2{\cdot}3=3$	(3,3)

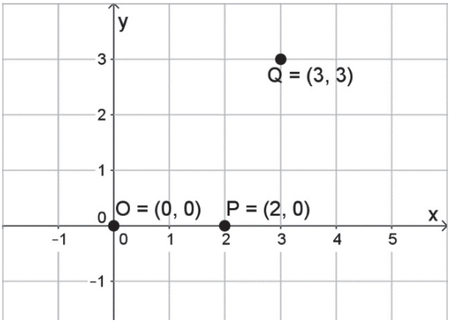
Portanto, R = {(0,0), (2,0), (3,3)}. Compare os elementos de R com os de A × B e veja que $R \subset (A \times B)$.

Na relação R= {(0,0) (2,0), (3,3)} dizemos que o valor: $0 \in A$ está associado ao valor $0 \in B$; $2 \in A$ está associado ao valor $2 \in B$; $3 \in A$ está associado ao valor $3 \in B$.

Plano cartesiano

Uma relação R pode ser visualizada graficamente em um diagrama denominado **plano cartesiano**. Veja, por exemplo, a representação gráfica da relação R = {(0,0) (2,0), (3,3)} no plano cartesiano da Figura 1.3.

Figura 1.3 | Representação gráfica



Fonte: Os autores

Observe que a representação de R corresponde a três pontos no plano. Em relação ao ponto p = (2,0), o par ordenado (2,0) corresponde a suas **coordenadas**. O primeiro valor, 2, é denominado **abscissa** de P e o segundo, 0, a **ordenada**. O valor x = 2 corresponde à distância a que o ponto P se encontra do eixo vertical, eixo y (ou **eixo das ordenadas**), e o valor y = 0 à distância a que o ponto se encontra do eixo horizontal, eixo x (ou **eixo das abscissas**). O ponto de coordenadas (0,0) é denominado origem.

Em um plano cartesiano, as:

- abscissas são: positivas se estiverem à direita da origem; negativas se estiverem à esquerda da origem;

- ordenadas são: positivas se estiverem acima da origem; negativas se estiverem abaixo da origem.

Pesquise mais

Veja mais detalhes sobre a construção de um plano cartesiano e a localização de pontos a partir de suas coordenadas no link disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/algebra/introduction-to-algebra/overview_hist_alg/v/descartes-and-cartesian-coordinates>. Acesso em: 22 out. 2015.

Função

A partir dos conceitos aprendidos até agora, podemos definir função.

Assimile

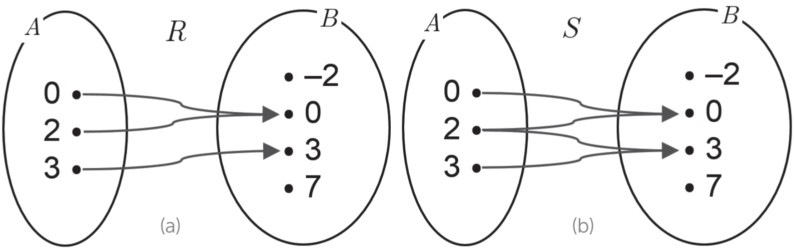
Dados dois conjuntos *A* e *B*, uma **função** *f* de *A* em *B*, denotada $f: A \to B$, é uma relação $f \subset (A \times B)$ tal que para cada $a \in A$ está associado um único $b \in B$.

O conjunto A é o domínio de f (denotado por D(f)) e o conjunto B é o contradomínio de f (denotado por CD(f)). Convenciona-se utilizar o símbolo x para representar um elemento qualquer de A e y para representar um elemento qualquer de B. Além disso, se x está relacionado a y por meio da função f, escrevemos y=f(x) para simbolizar essa associação, e o par ordenado correspondente será (x,y) ou (x,f(x)).

Im(f) = {y∈B|y=f(x) e x∈A} é denominado conjunto imagem de f. Além disso, se y=f(x), então y é a imagem de x obtida por meio de f.

Para compreender melhor, considere as relações R = {(0,0) (2,0), (3,3)} e S = {(0,0), (2,0), (3,3), (2,3)} de A= {0,2,3} em B={-2,0,3,7}. Temos que R é uma função e S não é uma função, pois o valor 2∈A está associado por meio de S a dois elementos de B, a saber, 0 e 3. Essa constatação pode ser feita mais facilmente por meio de um diagrama de Venn, como os apresentados na Figura 1.4.

Figura 1.4 | Diagrama de Venn: (a) da relação R; (b) da relação S



Fonte: Os autores

Observe que no caso da relação S há duas setas partindo do número 2∈A, uma relacionando-o a 0 e outra relacionando-o a 3, e isso não se encaixa na definição de função.

Exemplificando

Considerando os conjuntos A={-2, -1, 0, 1, 3} e B= {0,1,2,4,3,9} e e a função f: A→B, de modo que $y = f(x) = x^2$, identifique o domínio, contradomínio e a imagem de f.

Resolução:

Como visto anteriormente, A é o domínio de f e B é o contradomínio, logo:

D(f) = A = { -2, -1,0,1,3}; CD(f) =B = {0,1,2,4,3,9};

Para escrevermos o conjunto imagem precisamos determinar os elementos (x,y) pertencentes à relação (vide quadro ao lado). Logo, Im(f) = {0,1,4,9}.

x	$y = x^2$	(x,y)
–2	$y = (-2)^2 = 4$	(-2,4)
–1	$y = (-1)^2 = 1$	(-1,1)
0	$y = 0^2 = 0$	(0,0)
1	$y = 1^2 = 1$	(1,1)
3	$y = 3^2 = 9$	(3,9)

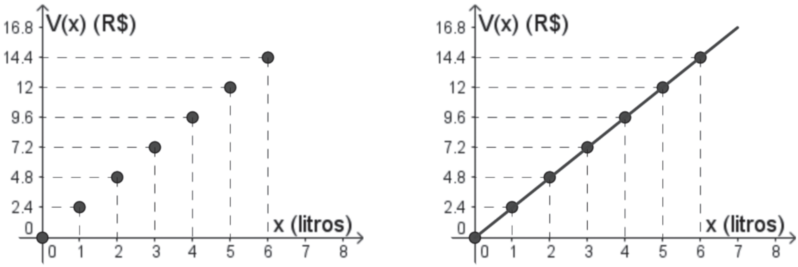
Faça você mesmo

Represente graficamente e elabore um diagrama de Venn para a relação $f{:}A \to B$ com A={-2,- 1,0,1,3} , B = {0,1,2,4,3,9} e $y = f(x) = x^2$.

Lei de formação e gráfico de uma função

No exemplo anterior, $y = f(x) = x^2$ é o que denominamos **lei de formação** (ou regra de associação) da função f: A→B. Em alguns problemas conhecemos a lei de formação da função e em outros não. Quando não a conhecemos, em alguns casos, é possível determiná-la a partir de informações do problema. Veja um exemplo: considere que em determinado posto de combustíveis o preço do etanol seja de R$ 2,40 o litro. Qual é a lei de formação da função que relaciona a quantidade de etanol abastecida (x) e o valor a pagar (v(x))?

Figura 1.5 | Representação gráfica de v = 2,40.x



Fonte: Os autores

A primeira investigação da lei de formação pode ser feita por meio da Tabela 1.1. Observe que, para encontrarmos o valor a ser pago por determinada quantidade de combustível, multiplicamos essa quantidade pelo preço de um litro. Logo, ao adquirirmos x litros de etanol, devemos pagar 2,40.x reais. Portanto, a função v: A→B, em que A é o conjunto das quantidades de etanol e B é o conjunto dos possíveis preços, possui lei de formação v(x) = 2,40.x.

Tabela 1.1 | Preço do etanol

Quantidade de litros	Valor a pagar (R$)
0	0,00
1	2,40
2	4,80
3	7,20
...	...
x	2,40 . x

Os dados apresentados na Tabela 1.1, com o acréscimo de alguns valores, podem ser representados de forma gráfica, como na Figura 1.5 (a). Observe que todos os pontos estão alinhados e, se utilizássemos inúmeros valores intermediários para x ou ainda, se considerássemos $x \in \mathbb{R}$, teríamos uma linha reta, como na Figura 1.5 (b). Para fazer essa constatação de forma mais dinâmica, acesse o link disponível em: <http://tube.geogebra.org/m/1886475> acesso em: 23 out. 2015. A linha reta da Figura 1.5 (b) é o que denominamos gráfico da função v. Mais formalmente, o gráfico de uma função f: A→B é o conjunto $G(f) = \{ (x,y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$.

Exemplificando

Uma empresa de táxi cobra pela corrida um valor fixo de R$ 4,85 (bandeirada) mais um valor variável de R$ 2,90 por quilômetro rodado. Construa a lei de formação da função que retorna o preço $f(x)$ para uma distância x percorrida. Além disso, escreva o domínio, a imagem e esboce o gráfico de f. Calcule também o valor a ser pago por uma corrida de 6 km.

Resolução:

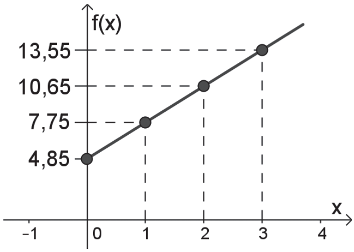
A corrida é composta por um valor fixo de R$ 4,85 e um valor variável de R$ 2,90 por quilômetro rodado; matematicamente, essas informações podem ser traduzidas da seguinte forma: $f(x) = 4,85 + 2,90 \cdot x$, em que x é a distância percorrida e $f(x)$ é o preço. Essa é a lei de formação.

A função $f: A \to B$ é tal que A (domínio) é o conjunto com todos os valores possíveis e adequados ao problema, que pode ser qualquer quantidade maior ou igual a zero, ou seja, $x > 0$. Logo, $A = \{ x \in R \mid x \geq 0\}$. A imagem de f é o conjunto $Im(f) \subset B$ que possui todos os possíveis preços a serem pagos, cujo mínimo é R$ 4,85; não há valor máximo. Logo, $Im(f) = \{x \in R \mid x \geq 4,85\}$.

Para esboçar o gráfico de f, montamos uma tabela com alguns valores de (x, f(x)) e esboçamos os pares ordenados em um plano cartesiano (Figura 1.6).

Distância (km)	Preço (R$)
0	$f(0)=4,85+2,90.0=4,85$
1	$f(1)=4,85+2,90.1=7,75$
2	$f(2)=4,85+2,90.2=10,65$
3	$f(3)=4,85+2,90.3=13,55$

Figura 1.6 | Gráfico de f



Fonte: Os autores

Por fim, o valor a ser pago por uma corrida de 6 km é $f(6) = 4,85 + 2,90 \cdot 6 = 22,25 \to$ R$ 22,25

Pesquise mais

Para esclarecer possíveis dúvidas, leia mais sobre relações, funções e seus gráficos em : <http://www.uel.br/projetos/matessencial/medio/funcoes/funcoes.htm>. Acesso em: 23 out. 2015.

Sem medo de errar

Vamos retomar o problema proposto no início desta seção. Um dos questionamentos feitos foi: como agilizar os cálculos das receitas para diversas quantidades de bonés comercializados? Como fazer isso em uma planilha, por exemplo?

Lembre-se de que o preço de venda de cada boné é R$ 30,00.

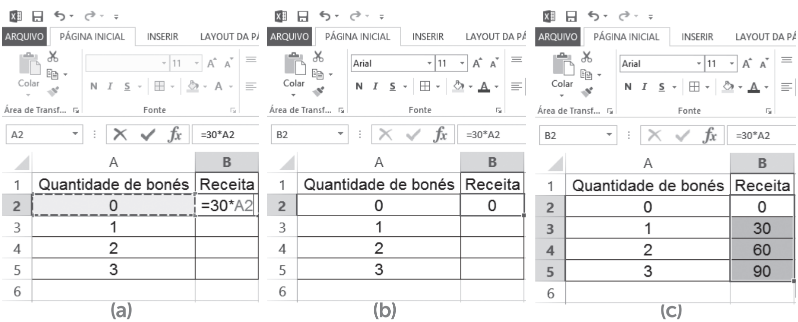
- Se nenhum boné for vendido, não há receita ($\underbrace{0}_{\text{Quantidade de bonés}} \cdot \underbrace{\text{R\$ } 30,00}_{\text{Preço por boné}} = \underbrace{\text{R\$ } 00,00}_{\text{Receita}}$);

- Se 1 boné for vendido, a receita é R$ 30,00 ($\underbrace{1}_{\text{Quantidade de bonés}} \cdot \underbrace{\text{R\$ } 30,00}_{\text{Preço por boné}} = \underbrace{\text{R\$ } 30,00}_{\text{Receita}}$);

- Se 2 bonés forem vendidos, a receita é R$ 60,00 ($\underbrace{2}_{\text{Quantidade de bonés}} \cdot \underbrace{\text{R\$ } 30,00}_{\text{Preço por boné}} = \underbrace{\text{R\$ } 60,00}_{\text{Receita}}$);

- Se x bonés forem vendidos, a receita é x . R$30,00 = R$30,00 . x. Portanto, a função receita é R(x) = 30.x. Esse cálculo pode ser agilizado em uma planilha, como na Figura 1.7.

Figura 1.7 | Planilha de cálculo da receita de bonés vendidos a R$ 30,00 por unidade



Fonte: Os autores

Observe que na Figura 1.7 os valores de x estão inseridos na coluna A; os valores de $y=R(x)$ são calculados na coluna B, sendo cada um calculado pela função R . A sequência (a), (b) e (c) da Figura 1.7 apenas ilustra como agilizar os cálculos.

Outro questionamento feito foi em relação ao lucro, mas, para isso, precisamos determinar a função custo, traduzindo matematicamente a informação: "o custo com a produção é composto por um custo fixo de R$ 9000,00 mais um custo variável de R$ 20,00 por boné". Observe que esse problema é semelhante ao exemplo da corrida de táxi (trabalhado nesta seção). Por analogia, podemos escrever a função custo da seguinte forma: $C(x) = 9000 + 20 . x$, em que x é a quantidade de bonés produzida. Como o lucro/prejuízo é a diferença entre a receita e o custo, podemos analisar o lucro/prejuízo na produção e venda de 750 ou 1200 bonés em um mês:

- 750 bonés: $R(x) = 30 \cdot x \rightarrow R(750) = 30 \cdot 750 = 22500$ (receita); $C(x) = 9000 + 20 \cdot x \rightarrow C(750) = 9000 + 20 \cdot 750 = 24000$ (custo); lucro = receita – custo = 22500 – 24000 = –1500.

- 1200 bonés: $R(x) = 30 . x \rightarrow R(1200) = 30 . 1200 = 36000$ (receita); $C(x) = 9000 + 20 . x \rightarrow C(1200) = 9000+20 . 1200 = 33000$ (custo); lucro = receita – custo = 36000 – 33000 = 3000.

Portanto, ao produzir e vender 750 bonés, o prejuízo é de R$ 1500,00; no caso de 1200 bonés, o lucro é de R$ 3000,00.

Pesquise mais

Veja mais detalhes de como utilizar funções e agilizar cálculos no Excel nos links a seguir:

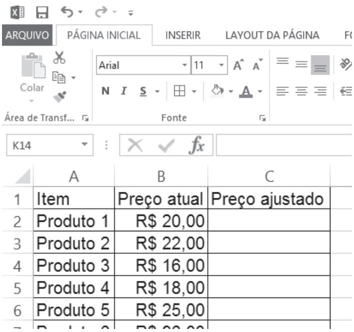
• Visão geral de fórmulas no Excel. Disponível em: <https://support.office.com/pt-br/article/Vis%C3%A3o-geral-de-f%C3%B3rmulas-no-Excel-ecfdc708-9162-49e8-b993-c311f47ca173?ui=pt-BR&rs=pt-BR&ad=BR>. Acesso em: 26 out. 2015.

• Preencher dados automaticamente nas células da planilha. Disponível em: <https://support.office.com/pt-br/article/Preencher-dados-automaticamente-nas-c%C3%A9lulas-da-planilha-74e31bdd-d993-45da-aa82-35a236c5b5db?omkt=pt-BR&ui=pt-BR&rs=pt-BR&ad=BR>. Acesso em: 26 out. 2015.

Avançando na prática

<table>
<tr><th colspan="2">Pratique mais</th></tr>
<tr><td colspan="2">Instrução
Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Atualizando preços</th></tr>
<tr><td>1. Competências de Fundamentos de Área</td><td>Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.</td></tr>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Aplicar o conceito de função na atualização de preços.</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Função; Lei de formação de uma função.</td></tr>
<tr><td>4. Descrição da SP</td><td>Em determinado supermercado será realizada uma remarcação de preços para embutir o aumento da energia elétrica no preço de venda. Após alguns cálculos, foi decidido que cada produto deveria sofrer um aumento de 2% e, para agilizar o trabalho, os novos preços seriam calculados com a ajuda de uma planilha. Veja na Figura 1.8 alguns preços a serem ajustados.

Figura 1.8 | Tabela de preços



<table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr><tr><td>1</td><td>Item</td><td>Preço atual</td><td>Preço ajustado</td></tr><tr><td>2</td><td>Produto 1</td><td>R$ 20,00</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>Produto 2</td><td>R$ 22,00</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>Produto 3</td><td>R$ 16,00</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>Produto 4</td><td>R$ 18,00</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>Produto 5</td><td>R$ 25,00</td><td></td></tr></table>
Fonte: Os autores

Qual função deve ser inserida na célula C2 para que o preço da célula B2 seja reajustado em 2%? Qual o preço ajustado de cada produto?</td></tr>
</table>

5. Resolução da SP

Suponha que o preço atual de um produto seja x e que o preço ajustado seja P(x) . O preço atual corresponde a 100%; já o preço ajustado (+2%) corresponde a 102%. Logo, por regra de três:

$$\frac{x}{P(x)} = \frac{100}{102} \Rightarrow 102 \cdot x = 100 \cdot P(x) \Rightarrow P(x) = \frac{102 \cdot x}{100} = 1{,}02x$$

Ao calcular a função P(x) para determinado preço, ela o reajusta em 2%. Adaptando a função para a planilha, temos que, na célula C2, devemos inserir a função =1,02*B2. Para os preços apresentados na Figura 1.8, temos:

Item	Preço atual	Preço ajustado
Produto 1	R$ 20,00	P(20,00) = 1,02 . 20,00 = 20,40→R$ 20,40
Produto 2	R$ 22,00	P(22,00) = 1,02 . 22,00 = 22,44→R$ 22,44
Produto 3	R$ 16,00	P(16,00) = 1,02 . 16,00 = 16,32→R$ 16,32
Produto 4	R$ 18,00	P(18,00) = 1,02 . 18,00 = 18,36→R$ 18,36
Produto 5	R$ 25,00	P(25,00) = 1,02 . 25,00 = 25,50→R$ 25,50

Lembre-se

Uma regra de três pode ser utilizada quando temos duas grandezas proporcionais, sendo que de uma delas conhecemos dois valores e, da outra, um valor. A regra de três é utilizada para determinar o quarto valor. Veja um breve resumo sobre esse assunto em: <http://educacao.globo.com/matematica/assunto/matematica-basica/regra-de-tres.html>. Acesso em: 27 out. 2015.

Faça valer a pena

1. Os conjuntos numéricos são de grande importância para a matemática, principalmente no estudo das funções. Os tipos mais utilizados são: números naturais (N); número inteiros (Z); números inteiros, exceto o zero (Z*); números racionais (Q); números irracionais (I); números reais (R).

Sobre os conjuntos numéricos e seus elementos, é correto afirmar que:

a) $-1 \in N$.
b) $2 \in I$.
c) $\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$.
d) $0 \in Q$.
e) $0 \in Z^*$.

2. A reunião do conjunto A com o conjunto B é definida como o conjunto $C = \{x|x \in A \text{ ou } x \in B\}$ e a simbolizamos por $C = A \cup B$.
Sendo $A = \{1,2,3,4,6\}$ e $B = \{0,2,4,5,8\}$, assinale a alternativa que contém o conjunto $A \cup B$:
a) {0,1,2,3,4,5,6,8}.
b) {1,2,3,4,6}.
c) {0,2,4,5,8}.
d) {0,1,3,4,5,8}.
e) {2,4}.

3) O produto cartesiano de A por B é o conjunto dos pares ordenados (a,b) tais que $a \in A$ e $b \in B$.
De acordo com o trecho anterior, assinale a alternativa que contém o produto cartesiano de $A = \{1,2,5\}$ por $B = \{3,4,6\}$:
a) {(3,1),(4,1),(6,1),(3,2),(4,2),(6,2),(3,5),(4,5),(6,5)}.
b) {(1,3),(1,4),(1,6)}.
c) {(1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(2,4),(2,6),(5,3),(5,4),(5,6)}.
d) {(2,3),(2,4),(2,6)}.
e) {(5,3),(5,4),(5,6)}.

Seção 1.2

Função afim

Diálogo aberto

Você se lembra de que na seção anterior estudou o lucro e a receita da sua fábrica de bonés? E que para fazer isso foi necessário relembrar alguns conjuntos numéricos, compreender a ideia de produto cartesiano, estudar as relações (que são subconjuntos dos produtos cartesianos) e as funções (que são casos específicos de relações), além de representar esses conjuntos graficamente no plano cartesiano e no diagrama de Venn?

Pois bem, tudo isso abriu caminho para outras possibilidades. Imagine que você precise construir uma apresentação contendo um estudo sobre as finanças da empresa, que será usada para convencer seu sócio a aumentar o investimento na fábrica e expandir o negócio. Um gráfico mostrando os possíveis lucros com o aumento da produção poderia ser interessante e deixá-lo empolgado. Além disso, você poderia incrementar a apresentação com informações detalhadas sobre os lucros (ou prejuízos) e mostrar a ele que você entende do assunto. Quanto mais informação, maior o poder de convencimento, concorda?

Pense um pouco: Será possível determinar uma função que relacione a quantidade produzida e comercializada com o lucro? Será que independentemente da quantidade produzida e comercializada há lucro ou para determinadas quantidades há prejuízo? A partir de que quantidade há lucro? Se aumentarmos a produção em 200 bonés ao mês nos próximos três meses, indo dos atuais 600 para 1200, quanto lucro teremos no trimestre? Essas são algumas das perguntas cujas respostas poderiam estar em sua apresentação. Entretanto, para realizar tudo isso, temos que estudar mais a fundo as funções e, mais especificamente, a função afim e suas propriedades. Vamos lá?

Não pode faltar

A função afim é um tipo específico de função polinomial e, por este motivo, é também denominada função do 1° grau ou, ainda, função polinomial de grau 1. Mais rigorosamente definimos:

Assimile

Uma função afim é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = ax + b$, em que $a \in \mathbb{R}$, não nulo, é denominado coeficiente angular e $b \in \mathbb{R}$ é denominado coeficiente linear.

O domínio e contradomínio de uma função afim podem ser intervalos de números reais.

Pesquise mais

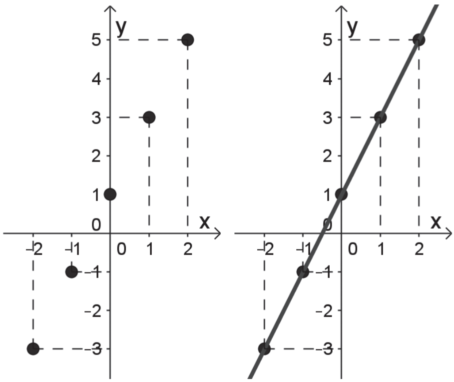
Saiba mais sobre intervalos de números reais acessando o site disponível em: <http://www.casadasciencias.org/dmdocuments/intervalo10-11.pdf>. Acesso em: 2 nov. 2015.

Uma característica interessante da função afim é a forma do seu gráfico, que é uma reta (IEZZI et al., 1977, p. 96-A). Veja um exemplo.

Exemplificando

Dada a função afim $f(x) = 2x + 1$, escreva os pares ordenados (x,y) tais que $x \in A = \{-2,-1,0,1,2\} \subset D(f)$ e $y = f(x)$. Em seguida, esboce o gráfico de f.

Figura 1.9 | Gráfico de $f(x) = 2x + 1$



Fonte: Os autores

Resolução: Para escrever os pares ordenados solicitados podemos fazer uso do quadro a seguir:

x	y=f(x) = 2x + 1	(x,y)
-2	y = f(-2) = 2 (-2) + 1 = -3	(-2, -3)
-1	y = f(-1) = 2(-1) + 1 = -1	(-1, 1)
0	y = f(0) = 2 .0 + 1 = 1	(0,1)
1	y = f(1) = 2 .1 + 1 = 3	(1,3)
2	y = f(2) = 2 . 2 + 1 = 5	(2,5)

Para esboçar o gráfico da função, primeiramente marcamos os pontos determinados no quadro e depois traçamos uma reta passando por eles, como mostra a Figura 1.9.

Para uma visualização mais dinâmica da construção do gráfico dessa função, acesse: <http://tube.geogebra.org/m/1980917>. Acesso em: 4 nov. 2015.

Da geometria, sabe-se que para determinar uma reta bastam dois pontos. Logo, para esboçar o gráfico do exemplo anterior (e o de qualquer função afim) basta determinarmos dois pares ordenados, e não mais que isso.

Faça você mesmo

1) Esboce o gráfico da função f(x) = 3x -2 .

Assim como podemos esboçar o gráfico de uma função afim a partir de sua lei de formação, também é possível determinar sua lei de formação a partir de seu gráfico. Para executar essa tarefa é necessário determinar a e b, de modo que a função f(x) = ax + b possua o gráfico desejado. Veja um exemplo:

Exemplificando

Com base no gráfico da função afim f representado na Figura 1.10, determine sua lei de formação.

Resolução:

O primeiro detalhe importante a ser observado é que a função é afim, ou seja, seu gráfico é uma reta e sua lei de formação é f(x) = ax + b. Para determinar os valores de a e b, em que o gráfico dessa função passe pelos pontos destacados na Figura 1.10, podemos escolher dois pontos quaisquer (escolheremos os pontos de coordenadas (1,–1) e (–1,3)). Lembre-se de que o gráfico de uma função é formado pelos pontos (x,y), em que y = f(x) e x ∈ D(f). Para o ponto de coordenadas:

- (1,–1), temos: f(x) = ax + b→ f(1) = a.1+ b→- 1= a+ b;

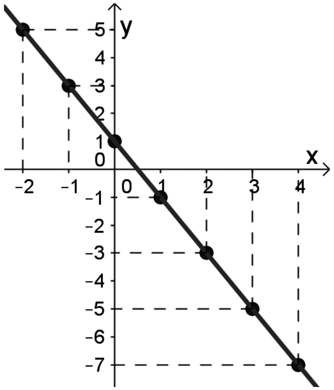
- (–1,3), temos: f(x) = ax + b→ f(- 1) = a.(- 1) + b→ 3=- a+ b.

Observe que temos duas equações lineares, com duas incógnitas, ou seja, um sistema linear. Neste caso, podemos simplificar o sistema somando as duas equações, como segue:

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ -a+b=3 \end{cases}$$

$$a+(-a)+b+b=-1+3 \Rightarrow 0+2b=2 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1$$

Figura 1.10 | Gráfico de f



Fonte: Os autores

Como b = 1 temos: a + b = -1 → a + 1 = -1→ a = -1-1 = -2. Portanto, a função procurada é f(x) = -2x + 1.

Faça você mesmo

2) Determine a lei de formação da função afim cujo gráfico passa pelos pontos (–2,8) e (2,–4).

Função afim crescente e função afim decrescente

Uma característica interessante de ser observada em uma função afim é se ela é crescente ou decrescente. Como essa característica é estudada para qualquer função, podemos compreendê-la de modo geral e, depois, ver como ela se aplica à função afim. De acordo com Thomas, Weir e Hass (2012, p. 6):

Assimile

Seja f uma função definida em um intervalo I e sejam x_1 e x_2 dois pontos em I.

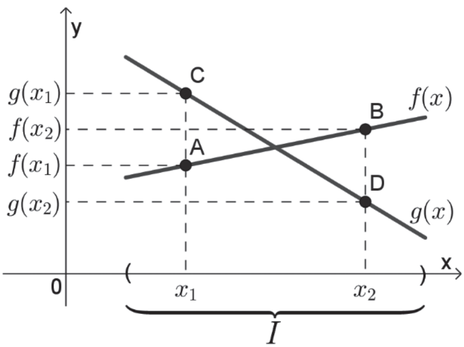
1) Se $f(x_2) > f(x_1)$ sempre que $x_1<x_2$, então f é **crescente** em I.

2) Se $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_1<x_2$, então f é **decrescente** em I.

Essa definição pode ser facilmente visualizada na Figura 1.11. No caso, f(x) é crescente e g(x) é decrescente em I. Decorre da definição anterior que, dado $x_1<x_2$, a função:

- f(x) é crescente, pois $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$
- g(x) é decrescente, pois $\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}<0$.

Figura 1.11 | Função crescente e função decrescente



Fonte: Os autores

Simplificadamente, f(x) é crescente porque seus valores aumentam com o aumento dos valores de x; e g(x) é decrescente porque seus valores diminuem conforme os valores de x aumentam. Observe as inclinações das funções f(x) e g(x).

Podemos denotar $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ (ou $\Delta y = g(x_2) - g(x_1)$, variação de y) e $\Delta x = (x_2) - (x_1)$ (variação de x) e utilizar a razão $\Delta y / \Delta x$ para avaliar se a função é crescente ou decrescente.

Uma grande vantagem de utilizar a razão $\Delta y / \Delta x$ é que ela está diretamente relacionada à lei de formação da função afim, sendo inclusive muito utilizada para determinar a lei de formação a partir do gráfico. Mais precisamente, dada uma função afim $f(x) = ax + b$, em relação aos seus coeficientes, temos:

Assimile

$a = \Delta y / \Delta x$;

se $a > 0$ a função é crescente e se $a < 0$ a função é decrescente;

$f(0) = a \cdot 0 + b = b$.

Você pode encontrar a demonstração da igualdade a = 3y/3x disponível em: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2010.1/gma00116/aulas/gma00116-aula-12-4-up-color.pdf>. Acesso em: 6 nov. 2015.

Exemplificando

Sabendo que os pontos de coordenadas (1,3) e (2,5) pertencem ao gráfico de uma função afim, qual é a lei de formação dessa função?

Resolução:

Primeiramente calculamos as diferenças Δy e Δx e o coeficiente $a = \Delta y / \Delta x$:

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = 5 - 3 = 2$;

$\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$;

$a = \Delta y / \Delta x = 2/1 = 2$.

Substituindo, f(x) = 2x + b e, além disso, f (1) = 3 → 2 . 1 + b= 3 → 2 + b= 3 → b= 1. Portanto, a lei de formação da função é f (x) = 2x + 1

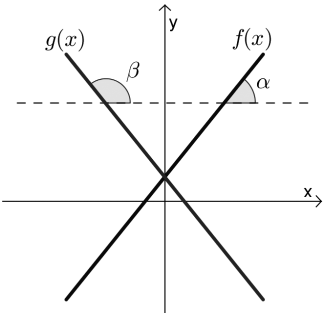
Faça você mesmo

3) Volte ao exemplo da Figura 1.10 e determine a lei de formação da função f utilizando as igualdades $a = \Delta y / \Delta x$ e $b = f(0)$.

Ângulo associado a uma função afim

A toda função afim podemos associar um ângulo θ que está diretamente relacionado ao seu gráfico. Esse ângulo pode ser medido a partir da horizontal, no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 1.12.

Figura 1.12 | Ângulo relacionado a uma função afim



Fonte: Os autores

Dica

Para visualizar a localização desse ângulo de forma mais dinâmica, acesse: <http://tube.geogebra.org/m/1995699>. Acesso em: 06 nov. 2015.

Quando o gráfico é de uma função afim, há apenas duas possibilidades para o ângulo θ formado com a horizontal: $0^\circ < \theta < 90^\circ$ (a exemplo do ângulo α da Figura 1.12); ou $90^\circ < \theta < 180^\circ$ (a exemplo do ângulo β da Figura 1.12). Se $\theta = 0^\circ$, ou seja, se o gráfico for horizontal, a função é denominada constante e sua lei de formação é f(x) = b, em que b pertence a R (R conjunto dos números reais). Se $\theta = 90^\circ$, ou seja, se o gráfico for vertical, não se trata de uma função, mas de uma relação.

Zero e sinal da função afim

Observe na Figura 1.13 que o gráfico de f(x) = ax + b cruza o eixo horizontal (eixo x) no ponto P. É perceptível que a ordenada de P é igual a 0, ou seja, y = 0. Mas e a abscissa de P, qual é seu valor? A abscissa de P é o que denominamos **zero da função.**

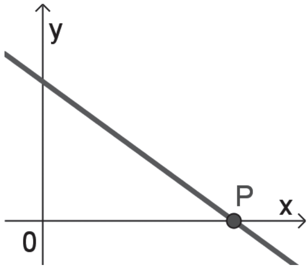
Assimile

O zero de uma função f(x) é o valor x_0 tal que $f(x^0) = 0$.

Atenção

Alguns livros utilizam a denominação raiz no lugar de zero. Contudo, o mais comum é dizer que funções possuem zeros e equações possuem raízes.

Figura 1.13 | Ponto de interseção com o eixo x



Fonte: Os autores

Para uma função afim, se x_0 é o seu zero, temos:

$$f(x_0) = ax_0 + b = 0 \Rightarrow ax_0 = -b \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{a}$$

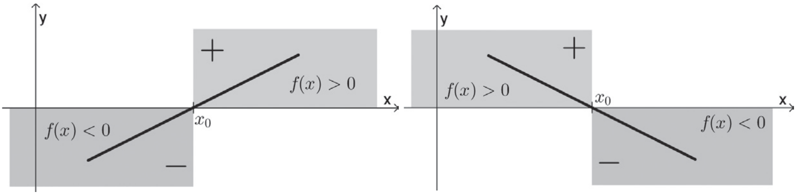
Na linguagem matemática, para f(x) crescente, temos:

(a) $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ quando $x_0 < x$ ou, ainda, $f(x) - f(x_0) > 0 \rightarrow f(x) > f(x_0) = 0$;

(b) $\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} > 0$ quando $x < x_0$ ou, ainda, $f(x_0) - f(x) > 0 \rightarrow f(x) < f(x_0) = 0$. Simplificadamente, se f(x) é crescente e $f(x_0) = 0$, $f(x) > 0$ para $x > x_0$ e $f(x) < 0$ para $x < x_0$. A mesma análise pode ser feita para o caso de f(x) decrescente e ambos os casos estão ilustrados na Figura 1.14.

De modo mais simples, para a região do plano cartesiano em que o gráfico de f(x) está acima do eixo das abscissas, isto é, f(x) tem valores maiores que zero, diz-se que o sinal da função é positivo. E para regiões em que $f(x) < 0$, diz-se que a função tem sinal negativo.

Figura 1.14 | Sinal da função afim: (a) f(x) crescente; (b) f(x) decrescente



Fonte: Os autores

Exemplificando

Dada a função f(x) = 5x – 10, determine:

a) o zero;

b) os valores de x para os quais f(x) > 0;

c) os valores de x para os quais f(x) < 0.

Resolução:

Lembre-se de que o zero da função é um valor x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Além disso, se a função é crescente, f(x) > 0 para $x > x^0$ e f(x) < 0 para $x < x_0$. Aplicando estes conceitos, temos:

a) $f(x_0) = 0 \rightarrow 5x_0 - 10 = 0 \rightarrow 5x_0 = 10 \rightarrow x_0 = 10/5 = 2$. Logo, 2 é o zero de f(x).

b) Como a função é crescente (pois a = 5 > 0), f(x) > 0 para todos os valores $x > x_0 = 2$.

c) f(x) < 0 para todos os valores $x < x_0 = 2$.

Dica

Esboce o gráfico da função e verifique as respostas graficamente.

Pesquise mais

Veja mais sobre funções e, em especial, funções afim em:<http://cejarj.cecierj.edu.br/material_impresso/matematica/ceja_matematica_unidade_6.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2015. E acesse também este link: <http://cejarj.cecierj.edu.br/material_impresso/matematica/ceja_matematica_unidade_9.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2015.

Sem medo de errar

Vamos retomar o problema proposto no início desta seção: imagine-se como o dono da fábrica de bonés e suponha que você deva convencer seu sócio a expandir o negócio. Para isso, você deve fazer uma apresentação contendo:

a) Um gráfico com os lucros/prejuízos para cada quantidade produzida;

b) Determinar intervalos de produção para os quais há lucro ou prejuízo;

c) O lucro do trimestre com o aumento da produção dos atuais 600 bonés para 1200 bonés ao mês, com acréscimo de produção de 200 bonés mensais.

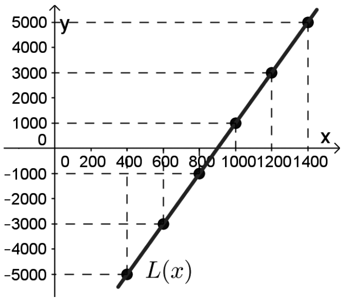
Primeiramente, para esboçar um gráfico com o lucro/prejuízo, é necessário construir a função lucro L(x) = R(x) – C(x), ou seja, a diferença entre a receita e o custo de produção.

Lembre-se

Na seção anterior (Seção 1.1) você estudou que a função receita era R(x) = 30 . x e a função custo C(x) = 9000 + 20 . x, em que x é a quantidade de bonés.

Logo, dado R(x) = 30 . x e C(x) = 9000 + 20.x, a função lucro é L(x) = 30 . x - (9000 + 20 . x) = 10x - 9000. Podemos construir uma tabela com alguns valores de x e os respectivos lucros/prejuízos para esboçar o gráfico, como na Figura 1.15. Com isso resolvemos o item (a).

Figura 1.15 | Gráfico de L(x) = 10x - 9000



x	L(x)
400	–5000
600	–3000
800	–1000
1000	1000
1200	3000
1400	5000

Fonte: Os autores

Foi traçada uma linha junto ao gráfico de L(x) para melhorar a visualização. Entretanto, o correto, nesse caso, seriam somente pontos isolados, pois só faz sentido para essa função a atribuição de valores inteiros para x, pois se trata da quantidade de bonés produzida.

Observe que o gráfico de L(x) cruza o eixo x no ponto de coordenadas $(x_0,0)$, em que x_0 é o zero da função. Para este problema o zero da função indica a quantidade produzida para a qual não há lucro nem prejuízo. Para quantidades maiores que x_0 há lucro e para quantidades menores, prejuízo. Para determinar x_0 resolvemos a equação $L(x_0) = 0$, como segue: $L(x_0) = 0 \rightarrow 10x_0 - 9000 = 0 \rightarrow 10x_0 = 9000 \rightarrow x_0 = 9000/10 = 900$. Portanto, ao produzir 900 bonés o lucro é zero, ao produzir menos de 900 há prejuízo e, ao produzir mais, há lucro, ficando resolvido o item (b).

Para chegar a 1200 bonés ao mês, a produção deve aumentar 200 bonés por mês nos próximos três meses, sendo produzidos um total de: 800 bonés no primeiro mês; 1000 bonés no segundo mês; 1200 bonés no terceiro mês. Logo, o lucro no trimestre será dado pela expressão L(800) + L(1000) + L(1200). Temos:

$$L(800) + L(1000) + L(1200) = 10 \,.\, 800 - 9000 + 10 \,.\, 1000 - 9000 + 10 \,.\, 1200 - 9000 = -1000 + 1000 + 3000 = 3000$$

Portanto, respondendo o item (c), haverá um lucro de R$ 3000,00 no trimestre.

Dica

Pense no fato de um dia você estar em uma empresa e ter de convencer alguém a concordar com suas ideias. Uma demonstração com embasamento matemático, como a apresentada, não seria muito mais convincente? Pense em como mostrar suas ideias na forma de uma apresentação com dados, tabelas e gráficos!

Avançando na prática

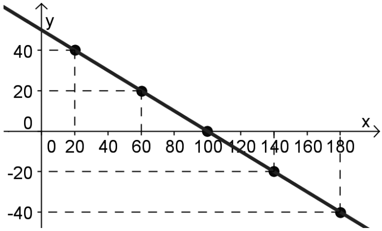
Pratique mais

Instrução
Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Melhor Negócio	
1. Competências de fundamentos de Área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Determinar uma função cuja análise de sinal resolva o problema proposto.
3. Conteúdos relacionados	Sinal da função afim.
4. Descrição da SP	Uma empresa de aluguel de veículos possui duas opções de locação: 1ª) R$ 90,00 a diária livre de quilometragem. 2ª) R$ 40,00 a diária mais R$ 0,50 por quilômetro rodado. Um cliente vai até essa empresa para saber as seguintes informações: a) Para quais distâncias é mais vantajosa a 1ª opção? E a 2ª opção? b) Para qual distância percorrida no dia ambas as opções geram o mesmo custo? Imagine que você seja o funcionário dessa empresa. Como orientar o cliente?
5. Resolução da SP	Perceba que há uma semelhança entre esse problema e o da fábrica de bonés. A primeira pergunta que você deve se fazer é: quais funções relacionam a distância percorrida e o preço a pagar para ambas as opções de locação? Vamos denotar por f e g as funções para a 1ª e 2ª opções, respectivamente, e por x a distância percorrida. Temos: $f(x) = 90,00$ (função constante, pois independe da quilometragem); $g(x) = 40,00 + 0,50x$ (custo fixo de R$ 40,00 mais custo variável de R$ 0,50). Agora considere a função diferença $d(x) = f(x) - g(x) = 90,00 - (40,00 + 0,50x) = -0,50x + 50,00$. Se para dado x a diferença for: - **negativa**, é mais vantajosa a 1ª opção, pois $d(x) < 0 \rightarrow f(x) - g(x) < 0 \rightarrow f(x) < g(x)$; - **positiva**, é mais vantajosa a 2ª opção, pois $d(x) > 0 \rightarrow f(x) - g(x) > 0 \rightarrow f(x) > g(x)$; - **nula**, ou seja, igual a zero, ambas as opções geram o mesmo custo, pois $d(x) = 0 \rightarrow f(x) - g(x) = 0 \rightarrow f(x) = g(x)$. Sendo x_0 o zero de d(x), temos: $d(x_0) = 0 \rightarrow -0,50x_0 + 50,00 = 0 \rightarrow 0,50x_0 = 50,00 \rightarrow x_0 = \frac{50,00}{0,50} = 100$ Portanto, para 100 quilômetros percorridos no dia, o custo é o mesmo em ambas as opções (ficando respondido o item (b)).

Como o coeficiente angular de d(x) é a = -0,50 < 0, a função é decrescente e, como consequência, positiva à esquerda de x_0 = 100 e negativa à direita desse mesmo valor. Podemos concluir a partir disso que para distâncias menores que 100 quilômetros ($x<x_0$ = 100) é mais vantajosa a 2ª opção, e para distâncias maiores ($x>x_0$ = 100) é mais vantajosa a 1ª opção (ficando respondido o item (a)). Essa conclusão pode ser observada na Figura 1.16.

Figura 1.16 | Gráfico de d(x) = -0,50x + 50,00



Fonte: Os autores

Faça valer a pena

1. Estimou-se que em 22 dias foram desperdiçados 57,2 litros de água por uma torneira pingando. A partir dessa estimativa pode ser desejado saber o quanto é desperdiçado em 4 dias, em 37 dias ou em x dias. Pensando nisso, assinale a alternativa que relaciona a quantidade de dias (x) e o volume de água (V(x)) desperdiçado por essa torneira:

a) V(x) = 4x.
b) V(x) = 22x.
c) V(x) = 2,6x.
d) V(x) = 3,4x.
e) V(x) = 37x.

2. Lembre-se de que função afim é aquela cuja lei de formação é f(x) = ax + b, em que a e b são os coeficientes. Sendo o coeficiente linear igual a 2, o coeficiente angular igual a -1 e dado x = 4, assinale a alternativa que contém as coordenadas de um ponto pertencente ao gráfico de f:

a) (4,3).
b) (4,–3).
c) (4,1).
d) (4,–2).
e) (4,0).

3. O preço de uma corrida de táxi é composto pelo valor da bandeirada (R$ 5,00) mais um valor variável que depende da distância percorrida (R$ 3,00/km). Considerando essas informações e que por determinada corrida foram pagos R$ 29,00, qual foi a distância percorrida?

a) 5 km.
b) 8 km.
c) 9 km.
d) 10 km.
e) 12 km.

Seção 1.3

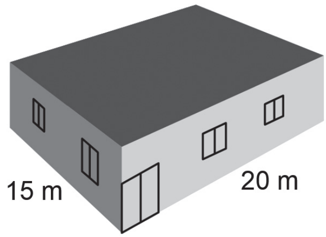
Função quadrática

Diálogo aberto

Lembra-se que na aula anterior você precisava convencer seu sócio a aumentar o investimento na fábrica de bonés e ampliar os negócios? Pois é, o resultado foi melhor que o esperado. Vocês saíram do prejuízo de quando produziam 600 bonés ao mês e começaram a ganhar dinheiro ao produzir 1200. Seu sócio ficou tão feliz que vocês aumentaram ainda mais a produção, chegando a 2400 bonés por mês.

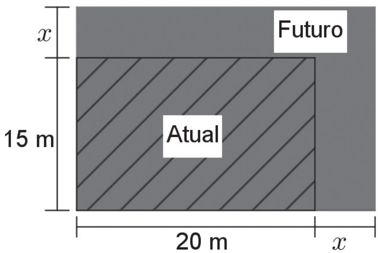
Com uma boa margem de lucro, agora é seu sócio quem quer convencê-lo a ampliar o negócio ainda mais aumentando o espaço físico, indo dos atuais 300 m^2 (como mostra a Figura 1.17) para 750 m^2 futuramente. Devido aos equipamentos que estão instalados e o terreno onde o galpão se encontra, o plano é aumentar tanto o comprimento quanto a largura em um valor x ainda desconhecido, conforme Figura 1.18. Como seu sócio não entende tanto do assunto, pediu para que você determinasse a medida x que deve ser acrescida e o custo desse investimento, uma vez que se estima o valor de R$ 725,85 por metro quadrado a ser construído.

Figura 1.17 | Galpão



Fonte: O autor

Figura 1.18 | Esboço do projeto



Fonte: O autor

Aqui vão algumas dicas: para resolver este problema você precisa estudar um novo tipo de função, a quadrática. Além disso, para facilitar todo o processo, você pode se focar em responder as seguintes perguntas:

a) Que função relaciona a medida x e a área total do galpão, incluindo a atual? E qual função relaciona x com o valor do investimento? Quais os gráficos dessas funções?

b) Qual medida x proporcionará uma área total de 750 m^2?

Bons estudos e sucesso neste planejamento!

Não pode faltar!

As funções quadráticas são uma classe de funções muito utilizadas em problemas de cálculo de área, em cálculos de erro, no estudo do movimento de projéteis, entre outros. Assim como a função afim, essa também é uma função polinomial, mas de grau 2, motivo pelo qual é conhecida popularmente como de 2° grau. Segundo Iezzi et al. (1977, p. 123):

Assimile

Uma aplicação (ou relação) f de R em R recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento ($ax^2 + bx + c$) d R, em que a ≠ 0.

Alternativamente, podemos dizer que uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é aquela cuja lei de formação é $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a ≠ 0. Os valores a, b e c são denominados coeficientes e ax^2 é o **termo dominante**.

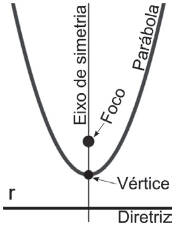
Reflita

Por que para definir a função quadrática é especificado que a ≠ 0?

Uma característica importante das funções quadráticas é seu gráfico, que apresenta uma curva plana denominada parábola (SODRÉ, 2010, p. 1). Para definir uma parábola são necessários dois objetos, uma reta diretriz e um ponto que chamamos de foco, conforme Figura 1.19. Não abordaremos aspectos formais da construção de uma parábola, mas você pode se aprofundar neste assunto acessando: <http://mathworld.wolfram.com/Parabola.html>. Acesso em: 14 nov. 2015.

Para compreender melhor o gráfico de uma função quadrática, veja o exemplo a seguir.

Figura 1.19 | Parábola



Fonte: Os autores

Exemplificando

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 5$. *Resolução*:

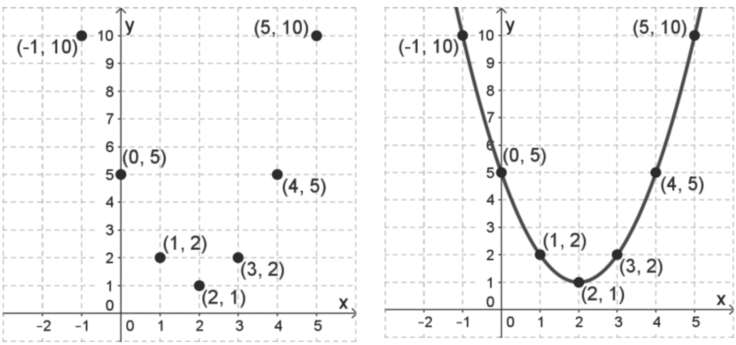
Primeiramente construímos um quadro com alguns valores de x, os respectivos y = f(x) e as coordenadas (x,y). Observe:

x	$y = f(x) = x^2 - 4x + 5$	(x,y)
-1	$(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 5 = 10$	(-1, 10)
0	$0^2 - 4.0 + 5 = 5$	(0,5)
1	$1^2 - 4.1 + 5 = 2$	(1,2)
2	$2^2 - 4.2 + 5 = 1$	(2,1)

x	$y = f(x) = x^2 - 4x + 5$	(x,y)
3	$3^2 - 4.3 + 5 = 2$	(3,2)
4	$4^2 - 4.4 + 5 = 5$	(4,5)
5	$5^2 - 4.5 + 5 = 10$	(5,10)

Com base nas coordenadas calculadas, marcamos os pontos e traçamos a parábola, conforme Figura 1.20.

Figura 1.20 | Gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 5$

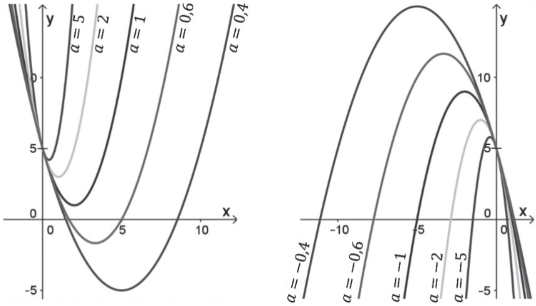


Fonte: Os autores

Observando a Figura 1.20, há alguns elementos importantes: o ponto de coordenadas (2,1) é o **vértice** e a linha vertical x = 2 é o **eixo de simetria** da parábola.

No caso do exemplo anterior, dizemos que a parábola tem concavidade para cima, e isso é controlado pelo coeficiente do termo dominante, ou seja, o valor de a. Veja a seguir alguns gráficos de funções quadráticas da forma $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ para $a > 0$ (Figura 1.21 (a)) e para $a < 0$ (Figura 1.21 (b)).

Figura 1.21 | Gráficos de $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ para vários valores de a: (a) a>0 (b) a<0



Fonte: Os autores

Perceba na Figura 1.21 que, quanto mais próximo de zero está o valor de a, mais "aberta" é a parábola e, quanto mais distante, mais "fechada". Além disso:

Assimile

Se o valor de a é:

- **Positivo**, a > 0, a concavidade da parábola é voltada para cima;
- **Negativo**, a < 0, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Observe ainda na Figura 1.21 que, em todos os casos, o ponto de coordenadas (0,5) pertence ao gráfico de $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ e que isso se deve ao fato de o coeficiente c ser igual a 5. Veja: se x = 0, temos $f(0) = a.0^2 - 4.0 + 5 = 5$, não importando o valor de a ou b.

Assimile

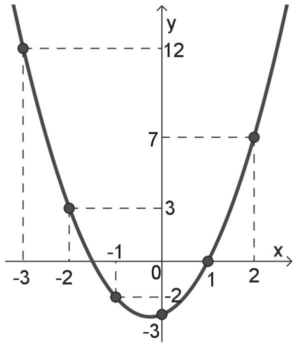
O coeficiente c é igual à ordenada do ponto de interseção do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ com o eixo y.

Assim como podemos determinar a lei de formação de uma função afim observando seu gráfico, também é possível fazer o mesmo com uma função quadrática. Veja um exemplo.

Exemplificando

Determine a lei de formação da função quadrática cujo gráfico é apresentado na Figura 1.22.

Figura 1.22 | Gráfico de f(x)



Fonte: Os autores

Resolução:

Observe que o ponto de interseção do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ com o eixo y possui coordenadas (0,–3). Logo, c = -3 e $f(x) = ax^2 + bx - 3$. Além disso, como os pontos de coordenadas (1,0) e (–1,–2) pertencem ao gráfico de f(x), temos:

$f(1)=0 \rightarrow a.1^2 + b.1-3=0 \rightarrow a + b-3=0 \rightarrow a+b=3;$

$f(-1)=-2 \rightarrow a.(-1)^2+b.(-1)-3=-2 \rightarrow a-b-3=-2 \rightarrow a-b-3=-2 \rightarrow a-b=3-2=1.$

Segue que a e b são tais que $\begin{cases} a+b=3 \\ a-b=1 \end{cases}$.

Adicionando as equações, temos: $(a + b) + (a - b) = 3 + 1 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 4/2 = 2$. Com a = 2 obtemos: $a + b = 3 \rightarrow 2 + b = 3 \rightarrow b = 1$.

Por fim, concluímos que $f(x) = 2x^2 + x - 3$.

Para compreender melhor a relação entre os coeficientes da função quadrática e seu gráfico, acesse o objeto disponível no link: <http://tube.geogebra.org/m/2078515>. Acesso em: 16 nov. 2015.

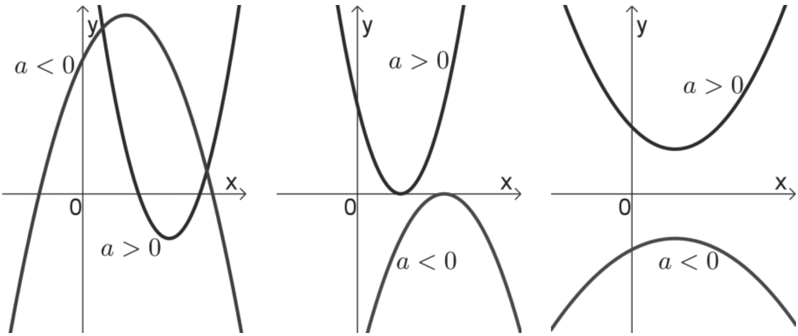
Zeros da função quadrática

Lembre-se

Na seção anterior você aprendeu que denominamos zero da função o valor da abscissa do ponto de interseção do gráfico com o eixo x. No caso, x_0 será um zero de f(x) se $f(x_0) = 0$. Além disso, para uma função afim f(x) = ax + b, o único zero era $x_0 = -b/a$.

Observe agora na Figura 1.22 que o gráfico de $f(x) = 2x^2 + x - 3$ corta o eixo em dois pontos, e não somente em um, como na função afim. Entretanto, nem sempre isso ocorre. O gráfico de uma função quadrática pode tocar o eixo das abscissas em dois, em um ponto ou até não o tocar, como mostra a Figura 1.23.

Figura 1.23 | Zeros de uma função quadrática: (a) dois zeros; (b) um zero; (c) nenhum zero



Fonte: Os autores

Para obter os zeros de uma função quadrática, quando existem, utilizamos a **fórmula do discriminante**, popularmente conhecida como Fórmula de **Bhaskara**:

Assimile

Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, os valores de x para os quais f(x) = 0 são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ou ainda:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

O valor $\Delta = b^2 - 4ac$ é denominado discriminante ou "delta".

Veja um exemplo de como utilizar a fórmula do discriminante:

Exemplificando

Dada as funções a seguir, determine seus zeros, caso existam:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b) $g(x) = 2x^2 + 12x + 18$ c) $h(x) = x^2 - 2x + 3$

Resolução:

a) Para esta função, os coeficientes são a = 1, b = -6 e c = 5. Logo o discriminante será $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 . 1 . 5 = 36 - 20 = 16$. Substituindo o valor $\Delta = 16$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{6+4}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

Portanto, os zeros de f são $x_1 = 5$ e $x_2 = 1$.

b) No caso da função g, os coeficientes são a = 2, b = 12 e c = 18. Assim, o discriminante será $\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 144 - 144 = 0$ e:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3$$

Portanto, g possui um único zero e este é x=-3.

c) Para a função h, os coeficientes são a = 1, b = -2 e c = 3. Com isso, segue que $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 . 1 . 3 = 4 - 12 = -8$ e:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-8}}{2 \cdot 1}$$

Como $\sqrt{-8} \notin \mathbb{R}$, -8∈R, isto é, não é um número real, a expressão anterior não faz sentido para os números reais e, em consequência, a função h não possui zeros reais.

Atenção

No exemplo anterior a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ possui discriminante positivo, $\Delta = 16 > 0$, e dois zeros. Já a função $g(x) = 2x^2 + 12x + 18$ possui discriminante nulo, $\Delta = 0$, e um único zero. Por fim, o discriminante da função $h(x) = x^2 - 2x + 3$ é negativo, $\Delta = -8 < 0$, e esta não possui zeros reais.

Esta observação é válida para toda função quadrática e pode ser compreendida geometricamente com a Figura 1.23. Em: (a) o discriminante é positivo; (b) o discriminante é nulo; (c) o discriminante é negativo.

Faça você mesmo

1) Determine os zeros e esboce o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ b) $g(x) = x^2 + 6x - 12$

Pesquise mais

Para saber mais sobre as funções quadráticas, acesse o material disponível no link: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/465/2011_00355_FABIO_ANTONIO_LEAO_SOUSA.pdf?sequence=1>. Acesso em: 17 nov. 2015.

Além disso, você pode encontrar uma demonstração simples da fórmula do discriminante em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_IV/fundamentos4f.htm>. Acesso em: 17 nov. 2015.

Sem medo de errar

Agora que já tratamos de vários detalhes acerca da função quadrática, vamos retomar o problema proposto no início desta seção?

Uma das perguntas que você deveria responder era: qual função relaciona a medida x e a área total do galpão, incluindo a atual? Para começar, a área de um retângulo é obtida multiplicando as medidas de dois lados consecutivos. No caso da área atual, a medida 300 m^2 é obtida multiplicando 20 m por 15 m. Para calcular a área futura, multiplicamos (20 + x) m por (15 + x) m. Logo, a função que relaciona a medida x, em metros, e a área futura, em metros quadrados, é:

A(x) = (20 + x) (15 + x) = (20 + x) 15 + (20 + x) x = 20 .15 + x .15 + 20 . x + x .x = x^2 + 35x + 300.

Você também deveria obter a função que relaciona a medida x com o valor do investimento. Para construir determinada área, o investimento realizado pode ser calculado multiplicando a área correspondente pelo valor do metro quadrado, que é R$ 725,85. Logo, a função investimento I(x) é obtida multiplicando 725,85 (valor do metro quadrado) pela área que será acrescida. Veja:

$$I(x) = \overbrace{(\underbrace{A(x)}_{\text{Área futura}} - \underbrace{300}_{\text{Área atual}})}^{\text{Área acrescida}} \cdot \overbrace{725,85}^{\text{Valor do metro quadrado}} = (x^2 + 35x + 300 - 300) \cdot 725,85 = 725,85x^2 + 25404,75x$$

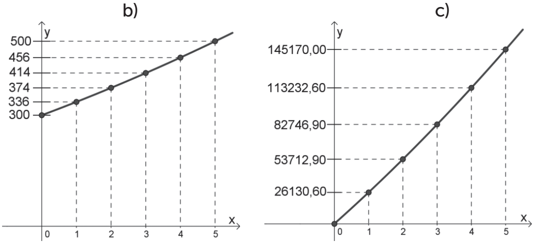
Para esboçar os gráficos de A(x) e I(x), calculamos alguns pares ordenados, os marcamos no plano cartesiano e traçamos a parábola, como na Figura 1.24.

Figura 1.24 | Área acrescida e investimento: (a) quadro de valores; (b) função A(x); (c) função I(x)

a)

x	A(x)	I(x)
0	300	0,00
1	336	26130,60
2	374	53712,90
3	414	82746,90
4	456	113232,60
5	500	145170,00

b) c)



Fonte: Os autores

Por fim, a última informação que você deveria obter é a medida x que proporcionará uma área total de 750 m². Como temos a função área A(x), basta igualar:

$$A(x) = 750 \Rightarrow x^2 + 35x + 300 = 750 \Rightarrow x^2 + 35x + 300 - 750 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 + 35x - 450}_{f(x)} = 0 \cdot$$

Se definirmos f(x) x^2 + 35x -450, determinar x para o qual A(x) = 450 é equivalente a calcular o zero de f. Logo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-450)}}{2 \cdot 1} = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 + 1800}}{2} = -$$

$$\frac{-35 \pm 55}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{-35+55}{2} = 10 \\ x_2 = \frac{-35-55}{2} = -45 \end{cases}$$

Observe que f possui dois zeros e, portanto, há também dois valores de x para os quais A(x) = 450. Contudo, para o problema prático, só faz sentido utilizarmos valores positivos, pois x é uma medida de comprimento.

Concluímos deste modo que, para a área futura do galpão ser de 750 m^2, tanto a largura quanto o comprimento devem ser acrescidos em 10 m.

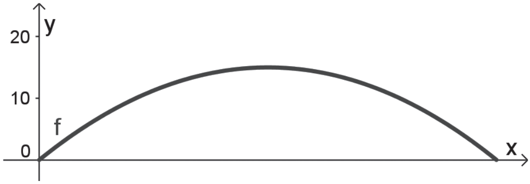
Faça você mesmo

2) Para x = 10 m, qual é o valor do investimento na reforma do galpão?

Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

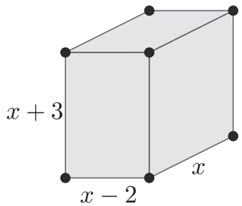
Movimento de projéteis	
1. Competências de fundamentos de Área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar os conhecimentos sobre função quadrática no estudo do movimento de projéteis.
3. Conteúdos relacionados	Função quadrática; zero.
4. Descrição da SP	Determinado projétil é lançado para o alto e para frente, descrevendo uma trajetória parabólica. A equação que fornece a altura do projétil em função da distância horizontal x a que ele se encontra do ponto de lançamento é $f(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 2x$. Com base nessas informações, que distância horizontal o projétil percorrerá até que toque o solo?

5. Resolução da SP	Vamos primeiramente observar o gráfico dessa função na Figura 1.25. Figura 1.25 | Gráfico de f(x)  Fonte: Os autores Note que, após o lançamento, o objeto sobe até certa altura e cai novamente até atingir o solo num ponto P, sendo a abscissa desse ponto o zero da função. Calculando o zero, temos: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1/15) \cdot 0}}{2 \cdot (-1/15)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{-2/15} = \frac{-2 \pm 2}{-2/15} \begin{cases} x_1 = \frac{-2+2}{-2/15} = 0 \\ x_2 = \frac{-2-2}{-2/15} = 30 \end{cases}$ O valor de x_1 corresponde ao ponto de partida e o valor de x_2 é a abscissa do ponto P. Portanto, o projétil percorrerá 30 m até atingir o solo.

Faça valer a pena

1. Um bloco retangular de concreto tem dimensões x + 3, x - 2 e x, conforme Figura 1.26. A função A(x) que fornece a área total da superfície do bloco é:

Figura 1.26 | Bloco

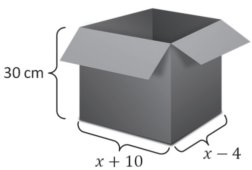


Fonte: Os autores

a) $A(x) = 4x^2 + 4x - 12$.
b) $A(x) = 6x^2 + 4x - 12$.
c) $A(x) = 6x^2 + 4x + 12$.
d) $A(x) = 4x^2 + 4x + 12$.
e) $A(x) = 8x^2 + 4x - 12$.

2. Uma caixa de papelão tem suas dimensões representadas na Figura 1.27. A função V(x) que relaciona x com o volume da caixa e o respectivo volume para x = 20 cm são:

Figura 1.27 | Caixa de papelão



Fonte: adaptada de <https://pixabay.com/p-152428>. Acesso em: 17 nov. 2015.

a) $V(x) = 30x^2 + 180x - 1200$ e 12400 cm^3.
b) $V(x) = 30x^2 + 160x - 1200$ e 14400 cm^3.
c) $V(x) = 30x^2 + 180x - 1200$ e 14400 cm^3.
d) $V(x) = 30x^2 + 160x - 1200$ e 12400 cm^3.
e) $V(x) = 30x^2 + 180x + 1200$ e 14400 cm^3.

3. Uma revendedora de cosméticos estima que para um preço de x reais são vendidas 5000 – 2x unidades de certo produto mensalmente. Para este produto há um custo de R$ 10,00 por unidade. Nestas condições, qual é o lucro obtido em um mês em que o preço de venda deste produto era R$ 16,00?

a) R$ 28618,00.
b) R$ 16168,00.
c) R$ 50000,00.
d) R$ 29808,00.
e) R$ 48861,00.

Seção 1.4

Sinal, mínimo e máximo da função quadrática

Diálogo aberto

Na seção anterior você estudou a função quadrática, cuja aplicação proporcionou uma solução para o problema da ampliação do galpão da empresa. Dos 300 m^2 que havia de espaço físico, passou-se para 750 m^2 com a ampliação, sendo acrescidos 10 m tanto no comprimento quanto na largura. O galpão atualmente possui 30 m de comprimento por 25 m de largura.

Você ainda pôde calcular o investimento com a reforma por meio da função $I(x) = 725{,}85 \, .x^2 + 25404{,}75 \, . \, x$. Para o valor x acrescido nas dimensões do galpão, temos: $I(10) = 725{,}85 \, . \, 10^2 + 25404{,}75 \, . \, 10 = 72585 + 254047{,}5 = 326632{,}5$ R$ $\rightarrow$ 326632,50, isto é, o investimento com a reforma foi de R$ 326632,50.

Após todos esses gastos, seu sócio quer agora recuperar parte do investimento aumentando o preço de venda dos bonés. Atualmente são produzidos e comercializados 2400 bonés por mês, vendidos por R$ 30,00 cada. Para que tudo ocorra de modo planejado, ele se adiantou e fez uma pesquisa junto aos consumidores estimando que para cada x reais acrescidos no preço de cada boné são vendidas (2400 - 60x) unidades por mês.

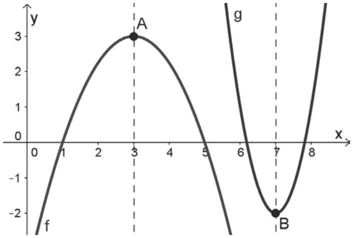
Considerando as informações anteriores, qual deve ser o preço de cada boné para que a receita seja a maior possível?

Não pode faltar!

Máximos e mínimos

Você viu na seção anterior alguns elementos da parábola, entre eles o vértice, como ilustrado na Figura 1.28. O ponto A é o vértice do gráfico de $f(x) = -075x^2 + 4{,}5x - 3{,}75$ e o ponto B é o vértice do gráfico de $g(x) = 3x^2 - 42x + 145$. Ambos os gráficos possuem eixo de simetria (linha tracejada) que passa pelo vértice.

Figura 1.28 | Gráficos de f e g



Fonte: Os autores

O fato de uma parábola ter eixo de simetria significa que o lado direito da curva é o reflexo do lado esquerdo, ou seja, se desenhássemos uma parábola em um papel e o dobrássemos sobre o eixo de simetria, os lados da curva se sobreporiam. Observe que o coeficiente do termo dominante de $f(x) = -075x^2 + 4,5x - 3,75$ é negativo e que o coeficiente do termo dominante de $g(x) = 3x^2 - 42x + 145$ é positivo. Como já abordado na seção anterior, isso influencia na concavidade da parábola: o gráfico de f tem concavidade para baixo e o gráfico de g tem concavidade para cima. Em decorrência disso, há algo interessante em relação ao vértice: no caso do gráfico de f, o vértice A é o ponto mais alto da parábola e, no caso do gráfico de g, o vértice B é o ponto mais baixo da parábola. Isso pode ser observado para toda função quadrática e está de acordo com o exposto a seguir:

Assimile

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Se:

• $a > 0$, o gráfico tem concavidade voltada **para cima**, e o vértice é seu ponto **mais baixo**;

• $a < 0$, o gráfico tem concavidade voltada **para baixo**, e o vértice é seu ponto **mais alto**.

Essa percepção gráfica em relação à função quadrática auxilia no entendimento de um conceito estudado para qualquer função:

Assimile

Uma função f(x) possui um máximo em x_v pertencente a um intervalo I, se $f(x_v) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. Nesse caso, $f(x_v)$ será o maior valor alcançado (valor máximo) pela função nesse intervalo.

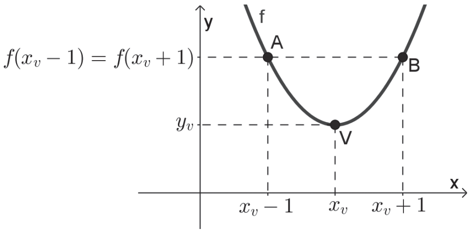
De modo semelhante, uma função f(x) possui um mínimo em x_v pertencente a um intervalo I, se $f(x_v) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. Nesse caso, $f(x_v)$ será o menor valor alcançado (valor mínimo) pela função nesse intervalo.

Em ambos os casos, dizemos que os valores são extremos da função.

No exemplo da Figura 1.28, A é um ponto de máximo e B é um ponto de mínimo. Para uma função quadrática, as coordenadas do vértice são (x_v, y_v), em que x_v é o "x do vértice" e y_v, o " y do vértice".

Como a parábola é simétrica em relação ao seu vértice, segue que $f(x_v-1) = f(x_v+1)$, como mostra a Figura 1.29. Com base nessa igualdade, temos:

Figura 1.29 | Simetria da parábola



Fonte: Os autores

$$a(x_v - 1)^2 + b(x_v - 1) + c = a(x_v + 1)^2 + b(x_v + 1) + c$$
$$\cancel{ax_v^2} - 2ax_v + \cancel{a} + \cancel{bx_v} - b + \cancel{c} = \cancel{ax_v^2} + 2ax_v + \cancel{a} + \cancel{bx_v} + b + \cancel{c}$$
$$-2ax_v - b = 2ax_v + b$$
$$-b - b = 2ax_v + 2ax_v$$
$$-2b = 4ax_v$$

Da última igualdade, segue que $x_v = -\frac{2b}{4a} = -\frac{b}{2a}$. Com essa propriedade e as observações anteriores, podemos enunciar o seguinte:

Assimile

Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, o vértice de seu gráfico tem coordenadas (- b/ 2a, f (- b/ 2a).

Não entraremos em detalhes, mas pode ser demonstrado que $x_v = - b/ 2a$ e $y_v = -\Delta/ 4a$.

Reflita

Como podemos deduzir $y_v = -\Delta/ 4a$ a partir de $x_v = -b/2a$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Exemplificando

Dada a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$, determine as coordenadas do vértice de seu gráfico e se este é um ponto de máximo ou de mínimo.

Resolução:

Para esta função temos a = 2, b = -4 e c = 8. Logo:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 2} = 1;$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}{4 \cdot 2} = -\frac{16 - 64}{8} - \frac{16 - 64}{8} = -\frac{(-48)}{8} = 6.$$

Portanto, as coordenadas do vértice são (1,6).

Como a = 2 > 0 o gráfico de f possui concavidade voltada para cima, o que implica que seu vértice é um ponto de mínimo. Nesse caso, f(1) = 6 é o menor valor (mínimo) assumido pela função.

Sinal da função quadrática

Observe na Figura 1.30 as funções f, g, h, p, q, r. A partir do exposto na seção anterior e analisando os gráficos, segue que as funções f e p possuem dois zeros reais cada ($\Delta > 0$), as funções g e q possuem um único zero cada ($\Delta = 0$) e as funções h e r não possuem zeros reais ($\Delta < 0$). A partir de uma análise gráfica, podemos ainda afirmar que:

$h(x) > 0$ (é positiva) no intervalo $(-\infty, +\infty) = R$, pois seu gráfico está totalmente acima do eixo x;

$r(x) < 0$ (é negativa) no intervalo $(-\infty, +\infty) = R$, pois seu gráfico está totalmente abaixo do eixo x;

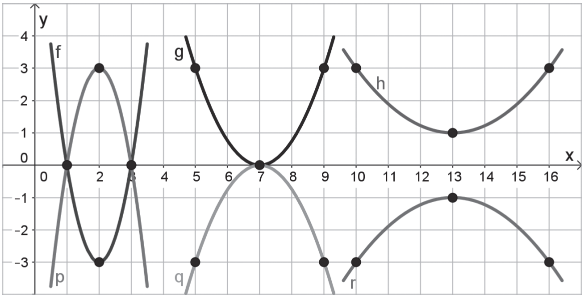
$g(x) > 0$ nos intervalos $(-\infty, x_1)$ e $(x_1, +\infty)$, em que $g(x_1) = 0$ (na Figura 1.30, $x_1 = 7$);

$q(x) < 0$ nos intervalos $(-\infty, x_1)$ e $(x_1, +\infty)$, em que $q(x_1) = 0$ (na Figura 1.30, $x_1 = 7$);

$f(x) > 0$ em $(-\infty, x_1)$ e $(x_2, +\infty)$, $f(x) < 0$ em (x_1, x_2) e $f(x_1) = f(x_2) = 0$ (na Figura 1.30, $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$);

$p(x) > 0$ em $(-\infty, x_1)$ e $(x_2, +\infty)$, $p(x) < 0$ em (x_1, x_2) e $p(x_1) = p(x_2) = 0$ (na Figura 1.30, $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$).

Figura 1.30 | Funções quadráticas



Fonte: Os autores

Exemplificando

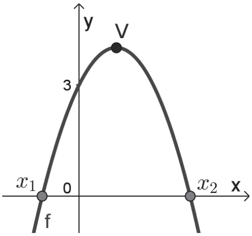
Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, faça o estudo dos sinais e determine se f possui um valor máximo ou um mínimo e especifique esse valor.

Resolução:

Como para esta função $a = -1 < 0$, a concavidade de seu gráfico é voltada para baixo. Em consequência, o vértice é o ponto mais alto do gráfico, tornando-o um ponto de máximo. Além disso, como $b = 2$ e $c = 3$, temos:

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 - (-12) = 16 \rightarrow \Delta = 16 > 0$.

Figura 1.31 | Esboço



Fonte: Os autores

Como o discriminante é positivo, a função possui dois zeros reais, além de seu gráfico interceptar o eixo da ordenadas no ponto de coordenadas (0,3), pois $c = 3$. Com essas informações, podemos inferir que o gráfico da função é semelhante ao esboço da Figura 1.31. Calculando os zeros de f, temos:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1;$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Logo, $f(x) > 0$ em $(-\infty, -1)$ e $(3, +\infty)$, $f(x) < 0$ em $(-1, 3)$ e $f(-1) = f(3) = 0$.

Para determinar o máximo de f, precisamos primeiramente do valor de x_v:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = -\frac{2}{(-2)} = 1.$$

Com isso, o valor máximo de f será $f(x_v) = f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$.

Faça você mesmo

1) Dada a função $f(x) = x^2 + 6x + 5$, faça o estudo dos sinais e determine se f possui um valor máximo ou um mínimo e especifique esse valor.

Pesquise mais

Você pode investigar de forma mais dinâmica a relação entre os coeficientes da função quadrática e seu sinal com o objeto disponível no link: <https://www.geogebra.org/m/171465>. Acesso em: 24 nov. 2015.

Além disso, para ver mais sobre as funções quadráticas, principalmente quanto a máximos e mínimos e ao sinal, acesse: <http://www.fund198.ufba.br/apos_cnf/funcao4.pdf>. Acesso em: 24 nov. 2015.

Sem medo de errar!

Vamos retomar o problema proposto no início da seção: atualmente são produzidos e comercializados 2400 bonés por mês e estes são vendidos por R$ 30,00 cada. Além disso, seu sócio estimou que para cada x reais acrescidos no preço de cada boné são vendidas (2400 – 60x) unidades por mês. Com todas essas informações, como calcular o preço de cada boné para que a receita seja a maior possível?

Vamos interpretar o problema: obter a maior receita possível é o mesmo que obter a **receita máxima**. Desse modo, se conseguirmos construir uma função receita que modele toda essa dinâmica, obter a receita máxima é o mesmo que calcular o valor **máximo da função**. Considere que o preço do boné, que atualmente é de R$ 30,00, seja acrescido em x reais. O novo preço será:

$$\underbrace{30{,}00}_{\text{Preço atual}} + \underbrace{x}_{\text{Acréscimo}}$$

Com o boné nessa faixa de preço, são vendidas (2400 – 60x) unidades. Lembre-se de que a função receita é obtida multiplicando a quantidade vendida pelo preço, logo:

$$\underbrace{R(x)}_{\text{Receita}} = \underbrace{(2400 - 60x)}_{\text{Quantidade}} \cdot \underbrace{(30 + x)}_{\text{Preço}}$$

Desenvolvendo os cálculos, temos:

$R(x) = (2400 - 60x)(30 + x) = (2400 - 60x)\,30 + (2400 - 60x)\,x = 72000 - 1800x + 2400x - 60x^2$

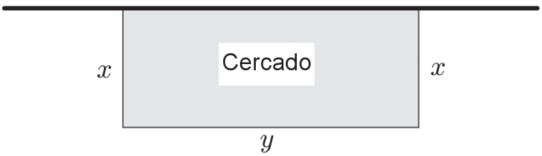
Portanto, $R(x) = -60x^2 + 600x + 72000$.

Depois de interpretar o problema, podemos resolvê-lo com o auxílio da função receita: para essa função, temos $a = -60 < 0$ e, consequentemente, essa função possui um valor máximo atingido em $x_v = b/2a = 600 / (2 .(-60)) = -600/(-120) = 5$. Esse é o valor que pode ser acrescido no preço atual do boné para alcançar a receita máxima. Como o preço atual é R$ 30,00, o novo valor será R$ 35,00, ficando resolvido o problema.

Faça você mesmo

2) Qual será a receita máxima?

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.	
Área máxima	
1. Competências de fundamentos de Área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Utilizar o conceito de máximo e mínimo de uma função na resolução de problemas de otimização.
3. Conteúdos relacionados	Máximos e mínimos.
4. Descrição da SP	Uma área retangular será cercada com tela em três lados, sendo que no quarto lado será utilizado um muro já existente, conforme Figura 1.32. Figura 1.32 | Área a ser cercada  Fonte: Os autores Se há 40 metros de tela disponível, quais serão as dimensões do cercado que possui área máxima?
5. Resolução da SP	Observe que este problema possui uma restrição: a quantidade de tela disponível, 40 m. Considerando um cercado retangular de x de largura e y metros de comprimento, sua área será A = xy. Utilizando a restrição do problema, $x + y + x = 40 \rightarrow 2x + y = 40 \rightarrow y = 40 - 2x$, temos que a função área será: $A = xy \rightarrow A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$. Determinar a área máxima é o mesmo que determinar o máximo da função A(x), que é atingido em x_v = -b/2ª = -40 / (2 . (-2)) = -40 / (-4) = 10. Se x = 10, temos y = 40 - 2 .10 = 40 - 20 = 20. Por fim, concluímos que o cercado com área máxima terá 20 m de comprimento por 10 m de largura.

Faça valer a pena

1. Um aspecto muito interessante em relação às funções consiste em seus valores extremos, que podem ser mínimos ou máximos. Para as funções quadráticas, sabemos se um valor extremo será um mínimo ou um máximo apenas observando seus coeficientes.

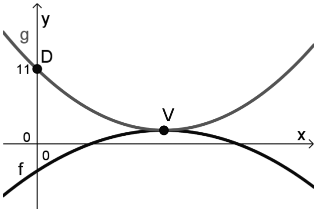
Em relação aos valores extremos, as funções $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = -2x^2 + 3$ e $h(x) = 4x^2 - 5x - 8$ possuem, respectivamente:

a) máximo, mínimo e máximo.
b) mínimo, máximo e mínimo.
c) máximo, máximo e mínimo.
d) mínimo, mínimo e máximo.
e) mínimo, máximo e máximo.

2. Os gráficos das funções $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x + c$ e $g(x) = x^2 - 6x + 11$ possuem o mesmo vértice, conforme Figura 1.33. Nesse caso, qual é o valor do coeficiente c da função f?

a) –4.
b) –2.
c) –1.
d) –3.
e) –5.

Figura 1.33 | Funções f e g



Fonte: Os autores

3. Determinado trecho de uma montanha-russa tem seu trilho a uma altura $f(x) = 0{,}1x^2 - 2x + 14$, com x pertencente ao intervalo (0,20), em metros. Nesse trecho, qual é a altura do trilho no seu ponto mais baixo, considerando o eixo das abscissas como sendo o solo?

a) 1 m.
b) 2 m.
c) 3 m.
d) 4 m.
e) 5 m.

Referências

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de matemática elementar:** conjuntos e funções. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977.

LARSON, Ron. **Cálculo aplicado**: curso rápido. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

ROGAWSKI, Jon. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SODRÉ, Ulysses. **Funções quadráticas**. 2010. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/matzoo/quadratica.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2015.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013, 1. v.

THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

Funções trigonométricas

Convite ao estudo

Qual é a importância da trigonometria?

Caro aluno, uma questão que sempre deve instigar reflexão é: para que serve o que estou estudando? E a trigonometria é um caso clássico de conhecimento que nasceu da necessidade do ser humano de resolver problemas do seu cotidiano, sendo uma das áreas de estudo mais antigas da Matemática. Há mais de 2.500 anos o homem vem desenvolvendo maneiras de calcular o movimento dos corpos celestes, mapear os mares e projetar construções, e tudo isso necessita do estudo de trigonometria.

De maneira mais abrangente, pode-se dizer que a forma de um objeto é tão importante na determinação de sua resistência e funcionalidade quanto o material que o constitui.

Na natureza, são inúmeros os exemplos de formas geométricas interessantes, como a do ovo, capaz de suportar o peso de dezenas de quilos, mas é perfurado de dentro para fora pelo delicado bico do pintinho, ou as teias de aranha (Figura 2.1), que são construídas com fios de espessura e distanciamento relativos à escolha feita pela aranha do tamanho de suas vítimas.

Muitas destas formas geométricas nos passam despercebidas, e a beleza não está só em nossa compreensão, mas também no uso que podemos fazer delas.

De todas as formas da natureza, o triângulo retângulo é uma das mais interessantes, pois pode redesenhar muitas outras. Por este motivo, ele é nosso objeto de estudo nesta seção.

Figura 2.1 | Aranha e sua teia

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spinnennetzpd.jpg>. Acesso em: 23 out. 2015.

Competência a ser desenvolvida	Objetivos
Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas	• Conhecer o triângulo retângulo e suas relações. • Aplicar as relações trigonométricas a estruturas e situações-problema. • Compreender a descrição de fenômenos pela associação destes com as funções trigonométricas.

Com o intuito de aproximar o conteúdo que será abordado nesta seção com o cotidiano das pessoas, será apresentada uma situação muito próxima à realidade, na qual muitos elementos podem, inclusive, ser aproveitados numa busca pessoal pela estabilidade financeira.

Seno, Cosseno e Tangente são amigos há muito tempo. Além dos nomes estranhos, possuem algumas outras coisas em comum, sem contar as diferenças que se complementam. Estes três amigos moram numa cidade de médio porte, na Região Sudeste do Brasil, e, buscando um novo nicho de mercado, resolveram abrir uma empresa com o nome SABC (Soluções Ambientais de Baixo Custo), propondo a instalação de painéis solares, sistemas de arrefecimento, otimização do sistema hidráulico das construções e outras inovações, tudo pela metade dos preços normalmente cobrados pelas empresas já estabelecidas no mercado. Entretanto, depararam-se com algumas situações cujas soluções exigem conhecimentos de trigonometria, como estimar o tamanho das placas solares, conforme a inclinação dos telhados das casas, e a altura das caixas d'água, bem como estruturas baseadas no tamanho e na posição das janelas e portas das casas, a fim de sugerir uma maneira de bloquear eficientemente os raios solares que sobreaquecem o interior das casas no verão. Esses conhecimentos também são importantes para descobrir como economizar materiais na construção do sistema hidráulico, buscando o menor caminho entre a alimentação e os pontos de consumo de água.

Seção 2.1

Trigonometria e aplicações

Diálogo aberto

Prezado aluno, seja bem-vindo!

Na primeira unidade deste livro, vimos que função é uma relação matemática que permite associar um dado com outro, como a função de primeiro grau, que, entre outros exemplos, foi usada para relacionar os bonés produzidos e vendidos com lucro, ou as quadráticas, muito usadas na descrição de estruturas de pontes, de fenômenos de balística e dão forma às antenas ditas parabólicas, para melhor receber um sinal.

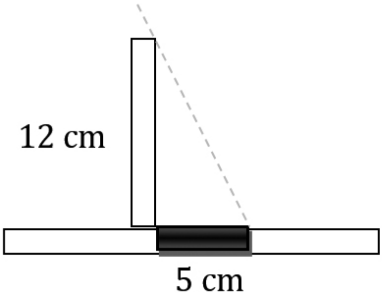
Nesta segunda unidade, também estudaremos funções, mas as que se aplicam, principalmente, a fenômenos cíclicos, ou seja, repetitivos, como: ondas, pêndulos e movimento rotacional. Antes disso, relembraremos os fundamentos da trigonometria, que incluem a descrição de um triângulo e as relações entre suas partes, conceitos necessários na resolução de problemas envolvendo estruturas e forças nas Engenharias, Física e Química.

Para iniciar, como a trigonometria poder ajudar na elaboração de uma solução para o seguinte problema encontrado pelos três sócios na empresa SABC?

A luz solar que entra pela janela das casas aquece seu interior, o que pode ser bom no inverno. Entretanto, no verão, o aquecimento do interior das casas pode ser excessivo e incômodo. Como fazer para que, de maneira simples e barata, só entre luz direta no interior das casas no inverno, sem que tenhamos de fechar as janelas, ou mesmo as cortinas, no verão? Como esta solução pode ser aplicada a outras aberturas da casa?

Uma importante observação feita pelos sócios foi que nos meses mais quentes do ano o Sol cruza o céu numa posição mais alta, ou seja, seus raios estão na vertical, ou próximos dela, e experimentos feitos mostraram que os raios solares com alta intensidade, e que devem ser bloqueados, ocorrem quando o Sol deixa uma sombra com proporção de 5 para 12 para com um objeto colocado na vertical (Figura 2.2).

Figura 2.2 | Figura representativa mostrando a sombra de um objeto causada pelo Sol no momento em que sua radiação passa a ser mais intensa



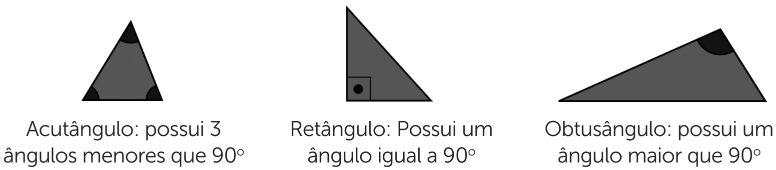
Fonte: Os autores

Lembre-se: como dito no Convite ao Estudo, formas da natureza podem ser redesenhadas usando triângulos retângulos, e tudo, mesmo aquilo que é construído pelo ser humano, faz parte da natureza.

Não pode faltar

Triângulos são figuras com três lados. Mas quantos tipos existem? Basicamente, podemos classificá-los com relação aos ângulos internos ou à medida de seus lados, como na Figura 2.3 e Figura 2.4.

Figura 2.3 | Nomenclatura do triângulo segundo seus ângulos internos



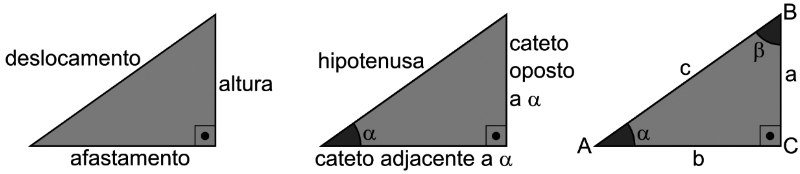
Fonte: Os autores

Figura 2.4 | Nomenclatura do triângulo segundo as medidas dos lados

Fonte: Os autores

Tomando o triângulo retângulo como exemplo, como denominamos seus ângulos, lados e arestas? Além de nomes específicos a algumas situações, para os lados (ou arestas) usam-se letras minúsculas; para os vértices, letras maiúsculas; e, para os ângulos, letras gregas, como α (alfa), β (beta) e γ (gama), como na Figura 2.5:

Figura 2.5 | Nomenclaturas usadas para as partes que compõem o triângulo retângulo



Fonte: Os autores

Pesquise mais

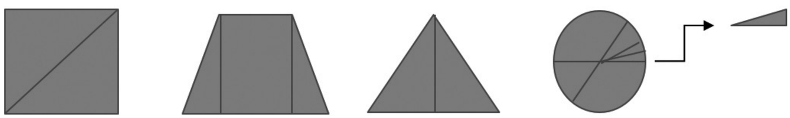
- Cateto é aquele que cai e, quando estiver oposto ao ângulo de referência, recebe o nome de cateto oposto. O cateto adjacente recebe este nome quando estiver junto ao ângulo de referência.

- Hipotenusa vem do grego *hypotenousa*, que significa "o que se estende debaixo", no caso, do ângulo reto, ou seja, aquele que tem 90° e dá nome ao triângulo retângulo.

- Pesquise mais: <http://origemdapalavra.com.br/site/palavras/cateto/>. Acesso em: 11 jan. 2016.

Ao tentar descrever a natureza com figuras geométricas, é possível perceber que muitas figuras podem ser descritas pelo aglomerado de triângulos retângulos, independentemente se são quadradas, trapezoidais, outros tipos de triângulos ou mesmo esféricas (Figura 2.6), ou seja, este tipo de triângulo seria a unidade formadora das outras formas planas.

Figura 2.6 | Formas geométricas e seus cortes em triângulos retângulos



Fonte: Os autores

Utilizamos esse princípio para resolver problemas de forças em estruturas e cabos nas engenharias, ação conjunta de várias forças em Física e Química, otimização de cortes em chapas e tecidos e para obter as chamadas medidas inacessíveis, feitas a distância, como a largura de rios, a altura de montanhas e distâncias interestelares.

Iniciaremos nosso estudo dos triângulos pelas regras de proporcionalidade e pelo Teorema de Pitágoras, sendo que a proporcionalidade pode ser aplicada a qualquer triângulo, já o Teorema de Pitágoras somente aos triângulos retângulos.

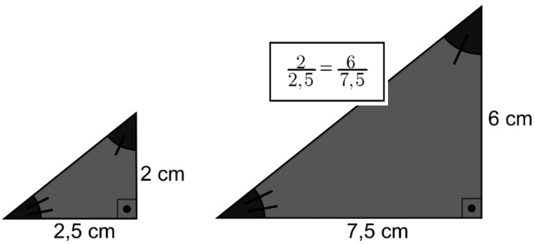
Proporcionalidade

Assimile

"Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca (um a um) entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes sejam proporcionais." (BARBOSA, 1995, p. 92)

Simplificadamente, se dois triângulos são semelhantes, ou eles são iguais ou um é uma ampliação (redução) do outro. O fato de dois triângulos serem semelhantes implica que, se dividirmos as medidas de dois elementos de um dos triângulos e efetuarmos a divisão correspondente para os elementos do outro triângulo, os valores serão iguais, isto é, se tomarmos um dos triângulos como referência e dividirmos sua altura pela medida da base, o valor obtido será exatamente igual ao da divisão da altura pela medida da base do outro triângulo (Figura 2.7), ou seja, suas proporções ou medidas relativas são as mesmas.

Figura 2.7 | Proporcionalidade entre altura e base de triângulos semelhantes



Fonte: Os autores

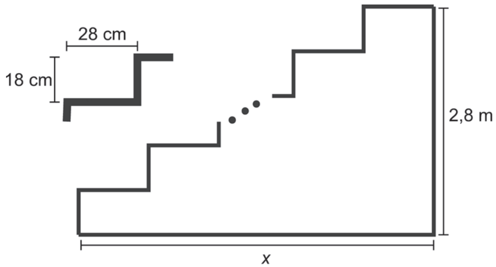
O mesmo ocorre com as divisões entre as medidas dos lados correspondentes, ambas têm o mesmo resultado: $\frac{6}{2} = \frac{7,5}{2,5}$.

Exemplificando

O caso da escada

Com base no princípio de proporcionalidade, é possível fazer uma rápida estimativa do tamanho de uma escada em uma casa. Para isso, é necessário seguir as recomendações de segurança dos bombeiros e também a Fórmula de Blondel. Uma boa proporção entre o espelho e o piso dos degraus desta escada (altura e base) é de 18 cm por 28 cm. Qual seria, então, o afastamento de uma escada que interliga dois pisos de andares separados por 2,8 m (Figura 2.8)?

Figura 2.8 | Semelhança de triângulos aplicada para estimar a base de uma escada



Fonte: Os autores

Pelas regras de proporção, a altura do degrau dividida pela largura tem valor igual à divisão da altura da escada pela medida do afastamento (x), ou seja:

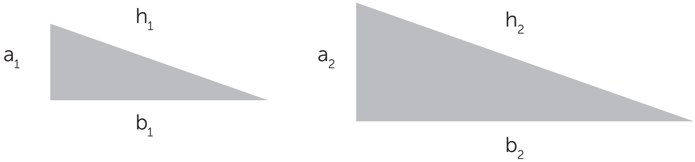
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{18}{28} = \frac{2,8}{x} \Rightarrow 18 \cdot x = 28 \cdot 2,8 \Rightarrow x = \frac{28 \cdot 2,8}{18} \Rightarrow x \cong 4,4\ m$$

Pesquise mais

Para ver mais detalhes sobre a Fórmula de Blondel, acesse o link: <http://www.corpodebombeiros.sp.gov.br/rev_it/IT11.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2015.

Existem outras relações de proporção que podem ser correlacionadas? Sim, qualquer razão entre comprimentos em um triângulo é igual à razão correspondente em outro triângulo semelhante. Veja algumas na Figura 2.9.

Figura 2.9 | Outras relações de proporção para o triângulo retângulo



Fonte: Os autores

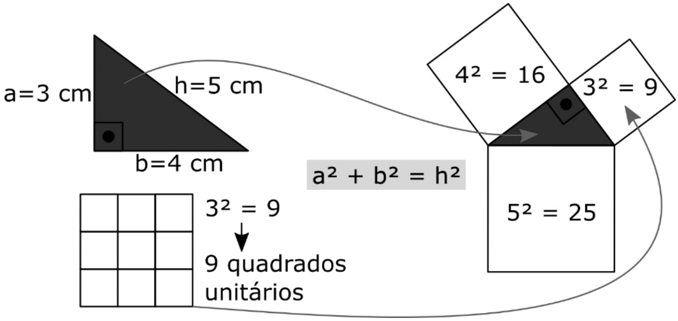
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \text{ ou } \frac{a_1}{h_1} = \frac{a_2}{h_2} \text{ ou } \frac{b_1}{h_1} = \frac{b_2}{h_2}$$

Teorema de Pitágoras

Na segunda metade do século VI a.C., Pitágoras fundou em Crótona uma confraria científico-religiosa com a finalidade de estudar a harmonia do cosmo e libertar a alma humana pelo seu esforço em estudar a estrutura numérica das coisas (OS PRÉ-SOCRÁTICOS, 2000). Nesta sociedade, Pitágoras se estabeleceu professor, fundando a primeira universidade do mundo, foi o primeiro a usar as palavras *mathematike*, e *philosophia*, além de ter sido o primeiro a realizar um experimento científico (SIMMONS, 1987).

Na visão dos pitagóricos, sendo a harmonia do cosmo dada pela presença do divino e explicada pelas relações geométricas e numéricas, o menor triângulo retângulo com lados de medidas inteiras possível deveria ser perfeito. Entretanto, os comprimentos dos lados desse triângulo pareciam gerar uma distribuição injusta, pois $3+4 > 5$, mas a soma de seus quadrados não, como já era conhecido antes de 1600 a.C. pelos babilônios (<http://global.britannica.com/topic/Pythagorean-theorem>. Acesso em: 27 nov. 2015). O grande feito dos pitagóricos foi serem os primeiros a provar essa expressão, $3^2 + 4^2 = 5^2$, de forma geométrica.

Figura 2.10 | Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras



Fonte: Os autores

É fácil perceber esta igualdade ao observarmos a Figura 2.10, em que a soma das áreas dos quadrados posicionados sobre os lados denominados catetos é igual à área do quadrado posicionado sobre o maior lado, denominado hipotenusa.

Como cateto é aquele que cai, o lado de valor 3 é cateto quando 4 for a base, e 4 será cateto quando 3 for base, sendo ambos catetos. Mais rigorosamente, o Teorema de Pitágoras é enunciado como:

Assimile

Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa: $a^2 + b^2 = h^2$.

Esse teorema é muito útil nos casos em que se deseja calcular a medida de um lado do triângulo retângulo conhecendo os outros dois.

Pesquise mais

Para saber um pouco mais da história das descobertas de Pitágoras e aplicações de seu teorema, sugerimos as seguintes referências:

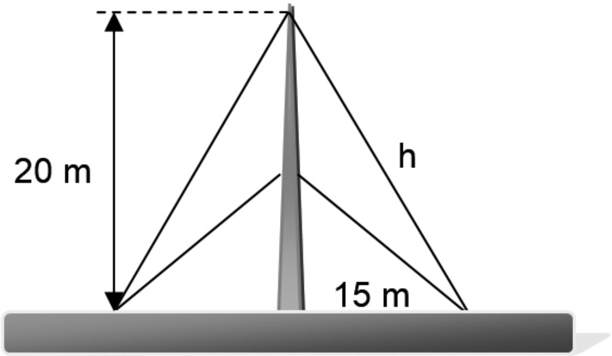
- SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- Pitágoras de Samos. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/pitagoras.html>. Acesso em: 23 nov. 2015.

Exemplificando

Torre estabilizada por cabos

Na construção de algumas torres transmissoras de rádio, são usados cabos ligando seu centro e topo ao chão, numa diagonal, para estabilizá-la da ação do vento. A altura da torre é predefinida e o local onde são presos os cabos no chão pode ser medido, mas qual é o comprimento de um destes cabos? Se uma torre tiver uma altura de 20 m, qual deve ser o comprimento do cabo ligado ao seu topo se ele estiver preso a 15 m do pé da torre, conforme Figura 2.11?

Figura 2.11 | Desenho esquemático de uma torre de transmissão de rádio



Fonte: Os autores

Resolução:

Observe, na Figura 2.11, que temos um triângulo retângulo e, portanto, vale o Teorema de Pitágoras. Considerando a altura da torre e a distância desta do local onde o cabo está preso como catetos, o comprimento do cabo será a hipotenusa. Consequentemente:

$$a^2 + b^2 = h^2 \Rightarrow 20^2 + 15^2 = h^2 \Rightarrow 400 + 225 = h^2$$

$$625 = h^2 \Rightarrow \sqrt{625} = \sqrt{h^2} \Rightarrow h = 25\,m$$

Logo, o comprimento do cabo será 25 m.

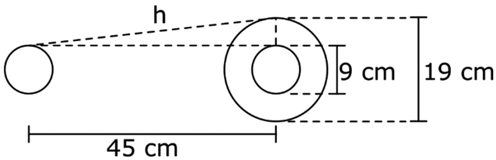
Faça você mesmo

Pitágoras e a bicicleta

Ao observar uma bicicleta, é intrigante que o comprimento da corrente deva se ajustar aos diferentes tamanhos das engrenagens. Qual é a variação no comprimento da parte reta superior da corrente de uma bicicleta quando trocamos sua marcha da mais leve para a mais pesada, acionando apenas o câmbio dianteiro (coroa)?

Dados: o diâmetro da maior engrenagem da catraca é 9 cm, valor igual ao da menor engrenagem da coroa. Já a maior engrenagem da coroa tem seu diâmetro igual a 19 cm, sendo a distância entre os eixos destas engrenagens igual a 45 cm, conforme esquema simplificado da Figura 2.12.

Figura 2.12 | Esquema simplificado mostrando o tamanho e posições da catraca e coroa de uma bicicleta com marchas



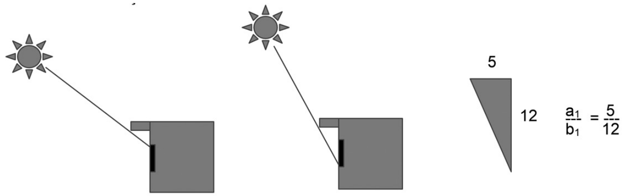
Fonte: Os autores

Sem medo de errar

Como aplicar os conhecimentos aprendidos ao problema proposto no início desta seção e eliminar a entrada direta da luz solar pelas janelas e portas das casas, evitando seu sobreaquecimento no verão, mas sem impedir que esta mesma luz entre no inverno?

Conforme experimentos feitos pelos sócios, a proporção entre a medida da sombra e a altura de um objeto colocado ao Sol no início do período de irradiação mais intensa é 5/12, e esta proporção pode ser utilizada na construção de toldos ou outros anteparos para bloquear este tipo de irradiação, conforme Figura 2.13.

Figura 2.13 | Figura representativa de iluminação causada pelo Sol na parede de uma casa conforme muda a inclinação de seus raios luminosos



Fonte: Os autores

Por exemplo, para uma veneziana com 1 m de altura, qual tamanho deve ter um toldo se ele for fixado 30 cm acima dela (ver Figura 2.14)?

Convertendo 30 cm em metros, e somando este valor à altura da veneziana, tem-se:

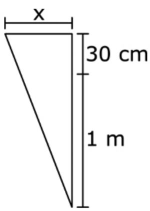
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{x}{1 + 0,3} \Rightarrow$$

$$12 \cdot x = 5 \cdot 1,3 \Rightarrow x = \frac{6,5}{12} \Rightarrow$$

$$x = 0,54\, m \;\; ou \;\; 54\, cm$$

Portanto, para esta veneziana, basta um toldo com 54 cm de comprimento para bloquear os raios solares mais fortes.

Figura 2.14 | Representação do triângulo retângulo formado pela sombra de um toldo com medida x, colocado 30 cm acima de uma veneziana de 1 m



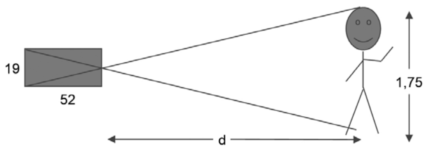
Fonte: Os autores

Avançando na prática

Pratique mais

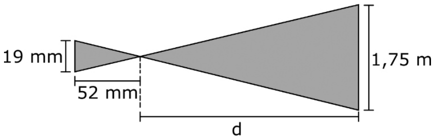
Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Fotografando melhor com triângulos	
1. Competências de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar as regras de proporção entre figuras semelhantes a situações do cotidiano.
3. Conteúdos relacionados	Proporcionalidade entre as medidas dos lados dos triângulos.
4. Descrição da SP	O efeito da luz projetada através de um orifício em uma parede no fundo de um cômodo, ou câmara, é similar ao que ocorre no olho, nas câmeras fotográficas e filmadoras. Nas câmeras fotográficas profissionais, usa-se uma numeração correspondente ao zoom, ou efeito de aproximação da imagem, que, para lentes normais, varia entre 28 e 80, dados em milímetros. Este número representa a distância entre o orifício da câmera (frente da lente) e o filme, ou receptor eletrônico, para o caso de câmeras digitais. O ajuste em 52 mm equivale à visão humana, indicado para dar realismo às paisagens. Valores menores distanciam e arredondam a imagem, deixando as pessoas com aparência mais gorda, e valores maiores aproximam a imagem, indicados para fotografar detalhes. Considerando um filme fotográfico de 19 mm de altura, a distância entre a câmera fotográfica e uma pessoa de 1,75 m de altura para que esta apareça ocupando praticamente toda a foto, quando o ajuste do zoom for de 52 mm, é calculada com base na Figura 2.15. Figura 2.15 | Representação de uma câmera fotográfica e a pessoa a ser fotografada  Fonte: Os autores

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Podemos observar a presença de dois triângulos semelhantes nessa figura, ilustrados de modo mais simples na Figura 2.16.

Figura 2.16 | Triângulos semelhantes



Fonte: Os autores

Qual é a distância d indicada?</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Resolução da SP</td>
<td>Pelo fato de os triângulos serem semelhantes, as razões correspondentes são iguais, ou seja:

$\frac{19}{52} = \frac{1,75}{d} \Rightarrow 19 \cdot d = 52 \cdot 1,75 \Rightarrow d = \frac{52 \cdot 1,75}{19} \Rightarrow d \cong 4,8\,m$</td>
</tr>
</table>

Dica

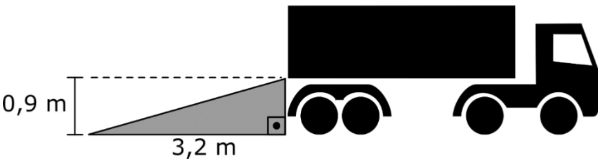
Na prática, afaste-se sempre cinco passos da pessoa a ser fotografada, aproximando pelo zoom partes ou detalhes do corpo da pessoa, caso queira, por exemplo, fotografar tronco e rosto. Se não houver espaço suficiente para isso, afaste-se três passos para tirar foto de meio corpo, ou dois passos para enquadramento 3×4.

Faça valer a pena

Texto para as questões 1, 2 e 3

Para embarcar cavalos em um caminhão, usa-se uma rampa que toca o solo 3,2 m atrás do caminhão, cuja carroceria tem 90 cm de altura, conforme Figura 2.17.

Figura 2.17 | Rampa para embarque de equinos num caminhão



Fonte: <https://pixabay.com/p-39103>. Acesso em: 23 nov. 2015.

Para o posicionamento dessa rampa, é importante observar o índice de subida, dado pela razão entre a altura e o afastamento, valor que pode ser calculado de forma percentual como indicado a seguir:

$$\text{índice de subida} = \frac{\text{altura}}{\text{afastamento}} \cdot 100\%$$

1. Qual é o valor em porcentagem do índice de subida da rampa usada para levar os cavalos à carroceria do caminhão?
a) 15%
b) 90%
c) 32%
d) 28%
e) 41%

2. Qual é o comprimento dessa rampa?
a) 4,1 m
b) 3,3 m
c) 3,7 m
d) 2,3 m
e) 5,0 m

3. Sabendo que o cavalo escorregará se a rampa tiver índice de subida maior que 0,3, qual é o comprimento mínimo que esta rampa pode ter?
a) 3,1 m
b) 3,3 m
c) 3,7 m
d) 4,1 m
e) 2,3 m

Seção 2.2

Seno e cosseno

Diálogo aberto

Na primeira seção desta segunda unidade do livro didático, vimos um pouco sobre trigonometria, que tem como figura-chave o triângulo retângulo. Conhecer a fundo esta figura nos permite resolver problemas em muitas áreas do conhecimento e atuação humana. Até o momento, vimos relações entre as partes externas do triângulo retângulo, ou seja, seus lados, como as regras de proporção entre duas figuras semelhantes e o Teorema de Pitágoras. Mas, e as partes internas, os ângulos? Existem relações entre as partes externas e internas?

A partir deste momento, iremos entender o que os amigos Seno, Cosseno e Tangente possuem em comum, já que foram batizados com os mesmos nomes dados às relações existentes no triângulo retângulo. Cada amigo, e sócio da empresa SABC, foi responsável pela apresentação de uma solução ambiental, cabendo ao Seno resolver o seguinte problema:

Painéis solares de baixo custo para aquecimento de água de banho podem ser feitos com forro de PVC, custando menos de 10% do valor de um painel metálico padrão. Devido à variação do posicionamento do Sol no céu em relação à superfície do chão na Região Sudeste do Brasil ao longo do ano, estes painéis precisam estar inclinados entre 15 e 25 graus, pois devem ter inclinação similar à latitude local, além do fato de que devem estar voltados para o Norte geográfico. Qual é o comprimento de um painel solar instalado no telhado de uma casa na Região Sudeste se sua inclinação acompanha a do telhado da casa e sua parte mais alta deve estar no máximo 20 cm acima do piso da caixa d'água? Para a resolução deste problema, pode-se considerar um telhado com inclinação padrão de 35% (≈20°), em que a caixa d'água fica 20 cm acima do piso da laje, o painel solar tem sua parte mais baixa na altura da laje e sua parte mais alta a meia altura da caixa d'água que tem 40 cm de altura.

Não pode faltar

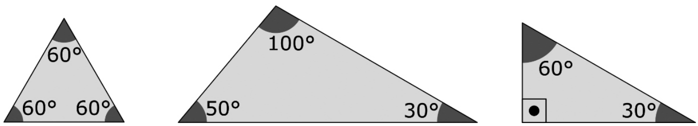
Lembre-se

Na Seção 2.1 desta unidade vimos como aplicar as regras de proporção e o Teorema de Pitágoras para calcular o comprimento desconhecido de um dos lados de um triângulo.

Nestes casos, os valores usados referem-se aos lados, ou seja, valores externos do triângulo. Nesta segunda seção, iremos ampliar nossas ferramentas de trabalho com o triângulo retângulo, considerando, também, suas partes internas, ou seja, seus ângulos internos.

Com relação aos valores dos ângulos, o próprio Pitágoras já havia demonstrado, 400 anos a.C., que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, independentemente de seu formato (Figura 2.18).

Figura 2.18 | Alguns exemplos de triângulos, mostrando que a soma de seus ângulos internos é 180º, independentemente de sua forma



Fonte: Os autores

Algumas denominações para os ângulos, entre 0° e 180°, que podem ser úteis são:

- $\alpha = 90°$ ângulo reto. Símbolo: $\boxed{\bullet}$;
- $\alpha < 90°$ ângulo agudo;
- $\alpha > 90°$ ângulo obtuso.

Já que em um triângulo retângulo a soma dos dois ângulos agudos é sempre 90°, pois os outros 90° provêm do ângulo reto, o valor de um dos ângulos agudos é sempre 90° menos o valor do outro ângulo agudo, ou seja, em um triângulo retângulo, cujos ângulos agudos sejam α e β, temos:

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha$$

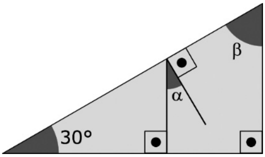
Assimile

Diz-se que β é o ângulo complementar de α, pois é o que falta para 90°.

Exemplificando

Qual é o valor do ângulo α na Figura 2.19?

Figura 2.19 | Triângulo retângulo

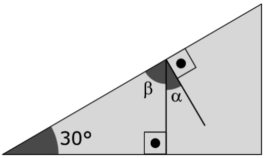


Fonte: Os autores

Resolução:

Uma das maneiras de resolver esta questão é visualizar que o segmento de reta vertical mostrado é um dos componentes geradores de α e forma um triângulo retângulo menor com um ângulo de 30°. Portanto, pela regra que envolve a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo aplicada ao triângulo menor: $\beta = 90° - 30°$, tem-se, $\beta = 60°$ (ver Figura 2.20).

Figura 2.20 | Triângulo retângulo com destaque para o ângulo β



Fonte: Os autores

Sendo a hipotenusa uma reta, $\beta + \alpha + 90° = 180°$. Como $\beta = 60°$, segue que $60° + \alpha + 90° = 180°$ ou $\alpha = 30°$.

Podemos, agora, definir os nomes usados para as proporções altura/deslocamento e base/deslocamento (ou afastamento/deslocamento) no triângulo retângulo, ou seja, $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$, para as quais *a* é a altura, *b* é a base e c é o comprimento (hipotenusa). Mas, antes disso, lembremo-nos do que já foi descrito na Seção 2.1:

Lembre-se

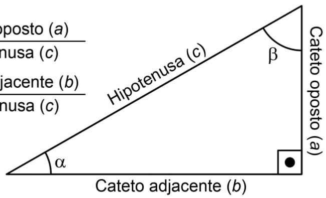
Se tomarmos o ângulo para com o horizonte como referência, ângulo α, a altura é o cateto oposto a ele e a base é o cateto que está junto, denominados, portanto, cateto oposto e cateto adjacente ao ângulo α.

Como estas proporções possuem valores constantes para um mesmo ângulo α, independentemente do tamanho do triângulo (faça essa verificação por meio do link disponível em: <http://tube.geogebra.org/m/2292809>. Acesso em: 14 dez. 2015), dá-se o nome de seno (denota-se sen) para a proporção $\frac{a}{c}$ e de cosseno (denota-se cos) para $\frac{b}{c}$, como mostra a Figura 2.21.

Figura 2.21 | Triângulo retângulo e as relações seno e cosseno tomando α como referência

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto } (a)}{\text{Hipotenusa } (c)}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto adjacente } (b)}{\text{Hipotenusa } (c)}$$



Fonte: Os autores

Assimile

Em um triângulo retângulo de lados *a*, *b* e *c*, em que *a* e *b* são adjacentes ao ângulo de 90°, *c* é a hipotenusa e α é o ângulo adjacente ao lado *b*, temos:

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c} \text{ e } cos\ \alpha = \frac{b}{c}.$$

Atenção

O nome cosseno vem de co-seno, ou complementar de seno, pois os valores de sen α são iguais aos valores de cos β, para os quais $\beta = 90° - \alpha$.

Pesquise mais

Para se aprofundar no assunto, consulte o link: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm>. Acesso em: 16 dez. 2015.

Para conhecer um pouco da história da nomenclatura "seno", consulte o link: <http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=32>. Acesso em: 14 dez. 2015.

Costuma-se construir tabelas com valores de seno e cosseno para vários valores de α entre 0° e 90°, sendo os principais denominados **ângulos notáveis**. Veja alguns deles na Tabela 2.1:

Tabela 2.1 | Valores de seno e cosseno para os ângulos notáveis

α	0°	30°	45°	60°	90°
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Fonte: Os autores

Observação: ao analisar os valores da Tabela 2.1, note que sen α = cos β, em que $\beta = 90° - \alpha$.

Lembre-se

Em resumo:

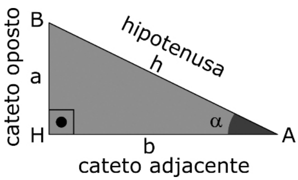
• A somatória dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º.

• O triângulo ABH (Figura 2.22) é retângulo, pois $\hat{H}$ é reto (90º), tendo *a* e *b* como catetos e *h* como hipotenusa. Assim:

$$h^2 = a^2 + b^2 \quad \text{e} \quad sen\ \alpha = \frac{a}{h}, \quad cos\ \alpha = \frac{b}{h}$$

Para sen α e cos α, lê-se: "seno de alfa" e "cosseno de alfa".

Figura 2.22 | Triângulo retângulo e seus elementos



Fonte: Os autores

Atenção

α, β... (letras gregas), Ĥ, Â (letras maiúsculas com acento circunflexo) ou formas como $B\hat{H}A$ indicam ângulos. Neste último caso, o ângulo Ĥ entre os segmentos de reta HA e HB.

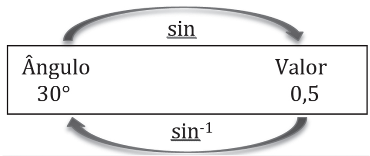
Da mesma forma que se pode associar um valor de seno e cosseno a um ângulo, pode-se, também, fazer o contrário e descobrir que ângulo gerou determinado valor de seno ou cosseno. Para isso, podem ser consultadas tabelas matemáticas ou, por meio de uma calculadora científica, pode-se usar as funções $\sin^{-1}$ ou asin (arcsen) para seno e $\cos^{-1}$ ou acos (arccos) para cosseno.

Atenção

As calculadoras seguem a notação em latim, por isso sin, e não sen, e o expoente -1 indica função inversa.

A abreviatura arcsen significa "o arco cujo seno vale..." e é a representação mais precisa, mas a menos utilizada.

Numa calculadora científica, digita-se: $\boxed{\sin} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{0} \rightarrow \boxed{=}$ para obter 0,5 como resultado, portanto, $\sin^{-1} 0{,}5 = 30$. Ou, ainda, digita-se $\boxed{\sin^{-1}} \rightarrow \boxed{0} \rightarrow \boxed{.} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{=}$ para obter 30 como resultado.



Deve-se ter em mente que seno e cosseno são valores adimensionais, pois na razão entre as medidas as unidades são canceladas. Veja o exemplo a seguir.

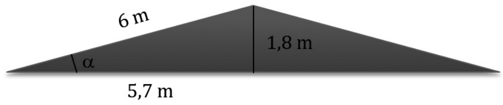
Exemplificando

Qual é o índice de inclinação e o ângulo de inclinação de um telhado que possui comprimento de 6 m, afastamento de 5,7 m e cumeeira de 1,8 m?

Resolução:

Primeiramente, esboçamos o telhado, como na Figura 2.23.

Figura 2.23 | Esboço do telhado



Fonte: Os autores

O índice de inclinação corresponde à razão entre a altura e o afastamento do telhado, logo:

Índice de inclinação = altura/afastamento = 1,8 m/5,7 m ≈ 0,3158 ≈ 32%.

Para o cálculo do ângulo de inclinação (α) se faz necessária a utilização do seno desse ângulo, como segue:

$$\text{sen } \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{1,8\ m}{6\ m} = 0,30 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0,30 \Rightarrow \alpha = \text{sen}^{-1}\,0,30$$

Utilizando uma calculadora científica, digitamos:

$$\boxed{\sin^{-1}} \rightarrow \boxed{0} \rightarrow \boxed{.} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{0} \rightarrow \boxed{=}$$

Para obter $\alpha = \sin^{-1} 0,30 \approx 17,5°$.

Reflita

Se por definição o seno é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, e cosseno é razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa, quais seriam os valores de seno e cosseno do ângulo β na Figura 2.21? Pense na observação feita logo após a Tabela 2.1!

Pesquise mais

O arquivo indicado a seguir mostra detalhadamente as relações entre ângulos, seus nomes e simbologias, além das relações trigonométricas e complementos: Disponível em:

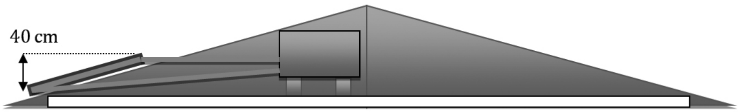
<http://www.culturaacademica.com.br/_img/arquivos/Trigonometria.pdf>. Acesso em: 16 dez. 2105.

Sem medo de errar

Vamos retomar um dos problemas encontrados pelos sócios da SABC: qual é o comprimento de um painel solar instalado em um telhado de uma casa na Região Sudeste se sua inclinação acompanha à do telhado da casa e sua parte mais alta deve estar, no máximo, 20 cm acima do piso da caixa d'água?

Para a resolução deste problema, pode-se considerar um telhado com inclinação padrão de 35% (quase 20°), no qual a caixa d'água fica 20 cm acima do piso da laje, o painel solar tem sua parte mais baixa na altura da laje e a parte mais alta a uma altura de 20 cm da base da caixa d'água, como na Figura 2.24.

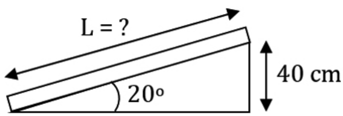
Figura 2.24 | Perfil do telhado com destaque para o painel e para a caixa d'água



Fonte: Os autores

A distância entre a parte mais baixa do painel solar e sua parte alta é de 40 cm, dados os 20 cm da laje até a base da caixa mais 20 cm até o ponto de retorno da água quente, que não pode estar abaixo do painel. Redesenhando o sistema com foco no painel, tem-se a Figura 2.25.

Figura 2.25 | Esquema simplificado do painel solar



Fonte: Os autores

Desta forma fica fácil perceber que o valor desejado é a hipotenusa do triângulo retângulo, que tem altura de 40 cm e ângulo agudo com a horizontal de 20º. Portanto, basta aplicar a proporção seno, ficando:

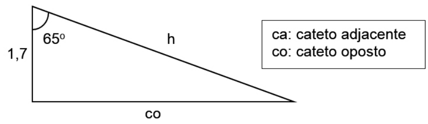
$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \Rightarrow sen\ 20 = \frac{40}{h} \Rightarrow 0{,}34 \cong \frac{40}{h} \Rightarrow h \cong \frac{40}{0{,}34} \Rightarrow h \cong 118\ cm.$$

Portanto, o comprimento máximo para um painel solar a ser instalado neste telhado é de 1 metro e 18 centímetros.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.	
Desvendando o app de smartphone que mede distância	
1. Competências de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar as relações trigonométricas para obtenção indireta de medidas.
3. Conteúdos relacionados	Relações trigonométricas.
4. Descrição da SP	Aplicativos gratuitos permitem que um aparelho de telefone moderno (smartphone) meça a distância entre o usuário e um ponto a alguns metros à sua frente sem uso de GPS, ou seja, a pessoa fica parada. Para isso, o aparelho usa apenas recursos geométricos e sensores de inclinação. Mas como estas informações são usadas para determinação de distâncias? Ao usar pela primeira vez o app, ele pede para inserirmos nossa altura e, a partir daí, basta apontá-lo para o pé de qualquer objeto que sua distância é mostrada na tela. Com base nessas informações, como o aplicativo faz isso? Exemplifique.
5. Resolução da SP	A resolução de problemas geométricos inicia-se pela imaginação e pelo desenho simplificado do fenômeno ou da estrutura, seguido pela associação do todo ou partes com triângulos retângulos. A medida da distância entre o smartphone e um objeto a alguns metros é feita de maneira indireta, ou seja, nada, nem luz, som ou outra coisa qualquer, precisa ser enviado até o objeto. Um sensor de inclinação do aparelho mede seu ângulo em relação à vertical, e, conhecendo a altura do indivíduo, é possível fazer o cálculo da hipotenusa do triângulo da figura, que será usada para o cálculo da distância. Considerando uma pessoa de 1,7 metros, que em um teste com o aplicativo constatou um ângulo de 65°, tem-se:

Figura 2.26 – Esquema de cálculo



Fonte: Os autores

$$\cos\alpha = \frac{ca}{h} \Rightarrow \cos 65° = \frac{1{,}7}{h} \Rightarrow h = \frac{1{,}7}{\cos 65°} \Rightarrow h \cong \frac{1{,}7}{0{,}423} \cong 4{,}0$$

O valor desejado é do cateto oposto mostrado, que pode ser calculado em função da hipotenusa de 4,0 m obtida por uso do cosseno. Assim, basta aplicar a proporção seno.

$$sen\,\alpha = \frac{co}{h} \Rightarrow sen\,65° = \frac{co}{4{,}0} \Rightarrow co = 4{,}0 \cdot sen\,65°$$

$$\Rightarrow co \cong 4{,}0 \cdot 0{,}906 \cong 3{,}6$$

Portanto, a distância da pessoa até o pé do objeto visualizado com o uso do aparelho é de 3,6 m.
Observação: O aparelho não faz dois cálculos, mas um só, considerando a proporção entre seno e cosseno, que veremos na próxima seção; e que muitas vezes pode facilitar os cálculos.

Faça você mesmo

Um esquadro escolar bastante comum é aquele que tem dois ângulos agudos diferentes, e poucos sabem que estes ângulos são de 30° e 60°. Ao observar o esquadro, um aluno notou que sua marcação indicava que o cateto maior tinha 20,0 cm. Quais seriam, então, os comprimentos do cateto menor e da hipotenusa deste esquadro?

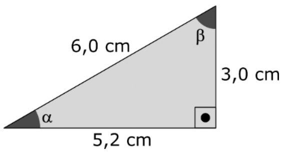
Atenção

Para todos os exercícios propostos, se necessário, faça o arredondamento do valor calculado conforme número de algarismos significativos dos dados fornecidos.

Faça valer a pena

1. Considerando a Figura 2.27, qual é o valor de seno e cosseno do ângulo α?

Figura 2.27 | Triângulo retângulo de lados 6,0 cm, 3,0 cm e 5,2 cm

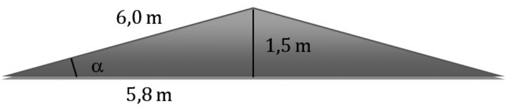


Fonte: Os autores

a) sen α = 0,50 e cos α = 0,87
b) sen α = 0,87 e cos α = 0,50
c) sen α = 0,60 e cos α = 0,86
d) sen α = 0,52 e cos α = 0,30
e) sen α = 0,57 e cos α = 0,58

2. Qual é o ângulo formado com a horizontal no telhado mostrado na Figura 2.28?

Figura 2.28 | Esboço de um telhado de duas águas



Fonte: Os autores

a) 15,0°
b) 14,5°
c) 15,5°
d) 16,0°
e) 20,0°

3. Um projetista fez os cálculos para descobrir qual é o comprimento de uma esteira rolante que será usada para levar caixas de um piso ao outro em uma empresa. Considerando que a elevação total deve ser de 4,0 m e o ângulo de inclinação da esteira de 25°, qual é o comprimento calculado?
a) 5,4 m
b) 6,5 m
c) 9,5 m
d) 10,2 m
e) 12,4 m

Seção 2.3

Tangente e relações trigonométricas

Diálogo aberto

Caro aluno, seja bem-vindo a mais uma etapa desta nossa visita ao mundo da trigonometria. Até aqui aprendemos a identificar algumas figuras geométricas, focando a elementar entre todas, o triângulo retângulo. Estudando suas propriedades, vimos como usá-las como ferramentas para resolver diferentes problemas envolvendo estruturas ou situações descritas por figuras, desde que possamos associá-las ao triângulo retângulo.

Nesta seção, estudaremos a última relação trigonométrica, a tangente, e as associações possíveis entre todas elas, bem como suas variantes.

Veremos como o uso da tangente será útil aos sócios da empresa SABC para determinar as peças que serão utilizadas no projeto hidráulico de uma residência, permitindo economizar material e, com isso, diminuir o custo da obra e o impacto ambiental das construções.

Alguns conceitos matemáticos são tão comuns que parecem ditados populares, como: "a menor distância entre dois pontos é uma reta". E a economia de materiais é uma importante maneira de diminuir custos e o impacto ambiental das ações humanas, resumida numa frase hoje bastante divulgada: "menos é mais". Pois bem, qual seria, então, a economia causada em sistemas hidráulicos na construção civil se existissem no mercado mais opções de juntas de tubulações? Por quê? Hoje, só se encontram nas lojas cotovelos (Figura 2.29) de 45° e 90°, mas e se fossem também comercializados cotovelos de 15°, 30°, 60° e 75° graus, qual seria a economia total em um projeto hidráulico residencial ao considerarmos que a tubulação poderia ligar dois pontos pelo menor caminho, sem ter de fazer ziguezague? Como definir qual cotovelo utilizar?

Figura 2.29 | Conexões tipo joelho ou cotovelo de cobre

Fonte: <https://pixabay.com/pt/cobre-acess%C3%B3rios-encanamento-metal-1039483/>. Acesso em: 30 nov. 2015.

Não pode faltar

Até aqui estudamos as relações entre as partes internas, externas e duas entre as internas e as externas de um triângulo retângulo, mas mais que isso, pois, para quaisquer triângulos:

Lembre-se

- A somatória de seus ângulos internos é sempre 180°.
- As relações de proporção entre os lados de um triângulo são iguais, numericamente, à relação de proporção entre os mesmos lados de um triângulo semelhante (maior ou menor).

Para o triângulo retângulo, e tomando um ângulo agudo como referência:

Lembre-se

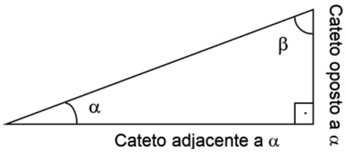
- A razão entre o cateto oposto e a hipotenusa denomina-se seno.
- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa denomina-se cosseno.

Tangente

Agora, estudaremos a última relação de proporção para o triângulo retângulo, a tangente, que envolve a razão que faltava entre os lados do triângulo retângulo: cateto oposto/cateto adjacente. Para melhor visualizar esta nova relação de proporção, vejamos a Figura 2.30:

A tangente é definida, quando se toma o ângulo α como referência, como a divisão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a este ângulo, e possui valor único para cada ângulo, assim como o seno e o cosseno. E, da mesma forma, também se encontram em calculadoras científicas funções que transformam ângulos nesta proporção, denotadas tan ou tg, e funções que fazem o inverso, transformando as proporções em ângulos, denotadas $\tan^{-1}$, atan ou arctg.

Figura 2.30 | Triângulo retângulo com lados nomeados, tomando α como referência



Fonte: Os autores

Assimile

$\tan\alpha = \frac{co}{ca}$ ou $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{co}{ca}$ $\alpha = arctg\frac{co}{ca}$ ou $\alpha = atan\frac{co}{ca}$

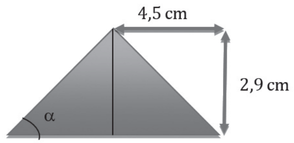
Pesquise mais

A função denotada nas calculadoras mais vendidas é $\tan^{-1}$ e executa a função inversa da função tangente. Entretanto, esta notação pode gerar confusão por permitir que se pense que basta inverter o valor do ângulo, ou mesmo de tg(α). Assim, $tg^{-1}\alpha \neq \frac{1}{tg\,\alpha}$. Para saber mais sobre funções inversas, acesse: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/ama/Supl-1a200411312723.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2016.

Exemplificando

Ao analisar uma ilustração que representa a pirâmide de Quéops (Figura 2.31), e medindo seus lados com uma régua, um estudante se questionou: como determinar o ângulo α junto à base da pirâmide?

Figura 2.31 | Ilustração representativa da pirâmide de Quéops



Fonte: Os autores

Resolução:

Para determinar o ângulo, primeiro se faz o cálculo da tangente:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{co}{ca} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{2{,}9}{4{,}5} = 0{,}644\ ...$$

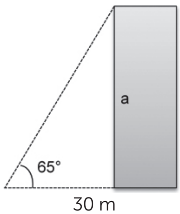
A partir deste dado, e com uma calculadora científica popular, determina-se o ângulo de inclinação das laterais da pirâmide, utilizando-se a função $\tan^{-1}$:

$$\alpha = \ tan^{-1}\ 0{,}644\ ... = 32{,}79\ ...^{\circ}\ \cong 33^{\circ}$$

Exemplificando

Usando um teodolito, um técnico em construção civil mediu o ângulo de sua posição a 30 m de um prédio até o topo, apresentando um valor de 65°. Qual é a altura do prédio da Figura 2.32?

Figura 2.32 | Figura representativa do prédio e das medidas feitas por um técnico em construção civil



Fonte: Os autores

Resolução:

Aplicando-se a definição de tangente:

$$tg\ 65° = \frac{a}{30}$$

Utilizando uma calculadora científica, pode-se obter a tangente de 65°, que é igual a 2,1445...

Ao substituir este valor na equação anterior, tem-se:

$$2{,}1445\ldots = \frac{a}{30} \Rightarrow a = 64{,}3\ldots \cong 64\ m$$

Logo, a altura do prédio é de, aproximadamente, 64 m.

Faça você mesmo

1) Qual é a altura de um prédio considerando que, ao nos afastarmos 40 m dele, vemos seu topo num ângulo de 30° em relação à horizontal? Despreze a altura da pessoa.

2) Calcule a profundidade de um poço sabendo que sua boca circular possui 1,2 m de diâmetro e que, quando a luz solar ultrapassa um ângulo de 5° com a vertical, seu fundo fica tomado pela sombra.

Reflita

Se seno e cosseno são relações de proporção entre os catetos e a hipotenusa, e que o maior tamanho possível de qualquer cateto é o da própria hipotenusa, num limite em que a altura do triângulo é mínima, ou seja, tende a zero, ou noutro em que sua largura é mínima, quais são os maiores e os menores valores possíveis para seno e cosseno?

Figura 2.33 | Triângulos retângulos com: (a) altura mínima e medida de base tendendo à medida da hipotenusa; (b) base com medida mínima e medida de altura tendendo à medida da hipotenusa.

Fonte: os autores

Os valores exatos para os ângulos notáveis para seno, cosseno e tangente podem ser vistos na Tabela 2.2:

Tabela 2.2 | Valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos notáveis

α	0°	30°	45°	60°	90°
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Inexistente

Fonte: Os autores

Relações trigonométricas

Muitas são as variantes e as relações entre as razões trigonométricas, sendo duas relações dadas por:

Assimile

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{e} \qquad sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

A primeira é facilmente demonstrada isolando-se os catetos nas definições de seno e cosseno, e substituindo-os na definição de tangente:

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \frac{co}{h} \Rightarrow co = h \cdot sen\ \alpha \\[2em] cos\ \alpha = \frac{ca}{h} \Rightarrow ca = h \cdot cos\ \alpha \end{array}\right\} tg\ \alpha = \frac{co}{ca} \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{h \cdot sen\ \alpha}{h \cdot cos\ \alpha} \Rightarrow \boxed{tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}}$$

A segunda, conhecida como **relação fundamental da trigonometria**, também é facilmente demonstrada isolando-se os catetos nas funções seno e cosseno, mas substituindo-os no Teorema de Pitágoras, considerando *co*=*a* e *ca*=*b*:

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \frac{co}{h} \Rightarrow co = h \cdot sen\ \alpha \\[1.5em] cos\ \alpha = \frac{ca}{h} \Rightarrow ca = h \cdot cos\ \alpha \end{array}\right\} h^2 = co^2 + ca^2 \Rightarrow h^2 = (h \cdot sen\ \alpha)^2 + (h \cdot cos\ \alpha)^2$$

Expandindo os quadrados:

$$h^2 = (h \cdot sen\ \alpha)^2 + (h \cdot cos\ \alpha)^2 \Rightarrow h^2 = h^2 \cdot sen^2\alpha + h^2 \cdot cos^2\alpha$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por h^2:

$$1 = sen^2\alpha + cos^2\alpha$$

Quanto às variantes, temos os inversos das proporções seno, cosseno e tangente, que são denominados cossecante, secante e cotangente, respectivamente:

$$cossec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} \qquad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} \qquad cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

Pesquise mais

Todas as expressões mostradas e muitas outras, com suas deduções e aplicações, podem ser aprofundadas no link: <http://coral.ufsm.br/gpscom/professores/andrei/Teoria/trigonometria.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2015.

Faça você mesmo

3) Tente demonstrar os valores da tangente para os ângulos notáveis mostrados na Tabela 2.2 aplicando a relação:

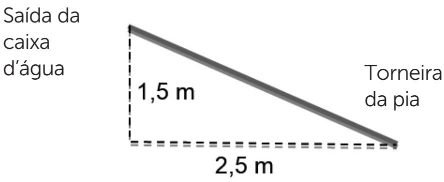
$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

Sem medo de errar

Como utilizar os conceitos de trigonometria discutidos até aqui para reduzir o uso de materiais na instalação hidráulica de uma residência? O comum é o uso de tubulações retilíneas e de cotovelos de 45° e 90° para fazer as curvas. Mas a ideia dos sócios da SABC é evitar os ziguezagues fazendo a interligação de um ponto mais alto com um mais baixo em linha reta, numa diagonal. Para isso, devem utilizar cotovelos com ângulos de 15°, 30°, 60° ou 90°. Mas como definir qual cotovelo utilizar? Qual é a economia na metragem de encanamento neste caso?

Para definir o ângulo é preciso conhecer o deslocamento vertical e longitudinal entre o ponto mais alto e mais baixo de cada ligação a ser feita, utilizando estes valores para calcular a tangente, e o valor da tangente para obter o ângulo aplicando arctg. Vejamos um exemplo, considerando a parede lateral de um banheiro mostrada na Figura 2.34:

Figura 2.34 | Representação de uma parede lateral de um banheiro mostrando duas possibilidades de ligação hidráulica entre a saída da caixa d'água e a torneira da pia. Em azul a ligação proposta pela SABC em diagonal e, em preto pontilhado, a ligação padrão em ziguezague



Fonte: Os autores

A tangente do ângulo agudo (α) na base do triângulo retângulo da Figura 2.34 é:

$$tg\ \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,60 \Rightarrow \alpha = arctg\ 0,60 = 30,9\ldots° \cong 31°$$

Lembre-se

Na seção anterior, vimos que a somatória dos ângulos internos de um triângulo é 180°. No caso de um triângulo retângulo, um ângulo agudo é complementar ao outro, ou seja: $\beta = 90 - \alpha$.

Portanto, o ângulo com a vertical é:

$$\beta = 90° - 31° = 59°$$

Como a tubulação aceita pequenas flexões, os cotovelos a serem usados são os que mais se aproximam de 31° e 59°, neste caso, os de 30° e 60°, respectivamente.

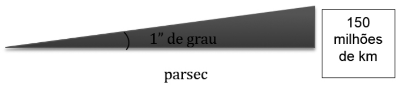
Para o cálculo da economia em tubulação, basta aplicar o Teorema de Pitágoras para descobrir o comprimento do tubo na diagonal, da seguinte forma:

$$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow h = \sqrt{1{,}5^2 + 2{,}5^2} \Rightarrow h = \sqrt{8{,}5} \Rightarrow h = 2{,}915\ldots$$

Conclui-se que a diagonal possui aproximadamente 2,92 m. Desta forma, a economia em tubulação neste trecho é calculada considerando a tubulação que seria gasta fazendo ziguezague menos a na diagonal: (1,5 + 2,5) - 2,92 = 1,08, ou seja, só neste trecho a economia é de, aproximadamente, 1,0 m de tubulação, uma economia de quase 25% de material $(25\% \cong \frac{1{,}08}{1{,}5+2{,}5}.100\%)$.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.	
Medindo distâncias inacessíveis	
1. Competências de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicação das relações trigonométricas para obtenção indireta de medidas.
3. Conteúdos relacionados	Tangente, medidas de ângulos.
4. Descrição da SP	Em astronomia, distâncias são medidas em milhões, bilhões e trilhões... de quilômetros. Por isso é comum o uso de medidas como ano-luz e parsec. O parsec é a distância referente à base de um triângulo retângulo cuja altura é a distância entre o Sol e a Terra, e o ângulo agudo com a base é de 1 segundo de grau, ou seja, 1º dividido por 3600. Quanto vale o parsec em quilômetros? Dado: a distância da Terra ao Sol tem valor médio de 150 milhões de quilômetros. **Atenção** Quando se trabalha com medidas de ângulos em graus, é comum utilizar subdivisões do grau, que são o minuto e o segundo: • 1 grau possui 60 minutos, ou 1° = 60'. • 1 minuto possui 60 segundos, ou 1' = 60''.

5. Resolução da SP	Primeiramente, devemos fazer um desenho representativo: Figura 2.35 – Representação de 1 parsec  Fonte: Os autores Utilizando uma calculadora científica, pode-se realizar a sequência: $tg\,\frac{1°}{3600} = \frac{150000000}{parsec} \rightarrow 4{,}848\ldots E-6 = \frac{150000000}{parsec}$ $parsec = \frac{150000000}{4{,}848\ldots E-6} = 3{,}09\ldots E13$ Como a simbologia E é equivalente a $\times 10^n$, podemos reescrever o resultado andando com a vírgula para a direita 13 vezes. Então, temos aproximadamente: $3{,}09\ldots E13 \cong 30900000000000{,}0 \rightarrow$ 30.900.000.000.000 km Portanto, 1 parsec equivale a, aproximadamente, 31 trilhões de quilômetros.

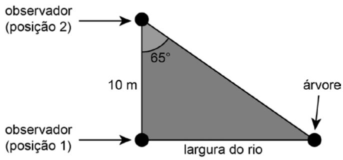
Atenção

Para ficar mais claro, a notação 2*E*– 3 indica $2 \cdot 10^{-3}$, cujo resultado é 0,002. Já, ao escrevermos 5*E*2, estamos indicando $5 \cdot 10^2$, cujo resultado é 500. Essa notação é muito utilizada em calculadoras científicas.

Faça você mesmo

4) Na margem de um rio tem uma árvore e há um observador posicionado na margem oposta em frente à árvore, como na Figura 2.36. Caminha 10 m para o lado e mede a inclinação entre a árvore e a margem do rio, que foi de 65°. Qual é a largura do rio?

Figura 2.36 | Triângulo retângulo associado às medidas feitas para calcular a largura de um rio

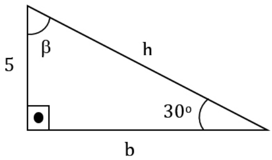


Fonte: Os autores

Faça valer a pena

Considere o triângulo retângulo da Figura 2.37 para a resolução das Questões 1 e 2. Para as questões que não apresentam figuras representativas, deve-se fazer um desenho que represente a descrição do respectivo enunciado.

Figura 2.37 | Triângulo retângulo com altura 5 e ângulo com a base de 30°



Fonte: Os autores

1. Qual é o valor da medida **b**? Dica: utilize valores da Tabela 2.2.

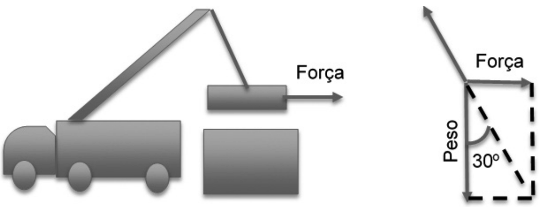
a) 5,3
b) 3,5
c) 15
d) 7,8
e) 8,7

2. Que ângulo gera a tangente $\sqrt{3}$?

a) 20°
b) 45°
c) 30°
d) 15°
e) 60°

3. Na Figura 2.38, vê-se um piano suspenso por um munk, sendo puxado para cima de uma plataforma. Qual é a força mínima que os responsáveis pela tarefa precisam fazer? Considere que o ângulo do cabo que liga o piano ao braço do munk, ao ser puxado, seja de 30° com a vertical, e que o piano possua um peso de 200 kgf. Dado: tg 30°= 0,577.

Figura 2.38 | Caminhão munk usado para elevar um piano até o alto de uma plataforma, onde é deslocado para o lado por uma força



Fonte: Os autores

a) 100,5 kgf
b) 115,4 kgf
c) 105,5 kgf
d) 125,4 kgf
e) 95,5 kgf

Seção 2.4

Funções trigonométricas

Diálogo aberto

Caro aluno, seja bem-vindo à última seção da Unidade 2. Nesta seção, veremos como as razões trigonométricas podem atuar como função, fazendo a associação entre valores de ângulos e coordenadas cartesianas. Assim, passaremos a denominar estas razões funções trigonométricas, que na forma de gráficos possuem valores que se repetem e são, por isso, funções periódicas utilizadas para descrever o movimento de pêndulos e sistemas vibratórios, como o sistema de amortecimento automotivo, vibrações em mancais de eixos rotativos e ondas sonoras ou eletromagnéticas (luz).

Por descreverem fenômenos periódicos, as funções trigonométricas ajudarão os sócios da SABC a resolver mais um problema. Para isso precisamos considerar duas coisas: 1ª – É natural para todos nós observarmos os períodos correspondentes ao dia e noite, mas pouco nos atentamos ao fato de os dias serem mais curtos no inverno e mais longos no verão. Isto se deve à inclinação do arco descrito pelo deslocamento do Sol no céu, que tem comprimentos diferentes em cada uma destas épocas; e 2ª – Uma invenção brasileira bastante interessante é a lâmpada de Moser (disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=XMu7ykPQ1wY>. Acesso em: 29 dez. 2015), que usa uma garrafa PET de 2 litros cheia de água e ilumina o mesmo que uma lâmpada incandescente de 40 W, mas sem gastar nada de energia elétrica.

Vocabulário

PET: *Polyethylene terephthalate* ou tereftalato de polietileno é o nome do polímero usado para fabricar garrafas de refrigerante.

Considerando estes dois fatos, qual é a economia de energia elétrica na iluminação de um galpão onde são usadas 10 lâmpadas de mercúrio de 200 W cada, se durante o dia usássemos lâmpadas de Moser em número que gere iluminação equivalente a estas lâmpadas incandescentes? Para isso, precisamos calcular o gasto energético em kWh correspondente ao período iluminado do dia, sabendo que a duração do dia (valor periódico) pode ser calculada com o uso das equações a seguir (ANEEL, 2005):

$$D = \frac{2H}{15} \text{, onde } H = \arccos(\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\beta) \text{ e } \beta = 23,45 \operatorname{sen}\left(360 \frac{284 + J}{365}\right).$$

Em que:

- D é a duração do dia em horas;
- θ é a latitude local (Para a Região Sudeste adotaremos $\theta = 23°$);
- J é o dia juliano contado a partir de 1º de janeiro;
- os valores dos ângulos são calculados em graus.

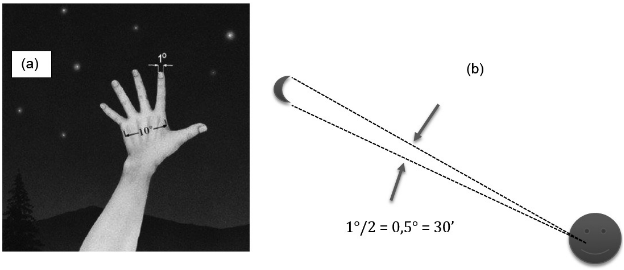
Não pode faltar

Antes de falar sobre as funções trigonométricas, vamos relembrar alguns conceitos que envolvem medidas de ângulos, que podem ser feitas em graus, grados, rotação e radianos.

No nosso cotidiano, adotamos a unidade criada pelos babilônios há milhares de anos, quando eles achavam que o ano era constituído por 360 dias e subdividiram a circunferência em 360 unidades denominadas graus. Assim, uma volta completa possui 360°, meia volta 180° e assim por diante. Como o sistema numérico dos babilônios era sexagesimal, dividiram cada unidade de grau em 60 minutos, e cada arco de minuto em 60 segundos. Deste modo, 30,5° é igual a 30° e 30 minutos, denotado como: 30°30′ (30° + 0,5 · 60′ = 30°30′).

Como exemplo de medidas em graus, os iniciantes em astronomia utilizam medidas de ângulos para localização e dimensionamento aparente de objetos celestes. A Lua, observada a olho nu, tem diâmetro próximo a 0,5° ou 30′ de arco (INPE), sendo 1° a largura de um dedo visto com o braço esticado (ver Figura 2.39). Sabe-se que a capacidade máxima de distinção de pontos pelo olho humano está entre 1′ e 2′ de arco (STOLFI, 2008), ou seja, próximo a 0,033° (=2°/60).

Figura 2.39 | Medida angular da Lua feita por um observador na superfície da Terra: (a) Regra prática para medir ângulos visualizando a mão com o braço estendido; (b) Esboço do ângulo de 0,5°



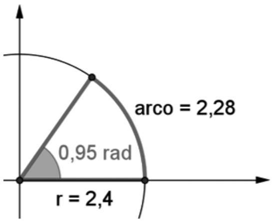
Fonte: <http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/Aula2-122.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2015

No meio científico, usa-se o radiano (rad) como unidade de medida de ângulos.

Assimile

Radiano: razão geométrica do comprimento de um arco de circunferência pelo seu raio. Na Figura 2.40, por exemplo, podemos ver a representação de um ângulo de medida 0,96 rad, pois $\frac{2,28}{2,4} = 0,95$.

Figura 2.40 | Arco e raio definindo o valor do radiano



Fonte: Os autores

Reflita

A proposta de radiano, como nos é apresentada hoje, é a de usar o raio como unidade de medida comum para o arco (QUINTANEIRO; GIRALDO; PINTO, 2010).

Segundo Souza (2013, p. 19):

> **Ao contrário do grau, o radiano é o resultado de estudos, principalmente, do matemático Thomas Muir e do físico James T. Thomson que consideraram essencial a criação de uma nova unidade de medida para ângulos. Provavelmente, sua criação está ligada a simplificação de certas fórmulas matemáticas e físicas.**

Como uma volta completa gera uma circunferência com arco $2\pi r$ (perímetro), meia-volta tem comprimento πr. Atribuindo $r = 1$, o arco desta meia-volta tem comprimento π. Note que a medida do arco coincide com a medida do ângulo em radianos.

Assimile

A conversão entre graus e radiano é simples, basta verificar que 180° é a mesma medida de π rad.

Exemplificando

Qual é o valor em:

a) radianos para o ângulo de 45°?

b) graus para o ângulo de $\frac{3\pi}{2}$ rad?

Resolução:

a) Seja α esse valor. Por regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & --- & \pi \\ 45^\circ & --- & \alpha \end{array} \rightarrow 180\alpha = 45\pi \Rightarrow \alpha = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

b) Seja β esse valor. Por regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & --- & \pi \\ \beta & --- & \frac{3\pi}{2} \end{array} \rightarrow \beta\pi = 180\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{180 \cdot 3\pi}{2\pi} = \frac{180 \cdot 3}{2} = 270 \rightarrow 270^\circ$$

Faça você mesmo

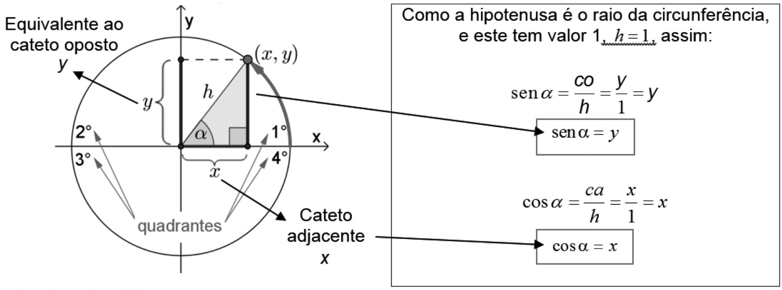
1) Faça a conversão de 30° para radianos e de 1,25 rad para graus.

Definindo r = 1 para uma circunferência inscrita no plano cartesiano com centro posicionado na origem (0, 0), pode-se associar um triângulo retângulo ao ponto que delimita um arco (ver Figura 2.41). A altura deste triângulo corresponde ao valor y, e sua base corresponde ao valor x, e, como $r = h = 1$, sen $\alpha = y$ e cos $\alpha = x$.

Reflita

Assim, toda trigonometria feita em triângulos retângulos relacionando ângulos a razões de segmentos equivale a relações entre arcos e cordas feitas na circunferência (QUINTANEIRO; GIRALDO; PINTO, 2010).

Figura 2.41 | Circunferência trigonométrica



Fonte: Os autores

Como bem exposto por Souza (2013, p. 32), o matemático Euler (1707-1783) "deu grandes contribuições para a trigonometria" quando definiu "funções associando números e não ângulos" às razões trigonométricas. E continua: "Uma grande ideia sua foi criar a função E [...]. Esta função associa a cada número um ponto na circunferência unitária [...] C" (SOUZA, 2013, p. 32). Esta circunferência é dividida em quatro partes pelos eixos cartesianos, chamados quadrantes e contados a partir da origem dos arcos no sentido anti-horário, convenientemente definido como sentido positivo. Deste modo:

A função de Euler $E:\mathbb{R}\rightarrow C$ faz corresponder a cada número $t\in\mathbb{R}$ o ponto $E(t)$ = (x, y) da circunferência unitária, de modo que:

• E(0) = (1, 0).

• se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência, a partir da origem dos arcos, um caminho de comprimento t no sentido positivo (anti-horário). O ponto final do caminho será denominado E(t).

• se $t < 0$, E(t) será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte da origem dos arcos e percorre C no sentido negativo (horário) (SOUZA, 2013, p. 32).

Atenção

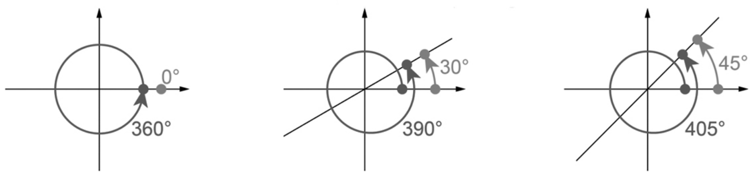
O símbolo $|t|$ indica o módulo, ou valor absoluto, do número t. O módulo de t é definido da seguinte forma: $|t| = \sqrt{t^2}$.

Reflita

Com o uso da função de Euler, as funções trigonométricas não ficam restritas ao primeiro quadrante. Note que o resultado para sen 1110° = 0,5 é impossível de ser obtido pensando no seno como razão trigonométrica fora da circunferência, pois não existe triângulo retângulo com este ângulo interno. Mas por que seno de 1110° é igual a seno de 30°?

Para compreender melhor essa pergunta e sua resposta, perceba que, após percorrermos 360° (2π rad), reiniciamos o trajeto em torno da circunferência. Assim, ocorre a equivalência das posições 0° ≡ 360°, 30° ≡ 390°, 45° ≡ 405°, e assim por diante, conforme Figura 2.42.

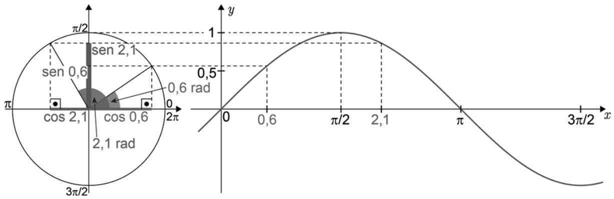
Figura 2.42 | Ângulos equivalentes (ou congruentes)



Fonte: Os autores

Considerando seno como a altura do triângulo retângulo inscrito na circunferência trigonométrica, é possível associar um gráfico para a função sen α (ver Figura 2.43).

Figura 2.43 | Gráfico da função sen α a partir dos segmentos de reta do eixo y associados a ângulos em radianos na circunferência trigonométrica. Em destaque, os pontos correspondentes a seno de 0,6 rad e 2,1 rad

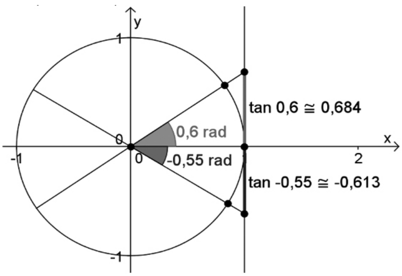


Fonte: Os autores

Como seno tem o valor da altura (*y*) do triângulo retângulo inscrito na circunferência trigonométrica, a função seno apresentará valores positivos para ângulos compreendidos no 1º e 2º quadrantes, e valores negativos para o 3º e 4º quadrantes. Analogamente, como cosseno tem o valor da base (*x*) do triângulo citado, a função cosseno terá valores positivos para os quadrantes 1 e 4, e valores negativos para o 2º e 3º quadrantes. Para visualizar melhor o comportamento das funções seno e cosseno, assista aos vídeos <https://www.youtube.com/watch?v=o_eSUjsfb-M&spfreload=10> e <https://www.youtube.com/watch?v=NvVDjbLEJJ0>. Acesso em: 30 dez. 2015.

Os valores da função tangente são dados pela altura onde ocorre o cruzamento entre o prolongamento do raio que define o arco na circunferência trigonométrica e uma reta que tangencia a origem dos arcos (ver Figura 2.44), possuindo valores positivos para os quadrantes 1 e 3, e negativos para 2º e 4º quadrantes.

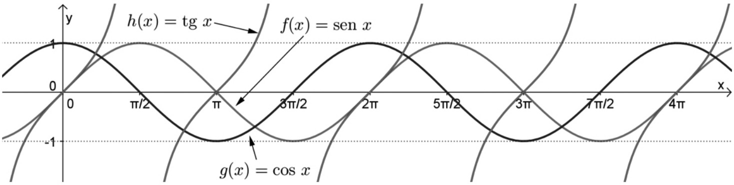
Figura 2.44 | Representação geométrica dos valores tan 0,6 e tan -0,55



Fonte: Os autores

O comportamento das funções seno, cosseno e tangente pode ser visto na Figura 2.45, na qual é possível observar: 1º - a repetitividade das funções trigonométricas; 2º - que os valores extremos de seno e cosseno são 1 e -1; 3º - que a função seno inicia-se em zero, e cosseno em 1; 4º - que as funções seno e cosseno lembram uma onda; e, 5º - que para valores de α próximos a 0 rad, 2π rad, 4π rad,..., $n2\pi$ rad, sen $\alpha \cong$ tgα .

Figura 2.45 | Valores para as funções seno, cosseno e tangente para um ciclo e 1/4 de ângulo em radianos



Fonte: Os autores

Pode-se observar o comportamento das funções trigonométricas acessando o link: <http://www.geogebra.org/m/2420237>. Acesso em: 11 jan. 2016.

Assimile

Os valores máximo e mínimo para seno e cosseno são 1 e -1, pois o maior valor para a altura (seno) ou para a base (cosseno) do triângulo retângulo inscrito na circunferência trigonométrica é a do próprio raio desta circunferência, que é 1.

Para a tangente, quando o ângulo se aproxima de 90° (ou $\pi/2$), seu valor cresce rapidamente, tendendo ao infinito, e para valores próximos a -90°, ou 270° (ou ainda $3\pi/2$), seu valor tende ao infinito, mas negativamente.

Há ainda três propriedades interessantes:

• sen(-x) = - sen*x* (o seno é uma função ímpar);

• cos(-x) = cos*x* (o cosseno é uma função par);

• tg(-x) = - tg*x* (a tangente é uma função ímpar).

Pesquise mais

Veja mais detalhes sobre as funções trigonométricas em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/105486/Thuysa%20Schlichting%20de%20Souza.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 30 dez. 2015.

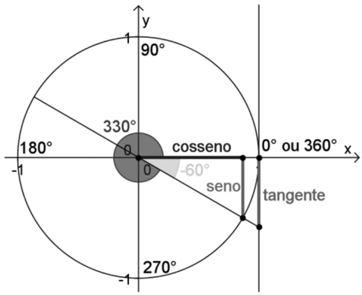
Exemplificando

Qual é o seno, o cosseno e a tangente de 330°?

Resolução:

Como podemos ver na Figura 2.46, 330° corresponde a um arco que termina no 4º quadrante: a altura do triângulo retângulo formado será negativa, logo sen 330° < 0; a base deste triângulo será positiva, logo cos 330° > 0; e o prolongamento do raio que forma sua hipotenusa cortará a reta que tangencia a origem dos arcos abaixo do eixo x (eixo das abscissas), logo tg 330° < 0.

Figura 2.46 | Triângulo retângulo formado pelo ângulo de 330°



Fonte: Os autores

Os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis podem ser obtidos na tabela de valores para as funções trigonométricas da seção anterior deste livro. Para 60° são: $\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ e $\text{tg}\,60° = \sqrt{3}$. Alterando os sinais para adequar os valores ao 4º quadrante, temos:

$$\text{sen}(330°) = \text{sen}(-60°) = -\text{sen}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos(330°) = \cos(-60°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}; \text{ e}$$

$$\text{tg}(330°) = \text{tg}(-60°) = -\text{tg}(60°) = -\sqrt{3}.$$

Faça você mesmo

2) Ache o seno, o cosseno e a tangente de 150°.

Sem medo de errar

Para calcularmos a economia de energia com o uso das lâmpadas de Moser, precisamos saber por quantas horas elas atuarão, ou seja, qual é o período iluminado do dia no qual as lâmpadas elétricas ficarão apagadas. O número de horas claras de um dia, o qual denotaremos por D, pode ser calculado pela equação (ANEEL, 2005):

$D = \dfrac{2H}{15}$, na qual o parâmetro H é obtido pelo arco cosseno, como segue:

H = arccos (tg θ. tg β), que, por sua vez, usa as variáveis θ e β. O valor de θ é o valor da latitude local, que na Região Sudeste do Brasil é de aproximadamente 23°. O valor β pode ser calculado usando a seguinte função:

$\beta = 23{,}45 \operatorname{sen}\left(360 \dfrac{284 + J}{365}\right)$ na qual J é o dia juliano (1 para 1 de janeiro até 365 para 31 de dezembro). Os ângulos estão mensurados em graus.

As estações do ano possuem início e fim em:

- Outono: de 21 de março a 21 de junho.
- Inverno: de 21 de junho a 23 de setembro.
- Primavera: de 23 de setembro a 21 de dezembro.
- Verão: de 21 de dezembro a 21 de março.

O solstício (quando o Sol parece se mover mais lentamente no céu) define o maior dia do verão e o menor dia no inverno, ocorrendo próximo ao início destas estações. Assim, *J* = 170 para o inverno e *J* = 353 para o verão.

Com todos estes dados em mãos, podemos calcular D iniciando pelo cálculo de β, como se segue:

Inverno:

$$\beta = 23{,}45 \cdot \text{sen}\left(360\frac{284+170}{365}\right) = 23{,}45 \cdot \text{sen}(447{,}78...) = 23{,}45 \cdot 0{,}99925... = 23{,}4324...$$

$$H = \arccos(\text{tg}\, 23 \cdot \text{tg}\, 23{,}4324...) = \arccos(0{,}42447... \cdot 0{,}43341...) = 79{,}398...$$

$$D = \frac{2 \cdot 79{,}398...}{15} = 10{,}58... \cong 10\text{h}35'$$

Verão:

$$\beta = 23{,}45 \cdot \text{sen}\left(360\frac{284+353}{365}\right) = 23{,}45 \cdot \text{sen}(628{,}27...) = 23{,}45 \cdot (-0{,}99954...) = -23{,}4393...$$

$$H = \arccos\left(\text{tg}\, 23 \cdot \text{tg}\left(-23{,}4393...\right)\right) = \arccos\left(0{,}42447... \cdot \left(-0{,}43355...\right)\right) = 100{,}60...$$

$$D = \frac{2 \cdot 100{,}60...}{15} = 13{,}41... \cong 13\text{h}25'$$

Como neste galpão são usadas 10 lâmpadas de 200 W cada (ou 0,2 kW), o consumo no horário iluminado, em kWh, e a economia em reais, considerando R$ 0,45 por 1 kWh, são:

Consumo e economia diária no inverno:

$E = n \cdot P \cdot t = 10 \cdot 0{,}2 \cdot 10{,}58... = 21{,}17... \cong \mathbf{21\ kWh}$. Note que *n* é o número de lâmpadas, *P* é a potência de cada lâmpada e *t* é o tempo que elas ficariam ligadas. Ao preço de R$ 0,45 tem-se uma economia de R$ 9,45 (= 0,45 · 21) por dia.

Consumo e economia diária no verão:

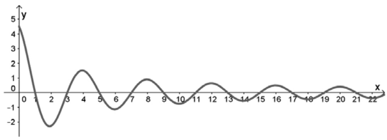
$E = n \cdot P \cdot t = 10 \cdot 0{,}2 \cdot 13{,}41... = 26{,}82... \cong \mathbf{27\ kWh}$. Ao preço de R$ 0,45 tem-se uma economia de R$ 12,15 (= 0,45 · 27) por dia.

Note que a potência total consumida é 10 lâmpadas vezes 200W = 2000 W = 2 kW.

Em um mês de 30 dias, a economia seria de, aproximadamente, R$ 284 (= 30 · 9,45) no inverno e R$ 365 (= 30 · 12,15) no verão, com uma economia média de R$ 3.894 $\left(= 12 \cdot \frac{284+365}{2}\right)$ por ano.

O gráfico da função que relaciona o dia juliano com a duração dos dias ao longo do ano não é trivial, mas pode ser obtido usando-se programas como o GeoGebra, que pode ser visualizado por meio do link: <http://www.geogebra.org/m/2420333> (Acesso em: 4 jan. 2015).

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.	
Investigando um sistema de amortecedor automotivo	
1. Competências de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Compreender como as funções trigonométricas descrevem fenômenos.
3. Conteúdos relacionados	Funções trigonométricas.
4. Descrição da SP	Um sistema de amortecimento veicular usa uma mola e um amortecedor para compensar variações na altura das vias. Em outras palavras, o sistema de amortecimento compensa as irregularidades das ruas, avenidas, estradas, rodovias etc. Se este sistema for muito macio, o carro oscila e pode tombar ou trepidar e escorregar em uma curva, mas, se for muito rígido, os ocupantes do carro terão a impressão de estarem numa carroça. O meio termo é considerado o ideal, e este caso é alcançado quando uma medida denominada fator de amortecimento é igual ou próxima de 1. A equação que descreve a ação das forças no sistema resulta numa função, que é a multiplicação de uma função exponencial e outra cossenoidal, e tem este fator de amortecimento como uma de suas variáveis. Um gráfico similar ao de um sistema desgastado (fator de amortecimento ruim) pode ser obtido com a função puramente cossenoidal $f(x)=\frac{9}{x+2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ com ângulos em radianos, em que f(x) representa a variação de altura do sistema em cm e x o tempo em segundos. Parte da curva desta função cossenoidal está mostrada na Figura 2.47. Em quais momentos o gráfico desta função cruza com o eixo x? Qual é a amplitude da oscilação do sistema descrito por esta função no instante x = 10s? Figura 2.47 | Função cossenoidal que representa as oscilações de um sistema de amortecimento automotivo  Fonte: Os autores

5. Resolução da SP	Os momentos em que o gráfico da função cruza com o eixo x são os zeros da função; portanto, basta fazer f(x) = 0 e resolver a equação resultante. As raízes desta equação serão os momentos para os quais a função tem valor zero. $$f(x)=0 \Rightarrow \underbrace{\frac{9}{x+2}}_{a} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}_{b}=0 \Rightarrow a \cdot b=0$$ Como o produto de a e b é igual a 0, ou a = 0 ou b = 0. Acontece que $\frac{9}{x+2}$ jamais se anula, independentemente do valor de x. Deste modo, podemos concentrar nossa análise em $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Como cosseno tem o valor da base do triângulo retângulo inscrito na circunferência trigonométrica, e este é igual a zero para x = 90°, 270°, 450°, 630°, 810°, ..., ou, generalizando, x = 90° + n · 180° ou, em radianos, $x=\frac{\pi}{2}+n \cdot \pi$, temos: • Para 90°: $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}x \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}x \Rightarrow x=1 \rightarrow 1\text{s}$ • Para 270°: $\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}x \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{2 \cdot 3}{2}=x \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3 \rightarrow 3\text{s}$ • ... • Para 90° + n · 180°: $$\frac{\pi}{2}+n \cdot \pi=\frac{\pi}{2}x \Rightarrow \frac{1}{2}+n=\frac{1}{2}x \Rightarrow x=\frac{2}{2}+2n=1+2n$$ Interpretando o resultado: f(x) = 0 pela primeira vez em x = 1 s. A partir daí, temos f(x) = 0 a cada 2 s (x = 1, 3, 5... para n = 1, 2, 3...). A amplitude para x = 4 s é: $$f(4)=\frac{9}{4+2}\cos\left(\frac{\pi}{2}4\right)=\frac{9}{6}\cos(2\pi)=1,5 \cdot 1=1,5 \rightarrow 1,5\ \text{cm}$$

Lembre-se

Lembre-se: 90° = $\frac{\pi}{2}$ rad, 180° = π rad, 270° = $\frac{3\pi}{2}$ rad e 360° = 2π rad.

Faça você mesmo

3) Uma peça metálica presa a uma mola apresenta um movimento oscilatório vertical descrito pela função $f(t)=2\,\text{sen}(\pi \cdot t)$ com ângulos em radianos, na qual f(t) é medido em metros e t em segundos. Qual é a altura máxima do movimento? Em quais instantes a peça metálica atinge a altura máxima?

Faça valer a pena

1. O ângulo 50° é equivalente a qual valor em radianos?

a) $\frac{5\pi}{18}$ rad

b) 2π rad

c) $\frac{3\pi}{2}$ rad

d) $\frac{\pi}{2}$ rad

e) π rad

2. Qual é o valor em graus para 3π rad?

a) 20°
b) 540°
c) 360°
d) 30°
e) 460°

3. Qual é a medida em radianos de um arco de 20 cm pertencente a uma circunferência de 16 cm de diâmetro?

a) 1,25 rad
b) 1,6 rad
c) 2,0 rad
d) 2,5 rad
e) 3,6 rad

Referências

ANEEL. Agência Nacional de Energia Elétrica. **Atlas de Energia Elétrica do Brasil**. 2. ed. Brasília: ANEEL, 2005. 243p. Disponível em: <http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/pdf/03-Energia_Solar(3).pdf>. Acesso em: 11 jan. 2016.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 1995.

INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. **Distâncias e dimensões do sistema Sol-Terra-Lua**. Disponível em: <http://www.das.inpe.br/ciaa/cd/HTML/dia_a_dia/1_7_1.htm>. Acesso em: 1 dez. 2015.

OS PRÉ-SOCRÁTICOS: **Vida e obra**. São Paulo: Nova Cultura, 2000.

QUINTANEIRO, Wellerson; GIRALDO, Victor; PINTO, Márcia Fusaro. **De onde vem a unidade radiano e por que seu uso é necessário?** 2010. Disponível em: <http://www.academia.edu/1630196/DE_ONDE_VEM_A_UNIDADE_RADIANO_E_POR_QUE_SEU_USO_%C3%89_NECESS%C3%81RIO>. Acesso em: 11 jan. 2016.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SOUZA, Thuysa Schlichting de. **Um estudo da extensão do seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo para funções de domínio real**. 2013. 64f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/105486/Thuysa%20Schlichting%20de%20Souza.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 11 jan. 2016.

STOLFI, G. **Percepção visual humana**. 2008. Disponível em: <http://www.lcs.poli.usp.br/~gstolfi/mack/Ap2_PercepVisual_M8.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2015.

Função exponencial

Convite ao estudo

Caro aluno, o assunto que iniciaremos nesta unidade envolve o cálculo de valores que possuem uma variação crescente (para mais) ou decrescente (para menos). Estas variações podem ser usadas para descrever fatos como ganhos de capital ou acúmulo de dívida, proliferação de microrganismos e fenômenos radioativos, e mais que isso, pois a notação matemática envolvida em sua representação nos permite a escrita e cálculos usando números muito grandes e também muito pequenos. Grandes como a memória e velocidade de processamento de computadores, e pequenos como o intervalo de tempo de um relâmpago, ou ainda muito menores, como o tamanho das partículas que constituem a matéria.

Este assunto tem como objetivo final o estudo da função exponencial, mas antes abordaremos uma notação presente nesta função, denominada potenciação, bem como suas propriedades e sua função inversa, a radiciação.

Para compreendermos como este assunto pode ser aplicado ao nosso cotidiano, tentemos imaginar como será nossa vida daqui a 15 anos, 30 anos e, por que não, mais que isso. Como podemos usar o conhecimento adquirido hoje para ter boas condições de vida no futuro?

Para o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), o Brasil será um país de idosos já em 2030. Isto tem uma implicação forte em todo o mercado, desde habitação, saúde, mobilidade, turismo, segurança e até, é claro, previdência. É certo que a esperança da maioria das pessoas é ser idoso, mas não velho, ou seja, estar saudável e disposto para curtir com liberdade, sabedoria e pouca preocupação neste momento da vida. É certo também que, para muitas pessoas, principalmente os jovens, este período da vida ainda esteja longe, mas o que muitos se esquecem é que este fato faz surgir muitos novos nichos de mercado, voltados a produtos e serviços para idosos. Nestes casos, a melhor opção é sempre a informação, de forma a nos permitir abrir um novo negócio, sugerir um novo produto ou serviço e nos prepararmos para esta fase da vida da melhor forma possível. No sentido de manutenção de nossa saúde social, orgânica e financeira, como a potenciação nos permite compreender o crescimento de microrganismos patogênicos nos alimentos ou, até mesmo, nos tecidos de nosso organismo? Como equações exponenciais nos permitem escolher um bom negócio ou empréstimo? Como funções exponenciais nos permitem compreender as dosagens e os períodos de atuação dos remédios tomados? E, como funcionam, e se são mesmo perigosos, os aparelhos que usam radioatividade e que varrem nosso corpo à procura de doenças?

Seção 3.1

Potenciação e radiciação

Diálogo aberto

Como dito anteriormente, o assunto em questão tem como objetivo final o estudo da função exponencial. No entanto, antes, abordaremos notações e operações matemáticas que envolvem a multiplicação sucessiva de um valor por si mesmo n vezes, denominada potenciação, e como trabalhar esta operação em expressões matemáticas. Também estudaremos a operação inversa da potenciação, que é a radiciação, sua definição e propriedades.

Para começar, imaginemos o caso da contaminação do leite por microrganismos, o que faz que ele fique com gosto azedo. Após sofrer pasteurização do tipo UHT (Ultra Hight Temperature – Temperatura Muito Alta), processo de aquecimento controlado que mata ou inativa os microrganismos naturalmente presentes no leite, este produto é guardado em ambiente hermético para que não sofra contaminação biológica ou química, ou seja, não seja contaminado com novos microrganismos ou sofra degradação causada pela presença de oxigênio. Assim, o leite pode ser armazenado por longo período de tempo, mesmo se não estiver refrigerado. Entretanto, uma vez aberto para consumo, sua contaminação por microrganismos é quase certa, via instrumento usado para corte da embalagem ou mesmo pelo ar que entra no recipiente de armazenamento, pois este é carregado de partículas contaminadas.

O gosto azedo do leite degradado se deve à presença de ácidos liberados por alguns tipos de microrganismos, mas que só é percebido quando a população microbiana alcança uma concentração elevada. O crescimento da população microbiana depende de muitos fatores, como temperatura, presença de oxigênio, tipo de alimento, umidade e outros. Vamos estabelecer um caso em que a contaminação inicial do leite tenha ocorrido com 1000 bactérias para 1 litro, e em que a proliferação delas ocorra de tal forma que sua quantidade no leite dobre em número a cada hora que se passa. Quantas bactérias existirão no leite após 1 dia (24h)? Por quanto tempo este leite pode ser armazenado, supondo que o sabor azedo seja percebido quando a contaminação ultrapassa 100 milhões de bactérias por mililitro?

Não pode faltar

Potenciação e radiciação

Para melhor compreensão da potenciação e radiciação, começaremos com exemplos simples, acrescentando novas informações no decorrer do estudo.

Potenciação

Sabemos que:

$2 \cdot 2 = 4$ e que $(-2)\cdot(-2) = 4$, assim como: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$ e $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 4 \cdot (-2) = -8$.

Lembre-se

A operação matemática "multiplicação" também é conhecida como "produto" ou "vezes", e pode ser simbolizada por vários caracteres, por exemplo: * (asterisco); . (ponto); × (traços cruzados); () (parêntesis); e por uma sequência alternada entre números e letras, por exemplo: se x = 3, 2x vale 6.

Uma maneira mais simples de representar estas multiplicações é usar um número sobrescrito que representa a quantidade de vezes que os valores são multiplicados. Veja:

I. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$;

II. $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$;

III. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$;

IV. $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$.

Nos exemplos (I) e (III), o número 2 é denominado base, já nos exemplos (II) e (IV) a base é o número -2. A quantidade de vezes que a base é multiplicada por si mesma chama-se expoente, e o resultado da operação é denominado potência. Além disso, nomeamos as operações anteriores de potenciação ou exponenciação.

Atenção

Note que, se o expoente de uma potência de base negativa for ímpar, o resultado é negativo; se for par, o resultado é positivo.

Assimile

Em uma expressão $b^n = a$, com $a, b, n \in \mathbb{R}$, o número b é a base, o número n é o expoente e o valor a, resultado de b^n, é a potência.

Se $b < 0$ e:

- n ímpar, temos $b^n = a < 0$;
- n par, temos $b^n = a > 0$.

Vejamos outros exemplos: $3^2 = 9$, $3^4 = 81$, $5^2 = 25$ e $5^3 = 125$.

Para bases fracionárias, a interpretação é a mesma, veja: $0,5^2 = 0,25$ e $0,5^3 = 0,125$.

Lembre-se

Fração é o nome dado à expressão que representa uma divisão, e "divisão" também é conhecida como "quociente". Para simbolizar uma divisão também existem vários símbolos, como: $\frac{a}{b}$ (fração); a/b (fração em linha); a:b (dois-pontos); a ÷ b (dois-pontos separados por um traço horizontal).

Para alguns casos envolvendo números com decimais, o mais fácil é resolver utilizando frações. Por exemplo, sabendo que 0,5 é o mesmo que 5 dividido por 10, para obter o resultado de $0,5^2$ e de $0,5^3$, é possível fazer as seguintes sequências de operações:

$$0,5^2 = \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{5^2}{10^2} = \frac{25}{100} = 0,25 \quad \text{e} \quad 0,5^3 = \left(\frac{5}{10}\right)^3 = \frac{5^3}{10^3} = \frac{125}{1000} = 0,125$$

.

Note que o expoente é aplicado a todos os números da fração, ou seja, ao numerador (número que está em cima) e ao denominador (número que está embaixo).

Múltiplos e submúltiplos de 10

Um caso muito comum de potência é quando a base é 10, muito usada para escrever números muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, se dermos uma volta completa em torno do equador do planeta Terra, deslocaremo-nos cerca de 40 mil quilômetros, ou 40.000 km, ou 40 milhões de metros, ou 40.000.000 m. São todas formas diferentes de representar a mesma medida. Podemos representar, também, esta medida usando uma potência de 10:

$$40.000.000\ \text{m} = 40.000 \times 10 \cdot 10 \cdot 10\ \text{m} = 40.000 \cdot 10^3\ \text{m}$$

Como 10^3 é chamado de quilo, e representado pela letra k (minúsculo), podemos escrever $40.000 \times 10^3\ \text{m}$ como 40.000 km, ou dizer 40 mil quilo metros, que acabou por gerar a palavra quilômetros.

Outro caso muito comum é quando o número é pequeno, como o comprimento de uma formiga lava-pé ou o diâmetro médio de um fio de cabelo. Estas formigas possuem em torno de 2 mm, mas por que dizemos milímetros? 2 milímetros é o mesmo que 0,002 m, que pode ser reescrito por meio da fração: $\frac{2}{1000} = \frac{2}{10^3} = 2 \times 10^{-3}$.

Nesta operação, o denominador 10^3 sobe para o numerador invertendo o sinal do expoente, e 10^{-3} pode ser representado pela letra m (minúsculo), denominada mili. Logo, $0,002\ \text{m} = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$, ou 2 mm (2 mili metros), que acabou por gerar a palavra milímetros.

Existem letras para expressar muitas outras potências de base 10, usadas como prefixos das unidades de medidas, antes das quais, por regra, só se pode usar um único prefixo.

A Tabela 3.1 mostra alguns exemplos destes prefixos.

Tabela 3.1 | Prefixos, símbolos e valores dos múltiplos e submúltiplos de 10

Prefixo	Símbolo	Extenso	Decimal	Potência de dez
tera	T	Trilhão	1.000.000.000.000	10^{12}
giga	G	Bilhão	1.000.000.000	10^9
mega	M	Milhão	1.000.000	10^6
quilo	k	Mil	1.000	10^3
hecto	h	Cem	100	10^2
deca	da	Dez	10	10^1

Unidade	-	Unidade	1	10^0
deci	d	Décimo	0,1	10^{-1}
centi	c	Centésimo	0,01	10^{-2}
mili	m	Milésimo	0,001	10^{-3}
micro	μ	Milionésimo	0,000.001	10^{-6}
nano	n	Bilionésimo	0,000.000.001	10^{-9}
pico	p	Trilionésimo	0,000.000.000.001	10^{-12}

Fonte: Adaptado de Wentworth (2009).

Um valor obtido pela multiplicação de um número real maior ou igual a 1 e menor que 10 por uma potência de 10 com expoente inteiro pode ser expresso em Notação Científica. Se esta potência de 10 puder ser substituída por um prefixo da Tabela 3.1, este número será expresso em Notação de Engenharia.

Exemplificando

Escreva em notação científica os seguintes números:

Número	Resolução
200	$2 \times 100 = 2 \times 10^2$
0,0005	$5 : 10.000 = 5 \times 10^{-4}$
0,00002	$2 : 100.000 = 2 \times 10^{-5}$
1.230	$1,23 \times 1000 = 1,23 \times 10^3$
28,9	$2,89 \times 10 = 2,89 \times 10^1$
871,2	$8,712 \times 100 = 8,712 \times 10^2$
870,0	$8,7 \times 100 = 8,7 \times 10^2$
152.000.000	$1,52 \times 100.000.000 = 1,52 \times 10^8$

Na prática, basta contar o número de vezes que a vírgula "anda" para a direita ou para a esquerda, pois este será o valor do expoente. Além disso, se a vírgula se deslocar para a direita, o expoente será negativo; e, se a vírgula se deslocar para a esquerda, o expoente será positivo.

Exemplificando

Escreva em notação de engenharia as seguintes medidas dadas em metros:

Medidas	Resolução
200 m	$2 \times 100 = 2 \times 10^2$ → 2 hm
0,0005 m {	$0,5 : 1.000 = 0,5 \times 10^{-3}$ → 0,5 mm
	$500 : 1.000.000 = 500 \times 10^{-6}$ → 500 μm
2.000.000 m	$2 \times 1.000.000 = 2 \times 10^6$ → 2 Mm
1.230 m	$1,23 \times 1000 = 1,23 \times 10^3$ → 1,23 km

Faça você mesmo

1) Escreva em notação científica e de engenharia as seguintes medidas:

a) A energia média de um relâmpago: 1.000.000.000 J (Joule).

b) O diâmetro de um vírus médio: 0,0000001 m.

Propriedades e valores definidos das potências

Uma expressão matemática pode conter soma, multiplicação e divisão de potências, e até potência de potências, por isso é necessário saber como resolver cada um destes casos. Para operações aritméticas entre potências são válidas as propriedades expostas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 | Propriedades das potências ou exponenciais

Multiplicação de potências	Potência de potência
$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$	$\left(b^m\right)^n = b^{m \cdot n}$
Divisão	Potência de multiplicações e divisões
$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$, com $b \neq 0$ e m > n	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ e $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, com $b \neq 0$
Definidas	Indefinidas
$b^0 = 1$, com $b \neq 0$ e $b^1 = b$	0^0, 0^∞ e ∞^0

Expoente negativo	Produtos notáveis de expoente 2
$b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$, com $b \neq 0$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Fonte: Os autores

Na Tabela 3.2, considere $a, b \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{Z}_+$.

Exemplificando

Transforme as seguintes expressões em uma única potência simples:

Expressões	Resolução:
$2^7 \times 2^3$	$2^{7+3} = 2^{10}$
$2^7 \div 2^3$	$2^{7-3} = 2^4$
$\dfrac{5^5}{5^2}$	$5^{5-2} = 5^3$
$\dfrac{5^2}{5^5}$	$5^{2-5} = 5^{-3}$
$2^3 \div 2^3$	$2^{3-3} = 2^0 = 1$

Expressões	Resolução:
$(2^3)^2$	$2^{3 \cdot 2} = 2^6$
$(2^3)^{-2}$	$2^{3(-2)} = 2^{-6}$
$\dfrac{100}{1000}$	$\dfrac{10^2}{10^3} = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$
$10^5 \div 10^{-3}$	$10^{5-(-3)} = 10^8$
$10^5 \times 10^{-3}$	$10^{5-3} = 10^2$
$10^{-3} \div 10^5$	$10^{-3-5} = 10^{-8}$

Expressões	Resolução:
$(2,5)^3 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$	$(2,5)^3 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = (2,5)^3 \cdot (2,5)^{-2} = (2,5)^1 = 2,5$
$(-2)^3 \times 2^2$	$(-1 \cdot 2)^3 \cdot 2^2 = (-1)^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2 = -2^{3+2} = -2^5$
$(-2^3)^2$	$(-2^3)^2 = (-1 \cdot 2^3)^2 = (-1)^2 \cdot (2^3)^2 = 2^6$

É importante salientar que $b^{n^m} \neq (b^n)^m = b^{n \cdot m}$. Por exemplo, $2^{2^3} = 2^8$, que é diferente de $(2^2)^3 = 2^6$.

Pesquise mais

Exemplos de potências e outras formas de resolução podem ser vistos em: <www.uel.br/projetos/matessencial/superior/elementos/elementos04.pdf> e <www.matematicadidatica.com.br/Potenciacao.aspx>. Acesso em: 18 dez. 2015.

Faça você mesmo

2) Calcule o valor da expressão $2^2\left(\frac{3}{2}\right)^2 \div \left(3^5 \cdot 3^{-4}\right) + 10^0$.

Radiciação é a operação inversa da potenciação, e sua simbologia deriva da letra "r". De modo geral, como define Dante (2012, p.135):

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, em que:

$\sqrt[n]{}$ é o símbolo que indica a operação radiciação e é chamado radical;

a é o número real chamado radicando;

n é um número natural diferente de zero chamado índice; e,

b é um número real, resultado dessa operação, chamado raiz.

Vejamos alguns exemplos:

Se 2·2 = 4, então $\sqrt{4} = 2$.

Se 2·2·2 = 8, então $\sqrt[3]{8} = 2$.

Se 3·3·3·3 = 81, então $\sqrt[4]{81} = 3$.

Atenção

Note que não é necessário escrever o índice quando n = 2.

Reflita

O radical com índice 2 é chamado de "raiz quadrada", enquanto o radical com índice 3, de "raiz cúbica". Por quê? Pense nas áreas e nos volumes de figuras geométricas.

Assimile

Para transformar uma radiciação em uma potenciação, e vice-versa, pode-se usar a relação: $\sqrt[m]{b^n} \Leftrightarrow b^{\frac{n}{m}}$.

As propriedades que nos permitem manipular e resolver os radicais são (Tabela 3.3):

Tabela 3.3 | Propriedades das radiciações

Raiz de um produto	Raiz de um quociente
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, com $b \neq 0$
Potência de um radical	Raiz de um radical
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
Alteração do índice e expoente	Radicando negativo com n par ou ímpar*
$\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$
$\sqrt[n \div k]{a^{m \div k}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-2^3} = -2$

*Não existe um número real que multiplicado por si mesmo gere o resultado -1, por isso criou-se o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, no qual i é denominado número imaginário, sendo que $i^2 = -1$, ou $i = \sqrt{-1}$.

Fonte: Os autores

Na Tabela 3.3, considere $a, b \in \mathbb{R}$ e $n, m, k \in \left(\mathbb{Z}_+^* - \{1\}\right)$.

Pesquise mais

Exemplos e, também, outras formas de resolução podem ser vistos no link: <http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/potenciacao_radiciacao.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2015.

Exemplificando

Simplifique as expressões:

Expressões	Resolução:
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$	$\sqrt{2\cdot3}=\sqrt{6}$
$\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\dfrac{16}{2}}=\sqrt{8}$

Expressões	Resolução:
$\left(\sqrt{2}\right)^3$	$\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$
$\sqrt[4]{3^6}$	$\sqrt[2\cdot2]{3^{2\cdot3}}=\sqrt{3^3}=\sqrt{27}$

Fatoração

Pode-se decompor um número em multiplicações de números primos, substituir o valor do radicando ou da base por esta decomposição e usar as propriedades das potências e das raízes para simplificar e resolver expressões. Para isso, são construídas duas colunas de valores, em que, à esquerda, ficam as decomposições do valor inicial e, à direita, os divisores.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2^2\cdot3^2\cdot5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 3^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2^3\cdot5^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & 2^3 \end{array}$$

Exemplificando

Simplifique as expressões:

Expressões	Resolução:
$\sqrt[3]{\sqrt{27}}$	$\sqrt[6]{27}=\sqrt[2\cdot3]{3^3}=\sqrt{3}$
$\sqrt{8}$	$\sqrt{2^3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$
$27^{\frac{1}{3}}$	$\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{3}{3}}=3$
$64^{\frac{1}{2}}$	$\left(2^6\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{6}{2}}=2^3=8$
$\sqrt{200}$	$\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{5^2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5^2}=2\cdot\sqrt{2}\cdot5=10\sqrt{2}$

Faça você mesmo

3) Calcule o valor da expressão: $\left(27^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Sem medo de errar

Como aplicar os conceitos apresentados nesta unidade para calcular o número de bactérias presentes em 1 litro de leite 24 horas após ele ter sido contaminado com 1000 bactérias, supondo que a população destas bactérias dobre a cada hora que se passa?

E como calcular o período de consumo para este alimento após sua embalagem ter sido aberta, supondo que uma população bacteriana acima de 100 milhões de bactérias por mililitro faça que o leite adquira sabor azedo?

Para o primeiro caso, o número de bactérias cresce a cada hora da seguinte maneira:

$$N_0 = 1000$$

$$N_1 = 2 \cdot 1000 = 2^1 \cdot 1000 = 2000$$

$$N_2 = 2 \cdot 2000 = 2 \cdot 2 \cdot 1000 = 2^2 \cdot 1000 = 4000$$

$$N_3 = 2 \cdot 4000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1000 = 2^3 \cdot 1000 = 8000$$

...

$$N_n = 2^n \cdot 1000$$

Ou seja, após n horas, o número de bactérias será de 2^n vezes o número inicial de bactérias, que é 1000. Assim, após 24 horas teremos:

$$N_{24} = 2^{24} \cdot 1000 = 16.777.216 \times 1000 = 16.777.216.000$$

bactérias por litro.

Dica

Use uma calculadora científica.

De forma extensa, pode-se dizer que existem, neste 1 litro de leite, 24 horas após sua contaminação, aproximadamente 16,8 bilhões de bactérias ($16,8 \cdot 10^9$) ou, em notação científica, $1,68 \cdot 10^{10}$ bactérias.

Para o segundo caso, como o valor a ser calculado envolve a quantidade de bactérias por mililitro de leite, devemos dividir a quantidade existente após n horas por 1000, pois cada litro possui 1000 ml, gerando uma concentração calculada por:

$$\text{Concentração} = \frac{2^n \cdot 1000}{1000} = 2^n$$

Considerando uma contaminação de no mínimo 100 milhões de bactérias por mililitro de leite, temos que 2^n deve ser maior ou igual a 100 milhões. Usando uma calculadora científica, podemos perceber que:

$2^{26} = 67.108.864$, e que

$2^{27} = 134.217.728$,

Ou seja, entre 26h e 27h, após ser aberto, o leite já estará com sabor desagradável. Portanto, ele deve ser consumido em, no máximo, 26 horas. Na prática, sob refrigeração de até 10 °C, a recomendação é de que o leite seja consumido em até 48h.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.	
Ganho de capital financeiro	
1. Competências de Fundamentos de Área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar os conceitos e as propriedades das potências para calcular montantes em dinheiro submetidos a juros compostos.
3. Conteúdos relacionados	Potenciação, valores financeiros e porcentagem.

4. Descrição da SP	Suponha que você tenha recebido uma herança de R$ 40.000,00, que denominaremos de valor no presente momento (VP) e que tenha negociado com o gerente do banco um CDB (Certificado de Depósito Bancário) de 24 meses a juros (j) de 0,95% $\left(\frac{0,95}{100}=0,0095\right)$ ao mês. Se a inflação neste período foi de 0,83% ao mês, desconsiderando as taxas e os impostos cobrados sobre esta aplicação, qual é o ganho real de capital após estes 2 anos de investimento?
5. Resolução da SP	O montante de capital no início de cada mês é: $M_0 = 40.000 = VP$ (Mês zero) $M_1 = 40.000 + 0,0095 \times 40.000 = VP + j \cdot VP$ (Mês um.) $M_2 = 40.000 + 0,0095(40.000 + 0,0095 \times 40.000)$, ou $M_2 = VP + j(VP + j \cdot VP) = VP + j \cdot VP + j^2 \cdot VP = VP(1 + j + j^2) = VP(1 + 1 \cdot j + j^2)$ Na tabela de propriedades das potências, vimos que: $(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$. Por comparação, deduzimos que a = 1 e b = j, logo: $M_2 = VP(1+j)^2$. O montante para qualquer início de mês é então $M_n = VP(1+j)^n$. Após 24 meses, ou seja, 2 anos após o investimento, o montante será de: $M_{24} = 40.000(1+0,0095)^{24} = 40.000(1,254734...) \simeq \text{R\$ } 50.189,37$ Dois anos após o investimento, a inflação faria que um montante maior de dinheiro fosse necessário para comprar as mesmas coisas de 2 anos atrás (efeito da inflação), e este montante seria calculado com juros de 0,83% ao mês: $M_{24} = 40.000(1+0,0083)^{24} = 40.000(1,219423...)$, ou seja, $M_{24} \simeq \text{R\$ } 48.776,92$ e o ganho de capital é de 50.189,37 - 48.776,92 = R$ 1.412,45.

Faça valer a pena

1. Ao simplificarmos a expressão $\frac{8 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5}}{2^3 \cdot 10^1 \cdot 10^2} 10^0$, obtemos:

a) 2^2
b) 8800
c) 1
d) 10
e) 0

2. Qual dos números a seguir é o resultado de $\sqrt{\sqrt{16}}$?

a) 2
b) 4
c) $\sqrt{2}$
d) 8
e) $2\sqrt{2}$

3. Sabendo que o montante obtido a partir de um capital investido sob juros compostos, aplicado por certo intervalo de meses, é calculado pela função $VF = VP(1+j)^n$, na qual VF é o valor total final acumulado, VP é o valor inicial ou no momento presente, j é a taxa de juros mensais da aplicação e n é o número total de meses antes do resgate, qual é o saldo em uma conta que teve um depósito de R$ 5.000,00 na sua abertura passados 4 meses sob os juros de 1% ao mês?

a) R$ 5.320,00
b) R$ 5.203,02
c) R$ 5.400,00
d) R$ 5.500,05
e) R$ 5.444,44

Seção 3.2

Equação exponencial

Diálogo aberto

Seja, novamente, bem-vindo!

Como vimos na seção anterior, Seção 3.1, expressões exponenciais podem ser usadas para descrever fenômenos cujo crescimento de sua variável medida é acelerado, como o número de bactérias em um alimento, ou então cujo decrescimento é desacelerado. Nos casos estudados, conheciam-se a base e o expoente da expressão exponencial.

Nesta seção, estudaremos as equações exponenciais, que têm como característica apresentar o expoente como valor desconhecido ou incógnita. Portanto, para que possa ser resolvida, ela precisa estar igualada a um número ou outra expressão, tornando-se uma equação. Veremos como estas equações exponenciais se apresentam e estudaremos dois métodos para sua resolução: o primeiro deles tem como meio fazer manipulações algébricas para igualar as bases das expressões exponenciais separadas pela igualdade desta equação, e igualar seus expoentes; o outro, permite que encontremos um valor de expoente próximo ao verdadeiro por aproximações consecutivas.

Uma aplicação que envolve um plano para médio prazo e é pouco realizada pela maioria das pessoas, por falta de planejamento e comprometimento pessoal, é fazer a compra de um bem de alto valor por meio de um consórcio privado. Na prática, seria fazer um depósito mensal fixo de baixo valor por um período de alguns anos em um fundo com renda fixa, como a poupança, até acumular o valor desejado. Este procedimento é conhecido como “aplicação com depósitos regulares”, e se o resgate do montante for feito no início do último mês de depósito, o valor total acumulado pode ser calculado pela fórmula:

$$M = D\frac{(1+j)^n - 1}{j}$$

Nesta fórmula, M é o montante que existirá na conta no início do último mês de cada depósito, D é o valor do depósito mensal, j é a taxa de juros da poupança, ou outra aplicação a ser negociada com o banco, e n é número de meses desta aplicação.

Se quisermos fazer compra de um veículo popular usado, quantos meses são necessários para se acumular 12 mil reais depositando mensalmente R$ 500,00 a juros de 0,8% a.m. (a.m. = ao mês)?

Não pode faltar

Equações

Equação é uma "declaração de igualdade entre duas expressões consistindo de variáveis e/ou números" (ENCICLOPÉDIA BRITÂNICA, 2016), pois um lado deve possuir valor igual ao outro, ou seja, os lados possuem valores equivalentes (equação).

Exemplos: $2 + 3 = 5$; $x + 3 = 5$ (para $x = 2$).

Resolver uma equação é encontrar o valor da variável, ou incógnita, na maioria das vezes representada pela letra x. Geralmente, opta-se por letras de uso menos comum, como x, y, z e w, mas qualquer letra pode ser usada, principalmente se puder ser associada à dimensão que ela representa, como t para tempo, s para espaço (*space*, em inglês), a para aceleração etc.

Equações exponenciais

Quando a incógnita aparece no expoente de uma equação, diz-se que ela é uma equação exponencial, e para encontrar o valor desta variável devemos fazer manipulações algébricas de forma a tornar ambos os lados com bases únicas e iguais. Por exemplo:

$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3$, logo $x = 3$.

Assimile

Tecnicamente, para $b > 0$ e $b \neq 1$, tem-se: $b^n = b^m \Leftrightarrow n = m$.

Exemplificando

Resolva as equações:

Equação	Resolução
$2^x = 32$	$2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$
$2^x = 1$	$2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$
$3^x = 3$	$3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$
$3^{x-2} = 9$	$3^{x-2} = 9 \Rightarrow 3^{x-2} = 3^2 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$
$5^{x+2} = 125$	$5^{x+2} = 125 \Rightarrow 5^{x+2} = 5^3 \Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$
$2^x = \sqrt{16}$	$2^x = \sqrt{16} \Rightarrow 2^x = \sqrt{2^4} \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$
$(0,5)^x = \sqrt[3]{4}$	$(0,5)^x = \sqrt[3]{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(2^{-1}\right)^x = 4^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2^{-x} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$ $2^{-x} = 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow -x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$
$3^{2-x} = \frac{1}{27}$	$3^{2-x} = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{2-x} = 27^{-1} \Rightarrow 3^{2-x} = \left(3^3\right)^{-1} \Rightarrow$ $3^{2-x} = 3^{-3} \Rightarrow 2 - x = -3 \Rightarrow x = 5$
$2^{x+1} + 2^{x-1} = 5$	$2^{x+1} + 2^{x-1} = 5 \Rightarrow 2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^{-1} = 5$, se $2^x = y$, então $y \cdot 2 + y\frac{1}{2} = 5 \Rightarrow \frac{5}{2}y = 5 \Rightarrow \frac{1}{2}y = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$
$3^{2x} - 4 \cdot 3^x = -3$	$3^{2x} - 4 \cdot 3^x = -3 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, se $3^x = y$, então $y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$ $y = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \left\langle \begin{array}{l} y' = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ y'' = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right.$
$5^{x^2-x} = 25$	$5^{x^2-x} = 25 \Rightarrow 5^{x^2-x} = 5^2 \Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$ $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} x' = 2 \\ x'' = -1 \end{array} \right.$

Faça você mesmo

1) Resolva as equações:

a) $2^x = 8$

b) $3^{x+2} = 9$

c) $\left(10^2\right)^{x-1} = 100$

d) $\sqrt[3]{3^x} = 81$

e) $3 \cdot 5^{x+3} = 3$

f) $0{,}5^{2x} = 2^{1-3x}$

g) $0{,}75^x = \dfrac{9}{16}$

h) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

i) $3^{x^2-4x} = \dfrac{1}{27}$

Resolução por tentativas (bases diferentes)

Quando não é possível fazer que a equação exponencial apresente bases iguais dos dois lados da igualdade, pode-se encontrar um valor aproximado para o expoente atribuindo valores à incógnita, de modo a calcular um valor aproximado para a igualdade. Por exemplo:

Equação: $2^x = 10$

Tentativas:

$2^3 = 8$ $\quad 2^{3,3} = 9{,}84...$ $\quad 2^{3,32} = 9{,}98...$ $\quad 2^{3,321} = 9{,}9935...$

$2^4 = 16$ $\quad 2^{3,4} = 10{,}55...$ $\quad 2^{3,33} = 10{,}05...$ $\quad 2^{3,322} = 10{,}0004...$

Note que o valor de x está entre 3 e 4, e um valor mais próximo ao correto pode ser obtido fracionando o expoente sucessivamente. Entre as tentativas, o valor mais preciso para x na equação $2^x = 10$ foi 3,322. Assim, $x \simeq 3{,}322$.

Atenção

A resolução de equações exponenciais com a igualdade separando bases diferentes é normalmente feita usando-se a operação matemática denominada logaritmo, que é mais rápida e precisa, mas será abordada somente na próxima unidade.

Reflita

2^x tem valores que aumentam de forma acelerada com o aumento linear de x, e 2^{-x} tem valores que decrescem de forma desacelerada com o aumento de x. O que se espera que aconteça com a variação dos valores de b^x se $0 < b < 1$?

Pesquise mais

O material indicado a seguir traz mais detalhes sobre as definições e os métodos de resolução das equações exponenciais. Disponível em: <http://www.fund198.ufba.br/expo/eq-ine.pdf>. Acesso em: 1 jan. 2016.

Sem medo de errar

Um consórcio privado, ou "aplicação com depósitos regulares", tem valor total acumulado calculado pela fórmula $M = D\dfrac{(1+j)^n - 1}{j}$, na qual M é o montante que existirá no início do último mês de depósito, D é o valor do depósito mensal, j é a taxa de juros da aplicação e n é o número de meses.

Relembrando: na compra de um veículo popular usado, quantos meses são necessários para se acumular 12 mil reais depositando mensalmente R$ 500,00 a juros de 0,8% a.m. (ao mês)?

A incógnita deste problema é o expoente n da equação usada para calcular o montante M acumulado após n depósitos mensais de um valor D a um juros j. Para achar o valor de n, devemos isolar a potência na qual ele se encontra, $(1 + j)^n$, gerando a seguinte equação:

$$M = D \cdot \frac{(1+j)^n - 1}{j} \Rightarrow \frac{M \cdot j}{D} = (1+j)^n - 1 \Rightarrow 1 + \frac{M \cdot j}{D} = (1+j)^n$$

Ao substituirmos os valores dados nesta equação, temos:

$$1 + \frac{12000 \cdot 0{,}008}{500} = (1 + 0{,}008)^n \Rightarrow 1{,}192 = 1{,}008^n$$

Como não é possível manipular esta equação de modo a obter duas potências de bases iguais, pode-se optar por encontrar um valor aproximado de n por tentativas. Com o uso de uma calculadora científica tem-se:

$$1{,}008^{10} = 1{,}0829...$$

$$1{,}008^{20} = 1{,}1727...$$

$$1{,}008^{21} = 1{,}1821...$$

$$1{,}008^{22} = 1{,}1916... \cong 1{,}192$$

$$1{,}008^{23} = 1{,}2011...$$

Portanto, o número de meses necessários para acumular, aproximadamente, 12 mil reais é 22. Caso este valor fosse depositado em uma conta-corrente comum, na qual não existe correção da inflação, seriam necessários 24 meses para acumular o mesmo valor $\left(24 = \frac{12000}{500}\right)$.

Um cálculo mais preciso mostra que o valor acumulado em 22 meses é de R$ 11.975,21, e a economia obtida por este procedimento acabou sendo de 2 meses de depósito (2 = 24 – 22), ou seja, de 1000 reais.

É importante lembrar que em um consórcio contratado (de um banco, por exemplo) as taxas de administração tornam esta opção menos interessante que o depósito em poupança, o que as operadoras de consórcio tentam compensar pela possibilidade de você ser sorteado e adquirir o bem desejado antes da finalização dos pagamentos. Por exemplo, em uma simulação, um consórcio oferecido por um banco popular exigiu taxas equivalentes à compra de um carro de 12 mil reais com depósitos de 22 parcelas de R$ 573,27, gerando um gasto de cerca de 600 reais a mais.

Pesquise mais

Se o resgate dos valores acumulados for feito no final do último período de depósito, com o intuito de obter um ganho pela correção do montante acumulado até este último mês, o cálculo do montante é feito pela fórmula:

$$M = D \cdot \left(\frac{(1+j)^{n+1} - 1}{j} - 1 \right)$$

Ou seja, neste caso, o resgate é feito após o acréscimo dos juros referentes ao último depósito. Procure se informar mais sobre isso.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.	
Depreciação de um automóvel	
1. Competências de Fundamentos de Área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar as equações exponenciais a casos reais.
3. Conteúdos relacionados	Equação exponencial.
4. Descrição da SP	Se você pretende comprar um carro, tem a opção de comprar um novo ou um usado, e pode considerar que, nos próximos 3 a 5 anos: o novo trará somente as despesas com as revisões e os maiores valores de seguro e IPVA; o usado certamente exigirá manutenção em oficina mecânica, a troca de peças mais caras e menores valores de seguro e IPVA. De forma geral, um carro novo, quando tirado da agência, desvaloriza-se imediatamente cerca de 10%, e mais cerca de 5% ao ano. Já um carro usado tem somente a desvalorização de cerca de 5% ao ano. Supondo um carro zero com valor na agência de R$ 88.000,00, quantos anos devem se passar para que seu valor de mercado seja de R$ 68.590,00, considerando que, ao sair da agência, seu valor de mercado é 10% menor, neste caso, de R$ 80.000?
5. Resolução da SP	**Lembre-se** O aumento ou a diminuição de um valor financeiro em função de uma taxa de juros já foi discutido na Seção 3.1 e é calculado pela fórmula $M = VP \cdot (1+j)^n$, sendo M o montante, VP o valor presente, j a taxa de juros e n o número de períodos em que essa taxa de juros incide.

5. Resolução da SP	Por se tratar de uma depreciação, a taxa de juros, neste caso, é negativa, ou seja, j = −0,05 (−5% = −5/100 = −0,05). A taxa de depreciação deste veículo passa a ser fixa após sua retirada da agência, momento a partir do qual a fórmula apresentada se aplica. No ano zero, o valor do veículo fora da agência é de R$ 80.000,00, e será o valor presente. Assim: $68590 = 80000(1-0,05)^n \Rightarrow \frac{68590}{80000} = 0,95^n \Rightarrow$ $\frac{6859}{8000} = \left(\frac{95}{100}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{19}{20}\right)^3 = \left(\frac{95 \div 5}{100 \div 5}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{19}{20}\right)^3 = \left(\frac{19}{20}\right)^n \Rightarrow n = 3$ Assim, 3 anos após sua compra, o veículo terá se desvalorizado R$ 11.410,00, o que corresponde a quase 13% $\left(13\% = 0,13 \simeq \frac{11410}{88000}\right)$ de seu valor na agência, custando R$ 68.590,00.

Faça você mesmo

2) Considerando uma taxa de valorização de 10% ao ano, quantos anos são necessários para que um valor inicial de R$ 2.000,00 chegue ao montante de R$ 3.221,00?

Faça valer a pena

1. O valor de x na equação $2^x - 63 = 1$ é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

2. O valor de t na equação $3^t = \sqrt[8]{81}$ é:

a) −1
b) 1
c) 2
d) 0,5
e) 0,75

3. Em condições específicas, o número de bactérias de uma cultura é dado pela expressão $N(t) = 800 \cdot 2^{0,5t}$, na qual N(t) é o número de bactérias por ml de cultura em determinado instante e t é o tempo em horas. Em quanto tempo, após o início do experimento, esta cultura terá 3200 bactérias?

a) 2 h
b) 3 h
c) 4 h
d) 5 h
e) 6 h

Seção 3.3

Função exponencial

Diálogo aberto

Prezados alunos, nas duas seções anteriores, estudamos as definições e propriedades da potenciação $\left(b^n\right)$, da radiciação $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ e das equações exponenciais $\left(b^n = a\right)$. Nesta seção, visualizaremos os comportamentos descritos anteriormente de crescimento acelerado e decrescimento desacelerado. Para isso, utilizaremos gráficos obtidos ao estudarmos as equações exponenciais na forma de função, empregando x no lugar de n, de forma a representar os valores correlacionados pela função num plano cartesiano, em que $f\left(x\right) = b^x$ ou $y = b^x$.

Para entendermos a importância de respeitar as dosagens e os intervalos de tempo recomendados no receituário após uma consulta médica, devemos compreender que as dosagens são calculadas em função de nosso volume corpóreo e sanguíneo, assim como com base em nosso metabolismo e velocidade de excreção dos fármacos e seus metabólitos, além, é claro, das dosagens mínima eficaz e máxima tolerada.

Ao ingerirmos um remédio, a concentração de seu princípio ativo no sangue aumenta rapidamente e não deve atingir valor maior que o da dosagem máxima tolerada, acima da qual o fármaco passa a ser tóxico. Decorrido certo intervalo de tempo, sua concentração no sangue cai pela metade: decorrido outro intervalo de tempo de mesmo valor, a concentração do fármaco cai pela metade da metade anterior, ou seja, ¼ do valor original, e assim por diante. Este intervalo de tempo é então denominado tempo de meia-vida.

A concentração de um fármaco no sangue pode ser descrita pela função:

$$C(t) = C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{k}}$$

Na qual C(t) é a concentração do fármaco no sangue em determinado instante t, C_0 é a concentração inicial; e k é uma constante que equivale ao tempo de meia-vida do fármaco no organismo. Suponha que a concentração máxima tolerável de um fármaco no sangue seja 80 μg/ml (micrograma por mililitro) e que, para determinado paciente, a concentração inicial administrada tenha sido 60 μg/ml. Considere, ainda, que a quantidade mínima eficaz desse fármaco seja 15 μg/ml e que seu tempo de meia-vida seja de 4 horas para este paciente. Com base nessas informações, surgem as seguintes questões: (a) De quanto em quanto tempo esta pessoa precisa tomar uma nova dose deste fármaco? (b) Considerando que esta pessoa possua 8 litros de sangue, qual é a massa de princípio ativo presente em cada dose?

Não pode faltar

Até aqui vimos que, se $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ e $2^x = 8$, então x só pode ser 3, pois $2^x = 8 = 2^3$. Também vimos que $2^2 = 4$, $2^1 = 2$, $2^0 = 1$, $2^{-1} = 0,5$, $2^{-2} = 0,25$, $2^{-3} = 0,125$ e $2^{-4} = 0,06525$, se escrita na forma $2^x = y$, há valores de x variando entre 2 e –4. Tabulando estas expressões em ordem crescente de x, temos os dados mostrados na Tabela 3.4.

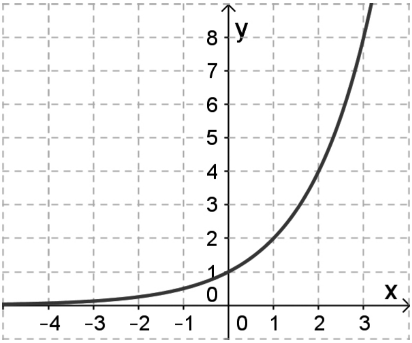
Tabela 3.4 | Alguns valores de x e da função $y = 2^x$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
2^x	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$y = 2^x$	$\frac{1}{16} = 0,0625$	$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{2} = 0,5$	1	2	4	8

Fonte: Os autores

Os valores da Tabela 3.4 e da função $y = 2^x$ podem ser representados num plano cartesiano, gerando o gráfico mostrado na Figura 3.1.

Figura 3.1 | Gráfico da função $y = 2^x$



Fonte: Os autores

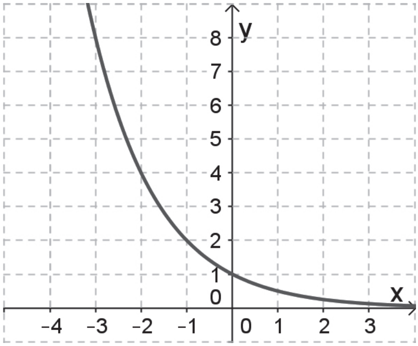
Ainda nesta unidade foi visto que $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Portanto, uma potência de base positiva e expoente negativo pode ser transformada em outra, cuja base seja a recíproca da primeira (inversa multiplicativa) e com expoente positivo. Assim, $2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ... Como exemplo, observemos os dados da Tabela 3.5 e do gráfico correspondente, mostrado na Figura 3.2.

Tabela 3.5 | Alguns valores de x e da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ que tem valor igual ao da função $y = 2^{-x}$

x	–2	–1	0	1	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou 2^{-x}	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ou $2^{-(-2)}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ou $2^{-(-1)}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-0}$ ou $2^{-(0)}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$ ou $2^{-(1)}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ ou $2^{-(2)}$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$	4	2	1	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{4} = 0,25$

Fonte: Os autores

Figura 3.2 | Gráfico das funções $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = 2^{-x}$



Fonte: Os autores

Atenção

Observe que:

- O gráfico de $f(x) = b^x$ sempre passa pela coordenada (0, 1).
- A função $f(x) = b^x$ nunca se anula (seu gráfico não toca o eixo x).
- A função $f(x) = b^x$ com b > 1 tem valores que crescem de forma cada vez mais intensa, ou acelerada, ver Figura 3.1.
- A função $f(x) = b^x$ com 0 < b < 1 tem valores que decrescem de forma cada vez mais branda, ou desacelerada, ver Figura 3.2.

Assimile

De forma mais abrangente e técnica, dado um número real b tal que b > 0 e b ≠ 1, define-se $f(x) = b^x$ como a função exponencial de base b com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, para qualquer valor de x de y são sempre positivos.

Reflita

Sabendo que $\frac{0}{0}$ é indefinido, que $1^x = 1$ para qualquer valor de x e que não existe valor real para radicais de índice par e radicando negativo, como a "raiz quadrada" de –2, o que se espera para uma função exponencial quando:

a) b = 0 e x < 0? b) b = 1? c) b < 0 e x < 1?

Dica: Use exemplos numéricos!

A função $y = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ é recíproca à função $y = b^x$, o que pode ser observado pelo fato de suas representações no plano cartesiano ser uma o espelhamento da outra com relação ao eixo y (compare a Figura 3.1 com a Figura 3.2) e, apesar de $y = \left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$, ela não é a inversa de $y = b^x$. A inversa de $y = b^x$ é a função logarítmica, que será estudada na próxima unidade.

Exemplificando

Esboce o gráfico da função $f(x) = 3^x$.

Resolução:

Podem-se tabular os resultados de $y = 3^x$ com valores inteiros de x de –2 a 2, conforme Tabela 3.6.

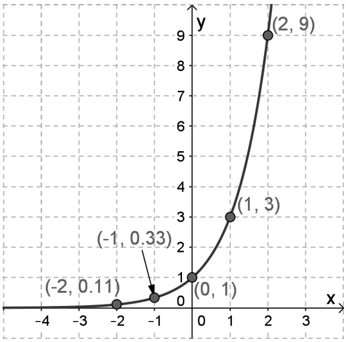
Tabela 3.6 | Alguns valores de x e da função $y = 3^x$

x	–2	–1	0	1	2
3^x	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2
$y = 3^x$	$\frac{1}{9} \cong 0{,}11$	$\frac{1}{3} \cong 0{,}33$	1	3	9

Fonte: Os autores

Na sequência, representar estes valores no plano cartesiano e interligá-los com uma linha curva, conforme gráfico da Figura 3.3.

Figura 3.3 | Gráfico da função $y = 3^x$



Fonte: Os autores

Faça você mesmo

1) Esboce o gráfico da função $y = 3^{-x}$ ou $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Função exponencial de base *e*

Ao longo da história, muitos fenômenos naturais puderam ser descritos por uma função matemática de base irracional e valor aproximado 2,718, sendo algumas do tipo exponencial. Este valor tem infinitas casas decimais, assim como o π, e é simbolizado pela letra *e*, em homenagem ao matemático Euler. Deste modo, a função exponencial de base *e* é denotada como $y = e^x$, pode ser aproximada por $y = 2{,}718^x$ e algumas vezes representada por $y = exp(x)$.

Pesquise mais

Para se aprofundar nos conceitos envolvendo funções exponenciais, leia o texto indicado a seguir, a partir da p. 402.

Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo5.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2016.

Se possível, adquira o livro indicado a seguir:

MAOR, Eli. E. **A história de um número**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

Sem medo de errar

(a) Intervalo interdose

No problema envolvendo as dosagens máxima e mínima de um fármaco administrado a uma pessoa específica e o intervalo de tempo de ingestão deste fármaco, 60 μg/ml é a concentração inicial do princípio ativo deste fármaco no sangue, 15 μg/ml é a concentração mínima eficaz e 4 horas é o valor de k, tempo de meia-vida do fármaco no organismo desta pessoa. Para calcular o intervalo de tempo necessário para a concentração do fármaco cair de 60 para 15 microgramas por mililitro de sangue, devemos substituir os valores do problema na equação que descreve a concentração do fármaco, ficando:

$$C(t) = C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{k}} \Rightarrow 15 = 60\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} \Rightarrow \frac{15}{60} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}, \text{ como } \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ e}$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2}, \text{ tem-se que } \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}, \text{ logo } \frac{t}{4} = 2 \Rightarrow t = 8$$

Desta forma, esta pessoa precisa tomar uma nova dose deste remédio a cada 8 horas.

Lembre-se

A resolução da equação obtida, ao substituirmos os valores do problema na função, deve ser feita tentando transformá-la numa equação exponencial com bases iguais dos dois lados da igualdade.

(b) Quantidade de princípio ativo em cada dose

Esta pessoa possui 8 litros de sangue, ou seja, 8000 mililitros. Como a dosagem é de 60 μg (10^{-6} g) para cada mililitro de sangue, em 8000 mililitros teremos oito mil vezes mais ou uma quantidade de 0,48 g ($8000 \cdot 60 \times 10^{-6} = 480000 \times 10^{-6} = 0,48$), ou seja, cada dose ou comprimido deste fármaco deve ter 0,48 g do princípio ativo.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.	
Contaminação alimentar por pesticidas	
1. Competências de Fundamentos de Área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Utilizar uma função exponencial para prever o nível de contaminação alimentar por um pesticida.
3. Conteúdos relacionados	Potenciação e função exponencial.

4. Descrição da SP	Pesticidas são venenos utilizados na agricultura para combater pragas (insetos, larvas e outros) que atacam os vegetais cultivados, muitas vezes utilizados para produzir alimento para os seres humanos. A concentração inicial do pesticida pulverizado na planta deve estar acima da minimamente suficiente para matar as pragas, mas sua concentração no alimento produzido deve estar abaixo do máximo permitido para consumo humano, que é bem inferior ao necessário para eliminar as pragas. Isto é possível porque o pesticida se degrada com o passar do tempo, exposição ao Sol, umidade e oxigênio do ar. O tempo necessário para que a concentração de determinado pesticida se reduza à metade da inicial é chamado de tempo de meia-vida, e a concentração desta substância no vegetal pode ser descrita pela função $C(t)=C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{k}}$, na qual $C(t)$ é a concentração do pesticida no vegetal em determinado tempo t, C_0 é a concentração inicial deste pesticida neste vegetal e k é seu tempo de meia-vida. Para um pesticida com meia-vida de 5 dias, e com concentração inicial na lavoura de 3 mg/kg de planta, quantos dias devem se passar (denominado período de carência) após sua aplicação, para que sua concentração se reduza a $187{,}5$ mg/kg de alimento e ele possa ser colhido e comercializado?
5. Resolução da SP	Substituindo os valores dados na fórmula: $C(t)=C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{k}} \Rightarrow 187{,}5\times10^{-6}=3\times10^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} \Rightarrow \frac{187{,}5\times10^{-6}}{3\times10^{-3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} \Rightarrow$ $62{,}5\times10^{-6+3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} \Rightarrow 62{,}5\times10^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$, como $62{,}5\times10^{-3}=0{,}0625=$ $\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$, tem-se que: $\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$, logo: $\frac{t}{5}=4 \Rightarrow t=20$ Portanto, são necessários, no mínimo, 20 dias de espera (período de carência) após a aplicação deste pesticida para que o alimento possa ser ingerido por um ser humano.

Faça você mesmo

2) Um fato muito comum na agricultura é a não obediência às dosagens recomendadas pelos fabricantes de pesticidas por parte dos camponeses, pois geralmente seguem recomendações de amigos e vizinhos, e acabam por aplicar na plantação dosagens entre 2 e 10 vezes acima da recomendada. Além disso, os agricultores não costumam respeitar o período de carência para a comercialização dos produtos.

Considere um produto cuja concentração eficaz recomendada para certo tipo de inseto seja de 5 mg/kg de vegetal, cuja concentração máxima aceitável para consumo humano seja de $312{,}5\,\text{mg/kg}$ de alimento. Se o tempo de meia-vida deste pesticida é de 5 dias e o período de carência é de 20 dias, mas o agricultor usou uma dosagem 2 vezes superior à recomendada, quantas vezes acima do máximo permitido está a concentração do pesticida no alimento que será comercializado se ele foi colhido 10 dias após a aplicação do pesticida?

Faça valer a pena

1. Qual expressão a seguir representa uma função exponencial crescente?

a) $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$

b) $f(x)=2^{-x}$

c) $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$

d) $f(x)=3^{-x}$

e) $f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^{-x}$

2. Qual das sentenças a seguir não pode ser considerada uma função exponencial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$?

a) $y=0{,}001^x$

b) $y=1000^x$

c) $y=\left(\frac{5}{2}\right)^{-x}$

d) $y=e^x$

e) $y=0^x$

3. A quantidade de bactérias em determinado meio de cultura é dada pela função $N(t)=N_0 2^t$, na qual N(t) é o número de bactérias no instante t, dado em horas, e N_0 é o número inicial de bactérias neste meio de cultura. Decorridas 4 horas, qual é o número de bactérias neste meio de cultura se no instante inicial foram inoculadas 2000 bactérias?

a) 32 mil
b) 8 mil
c) 80 mil
d) 1,6 milhões
e) 16 milhões

Seção 3.4

Aplicações da potenciação

Diálogo aberto

Caro aluno, seja bem-vindo à última seção desta unidade, contendo os conceitos que envolvem a potenciação. Na Seção 3.1, usamos a potenciação para determinar a população de bactérias presente no leite 24h após aberto e à temperatura ambiente, chegando a 16,8 bilhões de bactérias por litro; na Seção 3.2, resolvemos uma equação exponencial para determinar o número de meses necessários para se acumular 12 mil reais com depósitos mensais de R$ 500, chegando a 22, e não 24 meses (12000/500 = 24), graças ao juros; na Seção 3.3, usamos uma função exponencial para compreender a importância de se seguir as recomendações médicas contidas nos receituários, incluindo o período recomendado para ingestão de cada dose do remédio, evitando queda de eficiência ou intoxicação pelo fármaco. Nesta seção, vamos desmistificar os materiais radioativos e compreender como podem ser benéficos ou maléficos para nós.

Segundo Grassi (2010), Brown (2005) e Gillespie (1998), a atividade radioativa se caracteriza pela emissão de raios X e/ou partículas com alta energia e menores que o átomo (alfa ou beta). Estas partículas são lançadas em direção aleatória e se nos atingirem podem gerar radicais livres e degradar, direta ou indiretamente, moléculas do nosso corpo. Na maioria das vezes, esse efeito é inócuo, pois as moléculas modificadas não alteram o metabolismo de nossas células. Além disso, nosso organismo possui mecanismos para combater os radicais livres. Algumas vezes, uma modificação importante não pode ser evitada e acaba por matar a célula onde ela ocorreu, e raríssimas vezes a modificação causa uma multiplicação descontrolada de uma de nossas células, ou seja, um câncer. Todos estes fatos são então probabilísticos, e quanto mais tempo ou mais intensa for a dose de radiação tomada, maior é a probabilidade de surgimento de um câncer ou alteração genética transmissível para os descendentes.

Para minimizar efeitos colaterais probabilísticos, na medicina são usados núcleos emissores de radiação com tempo de meia-vida (t ½) curtos (tempo necessário para a concentração deste núcleo cair pela metade). O Na-24 (emissor beta com t ½ de 14,8 horas) é usado para verificar obstruções na corrente sanguínea. O I-131 (beta emissor com t ½ de 8 dias) é usado para monitorar o funcionamento da glândula tireoide e em altas concentrações é usado para eliminar tumores nesta glândula. O Tc-99 (emissor gama com t ½ de 6 horas) é usado para monitoramento de tumores cerebrais, em que o $NaTcO_4$ é mais absorvido. O Co-60 decai em elétron mais Ni-60 excitado que emite radiação gama, esta radiação de alta energia é usada para bombardeio de tumores, onde provoca o surgimento de radicais que destroem as células tumorais.

Além disso, técnicas de obtenção de imagem de alta qualidade, como a PET (Positron Emission Tomography), usam radiofármacos injetáveis à base de C-11, N-13, O-15 ou F-18, todos com tempos de meia-vida da ordem de minutos (GRASSI, 2010; BROWN, 2005; GILLESPIE, 1998).

Supondo que a quantidade de 50 mg de um composto contendo carbono-11, que tem tempo de meia-vida de 20 minutos, precisa estar presente na corrente sanguínea no momento da tomografia, qual deve ser a massa sintetizada deste núcleo radioativo se o processo de produção, transporte e injeção do radiofármaco durar 1 hora e 20 minutos? A partir de que momento, após a injeção deste radiofármaco, a quantidade deste núcleo no paciente fica abaixo de 6,25% do original?

Não pode faltar

Inequações exponenciais

Assimile

Expressões formadas por desigualdades são denominadas inequações.

No caso de uma inequação exponencial, sua resolução depende do valor de sua base, e dois casos podem ocorrer:

Primeiro:

Lembre-se

Se b > 1, o valor de $y = b^x$ cresce com o aumento de x.

Portanto, se $2^x > 8$, temos que $2^x > 2^3$ e, consequentemente, **x > 3** (mantém-se a desigualdade).

Segundo:

Lembre-se

Se 0 < b < 1, o valor de $y = b^x$ decresce com o aumento de x.

Portanto, se $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{8}\right)$, temos que $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ e, consequentemente, x < 3 (inverte-se a desigualdade).

Exemplificando

Resolva as inequações:

a) $2^{x+1} \geq 8$

b) $27 \leq 3^{x+1} < 81$

c) $0{,}5^x > 4$

d) $0{,}3^{x-2} < 1$

Resolução:

a) $2^{x+1} \geq 8 \Rightarrow 2^{x+1} \geq 2^3 \Rightarrow x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 2$

b) $27 \leq 3^{x+1} < 81$, duas inequações formam um sistema $\begin{cases} 27 \leq 3^{x+1} & \text{(I)} \\ 3^{x+1} < 81 & \text{(II)} \end{cases}$:

(I) $3^3 \leq 3^{x+1} \Rightarrow 3 \leq x+1 \Rightarrow 2 \leq x$ ou $x \geq 2$

(II) $3^{x+1} < 81 \Rightarrow 3^{x+1} < 3^4 \Rightarrow x+1 < 4 \Rightarrow x < 3$

c) $0{,}5^x > 4 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{2^{-2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow x < -2$

Pode-se fazer: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^2 \Rightarrow 2^{-x} > 2^2 \Rightarrow -x > 2 \Rightarrow x < -2$

d) $0,3^{x-2} < 1 \Rightarrow 0,3^{x-2} < 0,3^0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

Lembre-se

Ao multiplicarmos por -1 todos os termos de uma desigualdade, ela é invertida.

Exemplo: -1 · (-2 < 3) → 2 > -3.

Faça você mesmo

1) Resolva as inequações:

a) $2^{3x} > 2^{-2x+10}$

b) $0,1^x < 0,001$

c) $\left(\sqrt{3}\right)^{-x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

d) $3 \cdot 2^x > \sqrt{18} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{2}$

Reflita

Por que os valores $x \in D(f)$, sendo $f(x) = \sqrt{3^x - 9}$, provêm de uma inequação? Quais são estes valores? E por que, apesar de restritos, ainda existem infinitos valores no domínio desta função?

Pesquise mais

Veja mais detalhes em: <http://www.fund198.ufba.br/expo/eq-ine.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2016.

Exemplificando

Um trágico acidente radiológico ocorreu no Brasil, em 1987, na cidade de Goiânia. Infelizmente, quatro pessoas morreram, animais tiveram de ser sacrificados e toneladas de materiais contaminados foram isolados.

A área e as pessoas foram descontaminadas, mas alguns efeitos tardios não podem ser evitados.

O césio 137, encontrado por um catador de sucatas em um prédio abandonado, é um elemento radioativo usado para tratamento de câncer, o que aparentemente é um contrassenso. A meia-vida do césio 137 é de 30 anos, e os técnicos da CNEN (Comissão Nacional de Energia Nuclear) estipulam em 180 anos o tempo necessário para que a atividade radioativa dos materiais contaminados pelo césio deixe de ser nociva ao meio ambiente. De qualquer forma, todo o material contaminado está armazenado por definitivo, envolto por uma parede de 1 m de concreto revestido com chumbo, em uma área isolada do Parque Estadual Telma Ortegal, a 20 km do acidente.

Quando o aparelho de radioterapia foi colocado em operação, em 1971, possuía 28 g de cloreto de césio, com atividade radioativa de 2000 Ci (Curie: 1 Ci = $3,7 \times 10^{10}$ desintegrações por segundo). Qual é a atividade radioativa deste material após 180 anos?

Lembre-se

Como estudado na Seção 3.3, a quantidade de material (remédio, pesticida ou elemento radioativo) em função do tempo decorrido e de seu período de meia-vida é determinada pela equação $M = M_0 2^{-\frac{t}{k}}$, na qual M é a quantidade restante da massa inicial do material (M_0) em certo instante (t) e k é a meia-vida deste material.

Resolução:

Como a atividade radioativa sempre diminui com o passar do tempo, a palavra "após" implica o uso de uma desigualdade que indica um resultado menor que o que seria encontrado para exatos 180 anos. Além disso, a fórmula relaciona massa e não atividade, mas pode-se usar a atividade, pois esta é diretamente proporcional à massa de material radioativo existente. Assim:

$$M = M_0 2^{-\frac{t}{k}} \Rightarrow \text{Atividade} < 2000 \cdot 2^{-\frac{180}{30}} \Rightarrow \text{Atividade} < 2000\left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow$$

$$\text{Atividade} < 2000\frac{1}{64} \Rightarrow \text{Atividade} < 31,25$$

Portanto, a atividade radioativa após 180 anos é menor que 31,25 Ci.

Pesquise mais

Sobre o acidente em Goiânia, acesse <www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/quimica/0018.html>. Sobre unidades de atividade, exposição e doses de radiação, acesse: <www.tecnologiaradiologica.com/materia_unidades_grandezas.htm>. Acesso em: 26 jan. 2016.

Faça você mesmo

2) O processo natural de decaimento radioativo que transforma o césio 137 em bário tem tempo de meia-vida de 30 anos. Quantos gramas de césio restarão decorridos 180 anos ou mais a partir de 28 g de cloreto de césio originais (79,4% em césio)?

Sem medo de errar

Para que reste 50 mg de carbono-11, que possui meia-vida de 20 minutos, no radiofármaco 1h e 20 minutos (80 minutos) após a síntese deste nuclídeo, a massa inicial produzida deverá ser de:

$$M = M_0 2^{-\frac{t}{k}} \Rightarrow 50 = M_0 2^{-\frac{80}{20}} \Rightarrow 50 = M_0 2^{-4} \Rightarrow 50 = M_0 \left(\frac{1}{2^4}\right) \Rightarrow 50 = \frac{M_0}{16} \Rightarrow M_0 = 800$$

Logo, 800 mg de C-11 devem ser produzidos 1h e 20 minutos antes do exame.

Atenção

- Note que se pode usar 50 mg ao invés de 50×10^{-3} g, pois uma potência não possui unidade de medida ou grandeza, e por isso não altera as unidades utilizadas.

- Como o expoente não pode ter unidade de medida, a unidade de t é a mesma de k, o que faz que as unidades se anulem.

O momento a partir do qual a quantidade deste radiofármaco fica abaixo de 6,25% do original é:

$$M = M_0 2^{-\frac{t}{k}} \Rightarrow 6{,}25 > 100 \cdot 2^{-\frac{t}{20}} \Rightarrow \frac{6{,}25}{100} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow 0{,}0625 > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{16} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow 4 < \frac{t}{20} \Rightarrow t > 80$$

Logo, 80 minutos depois de injetado no organismo, a quantidade deste radiofármaco fica abaixo de 6,25% dos 50 mg.

Atenção

- A quantidade no instante t é $M_0 2^{-\frac{t}{k}}$ e deve ser menor que M, por isso o uso do sinal de desigualdade indicando que $M_0 2^{-\frac{t}{k}} < M$.

- Note que não existe uma fórmula para cada caso, mas sim para cada forma de ocorrência de um fenômeno ou fato, e a mesma fórmula pode ser usada para decaimento: da concentração de um fármaco no sangue; da quantidade de um material radioativo; de um pesticida; entre outros. A base será a razão de crescimento ou decrescimento do fenômeno e o expoente o tempo ou sequência, como é o caso de incidência de juros sobre dívidas ou aplicações financeiras, que ocorrem mensalmente.

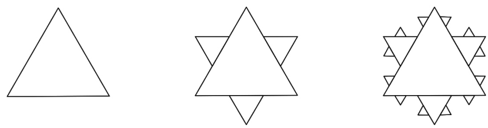
Avançando na prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Fractal	
1. Competências de Fundamentos de Área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar o conteúdo envolvendo potenciação a um caso em que o expoente não é temporal, mas apenas segue uma ordem de ocorrência com números inteiros.
3. Conteúdos relacionados	Perímetro e área de figuras planas, potenciação e função exponencial.
4. Descrição da SP	A granulometria (medida do tamanho de grãos) é um fator muito importante em vários ramos da ciência, pois, quanto menor for o tamanho de uma partícula, maior será sua área superficial. Este fato é usado para intensificar o processo de interação entre grãos e substâncias, aumentando a capacidade de retenção de compostos orgânicos indesejados por pó de carvão ativo, aumentando a eficiência de catalisadores sólidos na indústria, melhorando o processo de separação química em um cromatógrafo (separador de substâncias), entre outros.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Podemos entender como a área superficial é aumentada com a diminuição do tamanho da partícula fazendo uma analogia com um fractal. Um fractal é um objeto geométrico que nunca perde sua estrutura qualquer que seja a distância de visão. Fractal acima de tudo significa autossemelhante (BATANETE, 2004), ou seja, uma figura que é acrescida de outras iguais menores ou maiores, que são então acrescidas de outras iguais ainda menores ou maiores, e assim por diante. Um exemplo clássico é o chamado floco de neve de Koch, no qual são acrescentados triângulos, cujas laterais são 1/3 da lateral maior, gerando 4 segmentos de valor 1/3 da lateral anterior, ver Figura 3.4, e assim por diante, indefinidamente.

Figura 3.4 | Fractal floco de neve de Koch*



Fonte: Os autores

* Veja mais figuras da sequência em: <www.geogebra.org/m/56929>. Acesso e: 11 fev. 2016.
Três partículas hipotéticas no formato de um prisma, em que a base é este fractal e cuja altura é a, teriam quais áreas laterais se a tiver 1 mm, a lateral do triângulo formador do fractal também tiver 1 mm e a ordem na construção destes fractais for de 2, 4 e 8?
</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Resolução da SP</td>
<td>
A área lateral é o produto entre o perímetro do fractal e a altura do prisma. O perímetro da primeira figura é 3×L, da segunda é 3[(4/3)×L], da terceira é 3[(4/3)(4/3)×L], ... da enésima é $p_n = 3L\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, fórmula na qual p_n é o perímetro, L é a medida do lado do triângulo da primeira figura e n é a ordem da figura.
Logo, a área lateral do prisma seria $A(n) = a \times p_n$. Resolvendo cada caso temos:

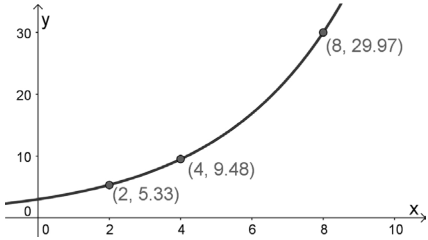
$A(2) = a \times p_2 = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2-1} = 3\frac{4}{3} = 4 \text{ mm}^2$

$A(4) = a \times p_4 = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{4-1} = 3\frac{64}{27} \simeq 7{,}1 \text{ mm}^2$

$A(8) = a \times p_8 = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{8-1} = 3\frac{16384}{2187} \simeq 22{,}5 \text{ mm}^2$
</td>
</tr>
</table>

Uma maneira de visualizar o crescimento da área lateral deste prisma em função da fragmentação de sua lateral é fazer o gráfico da função $A(n) = a \times p_n$, que pode ser visto em:

Figura 3.5 | Gráfico da função da área lateral em mm² de um prisma com base no formato de fractal floco de neve de Koch e altura 1 mm para 2ª, 4ª e 8ª ordem de repetição das figuras do fractal.



Fonte: Os autores

Atenção

Diferente da quebra de uma partícula em partes menores, a construção deste prisma de base fractal proposto possui um incremento de volume com o aumento da ordem do fractal: entretanto, este incremento é limitado, pois trata-se de um incremento que segue uma função exponencial com b < 1.

Lembre-se

Se a base de uma função exponencial for menor que 1, ela tende a zero sem que seu gráfico toque o eixo x.

Faça valer a pena

1. O aumento em massa de alguns vegetais, como melancia, chuchu ou abóbora, é crescente no início de sua formação. Desde o surgimento da flor, uma melancia pode ter 4,0 g no final da sua primeira semana de existência, aumentando sua massa numa razão de 5 vezes por semana até início de sua maturação. Qual é a massa desta melancia no final da 4ª semana de sua existência?

a) 400 g
b) 625 g
c) 1,0 kg
d) 2,5 kg
e) 3,2 kg

2. Um molusco exótico (animal que não é nativo no local), trazido no lastro de um navio cargueiro (água ou areia que os navios coletam para compensar a perda de peso ao descarregar suas mercadorias, deixando-o mais estável diante das turbulências oceânicas), está se alastrando na costa brasileira. Num primeiro momento, 400 destes animais foram contados; seis meses depois, 600. Se seu crescimento populacional continuar no mesmo ritmo, em 5 anos, quantos moluscos invasores poderão estar presentes nesta região?

a) 2400
b) 4600
c) 8000
d) 16000
e) 23000

3. A população de uma cidade considerada promissora e que fica na Região Norte do país é, hoje, de 500 mil habitantes e possui perspectiva de crescimento de 10% ao ano. Quanto tempo é necessário para que a população desta cidade ultrapasse os 805.255 habitantes?

a) 4 anos
b) Mais de 5 anos
c) Mais de 7 anos
d) Exatamente 1 ano, 6 meses e 10 dias
e) Não menos que uma década e meia

Referências

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

BATANETE, A.; CASTRO, A.; LAGO, H. **Natureza**: caos ou ordem? Coimbra, 2004-2005. Disponível em: <www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2005/natureza.doc>. Acesso em: 17 fev. 2016.

BROWN, T. L.; LEMAY, H. E.; BURSTEN, B. E. **Química**: a ciência central. 9. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2012.

ENCICLOPÉDIA BRITÂNICA. **Equation**: Mathematics. 2016. Disponível em: <http://www.britannica.com/topic/equation>. Acesso em: 1 fev. 2016.

GILLESPIE, R. J. **Atoms, Molecules, and Reactions**: An Introduction to Chemistry. 2. ed. Prentice Hall College Div., 1998.

GRASSI, G. **Impressões e Ações de Professores que Visitaram o Centro Regional de Ciências Nucleares do Centro-Oeste**: duas décadas do acidente com o Césio-137 em Goiânia, 2010. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tde/591>. Acesso em: 17 fev. 2016.

LARSON, R. **Cálculo aplicado**: curso rápido. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

MAOR, E. E: **A história de um número**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

ROGAWSKI, J. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

WENTWORTH, S. M. **Eletromagnetismo Aplicado**: abordagem antecipada das linhas de transmissão. Porto Alegre: Bookman, 2009.

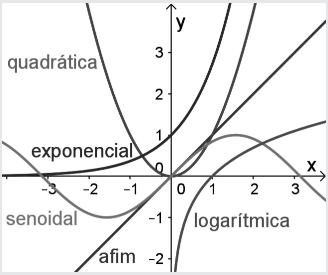
Função logarítmica

Convite ao estudo

Caro aluno, nesta última unidade de Matemática Instrumental, trataremos do estudo do logaritmo. Trata-se de mais uma ferramenta matemática que pode ser utilizada para descrever fenômenos, como as já estudadas funções afim e quadrática, além das funções trigonométricas e exponenciais. Em todos os casos, o comportamento de cada uma destas funções é o que permite sua associação com um fenômeno específico. Por isso, por vezes, é necessário compreender o fenômeno para poder descrevê-lo utilizando uma destas funções, e, outras vezes, a associação de uma função ao fenômeno é o que nos ajuda a compreendê-lo.

De forma simplificada, podemos dizer que uma relação entre fatores que ocorre numa proporção simples e direta será do tipo linear (função polinomial de 1º grau ou afim); se um dos fatores depender duplamente de uma mesma variável será do tipo quadrática (função polinomial de 2º grau, quadrática ou parabólica); se for uma função periódica descrita no ciclo trigonométrico será trigonométrica (função seno, cosseno, tangente, entre outras); e se um dos fatores depender de um número multiplicado por si mesmo n vezes será do tipo exponencial (função exponencial). Por fim, entre as funções básicas estudadas pela Matemática, temos a logarítmica, cujos valores crescem de forma desacelerada (ver Figura 4.1) ou decrescem de forma também desacelerada, sendo que seu gráfico cruza o eixo x, diferentemente da exponencial (lembre-se de que a exponencial cresce de forma acelerada ou decresce de forma desacelerada, ou seja, seu gráfico cruza o eixo y, mas não o eixo x).

Figura 4.1 | Exemplos de curvas das funções afim, quadrática, senoidal, exponencial e logarítmica.

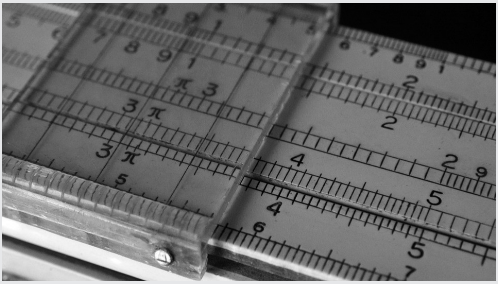


Fonte: Os autores.

O logaritmo surgiu por volta de 1600, pela necessidade de se fazer cálculos de multiplicação e divisão entre números grandes. Nesta época, John Nepier e Joost Burgi desenvolveram, quase ao mesmo tempo, um método que usava a propriedade $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ e a fatoração para transformar estas multiplicações e divisões em somatória e subtração por um método mais simples do que o que existia na época (E-CALCULO, 2016). Logo em seguida, Henry Briggs simplificou o uso deste método ao adotar b = 10, pois Nepier usava b = 0,9999999 e Burgi b = 1,0001 (STEWART, 2014, p. 90).

Desde então o logaritmo foi usado para fazer cálculos nas áreas de astronomia e navegação e, posteriormente, para cálculos complexos em diversas outras áreas, incluindo as engenharias. Até pouco tempo era comum o uso de tábuas de logaritmo nas escolas, como também de réguas de cálculo, cujo princípio é o logaritmo.

Figura 4.2 | Régua de cálculo (se baseia na sobreposição de escalas logarítmicas)



Fonte: <https://pixabay.com/pt/r%C3%A9gua-de-c%C3%A1lculo-slider-escala-332493/>. Acesso em: 13 fev. 2016.

O logaritmo continua sendo uma ferramenta importante, mas seu cálculo passou a ser feito com o uso de calculadoras científicas, assim como o cálculo envolvendo multiplicações e divisões complicadas ou com números grandes. O logaritmo, hoje, é empregado para resolver de forma precisa potências em equações com bases diferentes separadas pela igualdade e para descrever muitos fenômenos naturais, desde a acidez de um produto, nível sonoro em um ambiente e energia desprendida em um terremoto, até leis de probabilidade e velocidade máxima de transmissão de dados em informática.

Por ser muito versátil, o logaritmo acabou sendo usado por um grupo de especialistas formado por engenheiros, economistas, geógrafos e advogados que foram contratados pelo governo da cidade de Neperlândia (nome fictício) para ajudar na elaboração do plano diretor desta cidade. O plano diretor é um conjunto de diretrizes que definem os investimentos dos governos que se sucederão pelos próximos 15 anos, estabelecendo onde e como novas áreas serão usadas para comércio, indústria e moradia, o uso de recursos naturais e energéticos, e como serão feitos os investimentos em transporte, educação, segurança e saúde. Um bom planejamento pode garantir um bom futuro para os moradores da cidade, sendo fundamental fazer a estimativa de dados referentes a condições futuras, para que medidas possam ser tomadas com antecedência. Isto porque muitos tipos de obras demoram para ser finalizados ou têm execução lenta e gradual, requerem licenças ambientais e relatórios de impactos socioambientais demorados e custosos, e algumas obras só acabam recebendo verba do governo federal quando se mostram necessárias, o que muitas vezes depende do tamanho da população da cidade. Para auxiliar na elaboração desse plano é necessário conhecer bem os conceitos de logaritmo, os quais são apresentados a seguir.

Seção 4.1

Função logarítmica

Diálogo aberto

Nesta seção estudaremos a definição de logaritmo e seu comportamento como função, deixando suas propriedades para as próximas seções (Seção 4.2 e 4.3).

Com relação ao planejamento de Neperlândia, em uma reunião com deputados em Brasília, o prefeito reeleito desta cidade ouviu que certa obra viária só receberia verba após a cidade ultrapassar os 300 mil habitantes. Para saber se deveria incluir esta obra em seu plano de governo atual, ou deixá-la para seu sucessor, pediu para que os integrantes do grupo contratado calculassem em que ano Neperlândia chegaria aos 300 mil habitantes. Para se ter uma visão futura da cidade, como poderíamos visualizar o crescimento populacional de Neperlândia observando o número de anos necessários para que sua população tenha um aumento de 100 mil em 100 mil habitantes?

O crescimento populacional esperado para a cidade de Neperlândia, ou para o Brasil, entre 2015 e 2030 é de 0,61% ao ano (0,61% a.a. = 0,61/100 a.a. = 0,0061 a.a.). Por incidir sobre o valor acumulado do ano anterior, este tipo de crescimento é equivalente ao de um valor financeiro com juros compostos, valendo a equação $VF = VP(1+j)^n$, na qual, para este caso, o valor final (VF) é a população no ano n após 2015 (ano 2015 (n = 0); ano 2016 (n = 1); ano 2017 (n = 2), ..., ano 2030 (n = 15)), o valor presente (VP) é a população em 2015, que é de 290 mil habitantes, e j é a taxa de crescimento, de 0,0061. Atribuir valores a n até chegar ao valor desejado de VF (300 mil habitantes) é trabalhoso, pois n não necessariamente será um número inteiro O engenheiro contratado pela prefeitura manipulou algebricamente esta equação exponencial e chegou à função logarítmica $n = \frac{\log VF - \log VP}{\log(1+j)}$, que permite um cálculo fácil e preciso do valor desejado, assim como a visualização do número de anos necessários para promover um crescimento populacional com intervalos de 100 mil habitantes para esta cidade.

Não pode faltar

Logaritmo

Logaritmo (do Latim: *logos* = razão e *aritmos* = número) foi o termo criado por John Napier (1550-1617) para denominar o expoente que determinava o número de multiplicações que devem ser feitas de uma base por si mesma para se obter um número específico, ou seja, b^n = número específico, em que n é o logaritmo. Desta forma, a relação entre a função exponencial e o logaritmo (simbolizado por log) é:

Assimile

$\log_b y = x \Leftrightarrow y = b^x$ O logaritmo é o expoente (x) e y é o logaritmando!

Lê-se $\log_b y = x$ como: o logaritmo de y na base b é igual a x.

Vejamos alguns exemplos numéricos:

$\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$;

$\log_5 25 = 2$, pois $5^2 = 25$;

$\log_{10} 1000 = 3$, pois $10^3 = 1000$;

$\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$.

é igual a y.

$\log_b y = x$

b elevado a x

Pode-se assim dizer que o logaritmo é a função inversa à exponencial.

Atenção

Ao escrevermos um logaritmo:

- Se a base for 10, ela não precisa ser simbolizada:

log 100 = 2, pois $10^2 = 100$.

- Se a base for e (número de Euler: 2,178...), usa-se ln:

$\ln 2 = \log_e 2 = 0{,}693...$, pois $e^{0{,}693...} = 2{,}178...^{0{,}693...} = 2$.

Lê-se log 100 = 2 como: o logaritmo de 100 é igual a 2.

Lê-se $\ln 2 \simeq 0{,}693$ como: o logaritmo neperiano (ou logaritmo natural) de 2 é, aproximadamente, 0,693.

Por definição, a base do logaritmo é um número positivo (b > 0) e diferente de 1 (b ≠ 1), e o logaritmando y é um número positivo (y > 0). Além disso, devemos considerar ainda que:

Lembre-se

Conforme as propriedades das potências estudadas na Seção 3.1:

- $b^1 = b$, então $\log_b b = 1$;
- $b^0 = 1$, então $\log_b 1 = 0$; e,
- $b^n = b^x \Rightarrow n = x$, então $\log_b b^n = n$.

Exemplificando

Calcule os logaritmos a seguir.

Logaritmo	Resolução
$\log_2 16$	$\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$.
$\log_3 27$	$\log_3 27 = 3$, pois $3^3 = 27$.
$\log_5 125$	$\log_5 125 = 3$, pois $5^3 = 125$.
$\log 10$	$\log 10 = 1$, pois $10^1 = 10$.
$\log_2 2$	$\log_2 2 = 1$, pois $2^1 = 2$.
$\log_2 1$	$\log_2 1 = 0$, pois $2^0 = 1$.
$\log_2(-8)$	Não existe, pois não há expoente que permita a igualdade $2^n = -8$.
$\log_{1/2} 0,25$	$\log_{1/2} 0,25 = 2$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$.

Faça você mesmo

Calcule:

a) $\log_4 16$ b) $\log_3 81$ c) $\log_{1/2} 0,125$

Pesquise mais

Exemplos e outras formas de resolução podem ser vistos em: <http://www.matematicadidatica.com.br/Logaritmo.aspx>. Acesso em: 8 fev. 2016.

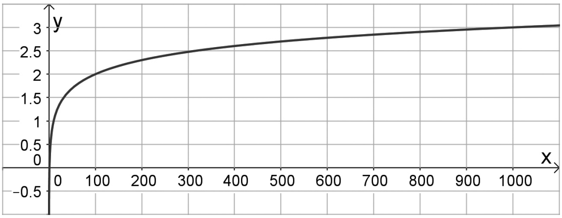
Reflita

Por que podemos afirmar que $b^{\log_b N} = N$?

Função logarítmica

Se duas variáveis, x e y, relacionam-se por meio de uma equação logarítmica da forma $y = \log_b x$, a variável y será uma função logarítmica de x, cujo gráfico tem um comportamento peculiar. Nos casos em que b > 1, o crescimento dos valores de y é cada vez menor à medida que os valores de x crescem linearmente, ou seja, y cresce de forma desacelerada ao passo que há um crescimento constante de x. Vejamos o exemplo mostrado na Figura 4.3, na qual é possível visualizar somente parte dos valores da tabela apresentada na mesma figura. A Figura 4.4 mostra alguns detalhes da Figura 4.3.

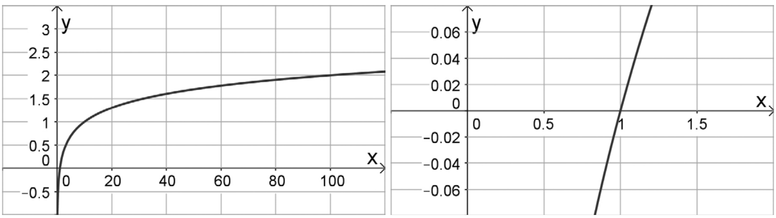
Figura 4.3 | Gráfico e alguns valores tabelados da função y = log x



x	y = log x
1	0
10	1
100	2
1.000	3

Fonte: Os autores.

Figura 4.4 | Detalhes do gráfico da função y = log x: (a) com foco nos valores de x entre 0 e 100; (b) com foco no valor de x igual a 1



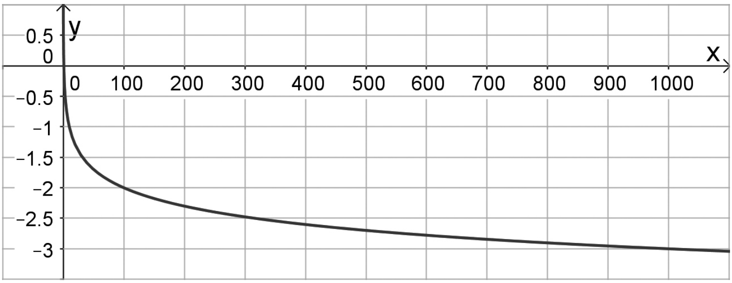
Fonte: Os autores.

Reflita

Por que nas Figura 4.3 e Figura 4.4 os valores de y crescem 10^x vezes mais lentamente que os valores de x e se aproximam mas não cruzam o eixo das ordenadas?

Se a base do logaritmo estiver entre 0 e 1, o gráfico fica invertido com relação ao eixo x (abscissas). Veja um exemplo na Figura 4.5.

Figura 4.5 | Gráfico da função $y = \log_{0,1} x$ que é equivalente à função $y = -\log x$



Fonte: Os autores.

Sem medo de errar

Utilizando-se a função obtida pelo engenheiro contratado pela prefeitura, o ano em que a população de Neperlândia chegará aos 300 mil habitantes será obtido calculando $n = \frac{\log VF - \log VP}{\log(1+j)} = \frac{\log 300 - \log 290}{\log(1{,}0061)}$. Com o uso de uma calculadora científica, chega-se ao valor aproximado $n \cong \frac{2{,}477 - 2{,}462}{2{,}641 \times 10^{-3}} \cong 5{,}7$.

Conclui-se, deste modo, que a população de Neperlândia chegará a 300 mil habitantes em 5 anos e 8 meses (0,7 × 12 = 8,4). Portanto, a obra não poderá ser iniciada no mandato atual do prefeito de Neperlândia.

Numa segunda etapa, para estudar a relação entre o número de habitantes e o passar dos anos a partir de 2015, calcula-se o tempo necessário para que Neperlândia aumente sua população de 100 mil em 100 mil habitantes até 600 mil, esboçando um gráfico com estes valores, que estão na Tabela 4.1.

$$n = \frac{\log 300 - \log 290}{\log(1{,}0061)} = \frac{2{,}477 - 2{,}462}{2{,}641 \times 10^{-3}} \cong 5{,}7 \cong 6; \; n = \frac{\log 400 - \log 290}{\log(1{,}0061)} = \frac{2{,}602 - 2{,}462}{2{,}641 \times 10^{-3}} \cong 53$$

$$n = \frac{\log 500 - \log 290}{\log(1{,}0061)} = \frac{2{,}699 - 2{,}462}{2{,}641 \times 10^{-3}} \cong 90; \; n = \frac{\log 600 - \log 290}{\log(1{,}0061)} = \frac{2{,}778 - 2{,}462}{2{,}641 \times 10^{-3}} \cong 120$$

Tabela 4.1 | Valores estimados de anos após 2015 em função do número de habitantes para uma cidade com taxa de crescimento populacional de 0,61% ao ano e 290 mil habitantes em 2015

Número de habitantes (milhares)	Número de anos após 2015	
300	6	} Diferença de 47
400	53	} Diferença de 37
500	90	
600	120	} Diferença de 30

Fonte: Os autores.

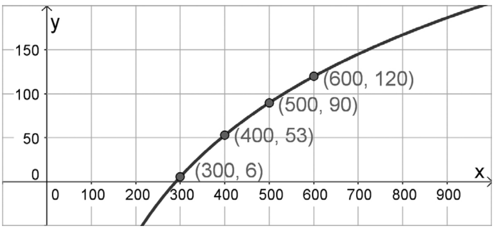
É interessante notar que, enquanto os valores de *VF* aumentam de 100 em 100, os valores de *n* aumentam cada vez menos, o que fica visível ao observar a diferença entre eles, 47, 37 e 30, conforme observação ao lado da Tabela 4.1. Este decrescimento na diferença entre os valores de *n* para crescimento lineares de *VF* é o que caracteriza uma função logarítmica.

Lembre-se

Em uma função logarítmica definida por $f(x) = \log_b x$, com b > 1, os valores de y = f(x) crescem cada vez menos com aumentos constantes de x.

O gráfico da função que relaciona o número de anos após 2015 e a população de Neperlândia, Tabela 4.1, pode ser visto na Figura 4.6, na qual é possível observar o comportamento descrito anteriormente.

Figura 4.6 | Gráfico da função $y = \frac{\log x - \log 290}{\log(1{,}0061)}$



Fonte: Os autores.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.	
Derramamento de ácido em rio	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar as propriedades e definição de logaritmo a problemas reais.
3. Conteúdos relacionados	Potenciação, logaritmo e suas propriedades.
4. Descrição da SP	Suponha que, após um acidente viário, toda a carga de um caminhão que transportava ácido clorídrico escorreu pela estrada e acabou contaminando um rio que passa próximo. A água deste rio chega a uma pequena represa numa área de preservação ambiental, e o vazamento foi de 20 mil litros de ácido, com concentração de 37% e densidade de $1{,}2\ \text{g/cm}^3$. Considerando que o nível de acidez desta represa não pode ficar abaixo de 4,0, será, ou não, necessário intervir com a adição de substâncias que neutralizem o ácido? Considere que esta represa possua 800 mil metros cúbicos de água. Dados: pH = –log[HCl], com $[HCl]=\frac{1.000\cdot d\cdot V_{HCl}\cdot P}{35{,}5\cdot Vr}$, para a qual [HCl] é a concentração em mol/l de ácido, d é a densidade do ácido, V_{HCl} é o volume em litros de ácido que chegou à represa, P é a pureza do ácido (37% = 37/100 = 0,37) e Vr é o volume em litros de água na represa.
5. Resolução da SP	Para calcular o pH é necessário conhecer o valor de [HCl]: $[HCl]=\frac{1.000\cdot d\cdot V_{HCl}\cdot P}{35{,}5\cdot Vr}=\frac{1.000\cdot 1{,}2\cdot 20.000\cdot 0{,}37}{35{,}5\cdot 800.000.000}=\frac{8.880.000}{28.400.000.000}$; $[HCl]=3{,}1268\times 10^{-4}$. Como pH = –log[HCl], temos que: $pH=-\log\left(3{,}1268\times 10^{-4}\right)\approx 3{,}5$. Portanto, será necessário intervir para neutralizar parte do ácido clorídrico que chegou à represa para que seu pH não fique abaixo de 4,0.

Lembre-se

Em calculadoras científicas e planilhas eletrônicas, o número $3{,}1268\times 10^{-4}$ aparecerá como 3,1268E–4.

Faça valer a pena

1. Calcule $\log_2 8 + \log_3 27$ e assinale a alternativa que contém esse resultado:

a) 5.
b) 6.
c) 10.
d) 11.
e) 13.

2. Resolva $2^n - \log_3 81 = 4$ e assinale a alternativa que contém o valor de n:

a) 7.
b) 6.
c) 5.
d) 4.
e) 3.

3. Sabendo que o juro do cheque especial é de 15% ao mês, em quanto tempo uma dívida pode dobrar de valor no banco? Dado: $n = \dfrac{\log(VF / VP)}{\log(1 + j)}$, em que n é o número de períodos para os quais a taxa de juros j incide e VF é o valor futuro do valor presente VP.

a) 4 anos.
b) 5 meses.
c) 6 meses.
d) 8 anos.
e) 12 meses.

Seção 4.2

Propriedades dos logaritmos

Diálogo aberto

Prezado aluno seja bem-vindo! Nesta seção vamos focar no uso do logaritmo como ferramenta para resolução precisa de equações exponenciais, retomando, inclusive, alguns problemas que foram resolvidos de forma aproximada nas seções anteriores. A resolução de equações envolvendo logaritmo e, também, equações exponenciais, muitas vezes, só é possível se aplicarmos algumas regras provenientes das propriedades dos logaritmos, com o intuito de simplificar a expressão de forma a se obter somatórias e subtrações de logaritmos de um único número.

Como exemplo da aplicação de algumas destas propriedades, comecemos tratando de um problema sério para a maioria dos municípios brasileiros, que é a destinação correta do "lixo". Conforme a legislação atual da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT-10004:2004), resíduos sólidos ("lixo") são substâncias "nos estados sólido e semissólido, que resultam de atividades de origem industrial, doméstica, hospitalar, comercial, agrícola, de serviços e de varrição". De um ponto de vista voltado à sustentabilidade, lixo e resíduo são coisas diferentes, pois resíduos são passíveis de reciclagem, e lixo não. Usando o termo genérico e popularmente mais comum, conforme dados do G1, veiculados no dia 09/04/2015 e assinados por Paiva (2015): "em São Paulo, 12,5 mil toneladas de lixo domiciliar são recolhidas todos os dias - 35% são materiais que poderiam ser reciclados, mas só 3% são reaproveitados". Além disso, estatísticas mostram que a melhora da renda dos brasileiros os faz consumir mais, incluindo embalagens descartáveis, o que está causando um aumento na produção de lixo por pessoa por dia, que era em 2003 de 0,955 kg e passou a ser de 1,223 kg em 2012 (PAIVA, 2015).

Considerando estes dados, o grupo contratado pela prefeitura de Neperlândia fez uma estimativa de quanto tempo o aterro sanitário da cidade continuaria em funcionamento se nada fosse feito, concluindo que ele teria pouco tempo de vida útil, cerca de três anos.

Decidiram propor ao prefeito uma campanha de conscientização para a separação de lixo por parte da população e um forte incentivo às cooperativas de reciclagem, permitindo uma diminuição gradativa do lixo que seria enviado ao aterro. Ao fazerem estimativas, os especialistas chegaram a uma função que descreve o acúmulo de lixo que se espera para o aterro sanitário da cidade em função do tempo, caso a reciclagem aumentasse com o passar dos anos, na qual LAc é a massa de lixo aterrada, em milhares de toneladas por ano, e n é a numeração do ano:

$$LAc = 420 \cdot \log \frac{n - 2015}{15} + 1400$$

Se o aterro sanitário de Neperlândia tem capacidade prevista para 1,5 milhão de toneladas de lixo, até que ano ele poderá ser utilizado se o sistema de reciclagem for fomentado?

Não pode faltar

Sabemos que $10^2 = 100$, pois $10^2 = 10 \cdot 10$. Logo, se $10^n = 100$, n só pode ser 2. Entretanto, qual o valor de n na equação $10^n = 400$?

Este problema pode ser resolvido usando o logaritmo como ferramenta, mas, para isso, precisamos conhecer algumas de suas propriedades, mostradas na Tabela 4.2.

Assimile

Tabela 4.2 | Relações e algumas propriedades do logaritmo

Logaritmo ↔ Exponencial		
$\text{Log}_b y = x \Leftrightarrow y = b^x$ Com b > 0, b ≠ 1 e y > 0.	$\log_b y = x$ é igual a y *b* elevado a x	
Multiplicação ↔ Soma	Divisão ↔ Subtração	Logaritmo de potência
$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ a > 0, b > 0	$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$ a > 0, b > 0	$\log a^m = m \cdot \log a$ a > 0
Logaritmo de 1	Logaritmando = Base	Logaritmo de potência de mesma base
$\log_b 1 = 0$ b > 0 e b ≠ 1	$\log_b b = 1$ b > 0 e b ≠ 1	$\log_b(b^n) = n$ b > 0 e b ≠ 1

Fonte: Dante (2011, p. 155).

Assimile

Notação: se há uma operação no interior do logaritmo, utilizamos parênteses. Caso não existam parênteses, a primeira variável após o log está em seu interior. Exemplo: $\log(a \cdot b) \neq \log a \cdot b$, pois $\log a \cdot b = (\log a) \cdot b$.

Podemos ainda encontrar o valor de n na expressão $10^n = 400$ sem o uso de calculadora. Para isso, além das propriedades do logaritmo, precisamos de uma parte da tábua de logaritmos, mostrada na Tabela 4.3, que apresenta o valor aproximado do logaritmo de base 10 para os primeiros números primos.

Tabela 4.3 | Parte de uma tábua de logaritmos, com valores de logaritmos de base 10 para alguns números primos

x	2	3	5	7	11	13	17	19
log x	0,301	0,477	0,699	0,845	1,041	1,114	1,230	1,279

Fonte: Os autores

Aplicando este ferramental ao problema **$10^n = 400$**:

$$10^n = 400 \Rightarrow \quad n = \log_{10} 400 \Rightarrow n = \log 400 \Rightarrow n = \log(4 \cdot 100) \Rightarrow \quad n = \log 4 + \log 100 \Rightarrow$$

Exponencial ↔ Logaritmo Multiplicação ↔ Soma

$$n = \log 2^2 + \log 10^2 \Rightarrow n = 2\log 2 + 2\log 10 \Rightarrow n = 2 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 1 = 0{,}602 + 2 = 2{,}602$$

Logaritmo de potência Substituindo valores (Tabela 4.3)

Com o uso da fatoração, a resolução de $10^n = 400$ e a de outros exemplos pode ser feita da seguinte forma:

Exemplificando

Resolva as equações, sabendo que $400 = 2^4 \cdot 5^2$, que $456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$ e que 0,5 = 5/10:

Equação	Resolução
$10^n = 400$	$n = \log 400 = \log\left(2^4 \cdot 5^2\right) = 4\log(2) + 2\log(5)$ $n = 4 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}699 = 2{,}602$
$10^n = 0{,}5$	$n = \log(0{,}5) = \log(5/10) = \log(5) - \log(10)$ $n = \log(5) - \log(2 \cdot 5) = \log(5) - (\log(2) + \log(5))$ $n = -\log(2) = -0{,}301$
$10^n = 4{,}56$	$n = \log(4{,}56) = \log(456/100)$ $n = \log\left(2^3 \cdot 3 \cdot 19\right) - \log\left(10^2\right)$ $n = 3\log(2) + \log(3) + \log(19) - 2\log(10) = 0{,}659$

Lembre-se

Fatorando o 400:

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	$2^4 . 5^2$

Fatorando o 456:

456	2
228	2
114	2
57	3
19	19
1	$2^3 . 3 . 19$

Faça você mesmo

Resolva as equações:

a) $10^n = 440$ b) $10^n = 44$ c) $10^n = 4{,}4$

Para resolver equações exponenciais com base diferente de 10, pode-se aplicar o logaritmo de base 10 aos dois lados da expressão e aplicar a propriedade do logaritmo de potências para encontrar o valor do expoente na equação exponencial.

Exemplificando

Resolva as equações, sabendo que ln 5 = 1,609:

Equação	Resolução
$2^n = 7$	$\log 2^n = \log 7 \Rightarrow n \log 2 = \log 7 \Rightarrow n = \frac{\log 7}{\log 2} = \frac{0,845}{0,301} \cong 2,81$
$e^{2x} = 5$	$\ln e^{2x} = \ln 5 \Rightarrow 2x \ln e = \ln 5 \Rightarrow 2x \cdot 1 = 1,609 \Rightarrow x = 0,8047$

Pesquise mais

Exemplos e outras formas de resolução podem ser vistos nos endereços:

<http://www.matematicadidatica.com.br/Logaritmo.aspx>. Acesso em: 8 fev. 2016.

<http://mtm.ufsc.br/~fernands/calc/log.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.

Reflita

Por que podemos afirmar que $\log_b \sqrt[m]{a^n} = \frac{n}{m} \cdot \log_b a$?

Atenção

Dá-se o nome de característica à parte inteira e de mantissa à parte decimal de um logaritmo de base 10, por exemplo:

Logaritmo	Característica	Mantissa	Resultado
log 3 = 0,477	0	0,477	log 3 = 0,477
log 30 = 1,477	1	0,477	log 3 + log 10 = 0,477 + 1
log 300 = 2,477	2	0,477	log 3 + log 100 = 0,477 + 2
log 0,3 = –0,523	–1	0,477	log 3 – log 10 = 0,477 – 1
log 0,03 = –1,523	–2	0,477	log 3 – log 100 = 0,477 – 2

–1,523 é a forma negativa de representar 0,477–2, ou $\bar{2},477$ (forma preparada).

Sem medo de errar

Considerando os dados e a função estimada pelos técnicos contratados pela prefeitura de Neperlândia, podemos estimar até que ano será a vida útil do aterro sanitário da cidade com o incentivo à separação do lixo e às cooperativas de reciclagem. Para isso, basta substituir o valor de capacidade máxima do aterro, LAc, por 1500 e calcular n. Desta forma, temos:

$$LAc = 420 \cdot \log\frac{n-2015}{15} + 1400 \Rightarrow 1500 = 420 \cdot \log\frac{n-2015}{15} + 1400$$

$$\frac{1500-1400}{420} = \log\frac{n-2015}{15} \Rightarrow 0,23810 = \log(n-2015) - \log 15$$

$$0,23810 = \log(n-2015) - 1,17609 \Rightarrow 0,23810 + 1,17609 = \log(n-2015)$$

$$1,41419 = \log(n-2015) \Rightarrow 10^{1,41419} = n - 2015$$

$$25,953 = n - 2015 \Rightarrow n = 2015 + 25,953 = 2040,953$$

Consequentemente, espera-se que a durabilidade da vida útil do aterro de Neperlândia passe de três para, aproximadamente, 26 anos, permanecendo ativo até o ano de 2041.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.	
Energia de um terremoto	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar as propriedades e definição de logaritmo a problemas reais.
3. Conteúdos relacionados	Potenciação, logaritmo e suas propriedades.

4. Descrição da SP	A amplitude das oscilações de um terremoto é registrada por um aparelho chamado sismógrafo. Neste fenômeno, quando tem origem natural, o movimento do solo pode ser associado à energia gerada pelo deslizamento entre placas tectônicas que formam os continentes e oceanos, e flutuam sobre o magma terrestre. Nesse contexto, um cálculo comumente realizado é o da energia liberada em função da magnitude registrada na escala Richter. Essa relação é estabelecida pela equação $m=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{7\times10^{-3}}\right)$, na qual m é a magnitude (sem dimensão) e E é a energia do terremoto em kWh, sendo que 1 kWh é equivalente a 3 milhões e 600 mil joules de energia. Para se ter uma ideia, uma bala comum de um revólver calibre .38 possui aproximadamente 400 joules de energia cinética (WÉBER, 2016). Qual a energia de dois terremotos, um de magnitude na escala Richter de 5,0, valor comum entre os sismos mais fortes do Brasil, e outro de 7,0, como o que devastou o Haiti em 2010?
5. Resolução da SP	Devemos substituir os valores na equação e isolar a variável E. Para o terremoto com magnitude 5, temos: $m=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{7\times10^{-3}}\right)\Rightarrow 5=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{7\times10^{-3}}\right)\Rightarrow\frac{3\cdot5}{2}=\log E-\log(7\times10^{-3})$ $7,5=\log E-(\log7+\log10^{-3})\Rightarrow 7,5=\log E-\log7-(-3)\log10$ $7,5=\log E-0,845+3\cdot1\Rightarrow 7,5=\log E+2,155\Rightarrow 5,345=\log E$ $E=10^{5,345}=221.309,47$ Aproximadamente, 220 mil kWh. Para o terremoto com magnitude 7, temos: $m=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{7\times10^{-3}}\right)\Rightarrow 7=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{7\times10^{-3}}\right)\Rightarrow\frac{3\cdot7}{2}=\log E-\log(7\times10^{-3})$ $10,5=\log E-(\log7+\log10^{-3})\Rightarrow 10,5=\log E-\log7-(-3)\log10$ $10,5=\log E-0,845+3\cdot1\Rightarrow 10,5=\log E+2,155\Rightarrow 8,345=\log E$ $E=10^{8,345}=221.309.470,96$ Aproximadamente, 220 milhões de kWh. Portanto, o terremoto no Haiti foi mil vezes mais energético que os mais fortes já registrados no Brasil.

Faça valer a pena

1. Usando os valores da Tabela 4.3, calcule o valor de $\log 40+\log 27$ e assinale a alternativa que contém esse valor:

a) 3,033.
b) 2,130.
c) 0,699.
d) 3,477.
e) 3,301.

2. Resolva a equação $2^n = 9$, sabendo que $\log_2 3 = 1{,}585$, e assinale a alternativa que contém esse valor:
a) 1,23.
b) 2,22.
c) 2,23.
d) 3,00.
e) 3,17.

3. Ao resolver a equação $3^n = 5$ aplicando o logaritmo de base 10 aos dois lados desta expressão, e usando os valores da Tabela 4.3, obtém-se:
a) 1,465.
b) 2,221.
c) 1,789.
d) 3,511.
e) 1,355.

Seção 4.3

Mudança de base dos logaritmos

Diálogo aberto

Prezado aluno, seja bem-vindo!

Nas seções anteriores, estudamos as propriedades dos logaritmos e a função logarítmica, focando no uso deles como ferramenta para resolução precisa de equações exponenciais e casos em que o comportamento de uma função logarítmica se encaixa bem, como: (1) aqueles em que a variável de interesse possui grande variação de valores, como a energia de um terremoto; e (2) casos em que a variável de interesse cresce de forma desacelerada e cruza o eixo x, por ser esta variável o expoente de uma função exponencial.

Nesta seção, estudaremos mais uma propriedade do logaritmo, denominada mudança de base. Muitos fenômenos seguem uma distribuição exponencial de base diferente de 10 ou e (2,718...), como os casos de variação monetária sob juros compostos, para os quais a base é constituída pela taxa de juros. Para muitos outros, lembre-se de que, conforme estudamos na Seção 3.3, a base de uma função exponencial definida por $y = b^x$ é a taxa de variação. Neste caso, se desejamos saber o valor de x, podemos transformá-la em uma função logarítmica, $x = \log_b y$, mas nem sempre b é uma base conveniente, ou seja, para a qual se tem como calcular facilmente os valores do logaritmo de y usando uma calculadora científica ou uma tábua de logaritmos. Por isso se torna interessante a mudança de base de um logaritmo.

Após consulta popular, a prefeitura de Neperlândia decidiu investir em um novo hospital, próximo à região na qual ocorre o maior crescimento populacional da cidade. Entretanto, o único terreno vago nesta região fica ao lado de uma rodovia que tem um leve aclive, o que faz que caminhões de carga façam muito barulho ao transitarem por lá. Em consulta com os especialistas, a prefeitura foi exposta a duas soluções possíveis: (1) fazer um muro de 10 m de altura e levemente inclinado para rebater o som que vem da rodovia para o alto; ou (2) plantar fileiras de ciprestes ao longo da linha divisória que existe entre a rodovia e o terreno do futuro hospital, pois a folhagem do cipreste, um tipo de conífera que apresenta folhagem densa do chão à ponta, absorve e dissipa parcialmente o som. Após nova consulta popular, decidiram pelo cipreste, pois os pés desta planta teriam tempo de crescer até o hospital ficar pronto e seriam uma opção ecológica e bonita.

Medições mostraram que o som no local da obra possui intensidade de $10\ \text{mW/m}^2$ (70 dB), e é necessário que sua intensidade seja bem menor, em torno de $30\ \text{nW/m}^2$ (45 dB). Supondo que o som sofra uma atenuação de 55% a cada metro de folhagem de cipreste que atravessa, quantas fileiras de cipreste precisam ser plantadas se cada pé desta árvore possui 2,5 m de diâmetro, na fase adulta?

Não pode faltar

Na seção anterior, estudamos as propriedades do logaritmo, que relacionam a soma ou subtração de logaritmos de uma mesma base com o logaritmo de uma multiplicação (produto) ou o logaritmo de uma divisão (quociente). Vimos, também, que calculadoras e tabelas resolvem logaritmos de uma base específica, geralmente 10 ou e. Por estes motivos é interessante conhecer um método para trocar a base de um logaritmo, e isto pode ser feito dividindo-se o logaritmo, com uma base conveniente, do logaritmando, por um logaritmo de base igual à considerada conveniente, da base do logaritmo anterior, conforme diagrama a seguir:

Assimile

O logaritmando forma o logaritmo do numerador

$$\log_b y = \frac{\log_c y}{\log_c b}$$

A base forma o logaritmo do denominador

A igualdade é válida para $y > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ (DANTE, 2011, p. 155).

Vejamos alguns exemplos:

Exemplificando

Calcule, sabendo que log 2 = 0,301, log 3 = 0,477, log 5 = 0,699 e log e = 0,434:

Expressão	Resolução
$\log_2 5$	$\dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{0,699}{0,301} \simeq 2,322$
$\log_2 15$	$\log_2(3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5 = \dfrac{\log 3}{\log 2} + \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{\log 3 + \log 5}{\log 2} =$ $\dfrac{0,477 + 0,699}{0,301} \simeq 3,907$
$\ln a$	$\dfrac{\log a}{\log e} = \dfrac{\log a}{0,434} = \dfrac{1}{0,434}\log a \simeq 2,304 \cdot \log a$

Observe que uma mudança de base da função logarítmica faz surgir uma constante que multiplica a outra função logarítmica, por exemplo: $\ln y \cong 2,3 \cdot \log y$ (2,3 ≈ 2,302585093...) e, se $\dfrac{1}{\log 2} = \dfrac{1}{0,301} \simeq 3,32$, temos que $\log_2 5 \cong 3,32 \,.\, \log 5 = 3,32 \,.\, 0,699 \cong 2,32$.

Faça você mesmo

1) Calcule, sabendo que log 3 = 0,477, log 5 = 0,699 e log 10 = 1:

a) $\log_3 5$

b) $\log_3 10$

A operação de mudança de base de um logaritmo também é uma de suas propriedades, adicionada ao quadro.

Lembre-se

Definição (com b > 0, b ≠ 1 e y > 0):

$$\log_b y = x \iff y = b^x$$

...é igual a y.

$$\log_b y = x$$

b elevado a x...

Propriedades:

Produto ↔ Adição	Divisão ↔ Subtração	Logaritmo de potência
$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$	$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$	$\log a^m = m \cdot \log a$
Mudança de base		
$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$		

Consequências da definição:

1ª) $\log_b 1 = 0$

2ª) $\log_b b = 1$

3ª) $\log_b b^n = n$

Tabela 4.4 | Valores de logaritmos de base 10 para alguns números primos

x	2	3	5	7	11	13	17	19
log x	0,301	0,477	0,699	0,845	1,041	1,114	1,230	1,279

Fonte: Os autores

Observação: $\log(a \cdot b) \neq \log a \cdot b$, pois $\log a \cdot b = (\log a) \cdot b$.

Exemplificando

Resolva, usando os valores da Tabela 4.3:

Expressão	Resolução
$\log_2 50$	$\frac{\log 50}{\log 2} = \frac{\log(2 \cdot 5^2)}{\log 2} = \frac{\log 2 + 2\log 5}{\log 2} = \frac{0,301 + 2 \cdot 0,699}{0,301} \simeq 5,645$ Com uma calculadora científica: LOG 5 0 ÷ LOG 2 =

$\log_3 2,4$	$\frac{\log 2,4}{\log 3} = \frac{\log\left(\frac{24}{10}\right)}{\log 3} = \frac{\log 24 - \log 10}{\log 3} = \frac{\log(2^3 \cdot 3) - \log(2 \cdot 5)}{\log 3} =$ $\frac{3\log 2 + \log 3 - \log 2 - \log 5}{\log 3} = \frac{2\log 2 + \log 3 - \log 5}{\log 3} =$ $\frac{2 \cdot 0,301 + 0,477 - 0,699}{0,477} \cong 0,797$ Com o uso de uma calculadora científica: LOG 2 • 4 ÷ LOG 3 =

Faça você mesmo

2) Calcule:

a) $\log_2 18$

b) $\log_2 1,8$

Pesquise mais

Exemplos e outras formas de resolução podem ser vistos no endereço <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582603215/cfi/131>. Acesso em: 8 fev. 2016.

Para ter acesso ao material indicado acesse a biblioteca virtual no site da instituição e efetue o *login*. Depois, copie e cole o link em seu navegador.

Reflita

Por que podemos afirmar que $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$?

Dica: tente fazer a mudança de base.

Sem medo de errar

Lembrando que as medidas de intensidade sonora mostraram que o som no local da obra possui intensidade máxima de $10\ mW/m^2$ (70 dB), sendo necessário que ela sofra uma atenuação até alcançar valores próximos de **30 nW/m²** (45 dB), quantas fileiras de cipreste precisam ser plantadas se cada pé desta árvore possui 2,5 m de diâmetro e o som fica 55% mais fraco a cada metro de folhagem de cipreste que atravessa?

Lembre-se

A atenuação deverá ser de 333 vezes, pois 70 dB é um som 333 vezes mais intenso que um som de 45 dB $\left(10\times10^{-6}/\left(30\times10^{-9}\right)\right)$, já que o nível sonoro é calculado usando a função $NS = 10\cdot\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, com $I_0 = 1\times10^{-12}\,W/m^2$, na qual NS é o nível sonoro em dB (decibéis) e I é a intensidade sonora em watts por metro quadrado.

Atenção

Uma atenuação (diminuição) de 55% é equivalente a multiplicar o valor original por 0,45, já que 0,45 = 1 – 0,55.

Considerando I_0 a intensidade sonora original no local da obra, pode-se estimar que a relação entre a intensidade sonora e a metragem de folhas de cipreste atravessada é:

0 metro $I = I_0$

1 metro $I = 0,45\cdot I_0$

2 metros: $I = 0,45(0,45.I_0)$

...

n metros: $I = 0,45^n\cdot I_0$

Isolando a potência e transformando a equação exponencial obtida em logaritmo, temos:

$$I = 0,45^n\cdot I_0 \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 0,45^n \Rightarrow \log_{0,45}\left(\frac{I}{I_0}\right) = n \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{I}{I_0}\right)}{\log 0,45} = \frac{\log\left(\frac{30\times10^{-9}}{10\times10^{-6}}\right)}{\log\left(\frac{45}{100}\right)} =$$

$$\frac{\log(3\times10^{-9+6})}{\log 45-\log 100} = \frac{\log 3+\log 10^{-3}}{\log\left(5\cdot3^2\right)-2} = \frac{\log 3-3\log 10}{\log 5+2\log 3-2} = \frac{0,477-3\cdot1}{0,699+2\cdot0,477-2} \simeq 7,27$$

Como cada cipreste terá 2,5 m de diâmetro em sua fase adulta, serão necessárias 2,9 fileiras de árvores (≈ 7,27 / 2,5) para atenuar o som em 333 vezes, ou seja, 3 fileiras, já que não se pode ter um número não inteiro de fileiras de árvores.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.	
Probabilidade	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar as propriedades e definição de logaritmo a problemas reais.
3. Conteúdos relacionados	Fatoração, logaritmo e suas propriedades.
4. Descrição da SP	Em informática, muitas vezes é de interesse encontrar o valor de uma variável em uma sequência numérica ordenada e longa. Pode-se construir uma sequência de comandos que leem um número após o outro até encontrar o valor de interesse, denominada "busca sequencial". Entretanto, este procedimento pode gerar uma grande quantidade de operações, pois imagine encontrar o número 948 em uma sequência numérica de 0 a 1000, buscando os valores do início para o fim. Uma maneira de minimizar esta busca numérica é dividir a sequência mais ao meio possível, e verificar se o valor desejado está acima ou abaixo deste valor central, denominada "busca binária". Se o valor estiver acima do valor central m, por exemplo, divide-se esta parte superior ao meio e analisa-se se o valor desejado está acima ou abaixo do novo valor central encontrado. Segue-se esta sequência de tarefas até encontrar o valor desejado. O número de etapas realizadas nesta busca pode ser bem menor que a busca sequencial, e geralmente não é maior que o valor estimado pela função $n = \log_2 N$, na qual n é o número de etapas a serem realizadas para encontrar o valor desejado pelo método de busca binária e N é o número de valores nesta sequência.

Por exemplo, para saber se o número 59 pertence à sequência de números primos entre 0 e 100, e qual sua posição, quantas etapas seguindo o método de busca binária são necessárias? Dado: existem 25 números primos entre 0 e 100.

Pesquise mais

Detalhes sobre os métodos de busca expostos neste problema estão descritos em: <http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/bubi.html> (acesso em: 10 mar. 2016).

5. Resolução da SP

Atribuindo o valor 25 à variável N na função temos:

$$n = \log_2 N = \log_2 25 = \frac{\log 25}{\log 2} = \frac{\log 5^2}{\log 2} = \frac{2\log 5}{\log 2} = \frac{2 \cdot 0{,}699}{0{,}301} \simeq 4{,}64$$

Portanto, entre 4 e 5 sequências serão suficientes para encontrar o valor 59 ou descobrir que ele não pertence à sequência.
Note que o método não usa o valor 59, ou seja, o número de etapas estimadas pelo método independe da posição do número na sequência.
Essas sequências poderiam ser:

Posição:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Primo:	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	...

1ª

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97

2ª

13	14	15	16	17	18
41	43	47	53	59	61

3ª

16	17	18
53	59	61

4ª

17	18
59	61

5ª

17
59

Portanto, o número 59 pertence à sequência e se encontra na posição 17.
Na prática, um computador terminaria a busca no passo 3. Mas o que deve ser observado é que, independentemente do número procurado nessa sequência, a busca não ultrapassaria cinco passos.

Faça você mesmo

3) Em 1984, estreou nos cinemas um filme produzido por Steven Spielberg em que bichinhos fofinhos, os *mogwais*, foram dados como um presente inusitado de Natal a um garoto. O filme é uma crítica à falta de respeito das pessoas em relação a regras de forma geral, pois, como era de se esperar, o garoto não segue as três regras básicas para

a criação de um *mogwai*. Primeiramente, deixando-o se molhar, o que faz que ele se multiplique. Depois, permitindo que seus descendentes se alimentem após a meia-noite, o que os transforma em monstrinhos maus, os *gremlins*. O garoto e sua mãe conseguem matar a maioria dos *gremlins*, mas o chefe topetudo destes consegue escapar e pula em uma piscina, transformando a cidade em um caos, com milhares de *gremlins* destruindo tudo.

Supondo que um *gremlin*, quando molhado, dê origem a mais três bichos a cada segundo, quantos segundos, aproximadamente, são necessários para chegar a 1000 *gremlins*?

Atenção

Considere a taxa de crescimento populacional, neste caso, de 300%.

Lembre-se

Um crescimento em que a taxa de variação incide sobre o valor inicial somado à variação em cada etapa do processo é equivalente ao de juros compostos, valendo a equação $VF = VP(1+j)^n$, em que VF é o valor futuro, VP é o valor presente, j é a taxa de variação e n é o número de etapas ou unidades de intervalos de tempo decorrido.

Faça valer a pena

1. Calcule o valor de $\log_3 25$ utilizando os valores da Tabela 4.3.

a) 3,25.
b) 2,53.
c) 2,50.
d) 2,93.
e) 1,35.

2. Qual é o valor numérico aproximado da expressão $\log_2 7 - \log_3 8$?

a) 1,23.
b) 2,22.
c) 2,23.
d) 3,00.
e) 3,17.

3. Sabendo que a taxa de juros do cheque especial é de 15% ao mês, em quanto tempo uma dívida pode dobrar de valor se nenhum depósito ou acordo for feito? Dado: log 1,15 = 0,0607.

a) 5 meses.
b) 6 meses.
c) 8 meses.
d) 12 meses.
e) 15 meses.

Seção 4.4

Aplicações dos logaritmos

Diálogo aberto

Caro aluno, seja bem-vindo à última seção desta unidade.

Nas seções anteriores, vimos como se comporta uma função logarítmica, a definição de logaritmo e, também, suas propriedades. Nesta seção, estudaremos a definição de cologaritmo, veremos técnicas para a resolução de equações e inequações logarítmicas, além de regras para a definição de suas soluções. Com isso, teremos completado o conjunto de ferramentas necessárias para a resolução da maioria dos problemas que envolve potenciação e logaritmo.

O ICMS (Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços) é cobrado no comércio e indústria, do qual 25% retorna à prefeitura. O ISS (Imposto sobre Serviços de Qualquer Natureza) é cobrado somente sobre os serviços prestados, de telemarketing a microempresas, como barraca de cachorro-quente, sendo que todo o seu valor fica na prefeitura.

Em Neperlândia, perceberam-se dois problemas: (1) A cidade está ficando madura, de forma que seu parque industrial deve crescer cada vez mais lentamente, não acompanhando o crescimento populacional; e (2) a receita do município é formada por 40% de ICMS e 10% de ISS, além de outros, sendo muito dependente do ICMS. Diante destes dois problemas, cabe aos governantes encontrar novas formas de arrecadação, ou aumentar as já existentes. Por isso, a prefeitura decidiu fomentar os serviços prestados por empresas na cidade, numa tentativa de aumentar o ISS até a metade do valor do ICMS arrecadado. Entretanto, por ser uma medida vista como arriscada, para que tenha continuidade, o projeto deve ser implementado antes de uma possível mudança de governo, ou seja, em menos de 4 anos.

Considerando que o ICMS e o ISS vão crescer de forma desacelerada a uma taxa próxima a 0,5% ao mês, e considerando, também, a renda atual da prefeitura, a estimativa dos valores arrecadados por estes dois impostos em Neperlândia é feita pelas funções $ICMS = 1700 + \log_{1,005}\left(\frac{x}{12} + 1\right)$ e $ISS = 850 + \log_{1,005}\left(\frac{x}{12} + 0,1\right)$, em milhares de reais, para as quais x é o número de meses após a data atual.

Se for fomentado o crescimento de serviços prestados na cidade, seria possível conseguir uma arrecadação via ISS igual à metade da arrecadação obtida pelo ICMS antes de 4 anos?

Não pode faltar

Equações logarítmicas

Expressões logarítmicas separadas por uma igualdade são equações logarítmicas, e podem ter a incógnita envolvida no logaritmando ou na base do logaritmo. Para resolver estas equações, pode-se igualar suas bases e considerar os logaritmandos iguais ou simplificar a expressão logarítmica e transformá-la em exponencial. Vejamos alguns exemplos:

Exemplificando

Resolva as equações:

	Resolução
$\log_2(x+2) = 2\log_2 x$	$\log_2(x+2) = \log_2 x^2 \Rightarrow x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1(-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ $x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ e $x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ Como o logaritmando deve ser maior que zero, a partir do: • primeiro membro da equação, temos: $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$; • segundo membro, temos: $x > 0$ Portanto, somente $x_1 = 2$ é solução para a equação.

$\log_{x-1} 4 = 2$	$(x-1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1(-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$ $x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$ e $x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ Como a base do logaritmo é $b = x - 1$, $b > 0$ e $b \neq 1$: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ e $x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$ Portanto, somente $x_1 = 3$ é solução para a equação.
$\log_3 x^2 - \log_9 x^2 = 1$	$\log_3 x^2 - \log_9 x^2 = 1 \Rightarrow \log_3 x^2 - \frac{\log_3 x^2}{\log_3 9} = 1 \Rightarrow$ $\log_3 x^2 - \frac{\log_3 x^2}{2} = 1 \Rightarrow 2\log_3 x^2 - \log_3 x^2 = 2 \Rightarrow$ $\log_3 x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 3^2 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$ Como o logaritmando deve ser maior que zero: $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$ Portanto, tanto $x = 3$ quanto $x = -3$ são soluções para a equação.
$\log_2 x^2 = 1 + \log_2(1,5 - x)$	$\log_2 x^2 = \log_2 2 + \log_2(1,5 - x) \Rightarrow$ $\log_2 x^2 = \log_2 \left(2 \cdot (1,5 - x)\right) \Rightarrow$ $\log_2 x^2 = \log_2(3 - 2x) \Rightarrow x^2 = 3 - 2x \Rightarrow$ $x^2 + 2x - 3 = 0$ $\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1(-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ $x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ e $x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ Como o logaritmando deve ser maior que zero, segue do: • Primeiro membro da equação: $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$; • Segundo membro da equação: $1,5 - x > 0 \Rightarrow x < 1,5$. Portanto, $x_1 = 1$ é a solução para a equação.

Inequações logarítmicas

De forma similar às inequações exponenciais, as inequações logarítmicas podem ser resolvidas observando se a base b tem valor entre 0 e 1 ou é maior que 1. Assim, dois casos podem ocorrer:

Assimile

Para $0 < b < 1$: $\log_b a > \log_b c \Rightarrow a < c$. Inverte-se o sinal de desigualdade.

Para $b > 1$: $\log_b a > \log_b c \Rightarrow a > c$. Mantém-se o sinal de desigualdade.

Exemplificando

Resolva as equações:

Expressão	Resolução
$\log_{0,1}(x+1) \geq \log_{0,1} 3$	$x+1 \leq 3 \Rightarrow x \leq 2$ Como o logaritmando deve ser maior que zero: $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$ Portanto, qualquer valor pertencente ao conjunto dos reais e que seja maior que –1 e menor ou igual a 2 é solução para esta equação. Em linguagem matemática, pode-se escrever o seguinte conjunto solução: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$
$\log_{1,1} 3 \geq \log_{1,1}(x+5)$	$3 \geq x+5 \Rightarrow -2 \geq x \Leftrightarrow x \leq -2$ Como o logaritmando deve ser maior que zero: $x+5 > 0 \Rightarrow x > -5$ Portanto, o conjunto solução para esta equação é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq -2\}$

Faça você mesmo

1) Resolva:

a) $2 + \log_{0,5} x \geq 3$

b) $\log_4(2x+1) > \log_4 x + \log_4 3$

Pesquise mais

Veja mais exemplos em: <http://www.fund198.ufba.br/expo/eq-ine.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2016

Sem medo de errar

Para saber se a meta de elevar a arrecadação de ISS até a metade do valor arrecadado por ICMS poderá ser cumprida em menos de 4 anos, é necessário saber até quando, após a implementação do plano, o ICMS permanecerá maior que 2. ISS:

$$ICMS = 1700 + \log_{1,005}\left(\frac{x}{12}+1\right) \text{ e } ISS = 850 + \log_{1,005}\left(\frac{x}{12}+0,1\right)$$

$$ICMS > 2 \cdot ISS \Rightarrow 1700 + \log_{1,005}\left(\frac{x}{12}+1\right) > 2\left(850 + \log_{1,005}\left(\frac{x}{12}+0,1\right)\right) \Rightarrow$$

$$1700 + \log_{1,005}\left(\frac{x}{12}+1\right) > 1700 + 2\log_{1,005}\left(\frac{x}{12}+0,1\right)$$

Simplificando e igualando os logaritmandos:

$$\log_{1,005}\left(\frac{x}{12}+1\right) > \log_{1,005}\left(\frac{x}{12}+0,1\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{12}+1 > \left(\frac{x}{12}+0,1\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{12}+1 > \frac{x^2}{144}+\frac{0,1x}{6}+0,01 \Rightarrow 0 > \frac{x^2}{144}+\frac{0,1x}{6}-\frac{x}{12}-0,99 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2,4x - 12x - 142,56 < 0 \Rightarrow x^2 - 9,6x - 142,56 < 0$$

Resolvendo a equação polinomial de 2º grau:

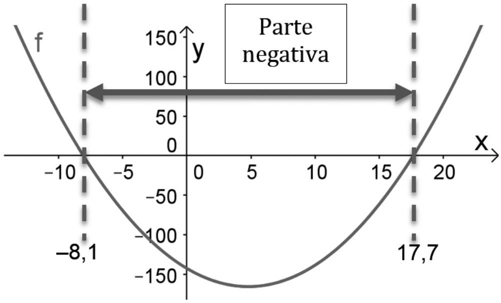
$$\frac{-(-9,6) \pm \sqrt{(-9,6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-142,56)}}{2 \cdot 1} = \frac{9,6 \pm \sqrt{92,16 + 570,24}}{2} =$$

$$\frac{9,6 \pm \sqrt{662,4}}{2} = \frac{9,6 \pm 25,74}{2} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{9,6+25,74}{2} \Rightarrow x < 17,7 \\ \dfrac{9,6-25,74}{2} \Rightarrow x > -8,1 \end{array} \right.$$

Atenção

Como mostrado na Figura 4.7, o coeficiente $a = 1 > 0$ faz que o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9,6x - 142,56$ tenha concavidade voltada para cima. Como para o problema em questão devemos ter valores menores que zero para $f(x)$, as soluções correspondem a valores no intervalo (–8,1; 17,7), ou seja, as abscissas relacionadas à parte do gráfico de $f(x)$ que se encontra abaixo do eixo x.

Figura 4.7 | Gráfico da função $f(x) = x^2 - 9{,}6x - 142{,}56$



Fonte: Os autores.

Lembre-se

Como os logaritmandos não podem ser menores que zero:

$$\frac{x}{12}+1>0 \Rightarrow \frac{x}{12}>-1 \Rightarrow x>-12 \text{ e } \frac{x}{12}+0{,}1>0 \Rightarrow \frac{x}{12}>-0{,}1 \Rightarrow x>-1{,}2$$

Recordando o início da solução, para $-1{,}2 < x < 17{,}7$ teremos $\text{ICMS} > 2 \cdot \text{ISS}$. Como não faz sentido $x < 0$ para o problema em questão, concluímos que $\text{ICMS} \leq 2 \cdot \text{ISS}$ para $x \geq 17{,}7$. Assim, a arrecadação por ISS poderá chegar à metade da arrecadação do ICMS antes dos 4 anos, mais precisamente, antes até mesmo de 18 meses (1 ano e meio) do início da implementação das medidas.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.	
Força de um ácido	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer e ser capaz de desenvolver e interpretar funções e gráficos do 1º e 2º grau, além de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar o conteúdo envolvendo logaritmo a problemas reais.
3. Conteúdos relacionados	Logaritmo, função logarítmica.

4. Descrição da SP	Solução-tampão é o nome dado a uma solução que mantém quase inalterado seu pH, ou seja, sua acidez, quando a ela é adicionado um ácido ou uma base. Uma importante solução--tampão é a que existe no nosso corpo, responsável por manter o pH do sangue próximo da neutralidade, em torno de 7,4, formada em parte pelos íons di-hidrogenofosfato, $H_2PO_4^-$, e bicarbonato, HCO_3^-. O pH de uma solução-tampão pode ser calculado usando a equação de Henderson-Hasselbalch $pH = pk_a + \log\frac{[\text{base conjugada}]}{[\text{ácido}]}$, na qual pk_a é logaritmo de $1/k_a$, sendo k_a a constante de ionização do ácido (valor tabelado), [ácido] a concentração do ácido em mol/l e [base conjugada] a concentração do sal deste ácido, também em mol/l. Como o íon $H_2PO_4^-$ pode atuar como um ácido fraco, qual deve ser a concentração de seu sal no plasma sanguíneo para que o pH do mesmo seja mantido em 7,4, considerando $\left[H_2PO_4^-\right] = 0{,}01\ \text{mol/l}$? Dado: O k_a do ácido $H_2PO_4^-$ é $6{,}2 \times 10^{-8}$. **Atenção** A expressão $\log\left(\frac{1}{x}\right)$, que é igual a $-\log x$, é conhecida como cologaritmo de x, e muitas vezes simbolizado pela letra "p" antes da variável que representa o logaritmando. Por exemplo: $pH = -\log[H^+]$, $pka = -\log ka$, $pkb = -\log kb$ e $pks = -\log ks$, para os quais $[H^+]$ é a concentração de íons provenientes de um ácido em água, ka, kb e ks são as constantes de ionização de um ácido, uma base e de solubilidade de um composto, respectivamente.
5. Resolução da SP	A equação de Henderson-Hasselbalch requer o valor de pk_a, que pode ser obtido fazendo o cálculo do logaritmo de $1/k_a$: $pk_a = \log\left(\frac{1}{6{,}2 \times 10^{-8}}\right) =$ $-\log\left(6{,}2 \times 10^{-8}\right) =$ $-\left(\log 6{,}2 + \log 10^{-8}\right) =$ $-(0{,}792 - 8) \cong 7{,}21$ Assim: $pH = pk_a + \log\frac{[\text{base conjugada}]}{[\text{ácido}]} \Rightarrow 7{,}4 = 7{,}21 + \log\frac{[\text{sal}]}{0{,}01} \Rightarrow$ $0{,}19 = \log[\text{sal}] - \log 10^{-2} \Rightarrow 0{,}19 = \log[\text{sal}] + 2 \Rightarrow -1{,}81 = \log[\text{sal}] \Rightarrow$ $[\text{sal}] = 10^{-1{,}81} \cong 1{,}55 \times 10^{-2}$ Logo, a concentração do sal do ácido di-hidrogenofosfato necessária para manter o pH em 7,4 é, aproximadamente, $1{,}55 \times 10^{-2}$ mol/l.

Faça você mesmo

2) "Água mole, pedra dura, tanto bate até que fura". Este fenômeno se deve em maior parte a motivos físicos e químicos, confrontando-se com o senso comum de que pedra é insolúvel em água. Na verdade, mesmo os compostos considerados insolúveis são minimamente solúveis, como o carbonato de cálcio, constituinte do mármore e da rocha calcária. Como a solubilidade em água deste composto é muito baixa, sua solubilização é lenta e depende da renovação da água que o circunda. Pode-se calcular a solubilidade em miligramas por litro (ppm = parte por milhão) do carbonato de cálcio em água usando a equação $s = 10^3 M\sqrt{k_{ps}}$, na qual k_{ps} é a constante do produto de solubilidade do composto, que, por ter um valor muito pequeno, muitas vezes é tabelado na forma $pk_s = \log(1/k_{ps})$, M sua massa molar, em g/mol. Qual é a massa de carbonato de cálcio solubilizada por litro de água pura sabendo que o pk_s do carbonato de cálcio é 8,47 e, para este sal, M = 100 g/mol?

Faça valer a pena

1. O pk_a é um valor relacionado à força de um ácido, sendo a letra p usada para indicar o logaritmo de $1/k_a$, sendo k_a a constante de ionização do ácido. O valor de k_a está relacionado à quantidade de entidades ácidas liberadas por este ácido ao ser diluído em água num volume total de 1 litro, e, para o ácido cítrico, encontrado em frutas, é de $8 \cdot 10^{-4}$. Qual é o pk_a deste ácido?

a) 8,0.
b) 3,1.
c) 1,8.
d) 8,4.
e) 4,8.

2. Um investimento que paga 1,2% ao mês como taxa de retorno deve ser programado para durar, no mínimo, quantos meses para que um valor de R$ 8.000,00 ultrapasse R$ 10.000,00?

a) 12.
b) 19.
c) 13.
d) 24.
e) 8.

3. Uma fêmea de *Aedes aegypti* é capaz de transmitir dengue, chikungunya, zica, febre amarela e dirofilariose canina (um verme que se aloja no coração dos cães). Se houver criadouros disponíveis e condições de temperatura e humidade favoráveis, uma única fêmea de A. aegypti pode dar origem a centenas de mosquitos durante sua vida, sendo que estes podem já nascer contaminados.

Considerando que o número de mosquitos fêmeas e adultas em função do tempo, em dias, produzido por uma fêmea de *A. aegypti* possa ser descrito por $N = 100^{\frac{t}{20}}$, a partir de que momento, aproximadamente, teríamos, no mínimo, um mosquito fêmea para cada cinco pessoas em uma cidade de 300 mil habitantes se esta fêmea fosse o único mosquito reintroduzido após a erradicação deste vetor nesta cidade?

a) 48 dias.

b) 3 meses.

c) 15 dias.

d) 6 meses.

e) 2 anos.

Referências

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**: volume 1. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2011.

E-CÁLCULO. **Um pouco da história dos logaritmos**. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm>. Acesso em: 8 fev. 2016.

PAIVA, Roberto. Apenas 3% de todo o lixo produzido no Brasil é reciclado. **G1 – Jornal Hoje**, 9 abr. 2015. Disponível em: <http://g1.globo.com/jornal-hoje/noticia/2015/04/apenas-3-de-todo-o-lixo-produzido-no-brasil-e-reciclado.html>. Acesso em: 2 mar. 2016.

ROGAWSKI, Jon. **Cálculo**: volume 1. Porto Alegre: Bookman, 2009.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. São Paulo: Zahar, 2014.

STEWART, James. **Cálculo**: volume I. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

WEBER, Demétrio. **A escala Richter**. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm>. Acesso em: 7 mar. 2016.

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

ISBN 978-85-8482-350-5
9 788584 823505 >